Σημειώσεις Θεωρίας Συνόλων

Γεώργιος Κολέτσος

October 16, 2005

1 Σύνολα

Ορισμός του Cantor

«Σύνολο είναι μία οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα *οριστικών* και *διακεκριμένων* στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας».

Ο ορισμός αυτός αν και ασαφής συνεπάγεται ότι

1. Κάθε σύνολο έχει στοιχεία. Γράφουμε $x \in A$ εάν το αντικείμενο x είναι στοιχείο του (ή ανήκει στο) A. Γράφουμε $x \notin A$ εάν το x δεν ανήκει στο A.

2. Ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του. Ισχύει όπως λέμε η *ιδιότητα της έκτασης*. Γράφουμε $A = B$ όταν A είναι ίσο με το B και $A \neq B$ όταν δεν είναι.

Αρχή ή αξίωμα της έκτασης

Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, $\quad A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$[1]

Τα σύνολα καθορίζονται από τα στοιχεία τους. Αν π.χ. A είναι το σύνολο των αρτίων φυσικών αριθμών και B το σύνολο των φυσικών

[1] Θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς της λογικής: Τα $\wedge$: και, $\vee$: ή, $\rightarrow$: συνεπάγεται, $\leftrightarrow$: αν και μόνον αν, $\forall$: για κάθε, $\exists$: υπάρχει. Με βάση αυτούς τους συμβολισμούς το αξίωμα της έκτασης μας λέει ότι A και B είναι ίσα αν και μόνον αν για κάθε σύνολο x το x είναι στοιχείο του A τότε και μόνον αν το x είναι στοιχείο του B, δηλαδή αν τα A και B έχουν τα ίδια στοιχεία.

αριθμών που δεν έχουν τη μορφή $2k+1$ τότε $A=B$ ακριβώς επειδή κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και αντιστρόφως. Ας σημειώσουμε εδώ ότι η αρχή της έκτασης είναι μια αρχή που νοιώθουμε ότι ισχύει για τα σύνολα (συνδέει την ισότητα $=$ των συνόλων με το ανήκειν $\in$ στα σύνολα) αλλά δεν είναι μια ιδιότητα που έχει μια λογική αναγκαιότητα ανεξαρτήτως του αν αναφερόμαστε σε σύνολα ή σε άλλα αντικείμενα και ανεξαρτήτως του τι εννοούμε με τη σχέση $\in$. Αν για παράδειγμα αντί για σύνολα αναφερόμαστε σε ανθρώπους και με το $x \in A$ εννοούμε ότι ο x είναι γονέας του A τότε η αρχή της έκτασης θα μας έλεγε ότι δύο άνθρωποι που έχουν τους ίδιους γονείς θα ήταν πάντα ίσοι (ίδιοι) πράγμα που δέν ισχύει (π.χ. δύο αδέλφια).

Εκτός του αξιώματος της έκτασης όλες οι άλλες αρχές που θα εξετάσουμε θα αφορούν στην *ύπαρξη* κάποιου συνόλου.

«Μέθοδοι» σχηματισμού συνόλων:

1. Ονομάζοντας ή παραθέτοντας όλα τα στοιχεία ενός συνόλου π.χ. το σύνολο $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ είναι αυτό που τα στοιχεία του αποτελούνται μόνον από τα α, β, γ.

Σχόλιο: Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται πλήρως μόνο στα πεπερασμένα σύνολα. Καταχρηστικά μπορούμε να περιγράφουμε «ατελώς» και άπειρα σύνολα όπως π.χ. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

2. Θεωρώντας κάποια ιδιότητα P και σχηματίζοντας το σύνολο των αντικειμένων που ικανοποιούν αυτήν την ιδιότητα δηλ. το $\{x|P(x)\}$.[2]

Το σύνολο αυτό (αν υπάρχει) είναι μοναδικό επειδή ισχύει η αρχή της έκτασης.

π.χ. αν $P(x) \leftrightarrow x$ είναι φυσικός και άρτιος, τότε το $\{x \mid P(x)\} =$ το σύνολο των αρτίων.

Αν το εκφραστικό μας όργανο (γλώσσα) έχει οριστεί καλώς τότε στο $\{x \mid P(x)\}$ έχουμε τη συνάθροιση των «οριστικών» στοιχείων του Cantor.

Ας σημειωθεί ότι η δεύτερη μέθοδος είναι πιο γενική από την πρώτη αφού π.χ. το σύνολο $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ μπορεί να οριστεί ως $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{x \mid x = \alpha \vee x = \beta \vee x = \gamma\}$.

[2] $P(x)$ σημαίνει ότι το x έχει την ιδιότητα P

Όμως, σύνολα που μπορούμε να ορίσουμε κατ' αυτό τον τρόπο μπορεί να μην υπάρχουν!

