1 Εισαγωγή

Λογική είναι η ανάλυση των μεθόδων του συλλογισμού. Μελετώντας αυτές τις μεθόδους, η λογική ενδιαφέρεται περισσότερο για τη *μορφή* παρά για το περιεχόμενο του συλλογισμού π.χ. θεωρήστε τους πιο κάτω συλλογισμούς:

1. Ολοι οι άνθρωποι είναι θνητοί. Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος. Αρα ο Σωκράτης είναι θνητός.

2. Ολα τα κουνέλια αγαπούν τα καρότα. Ο Μπάνυ είναι κουνέλι. Αρα ο Μπάνυ αγαπάει τα καρότα.

Αμφότεροι οι συλλογισμοί έχουν την ίδια μορφή. *Ολα τα A είναι B. Το S είναι A. Αρα το S είναι B.* Η αλήθεια ή το ψεύδος των επιμέρους υποθέσεων και συμπερασμάτων δεν ενδιαφέρουν τη Λογική. Την ενδιαφέρει μόνον εάν η αλήθεια της υπόθεσης συνεπάγεται την αλήθεια του συμπεράσματος. Η συστηματική τυποποίηση και κατάταξη των έγκυρων μεθόδων συλλογισμού είναι μια από τις κύριες ασχολίες της Λογικής. Αν δε για τη μελέτη όλων αυτών χρησιμοποιούνται μαθηματικές μέθοδοι και το ενδιαφέρον κατευθύνεται κυρίως στους Μαθηματικούς συλλογισμούς τότε λέμε τη Λογική αυτή Μαθηματική Λογική. Αλλά πέρα από κάθε ορισμό, ο καλύτερος τρόπος για να δούμε τι είναι μια επιστήμη είναι να τη μελετήσουμε. Ας αρχίσουμε λοιπόν!

2 Η Λογική των Προτάσεων

(Προτασιακός Λογισμός, Propositional calculus, Sentential calculus)

Ακολούθως θα κατασκευάσουμε μια *γλώσσα* μέσα στην οποία θα μπορούμε να μεταφράζουμε προτάσεις της ελληνικής γλώσσας. Αντίθετα με τις φυσικές γλώσσες (ελληνικά, αγγλικά, κ.λ.π.) η γλώσσα που θα κατασκευάσουμε θα είναι μια *τυπική* γλώσσα, μια γλώσσα με αυστηρούς κανόνες σχηματισμού των προτάσεων.

Ας εξετάσουμε μερικά από τα χαρακτηριστικά που θέλουμε να συμπεριλάβουμε στη γλώσσα αυτή. π.χ. πάρτε την πρόταση "παρατηρήθηκαν ίχνη ποτάσσας". Στην τυπική γλώσσα τη μεταφράζουμε με το σύμβολο, ας πούμε, K. Τότε για την πρόταση "δεν παρατηρήθηκαν ίχνη ποτάσσας" μπορούμε να γράψουμε $\neg K$ (όπου $\neg$ είναι το σύμβολο για την άρνηση). Θα μπορούσαμε, για τη μετάφραση της πρότασης "δεν παρατηρήθηκαν ίχνη ποτάσσας", να χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο σύμβολο, ας πούμε M. Αλλά προτιμούμε να "σπάσουμε" την πρόταση σε όσο το δυνατόν περισσότερα *απλά* κομμάτια.

Για μια άλλη, άσχετη με την παραπάνω, πρόταση "το δείγμα περιείχε χλώριο" διαλέγουμε, ας πούμε, το σύμβολο C. Τότε οι ακόλουθες *σύνθετες* ελληνικές προτάσεις μπορούν να μεταφραστούν στην τυπική μας γλώσσα. (χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\rightarrow$ για τη συνεπαγωγή, $\wedge$ για την σύζευξη, $\vee$ για τη διάζευξη).

Ελληνικές προτάσεις	Μετάφραση στην τυπική γλωσσα
Αν παρατηρήθηκαν ίχνη ποτάσσας, τότε το δείγμα δεν περιείχε χλώριο.	$(K \rightarrow (\neg C))$
Το δείγμα περιείχε χλώριο και παρατηρήθηκαν ίχνη ποτάσσας.	$(C \wedge K)$
Είτε δεν παρατηρήθηκαν ίχνη ποτάσσας ή το δείγμα δεν περιείχε χλώριο.	$((\neg K) \vee (\neg C))$
Ούτε το δείγμα περιείχε χλώριο ούτε παρατηρήθηκαν ίχνη ποτάσσας.	$((\neg C) \wedge (\neg K))$ ή $(\neg(C \vee K))$

Ενα σημαντικό χαρακτηριστικό είναι ότι δοσμένης της αλήθειας ή του ψεύδους των *απλών, ατομικών* προτάσεων μπορούμε αμέσως να αποφανθούμε για την αλήθεια ή το ψεύδος των *σύνθετων* προτάσεων. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι ο χημικός βγαίνει από το εργαστήριο και μας ανακοινώνει ότι

παρατήρησε ίχνη ποτάσσας αλλά το δείγμα δε περιείχε χλώριο. Τότε ξέρουμε ότι οι τέσσερις παραπάνω προτάσεις είναι αληθής, ψευδής, αληθής και ψευδής αντιστοίχως.

Στην πραγματικότητα μπορούμε εκ των προτέρων να κατασκευάσουμε ένα πίνακα που να μας δίνει την αλήθεια ή το ψεύδος της σύνθετης πρότασης σε σχέση με την αλήθεια ή το ψεύδος των απλών προτάσεων απ' τις οποίες αποτελείται. π.χ.

K	C	$(\neg(C \vee K))$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

Αλλά σ' αυτό θα επανέλθουμε.

2.1 Η Γλώσσα της Λογικής των προτάσεων

Το *Αλφάβητο* της γλώσσας είναι ένα σύνολο συμβόλων που αποτελείται από:
(i) τα σύμβολα λογικών συνδέσμων: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.
(ii) Παρενθέσεις: την αριστερή παρένθεση (, και τη δεξιά παρένθεση).
(iii) Σύμβολα προτάσεων ή προτασιακές μεταβλητές: Ενα αριθμήσιμο σύνολο συμβόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$.

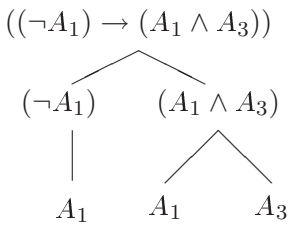
Σε κάθε γλώσσα το αλφάβητο είναι απαραίτητο. Είναι η πρώτη ύλη με την οποία στη συνέχεια κατασκευάζουμε τις προτάσεις μας, τις φράσεις μας. Οταν ορίζουμε το σύνολο των συμβόλων που αποτελούν το αλφάβητο θα νοείται ότι τα σύμβολα δεν έχουν καμμιά οντολογική σημασία πέραν του ότι είναι σύμβολα διακεκριμένα, δηλαδή ξεχωριστά μεταξύ τους.

Η παράθεση συμβόλων του αλφαβήτου, το ένα μετά το άλλο, σε ένα πεπερασμένο σχηματισμό μας δίνει τις εκφράσεις. *Εκφράσεις* λοιπόν της γλώσσας της λογικής των προτάσεων είναι οι πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων του αλφαβήτου
π.χ. $))\rightarrow A_3(, (A_1 \rightarrow (\neg A_2)), ()A_{10}\neg$ είναι εκφράσεις. Από το σύνολο των εκφράσεων μας ενδιαφέρουν μόνο οι καλοφτιαγμένες, αυτές που έχουν να πουν κάτι, οι κτισμένες με τους "σωστούς" γραμματικούς κανόνες. Οι τρόποι ή ο αλγόριθμος μέσω του οποίου στο σύνολο των εκφράσεων μπορούμε να αναγνωρίσουμε τις καλοφτιαγμένες εκφράσεις θα αποτελεί τη *Γραμματική* της γλώσσας. Αποτυπώνεται δε στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.1 Σωστές *ή* καλοφτιαγμένες εκφράσεις *ή* προτασιακοί τύποι *είναι οι εκφράσεις που ορίζονται, επαγωγικά, ως εξής:*
(i) Τα σύμβολα προτάσεων είναι προτασιακοί τύποι.
(ii) Αν φ και ψ είναι προτασιακοί τύποι τότε οι εκφράσεις $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\neg\varphi)$ είναι προτασιακοί τύποι. (iii) Μόνον *οι εκφράσεις που σχηματίζονται από μια διαδοχική εφαρμογή των (i) και (ii) είναι προτασιακοί τύποι.*

Ο ορισμός 2.1 δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας μηχανισμός κατασκευής προτασιακών τύπων. Ο τύπος αυτός του ορισμού λέγεται και *γενικευμένος επαγωγικός* ορισμός. Είναι επαγωγικός επειδή μας δίνει ένα σύνολο αρχικών εκφράσεων, τις προτασιακές μεταβλητές, που τις ονομάζει προτασιακούς τύπους και στη συνέχεια δίνει κάποιους κανόνες οι οποίοι μπορούν να εφαρμοστούν, γενικώτερα, σε εκφράσεις και που μας επιτρέπουν να κατασκευάσουμε καινούργιους προτασιακούς τύπους από προτασιακούς τύπους που έχουν ήδη κατασκευαστεί. Κάθε έκφραση λοιπόν είναι προτασιακός τύπος μόνον αν στην κατασκευή της έχει προηγηθεί αυτή η διαδικασία.
λ.χ. η έκφραση $((\neg A_1 \rightarrow (A_1 \wedge A_3))$ είναι προτασιακός τύπος διότι υπάρχει η εξής κατασκευή:
1. Τα A_1, A_3 είναι προτασιακοί τύποι λόγω (i).
2. Τα $(\neg A_1), (A_1 \wedge A_3)$ είναι προτασιακοί τύποι λόγω (ii).
3. $((\neg A_1 \rightarrow (A_1 \wedge A_3))$ είναι προτασιακός τύπος λόγω (ii).

Η κατασκευή αυτή μπορεί να παρουσιαστεί υπό μορφή δένδρου ως εξής:



Κάθε έκφραση, στην οποία δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί η διαδικασία ορισμού δεν είναι προτασιακός τύπος. π.χ. $\neg(A_1$ δεν είναι προτασιακός τύπος.

Ο τύπος του γενικευμένου επαγωγικού ορισμού υποδεικνύει και μια μέθοδο απόδειξης που ονομάζεται *απόδειξη με επαγωγή*. Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{P}(x)$ είναι μια ιδιότητα που αναφέρεται στις εκφράσεις της γλώσσας π.χ. $\mathcal{P}(x)$ θα μπορούσε να είναι η ιδιότητα "η έκφραση x έχει τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων". Τότε, για να αποδείξουμε ότι η ιδιότητα $\mathcal{P}(x)$ ισχύει για όλους τους προτασιακούς τύπους αρκεί να αποδείξουμε τα εξής:
(i) Να αποδείξουμε ότι $\mathcal{P}(A_i)$ για κάθε σύμβολο πρότασης A_i, δηλαδή να αποδείξουμε ότι κάθε σύμβολο πρότασης έχει αυτή την ιδιότητα.
(ii) Με βάση την υπόθεση $\mathcal{P}(\varphi)$ και $\mathcal{P}(\psi)$ να αποδείξουμε ότι ισχύει και $\mathcal{P}((\neg\varphi))$, $\mathcal{P}((\varphi \vee \psi))$, $\mathcal{P}((\varphi \wedge \psi))$, $\mathcal{P}((\varphi \to \psi))$. (το επαγωγικό βήμα).

Αν λοιπόν αποδείξουμε τα (i) και (ii) για μια ιδιότητα $\mathcal{P}(x)$ τότε η ιδιότητα αυτή θα ισχύει για κάθε προτασιακό τύπο x επειδή θα μεταφέρεται στα στάδια κατασκευής του x.

Παράδειγμα 2.2 Αποδείξτε ότι κάθε προτασιακός τύπος έχει τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων.

Απόδειξη: Με επαγωγή:
(i) Η ιδιότητα ισχύει για τα σύμβολα προτάσεων γιατί ο αριθμός των παρενθέσεων είναι μηδέν.
(ii) Εστω φ και ψ έχουν τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων. Τότε $(\neg\varphi)$ έχει επίσης τον ίδιο αριθμό διότι προστέθηκε στον φ μόνο μια αριστερή και μια δεξιά παρένθεση. Επίσης, $(\varphi \wedge \psi)$ έχει τον ίδιο αριθμό διότι προφανώς η έκφραση $\varphi \wedge \psi$ έχει τον ίδιο αριθμό και στον $(\varphi \wedge \psi)$ προστέθηκε μια αριστερή και μια δεξιά παρένθεση. Για τον ίδιο λόγο τα $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ έχουν τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων.

2.2 Μοναδική Αναγνωσιμότητα

Κάθε προτασιακός τύπος, ανάλογα με το ποιό σύμβολο συνδέσμου έχει χρησιμοποιηθεί τελευταίο στην κατασκευή του, είναι είτε μια προτασιακή μεταβλητή είτε μια άρνηση της μορφής $(\neg\varphi)$ είτε μία διάζευξη της μορφής $(\varphi \vee \psi)$ είτε μία σύζευξη της μορφής $(\varphi \wedge \psi)$ είτε μια συνεπαγωγή της μορφής $(\varphi \to \psi)$.

Το στοιχείο που μας επιτρέπει την αναμφίβολη αναγνώριση του ποιό σύμβολο συνδέσμου έχει εφαρμοστεί τελευταίο είναι η χρησιμοποίηση των παρενθέσεων. Αν δεν χρησιμοποιούσαμε παρενθέσεις και σχηματίζαμε π.χ. την έκφραση $A_1 \wedge A_2 \rightarrow A_3$ τότε θα ήμασταν σε αμφιβολία αν αυτό παριστάνει τον προτασιακό τύπο $(A_1 \wedge (A_2 \rightarrow A_3))$ ή τον $((A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_3)$. Δηλαδή η αναγνωσιμότητα σ' αυτή την περίπτωση δεν θάταν μοναδική. Πιό κάτω διατυπώνεται το θεώρημα που μας εξασφαλίζει τη μοναδική αναγνωσιμότητα.

θεώρημα 2.3 *Για κάθε προτασιακό τύπο φ μία και μόνον μία από τις ακόλουθες συνθήκες ικανοποιείται: (το $\equiv$ δηλώνει συντακτική ταυτότητα[1]).*
(1) φ είναι μια προτασιακή μεταβλητή.
(2) Υπάρχει ένας μοναδικός προτασιακός τύπος ψ ώστε $\varphi \equiv (\neg\psi)$.
(3) Υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος προτασιακών τύπων ψ_1, ψ_2 και ένα μοναδικό σύμβολο λογικού συνδέσμου $\diamondsuit$ έτσι ώστε $\varphi \equiv (\psi_1 \diamondsuit \psi_2)$.
Αυτό σημαίνει ότι μια σύζευξη δεν μπορεί να είναι διάζευξη ή συνεπαγωγή κ.τ.λ.

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε πρώτα το ακόλουθο λήμμα, αφού δώσουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 2.4 *Εστω $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων. Τότε κάθε ακολουθία συμβόλων $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_\varkappa$ με $0 < \varkappa < n$ θα ονομάζεται* αρχικό μέρος *της $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$. π.χ. Αν $\varphi \equiv (A_1 \wedge (\neg A_2))$ και $\varphi' \equiv (A_1 \wedge ($ τότε η φ' είναι αρχικό μέρος της φ.*

Λήμμα 2.5 *Κάθε αρχικό μέρος ενός προτασιακού τύπου είναι μια έκφραση με πλήθος αριστερών παρανθέσεων μεγαλύτερο από το πλήθος των δεξιών.*

Απόδειξη: Με επαγωγή. Η ιδιότητα ισχύει στις προτασιακές μεταβλητές γιατί αυτές δεν έχουν αρχικό μέρος. Εστω τώρα ότι η ιδιότητα ισχύει για τους τύπους φ και ψ. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για τους $(\varphi \wedge \psi)$, $(\neg\varphi)$, κ.ο.κ. Παίρνουμε τον $(\varphi \wedge \psi)$. Κάθε αρχικό μέρος του $(\varphi \wedge \psi)$ έχει μια από τις μορφές (ή (φ' ή (φ ή ($\varphi\wedge$ ή $\varphi \wedge \psi'$ ή ($\varphi \wedge \psi$, όπου φ' και ψ' αρχικά μέρη αντίστοιχα των φ και ψ, άρα λόγω της υποθέσεως ισχύει γι' αυτά η ιδιότητα. Είναι εύκολο να δούμε ότι και στις τέσσερις περιπτώσεις έχουμε περισσότερες αριστερές από δεξιές παρενθέσεις. Την ίδια ακριβώς απόδειξη χρησιμοποιούμε για τους $(\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\neg\varphi)$.
Απόδειξη του θεωρήματος 2.3 Το ότι κάθε προτασιακός τύπος θα έχει μια από τις μορφές που δηλώνονται στο Θεώρημα 2.3 είναι προφανές από τον επαγωγικό ορισμό 2.1. Να αποδείξουμε τώρα τη μοναδικότητα. Εστω ότι ο τύπος έχει τη μορφή $(\psi_1 \wedge \psi_2)$. Ο τύπος αυτός είναι αδύνατον να έχει και τη μορφή $(\neg\psi)$, διότι ο τύπος ψ_1 θα άρχιζε με το σύμβολο $\neg$, αδύνατον διότι

[1] $\phi \equiv \psi$ σημαίνει ότι οι εκφράσεις ταυτίζονται ως συμβολοσειρές. Αυτό λέγεται συντακτική ταυτότητα και διαφέρει από την ισότητα π.χ. $1+1=2$ αλλά όχι $1+1 \equiv 2$ διότι $1+1$ και 2 είναι διαφορετικές συμβολοσειρές.

όλοι οι προτασιακοί τύποι είτε είναι προτασιακές μεταβλητές είτε αρχίζουν με μια αριστερή παρένθεση. Εστω τώρα ότι $(\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\psi_1' \Diamond \psi_2')$ για κάποιους τύπους ψ_1', ψ_2' και κάποιο σύμβολο συνδέσμου $\Diamond$. Αυτό σημαίνει ότι $\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv \psi_1' \Diamond \psi_2')$. Αλλά τότε αν το ψ_1 διαφορετικό από το ψ_1', αυτό σημαίνει ότι αν αρχίσουμε να διαγράφουμε τα ίδια σύμβολα που αναγκαστικά βρίσκονται στις ακολουθίες συμβόλων $\psi_1 \wedge \psi_2)$ και $\psi_1' \Diamond \psi_2')$ ανάλογα με το ποιό από τους ψ_1 και ψ_1' εξαντλήσουμε πρώτο, είτε ο ψ_1 θα είναι αρχικό μέρος του ψ_1' ή ο ψ_1' θα είναι αρχικό μέρος του ψ_1. Και τα δύο όμως αυτά είναι αδύνατα μια και σύμφωνα με το λήμμα 2.5 κάθε αρχικό μέρος ενός προτασιακού τύπου έχει περισσότερες αριστερές από δεξιές παρενθέσεις άρα αποκλείεται να είναι τύπος όπως απαιτεί το παράδειγμα 2.2. Αρα τελικά $\psi_1 \equiv \psi_1'$ και άρα $\wedge \psi_2) \equiv \Diamond \psi_2')$ από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $\wedge \equiv \Diamond$ και $\psi_2 \equiv \Diamond \psi_2')$. Ομοια δουλεύουμε και για τις άλλες μορφές $(\varphi \vee \psi)$ κ.τ.λ.

2.2.1 Πολωνική γραφή

Υπάρχει ένας τρόπος να ορίσουμε τους τύπους χωρίς να χρησιμοποιήσουμε παρενθέσεις και παρόλα αυτά να έχουμε μοναδική αναγνωσιμότητα. Ξεκινώντας από τις προτασιακές μεταβλητές κάθε φορά που θέλουμε την άρνηση του φ γράφουμε $\neg\varphi$, για τη διάζευξη, σύζευξη, συνεπαγωγή των φ και ψ γράφουμε αντίστοιχα $\vee\varphi\psi$, $\wedge\varphi\psi$, $\rightarrow \varphi\psi$. Ο τρόπος αυτός επειδή χρησιμοποιήθηκε πρώτα από τους Πολωνούς λογικούς ονομάζεται Πολωνικός τρόπος γραφής.

2.2.2 Ανορθογραφίες

Επειδή όταν θέλουμε να γράψουμε προτασιακούς τύπους είναι πολλές φορές κουραστικό να χρησιμοποιούμε όλες τις παρενθέσεις που απαιτούνται, θα επιτρέπουμε στον εαυτό μας να κάνουμε και ανορθογραφίες. π.χ. θα γράψουμε $\phi \wedge \psi$ και θα εννοούμε $(\phi \wedge \psi)$, θα γράφουμε $(\neg\psi) \rightarrow \psi$ και θα εννοούμε $((\neg\psi) \rightarrow \psi)$. Ο "κανόνας" στις ανορθογραφίες θα είναι ότι το $\neg$ θα δένει περισσότερο με τα γειτονικά του απ' ότι τα $\vee$ και $\wedge$ που με τη σειρά τους θα δένουν περισσότερο με τα γειτονικά τους απ' ότι το $\rightarrow$. π.χ. αν γράψω $\neg\phi \vee \psi \rightarrow \phi \vee \psi$ σύμφωνα με αυτόν τον κανόνα θα εννοώ $((\neg\phi \vee \psi) \rightarrow (\phi \vee \psi))$.

2.3 Ασκήσεις

1. Φανταστείτε ότι ο υπολογιστής σας αναγνωρίζει τα σύμβολα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ και τα σύμβολα $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Να κατασκευάσετε ένα πρόγραμμα (αλγόριθμο) ώστε όταν τον τροφοδοτείτε με μια έκφραση να σας απαντάει άν αυτή είναι προτασιακός τύπος ή όχι.

2. Αποδείξτε το θεώρημα της μοναδικής αναγνωσιμότητας για την Πολωνική γραφή.

(Υπόδειξη: Οι εκφράσεις φ και ψ λέγονται *συμβιβαστές* όταν είτε $\varphi \equiv \psi$ είτε η μία από αυτές είναι αρχικό μέρος της άλλης. Αποδείξτε με επαγωγή στον αριθμό των συμβόλων ότι αν $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ είναι προτασιακοί τύποι και οι εκφράσεις $\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n$ και $\psi_1\psi_2 \ldots \psi_n$ είναι συμβιβαστές, τότε $\varphi_i \equiv \psi_i$ για κάθε $i \leq n$.)

2.4 Σημασιολογικές έννοιες (Semantics ή Σημαντική)

Μέχρι τώρα η μελέτη της γλώσσας ήταν καθαρά *συντακτική*. Οι προτασιακοί τύποι δεν ήταν τίποτε άλλο παρά «νεκρές» ακολουθίες συμβόλων, συντακτικά αντικείμενα. Πέραν αυτού καμμιά άλλη οντολογική αξία δεν αναγνωριζόταν σ' αυτά τα σύμβολα, δεν ήταν φορτισμένα με καμμιά «ερμηνεία». Η γλώσσα όμως υπάρχει για να εκφράζει κάποια πράγματα. Για να αποκαταστήσουμε λοιπόν το λόγο για τον οποίο κατασκευάστηκε η (τυπική) γλώσσα πρέπει να δώσουμε την ερμηνεία της, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο η γλώσσα αποκτά τη σημασία της (σημασιολογία ή σημαντική). Προς το σκοπό αυτό θα σκεφτόμαστε ότι τα σύμβολα προτάσεων είναι (κάποιες) απλές, ατομικές προτάσεις της ελληνικής γλώσσας (άρα προτάσεις που είναι αληθείς ή ψευδείς), τα υπόλοιπα σύμβολα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ έχουν τη συνήθη σημασία και ότι ο ορισμός της κατασκευής των προτασιακών τύπων αντανακλά τον τρόπο κατασκευής προτάσεων, στη φυσική γλώσσα, με βάση τους λογικούς συνδέσμους.

Συνήθεις λογικοί σύνδεσμοι: θεωρούμε σκόπιμο να παρεμβάλουμε μιά εξέταση των συνήθων λογικών συνδέσμων $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$. Εδώ θα πρέπει να προσέξουμε. Τα σύμβολα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ τα μεταχειριστήκαμε ως σύμβολα συνδέσμων στην τυπική μας γλώσσα. Και τώρα προτιθέμεθα να τα μεταχειριστούμε και σαν σύμβολα των ίδιων των πραγματικών συνδέσμων. Μια λύση θα ήταν να γράφουμε $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ για τα σύμβολα ως συντακτικά αντικείμενα και κάτι σαν $\tilde{\neg}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\rightarrow}$ για τη σημασία τους δηλ. τους συνδέσμους. Το αποφεύγουμε και ελπίζουμε ότι ο αναγνώστης θα καταλαβαίνει κάθε φορά τι εννοούμε. Δεχόμαστε ότι κάθε προτασιακός τύπος (που παριστάνει μιά πρόταση της φυσικής γλώσσας) μπορεί να έχει μια από τις εξής δύο *αληθοτιμές*: *αληθής* (T, True) ή *ψευδής* (F, False). Η αληθοτιμή μιας σύνθετης πρότασης καθορίζεται πλήρως από τις αληθοτιμές των απλούστερων προτάσεων που συνδέθηκαν με κάποιον λογικό σύνδεσμο για να τη σχηματίσουν. Ο καθορισμός αυτός γίνεται σύμφωνα με τους παρακάτω αληθοπίνακες: *Αρνηση*:

φ	$\neg\varphi$
T	F
F	T

Η άρνηση αλλάζει την τιμή αλήθειας της πρότασης στην οποία αναφέρεται. *Σύζευξη*:

φ	ψ	$\varphi\wedge\psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

"$\varphi \wedge \psi$" σημαίνει "φ και ψ".

Διάζευξη:

"$\varphi \vee \psi$" σημαίνει "φ ή ψ". Υπάρχουν δύο σημασίες της διάζευξης στην καθημερινή της χρήση. Η *μη-αποκλειστική* και η *αποκλειστική* σημασία. Η *μη-αποκλειστική* διάζευξη δύο προτάσεων εκφράζει ότι μία από τις προτάσεις είναι αληθινή, χωρίς να λέει τίποτα για το αν αμφότερες οι προτάσεις πρέπει να είναι αληθινές ή όχι. Η *αποκλειστική* διάζευξη δύο προτάσεων μας λέει ότι μία από τις προτάσεις είναι αληθής ενώ η άλλη είναι ψευδής. π.χ. Αν σ' ένα βιβλιοπωλείο είναι γραμμένη η επιγραφή "Οι πελάτες που είναι καθηγητές ή φοιτητές έχουν μια ειδική έκπτωση" τότε προφανώς έχουμε μια μη-αποκλειστική διάζευξη. Αν ενα κινηματογραφικό έργο παίζεται την ίδια στιγμή μ' ένα θεατρικό έργο τότε η πρόταση "θα πάμε στον κινηματογράφο ή στο θέατρο" έχει την αποκλειστική σημασία. Στα Μαθηματικά η διάζευξη χρησιμοποιείται πάντα με την μη-αποκλειστική της σημασία. Αρα μπορούμε να λέμε ότι κάθε αριθμός είναι θετικός ή μικρότερος του 3 ξέροντας ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί μικρότεροι του 3. Ο αληθοπίνακας της μη-αποκλειστικής διάζευξης είναι:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Συνεπαγωγή:

"$\varphi \to \psi$" σημαίνει "εάν φ τότε ψ".

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Η περίπτωση (2η σειρά) όπου η υπόθεση είναι αληθής και το συμπέρασμα ψευδές είναι σαφής. Στην περίπτωση αυτή στο $\varphi \to \psi$ πρέπει να αποδοθεί η τιμή F. Επίσης σαφής είναι και η περίπτωση της πρώτης σειράς. Για να δικαιολογήσουμε τις υπόλοιπες σειρές του αληθοπίνακα παρατηρούμε ότι είναι επιθυμητό η πρόταση "εάν φ και ψ τότε ψ" να είναι *πάντα* αληθινή. Δηλαδή η $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$ πρέπει να παίρνει πάντα την τιμή T. Αλλά τότε: (γράφοντας $\varphi = \mathsf{T}$ ή $\varphi = \mathsf{F}$ αν η φ παίρνει την τιμή T ή την τιμή F)

- Αν $\varphi = \mathsf{T}$ και $\psi = \mathsf{T}$ τότε $(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{T}$ και $\psi = \mathsf{T}$. Αρα δικαιολογείται η πρώτη σειρα.
- Αν $\varphi = \mathsf{F}$ και $\psi = \mathsf{T}$ τότε $(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{F}$ αρα δικαιολογείται η τρίτη σειρα.
- Αν $\varphi = \mathsf{F}$ και $\psi = \mathsf{F}$ τότε $(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{F}$ αρα δικαιολογείται η τέταρτη σειρα.

Αλλη δικαιολόγηση του αληθοπίνακα είναι η εξής: Θεωρούμε την πρόταση "αν x περιττός τότε x^2 περιττός". Τη θεωρούμε *αληθινή* πρόταση. Προφανώς για να διαψεύσουμε αυτήν την πρόταση δεν θα θέλαμε να θεωρήσουμε περιπτώσεις όπου x δεν είναι περιττός. Αυτό δικαιολογεί την 3η και 4η σειρά. Επίσης κάθε περίπτωση x περιττού μας δίνει x^2 περιττό που επιβεβαιώνει το γενικό ισχυρισμό. Αυτό δικαιολογεί την 1η σειρά.

2.5 Απονομές Αλήθειας

Θέλουμε να ορίσουμε τι σημαίνει για ένα προτασιακό τύπο να είναι λογική συνέπεια άλλων προτασιακών τύπων π.χ. A_1 ειναι λογική συνέπεια του $(A_1 \wedge A_2)$. Γιατί πράγματι όποιες προτάσεις της ελληνικής γλώσσας και να συμβολίζουν οι A_1 και A_2, αν η πρόταση $(A_1 \wedge A_2)$ είναι αληθής τότε η A_1 θα είναι επίσης αληθής. Το σύνολο $\{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ το ονομάζουμε σύνολο των *αληθοτιμών* ή *τιμών αλήθειας* και αποτελείται από δύο ξεχωριστά στοιχεία, το T και το F. Το T ονομάζουμε *αληθές* (True). Το F ονομάζουμε *ψευδές* (False). (Δεν έχει σημασία *ποιά* είναι τα T και F , θα μπορούσε να ήταν οι αριθμοι 1 και 0). Εστω $\mathcal{A}$ το σύνολο συμβόλων προτάσεων της γλώσσας της λογικής των προτάσεων και $\mathcal{P}$ το σύνολο όλων των προτασιακών τύπων.

Ορισμός 2.6 Απονομή αλήθειας *ονομάζουμε κάθε συνάρτηση*

$$V : \mathcal{A} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$$

(δηλαδή κάθε συνάρτηση από το σύνολο $\mathcal{A}$ στο σύνολο των αληθοτιμών).

Αν V είναι μία απονομή αλήθειας τότε σε κάθε «ατομική πρόταση» A_k αντιστοιχεί μέσω της V μία τιμή T ή F. Αν υποθέσουμε ότι οι $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ αντιστοιχούν στις ατομικές προτάσεις που μπορούμε να σχηματίσουμε στην ελληνική γλώσσα, τότε η τιμή T ή F που θα παίρνουμε μεσω της V θα μας λέει ότι η πρόταση είναι αντίστοιχα αληθής ή ψευδής. Δηλαδή μία απονομή αλήθειας αποτελεί ένα «κόσμο» μέσα στον οποίο μία ατομική πρόταση (δηλ. τα σύμβολα προτάσεων) αποκτά τη σημασία του, να είναι δηλαδή αληθής ή ψευδής στον κόσμο αυτό. Άπαξ και δοθεί μια απονομή αλήθειας, οι τιμές αλήθειας των σύνθετων προτάσεων θα καθορίζονται βάσει των αληθοπινάκων. Αυτό αυτόματα θα μας δώσει μια επέκταση της συνάρτησης V στο σύνολο όλων των προτάσεων. Αν ονομάσουμε $\bar{V}$ αυτήν την επέκταση, η $\bar{V}$ θα είναι μια συνάρτηση $\bar{V} : \mathcal{P} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ που ορίζεται ως ακολούθως: Ο ορισμός γίνεται με (γενικευμένη) επαγωγή στον τρόπο κατασκευής των προτασιακών τύπων:

0. Για κάθε $A_i \in \mathcal{A}$ έχουμε $\bar{V}(A_i) = V(A_i)$ (αρα $\bar{V}$ είναι επέκταση της V).