Το παράδοξο του Russel

Εστω $P(x)$ είναι η ιδιότητα $x \notin x$. Υπάρχει το σύνολο $A = \{x | x \notin x\}$; Εστω ότι υπάρχει. Τότε είτε $A \in A$ είτε $A \notin A$. Αν $A \in A$ τότε επειδή το Α ανήκει στο Α θα πρέπει να ικανοποιεί την ιδιότητα $x \notin x$ οπότε $A \notin A$. Αν $A \notin A$ τότε το Α θα ικανοποιεί την ιδιότητα $x \notin x$ άρα το Α θα ανήκει στο Α. Δηλαδή

$$\left.\begin{array}{lll} A \in A & \rightarrow & A \notin A \\ A \notin A & \rightarrow & A \in A \end{array}\right\} \text{αντίφαση.}$$

Αρα όσον αφορά την *ύπαρξη* συνόλων τα οποία περιγράφουμε μέσω κάποιων ιδιοτήτων πρέπει να είμαστε επιφυλακτικοί. Την ύπαρξη αυτή θα την εξασφαλίσουμε μέσω αξιωμάτων.

Ορισμός 1.1

$$\begin{array}{rcl} A \subseteq B & \Leftrightarrow & \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \\ A \subsetneqq B & \Leftrightarrow & A \subseteq B \;\&\; A \neq B. \\ \textit{Ισχύει: } A = B & \Leftrightarrow & A \subseteq B \;\&\; B \subseteq A. \\ A \cup B & = & \{x | x \in A \vee x \in B\} \\ A \cap B & = & \{x | x \in A \wedge x \in B\} \\ A \setminus B & = & \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \\ \emptyset & = & \{x | x \neq x\} = \textit{κενό σύνολο} \\ \mathcal{P}(A) & = & \{x | x \subseteq A\} = \textit{το δυναμοσύνολο του } A \end{array}$$

Σημειώστε ότι στους παραπάνω ορισμούς ορίζουμε τα $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\emptyset$, $\mathcal{P}(A)$ κάνοντας την υπόθεση ότι υπάρχουν! Αργότερα θα δούμε ότι η ύπαρξή τους εξασφαλίζεται από τα αξιώματα που θα διατυπώσουμε.

Σημείωση: Μια προσεκτική ανάγνωση του συμβολισμού θα μας δώσει τις συνήθεις έννοιες των παραπάνω ορισμών. Το $A \subseteq B$ σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Μπορεί όμως το B να περιέχει και στοιχεία που δεν ανήκουν στο A. Λέμε ότι A είναι *υποσύνολο* του B ή ότι το B *εγκλείει* το A. Στην περίπτωση που $A \subsetneqq B$ το A είναι *γνήσιο* υποσύνολο του B. Είναι προφανές ότι σύμφωνα με το αξίωμα της έκτασης για να αποδείξουμε ότι $A = B$ αρκεί να αποδείξουμε πρώτα ότι $A \subseteq B$ και μετά ότι $B \subseteq A$.

Το $A \cup B$ (η ένωση των A και B) ορίζεται ως το σύνολο που τα στοιχεία του ανήκουν είτε στο A ή στο B. Δηλαδή «μαζεύει» τα στοιχεία του A και τα στοιχεία του B σε ένα ενιαίο σύνολο. Το $A \cap B$ (η τομή του A και B) συγκεντρώνει τα κοινά στοιχεία των A και B αφού για να ανήκει το x στο $A \cap B$ πρέπει να ανήκει και στο A και στο B. Το $A \setminus B$ (σχετικό συμπλήρωμα του B στο A) συγκεντρώνει τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B. Λέγεται και διαφορά των A και B και γράφεται μερικές φορές ως $A - B$. Το $\emptyset$, το κενό σύνολο, μπορεί να οριστεί ως το σύνολο των στοιχείων x που ικανοποιούν μια αδύνατη ιδιότητα π.χ. $x \neq x$. Το $\emptyset$ δεν έχει κανένα στοιχείο και για οποιαδήποτε x η πρόταση $x \in \emptyset$ είναι πάντα ψευδής. Το $\mathcal{P}(A)$ είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A.