   Αν τώρα $\varphi, \psi \in \mathcal{P}$ και έχουν ήδη ορισθεί οι $\bar{V}(\varphi)$ και $\bar{V}(\psi)$,

1. $\bar{V}((\neg\varphi)) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{F} \\ \mathsf{F} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{T} \end{cases}$

2. $\bar{V}((\varphi \wedge \psi)) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{T} \text{ και } \bar{V}(\psi) = \mathsf{T} \\ \mathsf{F} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

3. $\bar{V}((\varphi \vee \psi)) = \begin{cases} \mathsf{F} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{F} \text{ και } \bar{V}(\psi) = \mathsf{F} \\ \mathsf{T} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

4. $\bar{V}((\varphi \to \psi)) = \begin{cases} \mathsf{F} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{T} \text{ και } \bar{V}(\psi) = \mathsf{F} \\ \mathsf{T} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Σημείωση: Είναι εύκολο να δούμε ότι οι συνθήκες δεξιά αντιστοιχούν στον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε την τιμή αλήθειας μιας σύνθετης πρότασης βάσει του αληθοπίνακα (όταν οι τιμές αλήθειας των επί μέρους προτάσεων είναι γνωστές). Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα θεωρήματα:

θεώρημα 2.7 *Για κάθε απονομή αλήθειας V υπάρχει μία και μόνον μία επέκταση $\bar{V}$.*

θεώρημα 2.8 *Αν φ είναι ένας προτασιακός τύπος στον οποίο εμφανίζονται τα σύμβολα προτάσεων $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_n}$ (και μόνον αυτά) και αν V_1, V_2 είναι δύο απονομές αλήθειας που συμφωνούν σ' αυτά τα σύμβολα δηλ. $V_1(A_{k_i}) = V_2(A_{k_i}) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$, τότε $\bar{V}_1(\varphi) = \bar{V}_2(\varphi)$.*

π.χ. Αν $\varphi \equiv (A_1 \to (A_2 \to A_5))$ τότε η τιμή $\bar{V}(\varphi)$ εξαρτάται μόνον από τις τιμές $V(A_1), V(A_2), V(A_5)$ και όχι από άλλες λ.χ. την $V(A_{50})$.

Ορισμός 2.9 *Λέμε ότι μια απονομή αλήθειας V* ικανοποιεί *τον προτασιακό τύπο φ αν $\bar{V}(\varphi) = \mathsf{T}$.*

Ας υποθέσουμε τώρα ότι Σ είναι ένα σύνολο προτασιακών τύπων (άπειρο ή πεπερασμένο) και ότι τ είναι επίσης ένας προτασιακός τύπος.

Ορισμός 2.10 *Το Σ* ταυτολογικα συνεπάγεται *τον τ (και γράφουμε $\Sigma \models \tau$) αν κάθε απονομή αλήθειας που ικανοποιεί όλους τους τύπους στο Σ ικανοποιεί και τον τ.*

Ο ορισμός αυτός αντανακλά το αίσθημα που έχουμε να θεωρούμε ότι ένα συμπέρασμα (το τ) έπεται από ένα σύνολο υποθέσεων (το Σ) αν η παραδοχή ότι οι υποθέσεις είναι αληθινές εξασφαλίζει ότι και το συμπέρασμα είναι αληθές. Ορισμένες ειδικές περιπτώσεις του $\Sigma \models \tau$ αξίζει να μνημονευτούν. Ας είναι το Σ το κενό σύνολο $\emptyset$. Παρατηρούμε ότι είναι *πάντα* αλήθεια ότι κάθε απονομή αλήθειας ικανοποιεί όλα τα μέλη του Σ (γιατί;). Αρα όταν έχουμε $\emptyset \models \tau$, αυτό σημαίνει ότι *κάθε* απονομή αλήθειας ικανοποιεί τον τ. Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι ο τ είναι *ταυτολογία* και γράφουμε $\models \tau$. Αλλη ειδική περίπτωση είναι όταν καμία απονομή αλήθειας δεν ικανοποιεί όλα μαζί τα μέλη του Σ. Τότε ισχύει (δηλαδή σ' αυτή την περίπτωση είναι αληθές) το $\Sigma \models \tau$.
π.χ. $\Sigma = \{\varphi, \neg\varphi\} \models \psi$. Αν το Σ είναι μονομελές δηλ. $\Sigma = \{\sigma\}$ για κάποιο σ, τότε αντί για $\{\sigma\} \models \tau$ γράφουμε $\sigma \models \tau$. Αν έχουμε $\sigma \models \tau$ και $\tau \models \sigma$ λέμε ότι οι σ και τ είναι *ταυτολογικά ισοδύναμοι* και γράφουμε $\sigma \bowtie \tau$.

π.χ. $\neg(\varphi \wedge \psi) \bowtie \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

2.6 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι κανένας από τούς δύο προτασιακούς τύπους δεν συνεπάγεται ταυτολογικά τον άλλο:
$(\varphi \wedge ((\psi \to \tau) \wedge (\tau \to \psi)))$ και $((\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \vee ((\neg\varphi) \wedge ((\neg\psi) \wedge (\neg\tau))))$

2. Είναι ο $(((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi)$ ταυτολογία;

3. (i) $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi \iff \Sigma \models (\varphi \to \psi)$
(ii) $\sigma \bowtie \tau \iff \models (\sigma \to \tau) \wedge (\tau \to \sigma)$

2.7 Προτασιακοί Σύνδεσμοι

Μέχρι τώρα έχουμε χρησιμοποιήσει τέσσερεις προτασιακούς (ή λογικούς) συνδέσμους. Αναρωτιέμαστε αν θα κερδίζαμε τίποτα προσθέτοντας κι' άλλους συνδέσμους ή θα χάναμε παραλείποντας μερικούς. Θα προσπαθήσουμε τέτοιου είδους ερωτήσεις να τίς κάνουμε ακριβείς ώστε να μπορέσουμε να δώσουμε και ακριβείς απαντήσεις. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα. Εστω ότι επεκτείνουμε τη γλώσσα μας προσθέτοντας ένα τριπλό σύνδεσμο #. Δηλαδή τώρα αν φ, ψ, τ είναι προτασιακοί τύποι, ο $(\#\varphi\psi\tau)$ θα είναι προτασιακός τύπος. Πρέπει να δώσουμε μια ερμηνεία σ' αυτό το σύμβολο. Δηλαδή να υπολογίζουμε την τιμή $\bar{V}((\#\varphi\psi\tau))$, όπου V είναι μια απονομή αλήθειας, όταν είναι γνωστές οι τιμές $\bar{V}(\varphi), \bar{V}(\psi), \bar{V}(\tau)$. Ορίζουμε $\bar{V}((\#\varphi\psi\tau))$ να είναι ό,τι και η πλειοψηφία των $\bar{V}(\varphi)$, $\bar{V}(\psi)$, $\bar{V}(\tau)$ π.χ. αν $\bar{V}(\varphi) = \bar{V}(\psi) = \mathsf{T}$ και $\bar{V}(\tau) = \mathsf{F}$ τότε $\bar{V}((\#\varphi\psi\tau)) = \mathsf{T}$. Ισχυριζόμαστε ότι με την επέκταση αυτή που κάναμε στο σύνολο των συνδέσμων μας δεν κερδίσαμε τίποτα, γιατί κάθε προτασιακός τύπος στην επεκτεταμένη καινούργια μας γλώσσα είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με έναν προτασιακό τύπο της αρχικής μας γλώσσας. Κι' αυτό γιατί $(\#\varphi\psi\tau)$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\tau)\vee(\psi\wedge\tau))$.

Ορισμός 2.11 *Κάθε συνάρτηση* $\mathcal{B} : \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n \to \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$ *ονομάζεται* συνάρτηση Boole *n θέσεων ή (λογικός, προτασιακός)* σύνδεσμος *n θέσεων. Εδώ* $\{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n = \underbrace{\{\mathsf{T},\mathsf{F}\} \times \ldots \times \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}}_{n}$. *Επιτρέπουμε και στις τιμές* T *και* F *να είναι συναρτήσεις Boole με* 0 *θέσεις. Σ' αυτήν την περίπτωση συνήθως γράφουμε* $\mathcal{T}$ *και* $\mathcal{F}$.

Η έννοια της συνάρτησης Boole γενικεύει την ιδέα του συνδέσμου. Οταν ερμηνεύουμε ένα σύνδεσμο λέμε ποιοί συνδυασμοί τιμών αλήθειας (διατεταγμένες n-άδες αληθοτιμών) δίνουν ποιές τιμές αλήθειας (π.χ. ο αληθοπίνακας). Κάθε προτασιακός τύπος ορίζει μια συνάρτηση Boole.
π.χ. θεωρούμε τον $(A_1 \wedge A_2) \vee A_1$. Παίρνουμε την εξής συνάρτηση Boole.

A_1	A_2	$(A_1 \wedge A_2) \vee A_1$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	F

Και γενικώτερα:

Ορισμός 2.12 *Εστω τ προτασιακός τύπος που οι προτασιακές μεταβλητές που περιέχει είναι οι $A_1, \ldots, A_n$. Ορίζουμε τη συνάρτηση Boole με n θέσεις $\mathcal{B}_\tau$ ως ακολούθως. $\mathcal{B}_\tau(x_1, \ldots, x_n) = \bar{V}(\tau)$, όπου $x_i \in \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$, η $\bar{V}$ είναι απονομή αλήθειας με $V(A_i) = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Λέμε ότι η $\mathcal{B}_\tau$ είναι η συνάρτηση Boole που* πραγματοποιείται *από τον τ.*

θεώρημα 2.13 *Εστω $\mathcal{G}$ μια συνάρτηση Boole με n θέσεις ($n \geq 1$). Τότε υπάρχει ένας προτασιακός τύπος τ στη γλώσσα της λογικής των προτάσεων έτσι ώστε $\mathcal{G} = \mathcal{B}_\tau$, δηλαδή $\mathcal{G}$ πραγματοποιείται από τόν τ.*

Απόδειξη: 1η περίπτωση: πεδίο τιμών της $\mathcal{G}$ είναι το σύνολο $\{\mathsf{F}\}$. Τότε

$$\tau \equiv (A_1 \wedge \neg A_1) \wedge \ldots \wedge (A_n \wedge \neg A_n)$$

2η περίπτωση: Η 1η περίπτωση δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχουν k περιπτώσεις στις οποίες η $\mathcal{G}$ παίρνει την τιμή T, όπου $0 < k \leq 2^n$. Κάνουμε μια λίστα αυτών των περιπτώσεων.

$$\left.\begin{array}{cc} x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n} & (1) \\ x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n} & (2) \\ \vdots & \vdots \\ x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn} & (k) \end{array}\right\}$$

Εστω

$$\beta_{ij} = \begin{cases} A_j & \text{αν } x_{ij} = \mathsf{T} \\ (\neg A_j) & \text{αν } x_{ij} = \mathsf{F} \end{cases}$$

και $\gamma_i = \beta_{i1} \wedge \ldots \wedge \beta_{in}$ και $\tau = \gamma_1 \vee \ldots \vee \tau_k$.
Ισχυριζόμαστε ότι $\mathcal{G} = \mathcal{B}_\tau$. Πότε η τ γίνεται αληθινή; Οταν *όλα* τα $\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in}$ γίνουν αληθινά. Τα β_{ij} όμως είναι κατασκευασμένα έτσι ώστε να παίρνουν την τιμή T *μόνον* όταν τα A_j πάρουν τις τιμές που έχουμε στον πίνακα. Ενας οποιοσδήποτε άλλος συνδυαμός εκτός πίνακα κάνει ένα από τα β_{ij} ψευδές, άρα όλα τα γ_i ψευδή, άρα την τ ψευδή. Ολα αυτά φαίνονται καθαρά αν εξετάσουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Εστω $\mathcal{G}$ ως ακολούθως:

$$\begin{array}{c} \mathcal{G}(\mathsf{T},\mathsf{T},\mathsf{T})=\mathsf{T} \\ \mathcal{G}(\mathsf{T},\mathsf{T},\mathsf{F})=\mathsf{F} \\ \mathcal{G}(\mathsf{T},\mathsf{F},\mathsf{T})=\mathsf{F} \\ \mathcal{G}(\mathsf{T},\mathsf{F},\mathsf{F})=\mathsf{T} \\ \mathcal{G}(\mathsf{F},\mathsf{T},\mathsf{T})=\mathsf{F} \\ \mathcal{G}(\mathsf{F},\mathsf{T},\mathsf{F})=\mathsf{T} \\ \mathcal{G}(\mathsf{F},\mathsf{F},\mathsf{T})=\mathsf{T} \\ \mathcal{G}(\mathsf{F},\mathsf{F},\mathsf{F})=\mathsf{F} \end{array}$$

Τότε στις τριάδες των αληθοτιμών που αντιστοιχεί τιμή T δημιουργούμε τους εξής τύπους:

$$\left.\begin{array}{ccc} \mathsf{F} & \mathsf{F} & \mathsf{T} \\ \mathsf{F} & \mathsf{T} & \mathsf{F} \\ \mathsf{T} & \mathsf{F} & \mathsf{F} \\ \mathsf{T} & \mathsf{T} & \mathsf{T} \end{array} \quad \begin{array}{c} (\neg A_1) \wedge (\neg A_2) \wedge A_3 \\ (\neg A_1) \wedge A_2 \wedge (\neg A_3) \\ A_1 \wedge (\neg A_2) \wedge (\neg A_3) \\ A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \end{array}\right\} \text{ αυτά είναι τα } \gamma_i$$

Τότε $\tau = ((\neg A_1) \wedge (\neg A_2) \wedge A_3) \vee ((\neg A_1) \wedge A_2 \wedge (\neg A_3)) \vee (A_1 \wedge (\neg A_2) \wedge (\neg A_3)) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$

Το συμπέρασμα του πιο πάνω θεωρήματος είναι ότι έχουμε αρκετούς (στην πραγματικότητα πιο πολλούς απ' ό,τι χρειαζόμαστε) συνδέσμους στη διάθεσή μας. Γιατί, αν υποθέσουμε ότι στη γλώσσα μας εισάγουμε κάποιους καινούργιους «εξωτικούς» συνδέσμους (όπως τον τριπλό #) τότε κάθε πρόταση φ στην καινούργια γλώσσα θα πραγματοποιεί μια συνάρτηση Boole, $\mathcal{B}_\varphi$. Αλλά απ' το πιο πάνω θεώρημα η $\mathcal{B}_\varphi$ θα πραγματοποιείται από μια πρόταση τ στην αρχική μας γλώσσα δηλ. $\mathcal{B}_\varphi = \mathcal{B}_\tau$. Πράγμα που μας λέει ότι φ και τ είναι ταυτολογικά ισοδύναμες. (Γιατί;)

Ορισμός 2.14 Διαζευκτική κανονική μορφή *καλείται κάθε μορφή* $\gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_k$ *όπου* $\gamma_i = \beta_{i1} \wedge \ldots \wedge \beta_{in_i}$ *και κάθε* β_{ij} *είναι μία προτασιακή μεταβλητή ή η άρνηση μιας προτασιακής μεταβλητής.*

Αν προσέξουμε την απόδειξη του θεωρήματος 2.13 βλέπουμε ότι ο τύπος τ που κατασκευάσαμε είναι σε διαζευκτική κανονική μορφή.

θεώρημα 2.15 *Για κάθε προτασιακό τύπο μπορούμε να βρούμε έναν ταυτολογικά ισοδύναμο σε διαζευκτική κανονική μορφή.*

Απόδειξη: Εστω ο προτασιακός τύπος φ. Τότε υπάρχει τύπος τ σε διαζευκτική κανονική μορφή που πραγματοποιεί την $\mathcal{B}_\varphi$. Δηλαδή $\mathcal{B}_\varphi = \mathcal{B}_\tau$. Αλλά τότε φ και τ είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι.

2.8 Επάρκεια Συνδέσμων

Ορισμός 2.16 *Εστω* $\mathcal{S}$ *ένα σύνολο συνδέσμων π.χ.* $\mathcal{S} = \{\wedge, \vee, \neg\}$. *Το* $\mathcal{S}$ *λέγεται* επαρκές *αν κάθε συνάρτηση Boole μπορεί να πραγματοποιηθεί από έναν προτασιακό τύπο για το κτίσιμό του οποίου έχουμε μεταχειριστεί συνδέσμους μόνον από το* $\mathcal{S}$.

Είδαμε ότι κάθε συνάρτηση Boole πραγματοποιείται από έναν προτασιακό τύπο στον οποίο εμφανίζονται μόνον οι σύνδεσμοι $\wedge, \vee$ και $\neg$ (διαζευκτική κανονική μορφή). Αρα το σύνολο $\{\neg, \wedge, \vee\}$ και βέβαια, κατά μείζονα λόγο, το σύνολο $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ της γλώσσας μας είναι επαρκές. Μπορούμε όμως να βελτιώσουμε το αποτέλεσμα:

θεώρημα 2.17 *Τα σύνολα* $\{\neg, \wedge\}$ *και* $\{\neg, \vee\}$ *είναι επαρκή.*

Απόδειξη: Αφού το $\{\neg, \wedge, \vee\}$ είναι επαρκές, για να αποδείξουμε ότι το $\{\neg, \wedge\}$ είναι επαρκές αρκεί να εκφράσουμε το σύνδεσμο $\vee$ συναρτήσει των υπολοίπων. Εχουμε

$$(\varphi \vee \psi) \bowtie \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

Αρα κάθε χρήση του $\varphi \vee \psi$ μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με το ισοδύναμό της. Για να αποδείξουμε ότι $\{\neg, \vee\}$ είναι επαρκές παρατηρούμε ότι

$(\varphi \wedge \psi) \bowtie \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$. *Ασκηση*: $\{\wedge, \rightarrow\}$ δεν είναι επαρκές (υπόδειξη: Δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί η άρνηση).