Η άλγεβρα των συνόλων

Εστω A δοθέν σύνολο. Συμβολίζουμε το $A \setminus X$ με X^c και έστω $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) Αντιμεταθετικοί νόμοι: $X \cup Y = Y \cup X,\ X \cap Y = Y \cap X$

(2) Προσεταιριστικοί νόμοι: $$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), \quad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

(3) Επιμεριστικοί νόμοι: $$\begin{aligned} X \cup (Y \cap Z) &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z), \\ X \cap (Y \cup Z) &= (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \end{aligned}$$

(4) Νόμοι συμπληρώματος: $$X^{cc} = (X^c)^c = X,\ X \cup X^c = A,\ X \cap X^c = \emptyset,\ A^c = \emptyset,\ \emptyset^c = A$$

Οι νόμοι (1)–(4) ονομάζονται *νόμοι του Boole* και η μαθηματική δομή[3]
$\langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap, {}^c \rangle$ ονομάζεται *άλγεβρα του δυναμοσυνόλου* στο A.

[3] Μαθηματική δομή είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με πράξεις (ή/και) σχέσεις. π.χ. Η (μαθηματική) δομή $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, < \rangle$ είναι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών εφοδιασμένο με τις πράξεις $+$ και $\cdot$ της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού καθώς και με τη σχέση $<$ του μικρότερου.

2 Σχέσεις, Συναρτήσεις

Όταν έχουμε δύο σύνολα x και y μπορούμε να φανταστούμε ότι υπάρχει το σύνολο $\{x, y\}$ που έχει ως στοιχεία του μόνον το x και το y. Το σύνολο $\{x, y\}$ ονομάζεται (μη διατεταγμένο) *ζεύγος* που σχηματίζεται από το x και το y και μπορεί να οριστεί ως $\{x, y\} = \{z \mid z = x \lor z = y\}$. Το ζεύγος αυτό δεν επιβάλλει καμιά διάταξη στα x και y, δηλαδή $\{x, y\} = \{y, x\}$, γι' αυτό και λέγεται μη-διατεταγμένο. Σε αντίθεση με αυτό *διατεταγμένο ζεύγος* είναι ένα αντικείμενο $\langle x, y\rangle$ που αντιστοιχεί σε κάθε δύο αντικείμενα x, y έτσι ώστε να ισχύει η εξής βασική ιδιότητα:

$$\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle \Leftrightarrow x = x' \text{ και } y = y' \tag{1}$$

Το αντικείμενο αυτό επιβάλλει μια διάταξη στα x και y (το x είναι πρώτο και μετά είναι το y) και βέβαια αναμένεται ότι αν $x \neq y$ τότε $\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$ σε αντίθεση με την αντίστοιχη ιδιότητα του μη-διατεταγμένου ζεύγους.

Πρόβλημα: Να βρούμε ένα συνολοθεωρητικό ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους, που να έχει την ιδιότητα **??**. Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα θα είναι το πρώτο παράδειγμα του πώς μια μαθηματική διαισθητικά κατανοούμενη έννοια μπορεί να οριστεί με αυστηρό τρόπο στον «καθαρό» κόσμο των συνόλων. Θα ακολουθήσουν και άλλες έτσι ώστε να στοιχειοθετηθεί η άποψη ότι όλα τα μαθηματικά αντικείμενα είναι εντέλει σύνολα, με την έννοια ότι σε όλα τα μαθηματικά διαισθητικά αντικείμενα (φυσικοί, ρητοί, πραγματικοί αριθμοί κ.λ.π.) αντιστοιχούν πιστές απεικονίσεις τους στον κόσμο των συνόλων. Μ' αυτή την έννοια στον κόσμο που εξετάζουμε υπάρχουν μόνο σύνολα και ορισμένα απ' αυτά αντιστοιχούν πιστά στις γνωστές μας μαθηματικές έννοιες (όλα είναι σύνολα!).

Ορισμός 2.1 (Kuratowski) *Ορίζουμε* $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Απόδειξη της ιδιότητας **??**:

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} \Leftrightarrow x = x' \text{ και } y = y'$$

$\Leftarrow$: Προφανής.

$\Rightarrow$: • Αν $x \neq y$ τότε $\{x,y\} \neq \{x'\}$ επειδή $\{x,y\}$ έχει δύο στοιχεία, άρα $\{x\} = \{x'\}$ και $\{x,y\} = \{x',y'\}$. Αρα $x = x'$ και $y = y'$.

• Αν $x = y$ τότε $\{x,y\} = \{x,x\} = \{x\}$. Αρα το $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x\}\} = \{\{x'\}\}$. Αρα $x = x'$ και βέβαια $x = x' = y = y'$.

Με επαγωγή στο n μπορούμε να ορίσουμε τις διατεταγμένες n-άδες.

$$\langle x_{n+1}, x_n, \ldots, x_1\rangle \stackrel{o\rho}{=} \langle x_{n+1}, \langle x_n, \ldots, x_1\rangle\rangle \text{ για όλα τα } n \geq 2$$

Εύκολα αποδεικνύεται με επαγωγή

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n$$

Ορισμός 2.2 *(i)* $X \times Y \stackrel{o\rho}{=} \{\langle x,y\rangle | x \in X \ \wedge \ y \in Y\}$ *(*καρτεσιανό γινόμενο*)*

Ορίζουμε $X^2 = X \times X$ *και πιο γενικά* $X^n = \underbrace{X \times X \times X \times \cdots \times X}_{n \text{ φορές}}$

(ii) Μία διμελής σχέση R στα X και Y *είναι ένα υποσύνολο του* $X \times Y$.

(iii) Μία διμελής σχέση R στο X *είναι ένα υποσύνολο του* $X \times X$.

(iv) Συνάρτηση *από το* X *στο* Y *είναι μία σχέση* F *στα* X *και* Y *έτσι ώστε για κάθε* $x \in X$ *υπάρχει ακριβώς ένα* $y \in Y$ *ώστε* $\langle x,y\rangle \in F$. *Λέμε τότε ότι το* X *είναι το* πεδίο ορισμού *της* F. *Γράφουμε* $y = F(x)$ *αντί του* $\langle x,y\rangle \in F$.

(v) Αν F *είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού* X, *τότε για κάθε υποσύνολο* $A \subseteq X$ *το* πεδίο τιμών της F στο A *το οποίο θα γράφουμε ως* $F[A]$ *(ή* εικόνα *του* A *από την* F*) είναι το σύνολο*

$$\{\, x | \, \exists y (y \in A \text{ και } \langle y,x\rangle \in F)\}$$

(vi) Αν F *είναι σύνολο διατεταγμένων ζευγών τέτοιο ώστε εάν* $\langle x,y\rangle \in F$ *και* $\langle x,z\rangle \in F$ *τότε να έχουμε* $y = z$, *λέμε ότι η* F *είναι* συνάρτηση. *Αν* F *συνάρτηση ορίζουμε*

$$Domain\,(F) = \text{πεδίο ορισμού της} \, F = \{x \mid \exists y (\langle x,y\rangle) \in F\}$$

$$Range\,(F) = \textit{πεδίο τιμών της} F = \{y \mid \exists x(\langle x, y\rangle) \in F\}$$

Γράφουμε συνοπτικά dom και Rg για τα Domain και Range αντίστοιχα. Αν F συνάρτηση και $A = dom(F)$, $Rg(F) \subseteq B$ τότε F είναι συνάρτηση από το A στο B σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό **??** *και $Rg(F) = F[A]$. Δηλαδή μία συνάρτηση F είναι συνάρτηση από το A στο B αν $Rg(F) \subseteq B$.*

(vii) *Αν R είναι σχέση στα X και Y τότε*

$$R^{-1} \overset{o\varrho}{=} \{\langle y, x\rangle | \langle x, y\rangle \in R\}$$

(viii) ${}^{X}Y \overset{o\varrho}{=} \{F | F \textit{ συνάρτηση από το } X \textit{ στο } Y\}$

Σημείωση: Όταν ορίζουμε την F ως συνάρτηση από τα X στο Y «προκαθορίζουμε» τα πεδία ορισμού και τιμών της (ορισμός **??**). Στην περίπτωση που ορίζουμε τη F απλώς ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών, τα πεδία ορισμού και τιμών «ενυπάρχουν» στην F και μπορούν να καθοριστούν «εκ των υστέρων».

Ας σημειώσουμε γενικά ότι η συνήθης μαθηματική προσέγγιση για τις συναρτήσεις (ή για τις σχέσεις) είναι να ορίζονται βάσει κανόνων π.χ. ορίζουμε μια συνάρτηση στους παραγματικούς αριθμούς $f(x) = x^3$. Δίνουμε δηλαδή τον κανόνα βάσει του οποίου αποκτούνται οι τιμές (x^3) της συνάρτησης όταν δοθεί το όρισμα x. Αντίθετα, σύμφωνα με την συνολοθεωρητική οπτική ως συνάρτηση θεωρείται το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών που αντιστοιχούν στα ορίσματα και στις αντίστοιχες τιμές κατά κάποιο τρόπο ανεξάρτητα από τους ενδεχόμενους κανόνες που καθορίζουν αυτή την αντιστοιχία. Σε πιο φιλοσοφική γλώσσα λέμε ότι η πρώτη προσέγγιση ορίζει τη συνάρτηση εντασιακά (ως προς την ένταση) ενώ ο δεύτερος εκτασιακά (ως προς την έκταση).