Για κάθε φυσικό αριθμό n, υπάρχουν 2^{2^n} συναρτήσεις Boole ή σύνδεσμοι n θέσεων. *Σύνδεσμοι* 0 *θέσεων*: Συμβατικά εξετάζουμε και την περίπτωση $n = 0$. Εχουμε δύο τέτοιους σύνδεσμους τον $\mathcal{T}$ και τον $\mathcal{F}$. Μπορουμε να τους μεταφέρουμε και στη γλώσσα θεωρώντας τους σαν προτασιακούς τύπους ατομικούς. Τότε όμως για κάθε απονομή αλήθειας V πρέπει να έχουμε πάντα ότι $V(\mathcal{T}) = \mathsf{T}$ και $V(\mathcal{F}) = \mathsf{F}$.
π.χ. ο τύπος $A \rightarrow \mathcal{F}$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $(\neg A)$. *Σύνδεσμοι* 1 *θέσης*: Υπάρχουν 4. Μόνον ένας, η άρνηση, έχει ενδιαφέρον. *Σύνδεσμοι* 2 *θέσεων*: Υπάρχουν $2^{2^2} = 16$. Εκτός των $\wedge, \vee, \rightarrow$ οι άλλοι ειναι:

Σύμβολο	Ισοδυναμία	Παρατηρήσεις
	$\mathcal{T}$	σταθερός με τιμή T
	$\mathcal{F}$	σταθερός με τιμή F
	A	πρώτη προβολή
	B	δεύτερη προβολή
	$\neg A$	
	$\neg B$	
$A \leftrightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	ισοδυναμία
$A \leftarrow B$	$B \rightarrow A$	αντίσ. συνεπαγωγή
$A + B$	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$	διάζευξη (xor)
$A \downarrow B$	$\neg(A \vee B)$	ούτε A ούτε B (nor)
$A \mid B$	$\neg(A \wedge B)$	nand
$A < B$	$(\neg A) \wedge B$	$\mathsf{F} < \mathsf{T}$ (διάταξη)
$A > B$	$A \wedge (\neg B)$	$\mathsf{T} > \mathsf{F}$

θεώρημα 2.18 *Τα* $\{|\}$ *και* $\{\downarrow\}$ *είναι επαρκή.*

Απόδειξη: Οι αληθοπίνακες των $|$ και $\downarrow$ είναι:

A	B	$A \mid B$	$A \downarrow B$
T	T	F	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	T	T

Εχουμε:

$$\begin{aligned} \neg A &\bowtie (A|A) \\ A \vee B &\bowtie ((\neg A)|(\neg B)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg A &\bowtie (A \downarrow A) \\ A|B &\bowtie \neg((\neg A) \downarrow (\neg B)) \end{aligned}$$

2.9 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι οι πιο κάτω προτασιακοί τύποι είναι ταυτολογίες.

(i) Προσεταιριστική, Αντιμεταθετική ιδιότητα για τα $\wedge, \vee, \leftrightarrow$.
π.χ. $\phi \wedge (\psi \wedge \tau) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \wedge \tau, \phi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \phi$ κ.λ.π.

(ii) Επιμεριστικοί νόμοι:

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \wedge (\psi \vee \tau)) & \leftrightarrow & ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \tau)) \\ (\varphi \vee (\psi \wedge \tau)) & \leftrightarrow & ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \tau)) \end{array}$$

(iii) Αρνηση:

$(\neg(\neg\varphi)) \leftrightarrow \varphi$
$\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)$
$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi))$
$\left.\begin{array}{l} \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \end{array}\right\}$ Νόμοι του De Morgan
$(\varphi \vee \neg\varphi)$ Αρχή του αποκλειομένου τρίτου
ή νόμος του Αριστοτέλη
$\neg(\varphi \wedge (\neg\varphi))$
$(\varphi \to \psi) \leftrightarrow ((\neg\psi) \to (\neg\varphi))$ Αντιστροφοαντίθετη

2. (*Δυϊκότητα*) Εστω φ προτασιακός τύπος για την κατασκευή του οποίου έχουν χρησιμοποιηθεί ως σύμβολα συνδέσμων μόνον τα $\wedge, \vee$ και $\neg$. Εστω φ^* ο προτασιακός τύπος που προκύπτει αν στον φ εναλλάξουμε τα $\wedge$ και $\vee$ και αντικαταστήσουμε κάθε προτασιακή μεταβλητή A με το $\neg A$. Αποδείξτε ότι $\varphi \bowtie \neg\varphi^*$.

3. Αποδείξτε ότι $|$ και $\downarrow$ είναι οι μόνοι σύνδεσμοι δύο θέσεων που είναι πλήρεις από μόνοι τους.

4. Μία πρόταση που περιέχει μόνο τον σύνδεσμο $\leftrightarrow$ είναι ταυτολογία αν και μόνον αν κάθε προτασιακό σύμβολο απαντάται έναν άρτιο αριθμό φορών.

5. Οι σύνδεσμοι δύο θέσεων είναι 16 τον αριθμό. Απ' αυτούς μόνον οι 10 είναι πραγματικά διπλοί. Οι υπόλοιποι είναι είτε ουσιωδώς μονοί (προβολές, $\neg A$, $\neg B$) ή 0 θέσεων (σταθεροί). Από τους 10 ξέρουμε ότι οι $|$ και $\downarrow$ αποτελούν από μόνοι τους (και μόνον αυτοί) επαρκή σύνολα. Από τους 8 που μας μένουν μπορούμε να σχηματίσουμε 28 ζευγάρια. Η ερώτηση είναι: πόσα απ' αυτά τα ζευγάρια αποτελούν επαρκή σύνολα;
(Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $\{\wedge, \vee, \to, \leftarrow, \leftrightarrow\}$ και $\{\wedge, \vee, <, >, +\}$ δεν είναι επαρκή σύνολα. Αρα αποκλείονται 19 ζεύγη! Μετά αποδείξτε ότι $\{\to, \mathcal{F}\}$, $\{\leftarrow, \mathcal{F}\}$ είναι επαρκή και άρα συμπεράνετε ότι $\{\to, <\}$, $\{\to, >\}$, $\{\to, +\}$, $\{\leftarrow, <\}$, $\{\leftarrow, >\}$, $\{\leftarrow, +\}$ είναι επαρκή. Κατόπιν αποδείξτε ότι $\{<, \mathcal{T}\}$, $\{>, \mathcal{T}\}$ είναι επαρκή και συμπεράνετε ότι $\{<, \leftrightarrow\}$, $\{>, \leftrightarrow\}$ είναι επαρκή. (Εδώ $\varphi \to$

$\psi \bowtie \mathcal{T} > (\varphi > \psi)$ και $\{\rightarrow, <\}$ επαρκές. Επίσης $\mathcal{T} \bowtie (A \leftrightarrow A)$.) Αρα μας μένει μόνο ένα ζευγάρι να ασχοληθούμε: το $\{+, \leftrightarrow\}$. Αποδείξτε τώρα ότι:
Πρόταση Το $\{\neg, +, \leftrightarrow\}$ δεν είναι επαρκές.)

6. Βρίσκεστε στη χώρα των θαυμάτων όπου όλοι οι κάτοικοι λένε είτε πάντα αλήθεια (οι "καλοί") ή πάντα ψέμματα (οι "κακοί"). Πηγαίνετε για το μαγεμένο κάστρο ώσπου ξαφνικά ο δρόμος σχηματίζει μια διχάλα. Εκεί βρίσκεται ένας κάτοικος που δεν ξέρετε αν είναι καλός ή κακός. Με την προυπόθεση ότι αυτός θα σας απαντήσει σε μια μόνο ερώτηση και μόνον με ένα ναι ή ένα όχι, τι ερώτηση θα του κάνετε για να δείτε ποιός απο τους δύο δρόμους της διχάλας πάει στο κάστρο.
(Υπόδειξη: Θεωρείστε τις προτάσεις: φ να σημαίνει "λες την αλήθεια" και ψ "αυτός ο δρόμος πάει στο κάστρο". Σχηματίστε ένα κατάλληλο αληθοπίνακα ώστε η πραγματοποίησή του με βάση τις φ και ψ να σας δίνει την κατάλληλη ερώτηση.)

7. Αποδείξτε ότι κανένας από τους $\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \tau)$ και $(\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \vee (\neg\varphi \wedge (\neg\psi \wedge \neg\tau))$ δεν είναι λογική συνεπαγωγή ο ένας του άλλου.

8. Αποδείξτε ή ανταποδείξτε τα ακόλουθα:

(i) αν είτε $\Sigma \models \varphi$ ή $\Sigma \models \psi$ τότε $\Sigma \models \varphi \vee \psi$.

(ii) αν $\Sigma \models \varphi \vee \psi$ τότε είτε $\Sigma \models \varphi$ ή $\Sigma \models \psi$.

9. Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση γνωστή και ως *λήμμα παρεμβολής*: Αν ο προτασιακός τύπος $\varphi \rightarrow \psi$ είναι ταυτολογία ($\models \varphi \rightarrow \psi$) τότε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις αληθεύει:

(1) ο φ είναι αντιλογία ($\models \neg\varphi$),

(2) ο ψ είναι ταυτολογία ($\models \psi$),

(3) υπάρχει προτασιακός τύπος γ τέτοιος ώστε:

- κάθε προτασιακή μεταβλητή του γ εμφανίζεται και στον φ και στον ψ,
- οι $\varphi \rightarrow \gamma$, $\gamma \rightarrow \psi$ ειναι ταυτολογίες ($\models \varphi \rightarrow \gamma$, $\models \gamma \rightarrow \psi$).

10. Από την απόδειξη της προηγούμενης άσκησης προκύπτει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε τον τύπο γ όταν ξέρουμε τα φ και ψ. Εστω $\varphi \equiv ((q \rightarrow p) \vee r) \wedge ((r \rightarrow p) \vee \neg q)$ και $\psi \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee s$. Κατασκευάστε τον γ.

11. *Θεώρημα Ορισιμότητας*: Έστω $p, q, p_1, \ldots, p_k$ διακεκριμένες μεταξύ τους προτασιακές μεταβλητές και $\varphi \equiv \varphi(p, p_1, \ldots, p_k)$ ένας προτασιακός τύπος

του οποίου οι προτασιακές μεταβλητές είναι μεταξύ των $p, p_1, \ldots, p_k$. Αν ο προτασιακός τύπος

$$(\varphi(p, p_1, \ldots, p_k) \wedge \varphi(q, p_1, \ldots, p_k)) \to (p \leftrightarrow q)$$

είναι ταυτολογία, τότε υπάρχει ένας προτασιακός τύπος $\gamma \equiv \gamma(p_1, \ldots, p_k)$, με προτασιακές μεταβλητές μεταξύ των $p_1, \ldots, p_k$, έτσι ώστε ο τύπος

$$\varphi(p, p_1, \ldots, p_k) \to (p \leftrightarrow \gamma)$$

να είναι ταυτολογία.
(Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε το λήμμα παρεμβολής.)

2.10 Το θεώρημα της συμπάγειας

Ορισμός 2.19 *Έστω Σ ένα σύνολο προτασιακών τύπων. Λέμε ότι το Σ είναι* ικανοποιήσιμο *εάν υπάρχει μία απονομή αλήθειας V τέτοια ώστε για κάθε $\sigma \in \Sigma$ έχουμε ότι $\overline{V}(\sigma) = \mathsf{T}$. Λέμε ότι το Σ είναι* πεπερασμένα ικανοποιήσιμο *(πεπ. ικαν.) εάν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποιήσιμο.*

θεώρημα 2.20 (θεώρημα της συμπάγειας) *Ένα σύνολο προτασιακών τύπων είναι ικανοποιήσιμο εάν και μόνον εάν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.*

Απόδειξη: Το μη προφανές μέρος του θεωρήματος είναι ν' αποδείξουμε ότι αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποήσιμο τότε όλο το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο. Θα το αποδείξουμε με διάφορα βήματα.

Ορισμός 2.21 *Ένα σύνολο προτάσεων Σ λέγεται* πλήρες *αν για οποιοδήποτε προταbσιακό τύπο ϕ έχουμε είτε $\phi \in \Sigma$ ή $(\neg\phi) \in \Sigma$.*

Παρατηρούμε ότι αν έχουμε μία απονομή αλήθειας V τότε το σύνολο $\Sigma = \{\sigma \mid \overline{V}(\sigma) = \mathsf{T}\}$ είναι πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.

Αλλά και αντιστρόφως κάθε πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο είναι ικανοποιήσιμο. Για να το αποδείξουμε αυτό παρατηρούμε πρώτα ότι ισχύει το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.22 *Σε κάθε πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο Σ ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. $\phi \in \Sigma \Leftrightarrow (\neg\phi) \notin \Sigma$
2. $(\phi \wedge \psi) \in \Sigma \Leftrightarrow \phi \in \Sigma$ *και* $\psi \in \Sigma$
3. $(\phi \vee \psi) \in \Sigma \Leftrightarrow \phi \in \Sigma$ *ή* $\psi \in \Sigma$
4. $(\phi \rightarrow \psi) \in \Sigma \Leftrightarrow \phi \notin \Sigma$ *ή* $\psi \in \Sigma$

Απόδειξη λήμματος: Για το 1. Αν $\phi \in \Sigma$ τότε οπωσδήποτε δεν μπορούμε να έχουμε $(\neg\phi) \in \Sigma$ επειδή το Σ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο και το σύνολο $\{\phi, \neg\phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Αντίστροφα, εάν $\neg\phi \notin \Sigma$ τότε επειδή το Σ είναι πλήρες θα έχουμε $\phi \in \Sigma$. Για το 2. Έστω $(\phi \wedge \psi) \in \Sigma$. Τότε δεν είναι δυνατόν να έχουμε π.χ. $\neg\phi \in \Sigma$ διότι το σύνολο $\{(\phi \wedge \psi), \neg\phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Άρα θα είναι $\phi \in \Sigma$ επειδή το Σ είναι πλήρες. Ομοίως για το ψ. Αντίστροφα εάν έχουμε $\phi \in \Sigma$ και $\psi \in \Sigma$ δεν μπορούμε να έχουμε ότι $\neg(\phi \wedge \psi) \in \Sigma$ επειδή το Σ είναι ππεπερασνένα ικανοποιήσιμο. Άρα από πληρότητα του Σ θα έχουμε $(\phi \wedge \psi) \in \Sigma$. Ομοίως και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Με βάση αυτό το λήμμα μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο:

Λήμμα 2.23 *Κάθε πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο Σ είναι ικανοποιήσιμο.*

Απόδειξη λήμματος: Ορίζουμε μία απονομή αλήθειας V ως εξής:
Αν A είναι προτασιακή μεταβλητή, τότε

$$V(A) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{αν } A \in \Sigma \\ \mathsf{F} & \text{αν } \neg A \in \Sigma \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι λόγω της πληρότητας του Σ για κάθε προτασιακή μεταβλητή A υπάρχει η τιμή $V(A)$, και ότι λόγω του πεπερασμένα ικανοποιήσιμου η τιμή αυτή είναι μοναδική. Δηλαδή ότι ο ορισμός της V είναι καλός.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε με επαγωγή στους προτασιακούς τύπους ότι για κάθε τύπο ϕ ισχύει:

$$\phi \in \Sigma \Leftrightarrow \overline{V}(\phi) = \mathsf{T}$$

Για τις προτασιακές μεταβλητές η ισχύς του ανωτέρω είναι προφανής. Για τις άλλες περιπτώσεις ας εξετάσουμε την περίπτωση $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$. Έχουμε:

$\phi_1 \wedge \phi_2 \in \Sigma \Leftrightarrow$ (από προηγ. λήμμα) $\phi_1 \in \Sigma$ και $\phi_2 \in \Sigma \Leftrightarrow$ (επαγ. υπόθεση) $\overline{V}(\phi_1) = \mathsf{T}$ και $\overline{V}(\phi_2) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \overline{V}(\phi_1 \wedge \phi_2) = \mathsf{T}$. Ομοίως όλες τις άλλες περιπτώσεις.

Άρα λοιπόν, τελικά, αν μας δοθεί ένα σύνολο προτασιακών τύπων Σ , για να αποδείξουμε ότι είναι ικανοποιήσιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν να επεκταθεί σε ένα σύνολο $\Sigma' \supseteq \Sigma$ ώστε Σ' να είναι πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Άρα λοιπόν αρκεί να αποδείξουμε το ακόλουθο σπουδαίο λήμμα.

Λήμμα 2.24 (Lindenbaum) *Κάθε πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο Σ μπορεί να επεκταθεί σε ένα πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο $\Sigma' \supseteq \Sigma$.*

Απόδειξη: Εφ' όσον το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών είναι αριθμήσιμο, το σύνολο όλων των προτασιακών τύπων μπορεί να αριθμηθεί.[2] Έστω $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ μία τέτοια αρίθμηση. Ορίζουμε την ακολουθία συνόλων προτασιακών τύπων $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \cdots \subseteq \Sigma_n \subseteq \cdots$ ως εξής:

$$\Sigma_0 = \Sigma$$

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\phi_n\} & \text{αν } \Sigma_n \cup \{\phi_n\} \text{ είναι πεπ. ικαν.} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\phi_n\} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε Σ_n είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Το αποδεικνύουμε με αριθμητική επαγωγή στο n. Για $n = 0$ ισχύει από τον

[2] Από τη συνολοθεωρία γνωρίζουμε ότι εάν Σ είναι αριθμήσιμο τότε το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από στοιχεία του Σ είναι αριθμήσιμο. Αριθμήσιμο σημαίνει ότι υπάρχει μία 1–1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών.

ορισμό. Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει για n δηλαδή ότι το Σ_n είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Για να αποδείξουμε ότι το Σ_{n+1} είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι για τυχόν ϕ αν το $\Sigma_n \cup \{\phi\}$ δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο τότε το $\Sigma_n \cup \{\neg\phi\}$ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Έστω λοιπόν $\{\psi_1, \ldots, \psi_k, \neg\phi\}$ τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του $\Sigma_n, \neg\phi$. Επειδή το Σ_n, ϕ δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο υπάρχει υποσύνολό του $\{\psi_1^{'}, \ldots, \psi_l^{'}, \phi\}$ που δεν ικανοποιείται. Επειδή το Σ_n είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο θα υπάρχει μία απονομή, έστω V, που ικανοποιεί το $\{\psi_1, \ldots, \psi_k, \psi_1^{'}, \ldots, \psi_l^{'}\}$. Αλλά τότε η V δεν μπορεί να ικανοποιεί την ϕ άρα $\overline{V}(\neg\phi) = \mathsf{T}$, δηλαδή η V ικανοποιεί το $\{\psi_1, \ldots, \psi_k, \neg\phi\}$.

Ορίζουμε τώρα το $\Sigma^{'} = \cup_{n=0}^{\infty}\Sigma_n$. Το $\Sigma^{'}$ είναι πλήρες διότι κάθε προτασιακός τύπος είναι κάποιο ϕ_n στη λίστα της αρίθμησης και για τη δημιουργία του $\Sigma^{'}$ έχουν χρησιμοποιηθεί όλα τα ϕ_n ή $\neg\phi_n$. Το $\Sigma^{'}$ είναι και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο διότι αν $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ ένα υποσύνολό του θα υπάρχει ένα n αρκούντως μεγάλο ώστε $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\} \subseteq \Sigma_n$ και επειδή το Σ_n είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο το σύνολο $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ θα ικανοποιείται.

Πόρισμα 2.25 *Εάν $\Sigma \models \phi$ τότε υπάρχει πεπερασμένο $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ώστε $\Sigma_0 \models \phi$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη βασίζεται στο ότι $\Sigma \models \phi$ τότε και μονον τότε $\Sigma, \neg\phi$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Έστω τώρα $\Sigma \models \phi$. Τότε το σύνολο $\Sigma, \neg\phi$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, άρα από θεώρημα της συμπάγειας δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Άρα υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\Sigma_0, \neg\phi$ που δεν είναι ικανοποιήσιμο ($\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ και Σ_0 πεπερασμένο). Άρα $\Sigma_0 \models \phi$.

3 Αποδεικτικό Σύστημα

Αξιωματικό σύστημα τύπου Hilbert για τον προτασιακό λογισμό.

Θα δώσουμε τον ορισμό ενός τυπικού συστήματος του οποίου σκοπός θα είναι να αποδεικνύει με αυστηρό τρόπο τις αλήθειες του προτασιακού λογισμού, δηλαδή, είτε τις απόλυτες αλήθειες οι οποίες θα είναι οι προτασιακοί τύποι που γίνονται αληθείς σε όλες τις απονομές (ταυτολογίες) ή τις σχετικές αλήθειες (σχετικές σε σχέση με ένα σύνολο υποθέσεων) οι οποίες θα αληθεύουν στις απονομές που ικανοποιούν τις υποθέσεις. Για λόγους οικονομίας της παρουσίασης η γλώσσα μας θα περιλαμβάνει μόνον τους συνδέσμους $\neg$ και $\rightarrow$. Η επιλογή αυτή δεν είναι περιοριστική αφού το σύνολο $\{\neg, \rightarrow\}$ είναι επαρκές σύνολο συνδέσμων και κάθε εμφάνιση άλλου συνδέσμου μπορεί να θεωρηθεί συντομογραφία έκφρασης που γράφεται αποκλειστικά με $\neg$ και $\rightarrow$. Γενικά, ένα αξιωματικό σύστημα αποτελείται από τα αξιώματα, που είναι οι προτάσεις που ανά πάσα στιγμή μπορούμε να επικαλεστούμε και να χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξή μας και τους κανόνες απαγωγής που θα μας επιτρέπουν να παράγουμε, από τα ήδη αποδειχθέντα, καινούργια συμπεράσματα.

Χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σχήματα λογικών *αξιωμάτων*. Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ, ψ, χ οι ακόλουθοι (πιο σύνθετοι) τύποι είναι αξιώματα:

A1 $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

A2 $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$

A3 $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$

Κανόνες Απαγωγής: Χρησιμοποιούμε τον κανόνα απαγωγής που είναι γνωστός με το λατινικό όνομα MODUS PONENS και τον συμβολίζουμε με MP. Ο κανόνας αυτός μας λέει ότι από τους $\phi \rightarrow \psi$ και ϕ απάγουμε (συμπεραίνουμε) τον ψ. Σχηματικά

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \phi}{\psi} \; MP$$

Ορισμός 3.1 *Μία* Θεωρία *είναι ένα σύνολο προτασιακών τύπων τα οποία ονομάζονται* μη-λογικά αξιώματα *της θεωρίας. Αντιθέτως, τα αξιώματα που παράγονται από τα σχήματα αξιωμάτων A1–A3 ονομάζονται* λογικά αξιώματα. *Τις θεωρίες τις συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα* T,Σ,...

Ορισμός 3.2 Απόδειξη *στη θεωρία* T *ονομάζεται κάθε πεπερασμένη ακολουθία* $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ *προτασιακών τύπων για τους οποίους ισχύουν τα κάτωθι:*

Για κάθε i *όπου* $1 \leq i \leq n$ *ο τύπος* ϕ_i *είναι, είτε*

1. *ένα λογικό αξίωμα* $A1$, $A2$ *ή* $A3$

2. *είτε ανήκει στην T, δηλαδή είναι ένα μη λογικό αξίωμα της T*

3. *είτε υπάρχουν ϕ_j, ϕ_k τύποι της ακολουθίας $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ με $j < i$ και $k < i$ ώστε $\phi_j \equiv \phi_k \to \phi_i$ (δηλαδή ο ϕ_i είναι το συμπέρασμα κανόνα MP με υποθέσεις τύπους με μικρότερο δείκτη, δηλαδή που προηγούνται στην απόδειξη από τον ϕ_i)*

Ορισμός 3.3 Θεώρημα *της θεωρίας T ονομάζεται κάθε τύπος ϕ για τον οποίο υπάρχει απόδειξη $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ στη θεωρία T με $\phi_n \equiv \phi$.*

Αν ϕ είναι θεώρημα της T, γράφουμε $T \vdash \phi$. Αν $T = \emptyset$, δηλαδή αν θεωρήσουμε ότι έχουμε μία θεωρία χωρίς μη λογικά αξιώματα, γράφουμε $\vdash \phi$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η απόδειξη είναι στον καθαρό προτασιακό λογισμό. Είναι προφανές ότι οποιαδήποτε απόδειξη που δεν χρησιμοποιεί για την κατασκευή της μη λογικά αξιώματα είναι απόδειξη στον καθαρό προτασιακό λογισμό. Και βέβαια είναι επίσης προφανές ότι $\vdash \phi$ συνεπάγεται $T \vdash \phi$ για οποιοδήποτε T.

Παράδειγμα 3.4 *Θα αποδείξουμε ότι για κάθε ϕ ισχύει ότι $\vdash \phi \to \phi$.*

Αρκεί να κατασκευάσουμε μία ακολουθία $\phi_1, \ldots, \phi_n$, όπως ακριβώς στον ορισμό, έτσι ώστε ο ϕ_n να είναι ο $\phi \to \phi$. Την παρουσιάζουμε παρακάτω γράφοντάς την από πάνω προς τα κάτω, όπου οι αριθμοί αριστερά είναι οι δείκτες της ακολουθίας και όπου δεξιά παρουσιάζεται η αιτιολόγηση του γιατί η ακολουθία ικανοποιεί τις προδιαγραφές του ορισμού.

1. $(\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)) \to ((\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)$
2. $\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)$
3. $(\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)$
4. $\phi \to (\phi \to \phi)$
5. $\phi \to \phi$

με την παρακάτω αντίστοιχη δικαιολόγηση

1. Αξίωμα A2
2. Αξίωμα A1
3. Από 1, 2 και MP
4. Αξίωμα A1
5. Από 3,4 και MP

Ας προσθέσουμε ένα σχόλιο για τη χρήση των λέξεων «απόδειξη» «θεώρημα» κ.λ.π. στους ορισμούς που προηγήθηκαν. Είναι πιο σωστό οταν αναφερόμαστε σ'αυτά να λέμε τυπική απόδειξη, τυπικό θεώρημα κ.λ.π. Οταν χρησιμοποιούμε τις λέξεις απόδειξη, θεώρημα κ.λ.π. με την καθημερινή μαθηματική τους σημασία δεν πρέπει να τις συγχέουμε με τα αντικείμενα που περιγράφτηκαν με τους προηγηθέντες ορισμούς. Θα μπορούσαμε π.χ. να αποδείξουμε

ένα θεώρημα για τα τυπικά θεωρήματα. Σ'αυτή την περίπτωση το θεώρημα αυτό το ονομάζουμε μεταθεώρημα. Πιο γενικά επειδή οι κύριες έννοιες και πρακτικές των Μαθηματικών μπορούν να οριστούν κατά τρόπο ώστε να έχουν το τυπικό τους ανάλογο (στις γραμμές των ανωτέρω ορισμών), τα Μαθηματικά που έχουν ως αντικείμενο μελέτης αυτά τα τυπικά ανάλογα ονομάζονται Μεταμαθηματικά.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ένα (μετα)θεώρημα που θα μας βοηθάει στην εύρεση τυπικών αποδείξεων.

θεώρημα 3.5 (Το θεώρημα της απαγωγής) *Αν $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$ (γράφουμε και $T, \phi \vdash \psi$) τότε $T \vdash \phi \to \psi$.*

Απόδειξη: Το θεώρημα το αποδεικνύουμε με επαγωγή στο μήκος n της απόδειξης $\psi_1, \ldots, \psi_n$ της ψ ($\psi \equiv \psi_n$). Γενικά παρατηρούμε πρώτα ότι αν ψ είναι ένα από τα ακόλουθα

1. ψ είναι λογικό αξίωμα
2. $\psi \in T$
3. $\psi \equiv \phi$

τότε η πρόταση ισχύει διότι:

Στην πρώτη και στην δεύτερη περίπτωση ισχύει ότι $T \vdash \psi$. Και επειδή ισχύει επίσης ότι $T \vdash \psi \to (\phi \to \psi)$ (επειδή $\psi \to (\phi \to \psi)$ είναι λογικό αξίωμα) θα έχουμε $T \vdash \phi \to \psi$ από εφαρμογή του κανόνα Modus Ponens. Στην τρίτη περίπτωση θα έχουμε βέβαια $T \vdash \phi \to \phi$ επειδή $\vdash \phi \to \phi$, από προηγούμενο παράδειγμα.

Έστω τώρα ότι η ψ είναι αποτέλεσμα ενός κανόνα MP. Τότε έχουν προηγηθεί στην απόδειξη τα ψ_i και $\psi_i \to \psi$.Επειδή αυτά έχουν προηγηθεί οι αποδείξεις τους έχουν μικρότερο μήκος από το n και άρα για αυτά ισχύει η επαγωγική υπόθεση, άρα $T \vdash \phi \to \psi_i$ και $T \vdash \phi \to (\psi_i \to \psi)$. Το αποτέλεσμα έρχεται επειδή λόγω A2 ισχύει $T \vdash (\phi \to (\psi_i \to \psi)) \to ((\phi \to \psi_i) \to (\phi \to \psi))$. Χρησιμοποιούμε δύο φορές τον κανόνα MP.

θεώρημα 3.6 (Θεώρημα της ορθότητας) *Αν $T \vdash \phi$ τότε $T \models \phi$. Στην ειδική περίπτωση που $T = \emptyset$, έχουμε ότι $\vdash \phi$ συνεπάγεται $\models \phi$ δηλαδή τα θεωρήματα του καθαρού προτασιακού λογισμού είναι ταυτολογίες.*

Απόδειξη εύκολη διότι η ικανοποιησιμότητα ισχύει για τα αξιώματα (τα λογικά αξιώματα είναι ταυτολογίες) και μεταφέρεται από τις υποθέσεις ενός κανόνα Modus Ponens στο συμπέρασμα.

Το ανωτέρω θεώρημα μας λέει ότι όλα τα θεωρήματα είναι ορθά. Ισχύει όμως και το αντίστροφο; Δηλαδή ισχύει ότι αν έχουμε μία ταυτολογία τότε αυτή θα είναι ένα θεώρημα του τυπικού συστήματος; Ισχύει, με άλλα λόγια, ότι το τυπικό σύστημα έχει τη δυνατότητα να αποδεικνύει όλες τις ταυτολογίες;

θεώρημα 3.7 (Θεώρημα της πληρότητας) *Αν $\models \phi$, δηλαδή αν ϕ είναι ταυτολογία, τότε $\vdash \phi$.*

Θα αποδείξουμε πρώτα τα ακόλουθα λήμματα:

Λήμμα 3.8 *Οι παρακάτω προτασιακοί τύποι είναι τυπικά θεωρήματα του αποδεικτικού συστήματος τύπου Hilbert (δηλ. αν τ είναι ένας από τους παρακάτω προτασιακούς τύπους έχουμε $\vdash \tau$).*

(a) $\neg\neg\phi \to \phi$

(b) $\phi \to \neg\neg\phi$

(c) $\neg\phi \to (\phi \to \psi)$

(d) $(\neg\psi \to \neg\phi) \to (\phi \to \psi)$

(e) $(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$

(f) $\phi \to (\neg\psi \to \neg(\phi \to \psi))$

(g) $(\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \psi) \to \psi)$

Απόδειξη:
Θα αποδείξουμε πρώτα την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.9 **i)** $\phi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \phi \to \chi$

ii) $\phi \to (\psi \to \chi), \psi \vdash \phi \to \chi$

Απόδειξη του 3.9, i).

1.	$\phi \to \psi$	ΥΠ (ΥΠ=Υπόθεση)
2.	$\psi \to \chi$	ΥΠ
3.	ϕ	ΥΠ
4.	ψ	1,3, MP
5.	χ	2,4 MP

Άρα $\phi \to \psi, \psi \to \chi, \phi \vdash \chi$. Άρα, από θεώρημα απαγωγής, $\phi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \phi \to \chi$.

Απόδειξη του ii). Εύκολη, με το θεώρημα της απαγωγής.

Απόδειξη του λήμματος 3.8.
(a):

1.	$(\neg\phi \to \neg\neg\phi) \to ((\neg\phi \to \neg\phi) \to \phi)$	Αξίωμα A3
2.	$\neg\phi \to \neg\phi$	γνωστό
3.	$(\neg\phi \to \neg\neg\phi) \to \phi$	1,2,Λήμ. 3.1.ii
4.	$\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi)$	Αξίωμα A1
5.	$\neg\neg\phi \to \phi$	3,4 Λήμ. 3.1.i

(b):

1.	$(\neg\neg\neg\phi \to \neg\phi) \to ((\neg\neg\neg\phi \to \phi) \to \neg\neg\phi)$	Αξ. A3
2.	$\neg\neg\neg\phi \to \neg\phi$	από (a)
3.	$(\neg\neg\neg\phi \to \phi) \to \neg\neg\phi$	1,2,MP
4.	$\phi \to (\neg\neg\neg\phi \to \phi)$	Αξ. A1
5.	$\phi \to \neg\neg\phi$	3,4, 3.1.i

(c):

1.	$\neg\phi$	ΥΠ
2.	ϕ	ΥΠ
3.	$\phi \to (\neg\psi \to \phi)$	Αξίωμα A1
4.	$\neg\phi \to (\neg\psi \to \neg\phi)$	Αξίωμα A1
5.	$\neg\psi \to \phi$	2,3,MP
6.	$\neg\psi \to \neg\phi$	1,4,MP
7.	$(\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$	Αξίωμα A3
8.	$(\neg\psi \to \phi) \to \psi$	6,7,MP
9.	ψ	5,8,MP

Άρα, από 1-9, $\neg\phi, \phi \vdash \psi$. Κατά συνέπεια, από το θεώρημα της απαγωγής, $\neg\phi \vdash \phi \to \psi$, και, ξανά απ'το θεώρημα της απαγωγής, $\vdash \neg\phi \to (\phi \to \psi)$.