Ορισμός 2.3 *Αν A είναι σύνολο συνόλων ορίζουμε*

(i) $\bigcup A \overset{o\varrho}{=} \{x | \exists X \in A \textit{ τ.ω. } x \in X\}$, *δηλαδή το $\bigcup A$ συγκεντρώνει σε ένα σύνολο όλα τα στοιχεία των στοιχείων του A. Και αυτό γιατί το $x \in \bigcup A$ ισχύει τότε και μόνον τότε το $x \in X$ για κάποιο στοιχείο X του A.*

(ii) *Αν* $A \neq \emptyset$ *τότε* $\bigcap A \overset{o\rho}{=} \{x | \forall X(X \in A \rightarrow x \in X)\}$, *δηλαδή το* $\bigcap A$ *συγκεντρώνει σε ένα σύνολο όλα τα στοιχεία που είναι κοινά σε όλα τα στοιχεία του* A. *Κι' αυτό γιατί το* $\bigcap A$ *ανήκει σε κάθε* X *που είναι στοιχείο του* A.[4]

Ορισμός 2.4 *(i) Οικογένεια συνόλων με δείκτες στο σύνολο* I, *είναι μία συνάρτηση* F *από το* I *σε κάποιο σύνολο συνόλων. Αν για κάθε* $i \in I$, $F(i) = A_i$ *γράφουμε* $F = \langle A_i \rangle_{i \in I}$.

π.χ. η οικογένεια $\langle (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ *με* $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$ *παριστάνει όλα τα ανοιχτά διαστήματα της μορφής* $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *Αν* $F = \langle A_i \rangle_{i \in I}$ *οικογένεια συνόλων, ορίζουμε* $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \{A_i | i \in I\}$ *και με την προυπόθεση ότι* $I \neq \emptyset$, $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap \{A_i | i \in I\}$.

(iii) *Δοθείσης μιας οικογένειας* $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ *ορίζουμε το γινόμενο της οικογένειας*

$\prod_{i \in I} A_i$ *ως εξής:*

$$\begin{aligned}
\prod_{i \in I} A_i &\overset{o\rho}{=} \{f | f \in {}^{I}(\bigcup_{i \in I} A_i) \text{ και για κάθε } i \in I \ f(i) \in A_i\} \\
&= \text{το σύνολο όλων των οικογενειών } \langle x_i \rangle_{i \in I} \\
&\quad\ \text{ώστε } x_i \in A_i \text{ για κάθε } i \in I \\
&\quad\ \text{(Γενίκευση του Καρτεσιανού Γινομένου)}
\end{aligned}$$

Σημείωση: Η οικογένεια συνόλων αντιστοιχεί σε ένα σύνολο συνόλων που το καθένα «φέρει» ένα δείκτη. Το γεγονός ότι το κάθε σύνολο A_i της οικογένειας έχει ένα δείκτη i περιγράφεται με το να λέμε ότι το Ai είναι η τιμή μιας συνάρτησης (της F) στο όρισμα i.

Ο ορισμός του $\prod_{i \in I} A_i$ είναι η γενίκευση της έννοιας του καρτεσιανού γινομένου (που το έχουμε ήδη ορίσει στην περίπτωση του

[4]Η προϋπόθεση $A \neq \emptyset$ είναι απαραίτητη. Αν $A = \emptyset$ τότε σύμφωνα με τον ορισμό θα έχουμε ότι το $\cap A$ είναι το σύνολο όλων των συνόλων! Διότι το οποιοδήποτε x ικανοποιεί την πρόταση $\forall X(X \in A \rightarrow x \in X)$ αφού για το κάθε X το $X \in \emptyset$ είναι ψευδές!

$I = \{1, 2\}$ π.χ. ορίσαμε το $A_1 \times A_2$). Το $A_1 \times A_2$ είναι ισομορφικό με το $\prod_{i \in \{1,2\}} A_i$ με την έννοια ότι το ζεύγος $\langle a_1, a_2 \rangle \in A_1 \times A_2$ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι $f : \{1, 2\} \to A_1 \cup A_2$ όπου $f(1) = a_1$ και $f(2) = a_2$. Αυτό θα μπορούσε να ισχύει για όλες τις πεπερασμένες περιπτώσεις δηλ. το $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ θα μπορούσε είτε να οριστεί ως σύνολο διατεταγμένων n-άδων είτε ισοδύναμα να αντικατασταθεί από το $\prod_{i \in \{1,2,\ldots n\}} A_i$. Στην περίπτωση όμως που το I είναι άπειρο δεν έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε το $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \cdots$ παρά μόνον ως $\prod_{i \in \{1,2,\ldots\}} A_i$. Δηλαδή η n-άδα στην άπειρη περίπτωση θα είναι μια συνάρτηση $f : I \to$ με τιμές αντίστοιχα για κάθε i στο A_i ($f(i) = a_i \in A_i$)). Ο ορισμός αυτός λοιπόν ως πιο γενικός μπορεί να θεωρηθεί ως ορισμός, κάθε περίπτωση, του καρτεσιανού γινομένου. Η ταύτιση αυτή, όταν το I είναι πεπερασμένο, λειτουργεί με το να θεωρήσουμε την προφανή φυσική αντιστοιχία:

$$G : \prod_{i \in I} A_i \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \text{ καρτεσιανό γινόμενο των } A_i$$