(d):

1.	$\neg\psi \to \neg\phi$	ΥΠ
2.	ϕ	ΥΠ
3.	$(\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$	Αξίωμα A3
4.	$\phi \to (\neg\psi \to \phi)$	Αξίωμα A1
5.	$(\neg\psi \to \phi) \to \psi$	1,3,MP
6.	$\phi \to \psi$	4,5,Λήμμα3.1.i
7.	ψ	2,6,MP

Από 1-7, $\neg\psi \to \neg\phi, \phi \vdash \psi$, και δύο εφαρμογές του θεωρήματος της απαγωγής δίνουν το αποτέλεσμα.

(e):

1.	$\phi \to \psi$	ΥΠ
2.	$\neg\neg\phi \to \phi$	Από (a)
3.	$\neg\neg\phi \to \psi$	1,2,Λήμμα 3.1.i
4.	$\psi \to \neg\neg\psi$	Από (b)
5.	$\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi$	3,4,Λήμμα 3.1.i
6.	$(\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$	Από (d)
7.	$(\neg\psi \to \neg\phi)$	5,6,MP

Άρα, από 1-7, $\phi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\phi$, και, από θεώρημα απαγωγής έχουμε το αποτέλεσμα.

(f):

Προφανώς, $\phi, \phi \to \psi \vdash \psi$ από MP. Άρα, $\vdash \phi \to ((\phi \to \psi) \to \psi)$ με δύο εφαρμογές του θεωρήματος της απαγωγής. Από (e) $\vdash ((\phi \to \psi) \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg(\phi \to \psi))$. Άρα χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.1.i παίρνουμε το αποτέλεσμα.

(g):

1.	$\phi \to \psi$	ΥΠ
2.	$\neg\phi \to \psi$	ΥΠ
3.	$(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$	Από (e)
4.	$\neg\psi \to \neg\phi$	1,3,MP
5.	$(\neg\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\neg\phi)$	Από (e)
6.	$\neg\psi \to \neg\neg\phi$	2,5,MP
7.	$(\neg\psi \to \neg\neg\phi) \to ((\neg\psi \to \neg\phi) \to \psi)$	Αξίωμα A3
8.	$(\neg\psi \to \neg\phi) \to \psi$	6,7,MP
9.	ψ	4,8,MP

Άρα, $\phi \to \psi, \neg\phi \to \psi \vdash \psi$. Δύο εφαρμογές του θεωρήματος της απαγωγής δίνουν το αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.10 *Έστω ότι όλες οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον προτασιακό τύπο ϕ είναι ανάμεσα στις $B_1, \ldots, B_k$. Έστω V απονομή αλήθειας (μας ενδιαφέρουν μόνον οι τιμές που παίρνει στα B_i). Ορίζουμε B'_i να είναι B_i αν $V(B_i) = T$ και B'_i να είναι $\neg B_i$ αν $V(B_i) = F$. Ορίζουμε επίσης ϕ' να είναι ϕ αν $\overline{V}(\phi) = T$ και ϕ' να είναι $\neg\phi$ αν $\overline{V}(\phi) = F$. Τότε $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \phi'$.*

Παράδειγμα. Έστω $\phi \equiv \neg(\neg A_1 \to A_2)$. Τότε για τις διάφορες απονομές μπορούμε να δημιουργήσουμε τον αληθοπίνακα του ϕ. Έχουμε

A_1	A_2	$\neg(\neg A_1 \to A_2)$
T	T	F
F	T	F
T	F	F
F	F	T

Αν εφαρμόσουμε την πρόταση στην απονομή που αντιστοιχεί στην τρίτη γραμμή έχουμε $A_1, \neg A_2 \vdash \neg\neg(\neg A_1 \to A_2)$ και στην τέταρτη γραμμή $\neg A_1, \neg A_2 \vdash \neg(\neg A_1 \to A_2)$.

Απόδειξη: Με επαγωγή στο ϕ. Αν ο ϕ είναι η προτασιακή μεταβλητή B_1 τότε το ζητούμενο ανάγεται στο $B_1 \vdash B_1$ και $\neg B_1 \vdash \neg B_1$.

Περίπτωση 1. ϕ είναι $\neg\psi$. Τότε η ΕΥ ισχύει για το ψ.

Υποπερίπτωση 1a. Έστω ψ παίρνει την τιμή T σε μία απονομή V. Τότε ϕ παίρνει την τιμή F. Άρα, ψ' είναι ψ και ϕ' είναι $\neg\phi$. Από ΕΥ για ψ, $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \psi$. Άρα από άσκηση 4 (b) και MP , $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \neg\neg\psi$. Αλλά $\neg\neg\psi$ είναι ϕ'.

Υποπερίπτωση 1b. Έστω ψ παίρνει την τιμή F. Τότε ψ' είναι $\neg\psi$ και ϕ' είναι ϕ. Από ΕΥ $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \neg\psi$. Αλλά $\neg\psi$ είναι ϕ'.

Περίπτωση 2. ϕ είναι $\psi \to \chi$ Τότε για τα ψ και χ ισχύει η ΕΥ, άρα $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \psi'$ και $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \chi'$.

Περίπτωση 2a. ψ παίρνει την τιμή F. Άρα ϕ παίρνει την τιμή T. Τότε ψ' είναι $\neg\psi$ και ϕ' είναι ϕ. Άρα, $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \neg\psi$. Από άσκηση 3 (c), $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \psi \to \chi$. Αλλά $\psi \to \chi$ είναι ϕ'.

Περίπτωση 2b. χ παίρνει την τιμή T. Άρα ϕ παίρνει την τιμή T. Τότε χ' είναι χ και ϕ' είναι ϕ. Ισχύει $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \chi$. Τότε από αξίωμα A1 $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \psi \to \chi$. Αλλά $\psi \to \chi$ είναι ϕ'.

Περίπτωση 2c. ψ παίρνει την τιμή T , χ παίρνει την τιμή F. Τότε ϕ έχει την τιμή F, ψ' είναι ψ, χ' είναι $\neg\chi$ και ϕ' είναι $\neg\phi$. Ισχύει $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \psi$ και $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \neg\chi$. Άρα από άσκηση 3 (f), $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \neg(\psi \to \chi)$. Αλλά $\neg(\psi \to \chi)$ είναι ϕ'.

Αυτό εξαντλεί τις δυνατές περιπτώσεις, επειδή η γλώσσα περιέχει μόνον του συνδέσμους $\neg$ και $\to$.

Απόδειξη του θεωρήματος της πληρότητας. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 3.10. Έστω ϕ είναι ταυτολογία και έστω $B_1, \ldots, B_k$ είναι οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον ϕ. Για οποιαδήποτε απονομή αλήθειας (στα $B_1, \ldots, B_k$), από την άσκηση έχουμε ότι $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \phi$. ($\phi'$ είναι ϕ επειδή ϕ παίρνει πάντα την τιμή T.) Άρα, αν B_k πάρει την τιμή T, $B'_1, \ldots, B'_{k-1}, B_k \vdash \phi$, και, αν B_k πάρει την τιμή F, $B'_1, \ldots, B'_{k-1}, \neg B_k \vdash \phi$. Άρα, από το θεώρημα της απαγωγής, $B'_1, \ldots B'_{k-1} \vdash B_k \to \phi$ και $B'_1, \ldots, B'_{k-1} \vdash \neg B \to \phi$. Τότε από λήμμα 3.8, (g) $B'_1, \ldots, B'_{k-1} \vdash \phi$ και βέβαια τα $B'_1, \ldots, B'_k$ μπορούν να αντιστοιχούν σε οποιαδήποτε απονομή. Ομοίως B_{k-1} μπορεί να είναι T ή F και ξανά εφαρμόζοντας το θεώρημα της απαγωγής και το λήμμα 3.8, (g) μπορούμε να απαλείψουμε το B'_{k-1} όπως ακριβώς απαλείψαμε το B'_k. Μετά από k τέτοια βήματα τελικά παίρνουμε $\vdash \phi$.

Πόρισμα 3.11 *Εάν T θεωρία (T μπορεί να είναι άπειρο σύνολο) τότε $T \models \phi$ συνεπάγεται $T \vdash \phi$.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της συμπάγειας. Από το πόρισμα του θεωρήματος της συμπάγειας έχουμε ότι $T_0 \models \phi$, για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο του T το $T_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Δηλαδή $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \phi$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το $\models \psi_1 \to (\cdots \to (\psi_n \to \phi) \cdots)$. Από θεώρημα πληρότητας έχουμε ότι $\vdash \psi_1 \to (\cdots \to (\psi_n \to \phi) \cdots)$. Και βέβαια επειδή κάθε $\phi_i \in T$, εφαρμόζοντας n φορές τον κανόνα MP, παίρνουμε τελικά ότι $T \vdash \phi$.

4 Κατηγορηματική Λογική

Υπάρχουν είδη λογικών απαγωγών που δεν μπορούν να δικαιολογηθούν με βάση μόνον τη λογική των προτάσεων, π.χ.

1. Κάθε φίλος του Γιώργου είναι φίλος του Κώστα.

   Ο Νίκος δεν είναι φίλος του Κώστα.

   Άρα, ο Νίκος δεν είναι φίλος του Γιώργου.

2. Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.

   Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.

   Άρα, ο Σωκράτης είναι θνητός.

3. Όλοι οι άνθρωποι είναι ζώα.

   Άρα, το κεφάλι ενός ανθρώπου είναι το κεφάλι ενός ζώου.

Η ορθότητα αυτών των συλλογισμών δεν εξαρτάται από την τοποθέτηση των προτάσεων σε σχέση με τους λογικούς συνδέσμους, έτσι ώστε η κατάστρωση ενός αληθοπίνακα να μας έδινε την ορθότητα ή μη του συλλογισμού. Εξαρτάται μάλλον από τη δομή και των «επιμέρους» προτάσεων καθώς και από τη σημασία εκφράσεων όπως όλοι, κάθε, κ.λ.π.

Ας εισαγάγουμε ένα ειδικό συμβολισμό για να κάνουμε πιο διαφανή τη δομή του συλλογισμού. Αν $P(x)$ είναι ένα κατηγόρημα δηλ. μας λέει ότι το x έχει την ιδιότητα P, τότε $\forall x P(x)$ μας λέει ότι για κάθε x η ιδιότητα P ισχύει. Επίσης $\exists x P(x)$ μας λέει ότι υπάρχει (τουλάχιστον) ένα x που έχει την ιδιότητα P. Στην έκφραση $\forall x P(x)$ το $\forall x$ είναι ο καθολικός ποσοδείκτης και στην $\exists x P(x)$ το $\exists x$ είναι ο υπαρκτικός ποσοδείκτης.

Αν τώρα $\gamma, \kappa, \nu, \sigma, \Phi(x,y), A(x), \Theta(x), Z(x), k(x)$ σημαίνουν, αντίστοιχα Γιώργος, Κώστας, Νίκος, Σωκράτης, x είναι φίλος τού y, x είναι άνθρωπος,x είναι θνητός, x είναι ζώο, το κεφάλι τού x, τότε οι 1, 2, 3 πιο πάνω γίνονται:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(\Phi(x,\gamma) \to \Phi(x,\kappa)\\ \neg\Phi(\nu,\kappa)\end{array}}{\neg\Phi(\nu,\gamma)} \tag{1}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(A(x) \to \Theta(x))\\ A(\sigma)\end{array}}{\Theta(\sigma)} \tag{2}$$

$$\frac{\forall x(A(x) \to Z(x))}{\forall x(\exists y(x = k(y) \wedge A(y)) \to \exists y(x = k(y) \wedge Z(y)))} \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι η ορθότητα αυτών των συλλογισμών δεν εξαρτάται από την ειδική σημασία των $\gamma, \kappa, \nu, \sigma, \Phi, A, \Theta, Z, k$. Βλέπουμε ότι τα καινούργια στοιχεία που περιέχονται στην καινούργια μας λογική (στον καινούργιο τρόπο παραγωγής ορθών συλλογισμών) είναι τα κατηγορήματα, όπως π.χ. τα Φ, A, Θ

κ.λ.π. και οι ποσοδείκτες. Εξ' ού και κατηγορηματικός λογισμός. Οι προτάσεις που σχηματίζονται και η αλήθεια των οποίων μας ενδιαφέρει, μιλάνε για ένα πεδίο *αντικειμένων*, για ένα «σύμπαν» της συζήτησης. Είναι το πεδίο των αντικειμένων για τα οποία μιλάμε και για τα οποία μας ενδιαφέρει να ανακαλύψουμε αλήθειες π.χ. το σύμπαν της συζήτησης θα μπορούσε να είναι τα σύνολα, οπότε η γλώσσα μας θα ήταν η γλώσσα της συνολοθεωρίας ή οι αριθμοί οπότε η γλώσσα μας θα ήταν η γλώσσα της αριθμοθεωρίας κ.λ.π. (γλώσσα χονδρικά είναι ο τρόπος σχηματισμού προτάσεων).

Το πώς μεταχειριζόμαστε τους ποσοδείκτες, το πώς ποσοδείχνουμε, αποτελεί το άλλο κύριο χαρακτηριστικό της γλώσσας μας. Όταν αναφερόμαστε με ποσοδείκτες, στο σύμπαν της συζήτησής μας, αναφερόμαστε στα *αντικείμενα*, στα *στοιχεία* του σύμπαντος και όχι σε συλλογές ή συλλογές συλλογών κ.ο.κ. αντικειμένων, στοιχείων. Π.χ. αν το σύμπαν είναι αριθμοί μπορούμε να πούμε ότι «κάθε αριθμός έχει μία ιδιότητα» (π.χ. $\forall x(x \geq 0)$) αλλά όχι «κάθε σύνολο αριθμών έχει μία ιδιότητα». Για να το πούμε αυτό θα πρέπει στο σύμπαν μας να περιέχονται και τα σύνολα των αριθμών. Αυτός ο τρόπος χρήσης των ποσοδεικτών καθορίζει τις γλώσσες μας ως γλώσσες πρώτου βαθμού, γι' αυτό και ο όρος πρωτοβάθμια λογική.

4.1 Γλώσσα της Λογικής των Κατηγορημάτων

Μία γλώσσα της λογικής των κατηγορημάτων αποτελείται από:

(I) *Τα λογικά σύμβολα*: Αυτά αποτελούνται από:

- (i) *Μεταβλητές*: Ένα αριθμήσιμο σύνολο από σύμβολα $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ που θα τα ονομάζουμε μεταβλητές.
- (ii) *Λογικούς συνδέσμους*: Θα είναι τα σύμβολα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
- (iii) *Κόμμα, παρενθέσεις*: Το σύμβολο , και τα σύμβολα (και).
- (iv) *Ποσοδείκτες*: Τα σύμβολα $\forall$ και $\exists$.

(II) *Τα μη λογικά σύμβολα*: Αυτά αποτελούνται από:

- (i) *Σύμβολα σταθερών*: Ένα σύνολο συμβόλων c_1, c_2, c_3, ..., c_n, ... που θα τα ονομάζουμε σταθερές. Οι σταθερές θα παίζουν το ρόλο που παίζουν τα κύρια ονόματα στην καθομιλουμένη. Δηλαδή θα συμβολίζουν ένα σταθερό αντικείμενο. Στο παράδειγμά μας στο 2. το σ ήταν μία σταθερά που συμβόλιζε το Σωκράτη. Σημειώστε ότι το σύνολο των σταθερών μπορεί να είναι ή αριθμήσιμο δηλαδή το $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ ή πεπερασμένο δηλ. $c_1, \ldots, c_\kappa$ για κάποιο κ, ή ακόμη και κενό δηλαδή να μήν υπάρχουν καθόλου σταθερές.
- (ii) *Σύμβολα κατηγορημάτων*: Για κάθε φυσικό $n > 0$, υπάρχει ένα σύνολο συμβόλων, τα σύμβολα κατηγορημάτων n-θέσεων. Το σύνολο αυτό μπορεί να είναι αριθμήσιμο δηλ. $Q_1^n, Q_2^n, \ldots, Q_i^n, \ldots$ ή

πεπερασμένο $Q_1^n, Q_2^n, \ldots, Q_\kappa^n$, για κάποιο κ, (ή βέβαια ακόμα και κενό).[3]

Τα σύμβολα κατηγορημάτων μιας θέσης θα συμβολίζουν ιδιότητες (των αντικειμένων του σύμπαντός μας) λ.χ. $Q^1(x)$ μπορεί να συμβολίζει την ιδιότητα «ο x είναι ρητός». Τα σύμβολα κατηγορημάτων n-θέσεων συμβολίζουν n-μελείς σχέσεις, λ.χ. $Q^2(x, y)$ μπορεί να συμβολίζει «ο x είναι μικρότερος του y».