π.χ. αν $I = \{1, 2\}$ τότε
$$G : \prod_{i \in I} A_i \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A_1 \times A_2$$
$$G(f) = \langle f(1), f(2) \rangle \text{ για όλα τα } f \in \prod_{i \in I} A_i$$

Συμβολισμός-ορισμοί Γράφουμε

- $f : A \to B$ αν f συνάρτηση από το A στο B.
- $f : A \rightarrowtail B$ αν f είναι *μονομορφισμός* ή 1–1 δηλ. $x \neq y \to f(x) \neq f(y)$.
- $f : A \twoheadrightarrow B$ αν f είναι *επιμορφισμός* ή *επί* του B δηλ. $\forall y (y \in B \to \exists x (x \in A \;\&\; f(x) = y))$.
- $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ αν f είναι 1–1 και επί (*αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία*).
- Αν $f : A \to B$ και $C \subseteq A$. Τότε $f \upharpoonright C = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in f \wedge x \in C\}$. Άρα $f \upharpoonright C : C \to B$. Η $f \upharpoonright C$ είναι ο *περιορισμός* της f στο C

- Αν $f : A \to B$ και $C \subseteq B$, τότε $f^{-1}[C] = \{x \mid \exists y(y \in C \wedge f(x) = y)\}$. Ονομάζεται και *αντίστροφη* εικόνα του C μέσω της f.

- Αν $f : A \to B$ και $g : B \to C$ τότε $g \circ f = \{\langle x, z\rangle \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g\}$ είναι συνάρτηση, η *σύνθεση* των συναρτήσεων f και g.

- Αν $f : A \rightarrowtail B$ τότε $f^{-1} = \{\langle y, x\rangle \in f\}$ είναι συνάρτηση και $f^{-1} : Rg(f) \twoheadrightarrow A$. Η σύνθεση των f και f^{-1} είναι η *ταυτοτική* συνάρτηση Id. Είναι $\forall x \; Id(x) = x$.

Παρατήρηση: Αν f και g συναρτήσεις: Τότε $f = g$ (ταυτίζονται ως σύνολα) τότε και μόνον τότε $dom(f) = dom(g)$ και $\forall x \in dom(f),\ f(x) = g(x)$.

Ορισμός 2.5 *Μια διμελής σχέση R στο σύνολο A είναι*

(i) αυτοπαθής, *αν* $xRx,\ \forall x \in A$.

(ii) αντισυμμετρική, *αν* $xRy \wedge yRx \to x = y \;\; \forall x, y \in A$.

(iii) μεταβατική, *αν* $xRy \wedge yRz \to xRz \; \forall x, y, z \in A$.

(iv) συμμετρική, *αν* $xRy \to yRx \;\; \forall x, y \in A$.

Ορισμός 2.6 *Η διμελής σχέση R στο A είναι*

(i) σχέση ισοδυναμίας, *αν είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική*

(ii) μερική διάταξη, *αν είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική*

(iii) ολική (ή γραμμική) διάταξη *αν είναι μερική διάταξη και* $\forall x, y \in A \; xRy$ *ή* yRx.

Πρόταση 2.7 *Έστω R σχέση ισοδυναμίας στο A και για $a \in A$, $\overline{a} = \{b \mid b \in A \wedge b\, R\, a\}$ (Λέγεται και* κλάση ισοδυναμίας *του a). Τότε αν $a, b \in A$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*

1. aRb
2. $\overline{a} = \overline{b}$
3. $a \in \overline{b}$
4. $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$

Απόδειξη: $1 \to 2$: $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ διότι αν $x \in \overline{a}$ τότε $x\, R\, a$ οπότε επειδή $a\, R\, b$ και R μεταβατική $x\, R\, b$ δηλ. $x \in \overline{b}$. Ομοίως $\overline{b} \subseteq \overline{a}$.

$2 \to 3$: Επειδή R αυτοπαθής $a\, R\, a$ δηλ. $a \in \overline{a}$ οπότε $a \in \overline{b}$.

$3 \to 4$: Επειδή $a \in \overline{b}$ και όπως προηγουμένως $a \in \overline{a}$, $a \in \overline{a} \cap \overline{b}$ δηλ. $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$.

$4 \to 1$: Έστω $z \in \overline{a} \cap \overline{b}$ (ένα τέτοιο z υπάρχει επειδή $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$). Άρα $z \in \overline{a}$ και $z \in \overline{b}$ δηλ. $z\, R\, a$ και $z\, R\, b$. Επειδή R συμμετρική έχουμε $a\, R\, z$ και επειδή R μεταβατική $a\, R\, b$. Ο.Ε.Δ.