(iii) *Σύμβολα συναρτήσεων*: Για κάθε φυσικό $n > 0$, ένα σύνολο συμβόλων, τα σύμβολα συναρτήσεων n θέσεων. Αυτά θα συμβολίζουν συναρτήσεις n μεταβλητών στο σύμπαν των αντικειμένων μας A δηλ. συναρτήσεις από το $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$ στο A.

Το σύνολο αυτό των συμβόλων μπορεί να είναι αριθμήσιμο δηλ. $f_1^n, f_2^n, \ldots, f_i^n, \ldots$ ή πεπερασμένο δηλ. $f_1^n, \ldots, f_\kappa^n$ ή ακόμη και κενό δηλ. να μην υπάρχουν καθόλου σύμβολα συναρτήσεων.

Παράδειγμα: Στο παράδειγμα της σελ. 31

Τα $\gamma, \kappa, \nu, \sigma$ είναι σύμβολα σταθερών.

Το Φ είναι σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων.

Τα A, Θ, Z είναι σύμβολα κατηγορημάτων μιας θέσης.

Το k είναι ένα σύμβολο συνάρτησης μιας θέσης και συμβολίζει μία συνάρτηση από το σύνολο των ζώων στο σύνολο των κεφαλιών των ζώων, έτσι ώστε αν x είναι ένα ζώο τότε $k(x)$ να είναι το κεφάλι του x.

Οι γλώσσες συμβολίζονται με $\mathcal{L}$ και όταν υπάρχει ανάγκη διαχωρισμού τους γράφουμε $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_A$ κ.τ.λ. Εκείνο που διαφοροποιεί μία γλώσσα από μία άλλη είναι ένα διαφορετικό σύνολο από μη λογικά σύμβολα μια και τα λογικά σύμβολα σε όλες είναι τα ίδια.

Παρατήρηση 4.1 *Στον καθορισμό του συνόλου των λογικών συμβόλων της πρωτοβάθμιας γλώσσας σταθήκαμε αρκετά «γενναιόδωροι» περιλαμβάνοντας τους λογικούς προτασιακούς συνδέσμους* $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ *καθώς και τους ποσοδείκτες* $\forall$ *και* $\exists$. *Η σημασιολογία που θα υιοθετήσουμε πιο κάτω μας επιτρέπει να είμαστε πιο «οικονομικοί». Στην περίπτωση των προτασιακών συνδέσμων θα μπορούσαμε να περιοριστούμε στο σύνολο* $\{\neg, \rightarrow\}$, *αφού αυτό είναι ένα επαρκές σύνολο συνδέσμων, δηλαδή κάθε χρήση των* $\wedge$, $\vee$ *ή* $\leftrightarrow$ *θα μπορούσε ενα αντικατασταθεί με ισοδύναμη χρήση των* $\neg$ *και* $\rightarrow$. *Για τους ποσοδείκτες θα μπορούσαμε να περιοριστούμε στο* $\forall$, *αφού, όπως θα δούμε, κάθε* $\exists x$ *είναι ισοδύναμο με το* $\neg\forall x\neg$. *Σε ό,τι ακολουθήσει μερικές φορές θα περιοριζόμαστε σε τέτοιες πιο «οικονομικές» λύσεις για τις γλώσσες, χάριν ευκολίας.*

[3] Απαιτείται να υπάρχει τουλάχιστον ένα σύμβολο κατηγορήματος, ώστε να είναι δυνατή η ύπαρξη τουλάχιστον ενός ατομικού τύπου. Στην περίπτωση της γλώσσας με ισότητα (ορισμός 5.12) θα αρκούσε η ύπαρξη μόνον του συμβόλου $=$.

Παράδειγμα 4.2 Για να ορίσω μία γλώσσα αρκεί να ορίσω το σύνολο των μη λογικών συμβόλων. Αυτά τα σύμβολα μαζί με τα λογικά θα αποτελούν το *αλφάβητο* της γλώσσας. Ορίζω τη γλώσσα $\mathcal{L}_A$ ως εξής: $\mathcal{L}_A = \{=, <, +, \cdot, 0, 1\}$. Η $\mathcal{L}_A$ είναι μία γλώσσα για την αριθμητική (που μπορεί να εκφράσει ιδιότητες των αριθμών). Εδώ τα $=, <$ είναι σύμβολα κατηγορημάτων δύο θέσεων και συμβολίζουν το ίσον και το μικρότερο. Τα $+$ και $\cdot$ είναι σύμβολα συναρτήσεων δύο θέσεων και συμβολίζουν την πρόσθεση και πολλαπλασιασμό και 0 και 1 είναι σύμβολα σταθερών και συμβολίζουν το μηδέν και το ένα.

Παράδειγμα 4.3 $\mathcal{L}_G = \{=, \circ, e\}$ είναι μία γλώσσα για τη θεωρία των ομάδων, όπου $=$ σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων, $\circ$ σύμβολο συνάρτησης δύο θέσεων και θα συμβολίζει την πράξη $A \times A \to A$, όπου A είναι μία ομάδα (συμβολίζει δηλαδή την εσωτερική πράξη της ομάδας) και e σταθερά που θα συμβολίζει το ουδέτερο στοιχείο.

Έχοντας ορίσει το αλφάβητο μιας γλώσσας, θα θέλαμε να δούμε τι μπορούμε να φτιάξουμε που να «σημαίνει» κάτι δηλ. τι μπορούμε να «πούμε» με βάση αυτό το αλφάβητο.

Ορισμός 4.4 *Έστω $\mathcal{L}$ μία γλώσσα (δηλαδή μας έχει δοθεί το αλφάβητό της).* Έκφραση *στην $\mathcal{L}$ είναι μία πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της γλώσσας.*

Εμάς βέβαια μας ενδιαφέρουν οι εκφράσεις που έχουν κάποιο νόημα. Πρώτα θα δούμε ποιες εκφράσεις της γλώσσας υποδηλώνουν αντικείμενα.

Ορισμός 4.5 *Ορίζουμε ποιες εκφράσεις είναι* όροι *με τον εξής επαγωγικό ορισμό:*

(i) Οι μεταβλητές και τα σύμβολα σταθερών είναι όροι.

(ii) Αν f_i^n είναι σύμβολο συνάρτησης n θέσεων και $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι τότε $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ είναι όρος.

Π.χ. όροι στην $\mathcal{L}_A$ είναι οι 0, 1, $+(0,1)$, $+(+(0,1),1)$, $+(0,x_2)$ κ.τ.λ.

Ορισμός 4.6 Κλειστός όρος *είναι ο όρος που δεν περιέχει καμιά μεταβλητή. Π.χ. $+(0,1)$ είναι κλειστός όρος ενώ ο $+(0,x_2)$ δεν είναι.*

Ορισμός 4.7 Ατομικό τύπο *ονομάζομε κάθε έκφραση της μορφής $R(t_1, \ldots, t_n)$, όπου R είναι σύμβολο κατηγορήματος n-θέσεων και $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι. Διαισθητικά μας λέει ότι τα αντικείμενα που υποδηλώνονται από τους όρους $t_1, \ldots, t_n$ ικανοποιούν τη σχέση R.*

Ορισμός 4.8 *Ορίζουμε ποιες εκφράσεις είναι* τύποι *(μιας γλώσσας $\mathcal{L}$). Ο ορισμός είναι επαγωγικός:*

(i) Κάθε ατομικός τύπος είναι τύπος.

(ii) Αν ϕ_1, ϕ_2 είναι τύποι τότε οι εκφράσεις $(\phi_1 \wedge \phi_2)$, $(\phi_1 \vee \phi_2)$, $(\phi_1 \to \phi_2)$, $(\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)$, $(\neg\phi_1)$ είναι τύποι.

(iii) Αν x είναι μεταβλητή και ϕ είναι τύπος τότε οι εκφράσεις $\exists x\phi$ και $\forall x\phi$ είναι τύποι.

Και βέβαια τελικά τύποι είναι μόνον οι εκφράσεις που σχηματίζονται σύμφωνα με τους κανόνες 1, 2, 3.

Παρατήρηση: Ό,τι έχουμε πει για τους γενικευμένους επαγωγικούς ορισμούς στη σελ. 5 ισχύει και εδώ. Δηλαδή μπορούμε να ορίσουμε ιδιότητες και να αποδείξουμε προτάσεις με επαγωγή (γενικευμένη) στους όρους, τύπους κ.τ.λ. Επίσης όταν γράφουμε τύπους σε μία γλώσσα μπορούμε να χρησιμοποιούμε ανορθογραφίες π.χ. στην $\mathcal{L}_A$ μπορούμε να γράψουμε $\forall x(x = x)$ αντί για το πιο σωστό $\forall x = (x, x)$. Άλλα παραδείγματα τύπων στην $\mathcal{L}_A$ είναι $\forall x\forall y\forall z(x = y \wedge y = z \to x = z)$, $\forall x\exists y(x \leq y \wedge \neg(x = y))$ κ.ο.κ.

Ας γράψουμε δύο τύπους στη γλώσσα $\mathcal{L}_A$.

$$\forall x_1(x_1 < x_2)$$

$$\exists x_1\forall x_2(x_1 < x_2)$$

Υπάρχει μία σημαντική διαφορά μεταξύ τους. Ο δεύτερος αν τον μεταφράσουμε λέει «υπάρχει ένας αριθμός έτσι ώστε κάθε αριθμός να είναι μεγαλύτερός του». Ο πρώτος τύπος όμως μπορεί να νοηθεί σαν μετάφραση μιας μη πλήρους πρότασης, της «κάθε αριθμός είναι μικρότερος του __ ». Είμαστε σε αδυναμία να συμπληρώσουμε την πρόταση χωρίς να ξέρουμε τι να κάνουμε με τη μεταβλητή x_2. Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε ότι η x_2 είναι μία ελεύθερη μεταβλητή στην $\forall x_1(x_1 < x_2)$. Ή πιο σωστά ότι η εμφάνιση της x_2 στον τύπο είναι ελεύθερη.
Εμφάνιση μιας μεταβλητής σε ένα τύπο είναι η μεταβλητή που απαντάται σ'ένα τύπο σε μια συγκεκριμένη θέση. Π.χ. στον τύπο

$$\begin{array}{ccc} (\forall x(x < y)) & \wedge & (x = y) \\ \uparrow & & \uparrow \\ 1 & & 2 \end{array}$$

έχουμε δύο εγγραφές[4] της ίδιας μεταβλητής x στη θέση 1 και στη θέση 2.
Στους τύπους $\forall x\phi$ και $\exists x\phi$ ο τύπος ϕ ονομάζεται το *βελ η νεκές* του ποσοδείκτη $\forall x$ ή του $\exists x$. Όταν μία εμφάνιση μιας μεταβλητής x βρίσκεται μέσα στο

[4] Κάθε εμφάνιση της x στον ϕ αμέσως μετά από ένα $\forall$ ή $\exists$, δηλαδή στην περίπτωση $\forall x$ ή $\exists x$, δεν λογίζεται ως εμφάνιση της μεταβλητής στον ϕ.

βεληνεκές ενός ποσοδείκτη $\forall x$ ή $\exists x$ τότε η εμφάνιση αυτή είναι *δεσμευμένη*· η εμφάνιση μιας μεταβλητής που δεν είναι δεσμευμένη λέγεται *ελεύθερη*.
π.χ. Στον πιο πάνω τύπο η εμφάνιση 1 της x είναι δεσμευμένη ενώ η εμφάνιση 2 της x είναι ελεύθερη.

Άσκηση 4.1 Δείτε ποιες εγγραφές των μεταβλητών είναι ελεύθερες ή δεσμευμένες στους πιο κάτω τύπους:

1. $\forall x_3(\forall x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_3, c_1))$
2. $\forall x_2 R_1^2(x_3, x_2) \to \forall x_3 R_1^2(x_3, x_2)$
3. $\forall x_2 \exists x_1 R_1^3(x_1, x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \vee (\neg \forall x_1 R_1^2(x_2, f_1^1(x_1)))$

Λέμε ότι η μεταβλητή x εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ αν υπάρχει τουλάχιστον μια ελεύθερη εμφάνιση της x στον ϕ. Το σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών του ϕ (συμβολισμός $EM(\phi)$) το ορίζουμε επαγωγικά ως εξής:

Ορισμός 4.9 *1. Αν ϕ είναι ατομικός τύπος τότε το σύνολο $EM(\phi)$ είναι το σύνολο των μεταβλητών που εμφανίζονται στον ϕ.*

2. Αν $\phi = \neg\psi$ τότε $EM(\phi) = EM(\psi)$.

3. Αν ϕ είναι $\phi_1 \to \phi_2$ ή $\phi_1 \wedge \phi_2$ ή $\phi_1 \vee \phi_2$ ή $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ τότε $EM(\phi) = EM(\phi_1) \cup EM(\phi_2)$.

4. Αν ϕ είναι $\forall x\psi$ τότε $EM(\phi) = EM(\psi) \setminus \{x\}$.

Πολλές φορές τις ελεύθερες μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ σε ένα τύπο ϕ τις εμφανίζουμε γράφοντας $\phi(x_1, \ldots, x_n)$. Όταν γράφουμε $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ εννοούμε $EM(\phi) \subseteq \{x_1, \ldots x_n\}$. Ο συμβολισμός είναι βολικός γιατί τότε με $\phi(t_1, \ldots, t_n)$ συμβολίζουμε την (ταυτόχρονη) αντικατάσταση των ελεύθερων εμφανίσεων των $x_1, \ldots, x_n$ αντίστοιχα με τους όρους $t_1, \ldots, t_n$. Π.χ. αν $\phi(x_1, x_2) \equiv (x_1 = x_2) \wedge (\forall x_1(x_1 < x_2))$ και $t_1 \equiv c_1$, $t_2 \equiv f(x_3)$ τότε $\phi(t_1, t_2) \equiv (c_1 = f(x_3)) \wedge (\forall x_1(x_1 < f(x_3)))$.

Αν θέλουμε να γράψουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια την αντικατάσταση μεταβλητών από όρους, γράφουμε $\phi(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n)$ και εννοούμε ότι ο όρος t_i αντικαθιστά (ταυτόχρονα με τους άλλους) όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της x_i στον ϕ. Έτσι λοιπόν γράφουμε $\phi(t/x)$ όταν ο t αντικαθιστά τις ελεύθερες εμφανίσεις της x. Βέβαια όταν δεν υπάρχει λόγος σύγχυσης γράφουμε απλά $\phi(t_1, \ldots, t_n)$ ή $\phi(t)$, αντίστοιχα.

Αν $\phi(x)$ ένας τύπος και t ένας όρος τότε λέμε ότι η x είναι *αντικαταστάσιμη* από τον t στον $\phi(x)$ αν καμιά ελεύθερη εγγραφή της x στον $\phi(x)$ δεν κείται στο βεληνεκές ενός ποσοδείκτη $\forall y$ ή $\exists y$ όπου y είναι μία μεταβλητή που εμφανίζεται στον t, δηλαδή ισοδύναμα όταν με την αντικατάσταση $\phi(t)$ καμιά μεταβλητή τού t δεν δεσμεύεται.

Π.χ. η x δεν είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο y στον τύπο $\forall y(x < y)$. Είναι φανερό ότι αν ένας όρος δεν περιέχει μεταβλητές δηλ. ένας κλειστός όρος, τότε οποιαδήποτε μεταβλητή είναι πάντα αντικαταστάσιμη από τον όρο αυτό σε οποιονδήποτε τύπο. Επίσης ότι κάθε μεταβλητή είναι αντικαταστάσιμη από τον εαυτό της.