Σημείωση: Η σχέση ισοδυναμίας διαμερίζει το σύνολο A στις ξένες μεταξύ τους κλάσεις ισοδυναμίας. Μπορεί να θεωρηθεί ως μια επέκταση της ισότητας με την έννοια ότι «ταυτίζει» τα αντικείμενα που ανήκουν στην ίδια κλάση.

Στο επόμενο παράδειγμα θα δούμε πώς χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο της «ταύτισης» δηλ. μέσω μιας σχέσης ισοδυναμίας μπορούμε να κατασκευάσουμε σύνθετες μαθηματικές δομές.

Παράδειγμα 2.8 *(Κατασκευή του συνόλου των ακεραίων $\mathbb{Z}$ από το σύνολο $\mathbb{N}$).*

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το σύνολο $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ των φυσικών αριθμών και ας υποθέσουμε επίσης ότι στο $\mathbb{N}$ έχει οριστεί η πρόσθεση $+$, η σχέση της διάταξης $<$ καθώς και ότι αυτές ικανοποιούν όλες τις γνωστές ιδιότητες.

Ορίζουμε $\sim = \{\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle \mid a, b, c, d \in \mathbb{N}$ και $a + d = b + c\}$

Δηλαδή $\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle \leftrightarrow a + d = b + c$.

Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}^2$. (Ασκηση!) Θέτουμε $\overline{\langle a, b\rangle} = \{\langle c, d\rangle \in \mathbb{N}^2 \wedge \langle c, d\rangle \sim \langle a, b\rangle\}$ και ορίζουμε $\mathbb{Z}$ να είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας δηλ.

$$\mathbb{Z}, (\text{οι ακέραιοι}) = \{\overline{\langle a, b\rangle} \mid \langle a, b\rangle \in \mathbb{N}^2\}$$

Ισχύει αν $\langle a, b\rangle \in \mathbb{N}^2$

1. $a < b \to a + n = b$, για κάποιο $n \in \mathbb{N} \to \overline{\langle a, b\rangle} = \overline{\langle 0, n\rangle}$
2. $b \leq a \to a = b + m$, για κάποιο $m \in \mathbb{N} \to \overline{\langle a, b\rangle} = \overline{\langle m, 0\rangle}$.

Και επειδή βέβαια για κάθε $a, b \in \mathbb{N}$ ισχύει $a < b$ ή $b \leq a$ όλα τα στοιχεία του $\mathbb{Z}$ είναι (ισοδύναμα) της μορφής $\overline{\langle m, 0\rangle}$ ή $\overline{\langle 0, m\rangle}$. Σε κάθε κλάση ισοδυναμίας (δηλαδή σε κάθε στοιχείο του $\mathbb{Z}$) υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο (εκπρόσωπος) που έχει τη μορφή $\langle m, 0\rangle$ ή $\langle 0, m\rangle$. Στην πρώτη περίπτωση συμβολίζουμε το $\overline{\langle m, 0\rangle} = +m$ (θετικό m) και στη δεύτερη $\overline{\langle 0, m\rangle} = -m$ (αρνητικό m).

Διατήρηση των συναρτήσεων

Ας υποθέσουμε ότι $F : A^n \to A$. Γράφουμε τότε $F(a_1, \dots, a_n)$ αντί του $F(\langle a_1, \dots, a_n\rangle)$. Υποθέτουμε απίσης ότι $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο A και $\overline{a}$ η κλάση ισοδυναμίας όπως έχει οριστεί ανωτέρω. Εστω $\overline{A} = \{\overline{a} \mid a \in A\}$. Θα θέλαμε να μεταφέρουμε τη συνάρτηση F από το A σε συνάρτηση $\overline{F}$ στο $\overline{A}$. Δηλαδή να ορίσουμε

$$\overline{F} : (\overline{A})^n \to \overline{A} \text{ ως } \overline{F}(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) = \overline{F(a_1, \dots, a_n)}$$

Ο συμβολισμός του ορισμού είναι παραπλανητικός. Γενικά δεν μπορούμε να επιλέξουμε «το» a_i από το $\overline{a_i}$. Θα υπάρχει μια συνάρτηση F που να ικανοποιεί το πιο πάνω μόνο αν το σύνολο $\{\langle\langle\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}\rangle, \overline{F(a_1, \dots, a_n)}\rangle \mid a_1, \dots, a_n \in A\}$ είναι συνάρτηση δηλ.

$$\Leftrightarrow \quad \langle\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}\rangle = \langle\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n}\rangle \to \overline{F(a_1, \dots, a_n)} = \overline{F(b_1, \dots, b_n)}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_i \sim b_i \ i = 1, \dots, n \to F(a_1, \dots, a_n) \sim F(b_1, \dots, b_n)$$

Ορισμός. Στο πλαίσιο του ανωτέρω συμβολισμού λέμε ότι η σχέση $\sim$ *διατηρεί* την F αν

$$a_i \sim b_i \ i = 1, \dots, n \to F(a_1, \dots, a_n) \sim F(b_1, \dots, b_n)$$

Άρα υπάρχει η $\overline{F} \Leftrightarrow \sim$ διατηρεί την F.

Παράδειγμα. Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ που έχει οριστεί πιο πάνω αν

$$P : (\mathbb{N}^2)^2 \to \mathbb{N}^2 \text{ με}$$

$$P(\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle) = \langle a + c, b + d\rangle$$

τότε αν έχουμε $\langle a, b\rangle \sim \langle a', b'\rangle$ και $\langle c, d\rangle \sim \langle c', d'\rangle$ θα έχουμε αντίστοιχα $a + b' = a' + b$ και $c + d' = d + c'$ άρα και $(a + c) + (b' + d') = (b + d) + (a' + c')$, δηλαδή τελικά

$$P(\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle) \sim P(\langle a', b'\rangle, \langle c', d'\rangle)$$

Άρα η $\sim$ διατηρεί την P.

Όθεν υπάρχει συνάρτηση $\overline{P}$ έτσι ώστε

$$\overline{P}(\overline{\langle a, b\rangle}, \overline{\langle c, d\rangle}) = \overline{\langle a + c, b + d\rangle}$$

Είναι $\overline{P} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$. Για $a, b \in \mathbb{Z}$ γράφουμε $a + b$ αντί του $\overline{P}(a, b)$.

Ελέγξτε: $a + -a = \overline{\langle 0, 0\rangle}$ δηλαδή το $\overline{\langle 0, 0\rangle}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.

Ορισμός 2.9 Δομή μερικής διάταξης *είναι ένα ζεύγος* $\langle A, R\rangle$ *όπου* R *είναι μερική διάταξη στο σύνολο* A. *Αν* $\langle A, R\rangle$ *και* $\langle A', R'\rangle$ *είναι δύο δομές μερικής διάταξης λέμε ότι είναι* ισομορφικές *αν* $\exists f : A \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow A'$ *έτσι ώστε* $x\, R\, y \leftrightarrow f(x)\, R'\, f(y)\ \forall x, y \in A$.

Στην ειδική περίπτωση όπου A είναι σύνολο συνόλων θα γράφουμε $\langle A, \subseteq\rangle$ για να δηλώσουμε το $\langle A, R\rangle$ όπου

$$R = \{\langle X, Y\rangle | X, Y \in A \text{ και } X \subseteq Y\}$$

δηλ. το R είναι η σχέση στο A που εισάγεται από το $\subseteq$.

Θεώρημα 2.10 (Θεώρημα αναπαράστασης της μερικής διάταξης) *Αν* $\langle A, \leq\rangle$ *είναι μία δομή μερικής διάταξης τότε υπάρχει ένα σύνολο συνόλων* $B \subseteq \mathcal{P}(A)$ *έτσι ώστε*

$$\langle A, \leq\rangle \cong \langle B, \subseteq\rangle \quad (\cong: \ \textit{ισομορφισμός})$$

Απόδειξη Πρέπει να βρούμε $B \subseteq \mathcal{P}(A)$ και $f : A \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow B$ ώστε $a \leq b \leftrightarrow f(a) \subseteq f(b)$.

Για κάθε $a \in A$ έστω $f(a) = \{x | x \in A \text{ και } x \leq a\}$, έστω $B = \{f(a) | a \in A\}$. Από ορισμό, $B \subseteq \mathcal{P}(A)$ και $f : A \twoheadrightarrow B$ (επιμορφισμός).

(i) Τώρα $a \leq b \Rightarrow \{x | x \leq a\} \subseteq \{x | x \leq b\} \Rightarrow f(a) \subseteq f(b)$, από μεταβατικότητα.

(ii) Αντίστροφα, αν $\{x | x \leq a\} \subseteq \{x | x \leq b\}$ τότε $a \leq b$ διότι $a \in \{x | x \leq a\}$ επειδή $a \leq a$ άρα $a \in \{x | x \leq b\}$ δηλ. $a \leq b$.

(iii) Εστω $f(a) = f(b)$ τότε $\{x | x \leq a\} = \{x | x \leq b\}$. Για τον ίδιο λόγο με το (ii) έχουμε $a \leq b$ και $b \leq a$. Αρα από αντισυμμετρικότητα $a = b$ (άρα f 1–1).