Μπορούμε να ορίσουμε την ανωτέρω έννοια επαγωγικά, ως εξής:

Ορισμός 4.10 *x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ϕ εάν*

1. *ϕ είναι ατομικός τύπος.*
2. *ϕ είναι της μορφής $\neg\psi$ και x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ.*
3. *ϕ είναι της μορφής $\phi_1 \wedge \phi_2$ ή $\phi_1 \vee \phi_2$ ή $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ ή $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ϕ και στον ψ*
4. *ϕ είναι της μορφής $\forall y\psi$ και*
   - *η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον $\forall y\psi$ ή*
   - *η y δεν εμφανίζεται στον t και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ.*

Άσκηση 4.2 (i) Η x είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο y στον $R_1^1(x)$, αλλά η x δεν είναι αντικαταστάσιμη από τον y στον $\forall y R_1^1(x)$.

Η x_1 είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο $f_1^2(x_1, x_3)$ στον $\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \rightarrow R_1^1(x_1)$ αλλά δεν είναι αντικαταστάσιμη από τον $f_1^2(x_1, x_3)$ στον $\exists x_3 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \rightarrow R_1^1(x_1)$.

(ii) Η x είναι αντικαταστάσιμη από την x σε κάθε τύπο.

Ορισμός 4.11 Πρόταση *είναι κάθε τύπος που δεν έχει ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών. Θα δούμε ότι πρόταση είναι ένας πλήρης ισχυρισμός που ερμηνευόμενος γίνεται είτε αληθής ή ψευδής.*

4.2 Δομές (Ερμηνείες)

Μια πρωτοβάθμια κατηγορηματική γλώσσα είναι κάτι το τυπικό. Μπορούμε να φανταστούμε τις εκφράσεις της σαν αρθρώσεις συμβόλων που δεν έχουν κανένα νόημα. Μεταξύ αυτών των εκφράσεων έχουν ορισθεί μερικές (οι τύποι και οι προτάσεις) ώστε να είναι επιδεκτές νοήματος (μιας σημασίας ή ερμηνείας). Λέμε επιδεκτές διότι θεωρούμε ότι ως στοιχεία της γλώσσας αυτές είναι σύμβολα (σύνολα συμβόλων) και τίποτε άλλο.

Ορισμός 4.12 Δομή ή Ερμηνεία $\mathcal{A}$ *για μία πρωτοβάθμια κατηγορηματική γλώσσα $\mathcal{L}$ είναι ένα σύστημα αποτελούμενο από:*

1. *Ένα μη κενό σύνολο A, το πεδίο της δομής, που το συμβολίζουμε με $|\mathcal{A}|$. Φανταζόμαστε ότι A είναι το σύμπαν των αντικειμένων στα οποία αναφερόμαστε μέσω της πρωτοβάθμιας γλώσσας.*

2. *Μία αντιστοίχιση ενός στοιχείου $c^{\mathcal{A}} \in A$ σε κάθε σύμβολο σταθεράς c της γλώσσας $\mathcal{L}$.*

3. *Μία αντιστοίχιση μιας συνάρτησης με n μεταβλητές $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ σε κάθε σύμβολο συνάρτησης με n θέσεις f της γλώσσας $\mathcal{L}$.*

4. *Μία αντιστοίχιση μιας n-μελούς σχέσης $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ για κάθε σύμβολο κατηγορήματος n-θέσεων R της γλώσσας $\mathcal{L}$.*

Μια δομή λοιπόν δίνει νόημα σε μία τυπική γλώσσα (ένα νόημα που μέχρι τώρα το στερούνταν). Το νόημα αυτό το παίρνει με το να αποδοθεί μία πραγματικότητα στα βασικά σύμβολα της γλώσσας δηλ. στις σταθερές, στις συναρτήσεις και στα κατηγορήματα. Υποθέτουμε ότι τα άλλα σύμβολα της γλώσσας όπως οι σύνδεσμοι και οι ποσοδείκτες έχουν πάντα την κανονική φυσική τους σημασία, πράγμα που θα δούμε πιο κάτω.

Εάν $\mathcal{L}$ είναι μία γλώσσα, είδαμε ότι μπορούμε να την παρουσιάσουμε ως $\mathcal{L} = \{R, \ldots, f, \ldots, c, \ldots\}$, όπου με $R, \ldots$ καταγράφουμεόλα τα σύμβολα κατηγορημάτων της γλώσσας, με $f, \ldots$ τα σύμβολα συναρτήσρεων και με $c, \ldots$ τα σύμβολα σταθερών. Την ερμηνεία $\mathcal{A}$ για την $\mathcal{L}$ μπορούμε να την παρουσιάσουμε ως $\mathcal{A} = \langle |\mathcal{A}|, R, \ldots, f, \ldots, c, \ldots\rangle$, όπου $\sigma^{\mathcal{A}}$ είναι η αντίστοιχη ερμηνεία (ορισμός 4.12) για κάθε μη-λογικό σύμβολο σ της $\mathcal{L}$.

π.χ. μια ερμηνεία της $\mathcal{L}_A$ του παραδείγματος 4.2 μπορεί να παρουσιαστεί ως $\mathcal{A} = \langle |\mathcal{A}|, =^{\mathcal{A}}, <^{\mathcal{A}}, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}}\rangle$. Μια ερμηνεία της $\mathcal{L}_A$ είναι η συνήθης ερμηνεία $N_A = \langle \mathbb{N}, =^{N_A}, <^{N_A}, \ldots\rangle$, όπου $=^{N_A}$ είναι η ισότητα και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι οι συνήθεις σχέσεις (το μικρότερο), συναρτήσεις (πρόσθεση, πολ/σμός), μηδέν και ένα στους φυσικούς αριθμούς. Μερικές φορές, όταν δεν υπάρχει σύγχυση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα ίδια σύμβολα και ως σύμβολα της γλώσσας και ως στοιχεία της δομής, π.χ. η δομή N_A μπορεί να γραφτεί και ως $N_A = \langle \mathbb{N}, =, <, +, \cdot, 0, 1\rangle$.

Ορισμός της αλήθειας του Tarski

Για να ορίσουμε πότε μία πρόταση της γλώσσας $\mathcal{L}$ είναι αληθής στην ερμηνεία της $\mathcal{L}$, την $\mathcal{A}$, πρέπει να δώσουμε έναν ορισμό που να «περνάει» μέσα από τους τύπους. Και επειδή αυτοί μπορεί να έχουν ελεύθερες μεταβλητές, άρα όχι κάποιο τελικό νόημα, γιαυτό φανταζόμαστε ότι σε κάθε μεταβλητή έχει αντιστοιχηθεί ένα στοιχείο τής δομής ώστε να κλείνουμε την ανοιχτή σημασία των ελεύθερων μεταβλητών:

Ορισμός 4.13 *Έστω $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ το σύνολο των μεταβλητών της γλώσσας $\mathcal{L}$. Και έστω $\mathcal{A}$ μία ερμηνεία της $\mathcal{L}$. Τότε* αποτίμηση *(στην $\mathcal{A}$)*

ονομάζεται κάθε συνάρτηση $s : V \to |\mathcal{A}|$. Επειδή μέσω μιας αποτίμησης s κάθε μεταβλητή παριστάνει κάποιο στοιχείο τής δομής, το ίδιο θα συμβαίνει και για κάθε όρο της γλώσσας. Το στοιχείο τής δομής που παριστάνει ο όρος t (μέσω της αποτίμησης) και το οποίο συμβολίζουμε με $\overline{s}(t)$ το ορίζουμε με επαγωγή στους όρους ως εξής:

(i) Αν t είναι μία μεταβλητή x, θέτουμε $\overline{s}(t) = s(x)$.

(ii) Αν t είναι μία σταθερά c, θέτουμε $\overline{s}(t) = c^{\mathcal{A}}$.

(iii) Αν $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι (για τους οποίους ήδη ξέρουμε τα $\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n)$) και f είναι ένα σύμβολο συνάρτησης με n θέσεις τότε $\overline{s}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{A}}(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n))$.

Βλέπουμε ότι λόγω της 1 η $\overline{s}$ είναι επέκταση της s.

Παράδειγμα 4.14 Έστω $\mathcal{L}_A$ η γλώσσα του παραδείγματος 4.2. Έστω $\mathcal{A}$ μία ερμηνεία της με $|\mathcal{A}| = \mathbb{N}$ = το σύνολο των φυσικών αριθμών, $=^{\mathcal{A}}$ την ισότητα μεταξύ φυσικών, $<^{\mathcal{A}}$ τη σχέση διάταξης στο $\mathbb{N}$, $+^{\mathcal{A}}$ και $\cdot^{\mathcal{A}}$ η πρόσθεση και πολλαπλασιασμός των φυσικών, και $0^{\mathcal{A}}$, $1^{\mathcal{A}}$ ατίστοιχα το μηδέν και το ένα, δηλαδή $\mathcal{A} = N_A = \langle \mathbb{N}, <, +, \cdot, 0, 1 \rangle$. Έστω $s : V \to \mathbb{N}$ η αποτίμηση $s(x_\kappa) = 2\kappa$. Τότε $\overline{s}(x_1 \cdot x_2 + 1) = s(x_1) \cdot^{\mathcal{A}} s(x_2) +^{\mathcal{A}} 1^{\mathcal{A}} = 9$.

Ορισμός 4.15 *Δοθέντων των $\mathcal{A}$ και s όπως πιο πάνω ορίζουμε τι σημαίνει η $\mathcal{A}$ να ικανοποιεί τον τύπο ϕ με την s, πράγμα που συμβολίζουμε με $\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$, με επαγωγή:*

(i) Αν ϕ είναι ατομικός τύπος, έστω $R(t_1, \ldots, t_n)$, τότε

$$\models_{\mathcal{A}} R(t_1, \ldots, t_n)[s] \overset{o\rho}{\Longleftrightarrow} \langle \overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n) \rangle \in R^{\mathcal{A}}$$

(δηλαδή τα αντικείμενα $\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n)$ βρίσκονται στη σχέση $R^{\mathcal{A}}$ μεταξύ τους)

(ii) Αν ϕ είναι $\neg\psi$ για κάποιο τύπο ψ (ο οποίος έχει «κτισθεί» πριν από τον ϕ και επομένως ξέρουμε την έννοια του $\models_{\mathcal{A}} \psi[s]$) τότε

$$\models_{\mathcal{A}} \neg\psi[s] \overset{o\rho}{\Longleftrightarrow} \text{ όχι } \models_{\mathcal{A}} \psi[s] \quad (\text{ή } \not\models_{\mathcal{A}} \psi[s])$$

(iii) Αν ϕ είναι $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ ή $(\psi_1 \vee \psi_2)$ ή $(\psi_1 \to \psi_2)$

$$\models_{\mathcal{A}} (\psi_1 \wedge \psi_2)[s] \overset{o\rho}{\Longleftrightarrow} \models_{\mathcal{A}} \psi_1[s] \text{ και } \models_{\mathcal{A}} \psi_2[s]$$

$$\models_{\mathcal{A}} (\psi_1 \vee \psi_2)[s] \overset{o\rho}{\Longleftrightarrow} \models_{\mathcal{A}} \psi_1[s] \text{ ή } \models_{\mathcal{A}} \psi_2[s]$$

$$\models_{\mathcal{A}} (\psi_1 \to \psi_2)[s] \overset{o\rho}{\Longleftrightarrow} \not\models_{\mathcal{A}} \psi_1[s] \text{ ή } \models_{\mathcal{A}} \psi_2[s]$$

(iv) Αν ϕ είναι $\forall x\psi$ (άρα το ψ κτισμένο πριν από το ϕ και άρα ξέρουμε την $\models_{\mathcal{A}} \psi[s]$ όχι μόνο για την s που εξετάζουμε αλλά και για οποιαδήποτε άλλη s διαφορετική) τότε

$$\models_{\mathcal{A}} \forall x\psi \overset{op}{\Longleftrightarrow} \models_{\mathcal{A}} \psi[s(x/a)] \text{ για όλα τα } a \in |\mathcal{A}|, \text{ όπου}$$

$$s(x/a) : V \to |\mathcal{A}| \text{ είναι η } s(x/a)(y) = \begin{cases} s(y) & \text{αν } y \not\equiv x \\ a & \text{αν } y \equiv x \end{cases}$$

Δηλαδή $s(x/a)$ είναι ίδια με την s, με τη διαφορά ότι στη μεταβλητή x παίρνει την τιμή a.

(v) Αν ϕ είναι $\exists x\psi$ τότε

$$\models_{\mathcal{A}} \exists x\psi[s] \overset{op}{\Longleftrightarrow} \text{ υπάρχει ένα } a \in |\mathcal{A}| \text{ ώστε } \models_{\mathcal{A}} \psi[s(x/a)]$$

Πρόταση 4.16 *Έστω ϕ τύπος που οι ελεύθερες μεταβλητές του είναι υποσύνολο του $\{y_1, \ldots, y_\kappa\}$, όπου $y_1, \ldots, y_\kappa$ μεταβλητές. Έστω s και s' απονομές για τις οποίες $s(y_1) = s'(y_1), \ldots, s(y_\kappa) = s'(y_\kappa)$. Τότε*

$$\models_{\mathcal{A}} \phi[s] \Longleftrightarrow \models_{\mathcal{A}} \phi[s']$$

Απόδειξη Αποδεικνύουμε πρώτα ότι αν t όρος με μεταβλητές μεταξύ των $y_1, \ldots, y_\kappa$ τότε $\overline{s}(t) = \overline{s'}(t)$. [Με επαγωγή στον t.]

- αν t μεταβλητή x τότε $x = y_i$ για κάποιο $i \in \{1, \ldots, \kappa\}$, άρα $s(y_i) = s'(y_i)$.
- Αν t σύμβολο σταθεράς c τότε $\overline{s}(t) = c^{\mathcal{A}} = \overline{s'}(t)$.
- Αν $t = f^n(t_1, \ldots, t_n)$, τότε από την επαγ. υπόθ. $\forall i = 1, \ldots, n$ $\overline{s}(t_i) = \overline{s'}(t_i)$. Άρα $\overline{s}(t) = (f^n)^{\mathcal{A}}(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n)) = (f^n)^{\mathcal{A}}(\overline{s'}(t_1), \ldots, \overline{s'}(t_n)) = \overline{s'}(t)$.

Κατόπιν αποδεικνύουμε την πρόταση με επαγωγή στον ϕ.

- ϕ είναι ατομικός $\Rightarrow \phi \equiv R(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \models_{\mathcal{A}} \phi[s] &\Leftrightarrow \models_{\mathcal{A}} R(t_1, \ldots, t_n) \\ &\Leftrightarrow R^{\mathcal{A}}(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n)) \\ &\Leftrightarrow R^{\mathcal{A}}(\overline{s'}(t_1), \ldots, \overline{s'}(t_n)) \\ &\Leftrightarrow \models_{\mathcal{A}} \phi[s']. \end{aligned}$$

- Το επαγωγικό βήμα σαν άσκηση. □

Απ' την πρόταση 4.16 φαίνεται ότι αν ϕ είναι πρόταση τότε το σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών της ϕ είναι υποσύνολο του κενού συνόλου. Άρα για κάθε απονομές s και s' έχουμε ότι $\models_{\mathcal{A}} \phi[s] \Leftrightarrow \models_{\mathcal{A}} \phi[s']$. Άρα είτε για όλες τις $s : V \to |\mathcal{A}|$ έχουμε $\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$ είτε για όλες τις $s : V \to |\mathcal{A}|$ έχουμε $\not\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$. Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η ϕ είναι *αληθής* στην $\mathcal{A}$ και γράφουμε $\models_{\mathcal{A}} \phi$, στη δεύτερη περίπτωση λέμε ότι η ϕ είναι *ψευδής* στην $\mathcal{A}$ και γράφουμε $\not\models_{\mathcal{A}} \phi$. Πολλές φορές, αντί του $\models_{\mathcal{A}} \phi$ γράφουμε $\mathcal{A} \models \phi$ και αντί του $\not\models_{\mathcal{A}} \phi$ γράφουμε $\mathcal{A} \not\models \phi$.

Παράδειγμα 4.17 Έστω $\mathcal{L} = \{<\}$ και $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ και έστω s με $s(x) = 3$ και $s(y) = 5$. Τότε $\models_{\mathcal{A}} x < y[s]$ διότι $\langle s(x), s(y) \rangle \in <^{\mathcal{A}}$, δηλαδή $3 < 5$.

Παράδειγμα 4.18 Έστω $\mathcal{L} = \{<, +, 0\}$ και ερμηνεία $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, <^{\mathcal{A}}, +^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}} \rangle$. Τότε $\models_{\mathcal{A}} \forall x(0 < x + 1)[s]$,με οποιαδήποτε s, διότι αν $a \in \mathbb{N}$ τότε έχουμε $\models_{\mathcal{A}} 0 < x + 1[s(x/a)]$ διότι αυτό σημαίνει ότι $0^{\mathcal{A}} <^{\mathcal{A}} s(x/a)(x) +^{\mathcal{A}} 1$, δηλαδή $0 < a + 1$, πράγμα ορθό στο $\mathbb{N}$.

Ορισμός 4.19 *Αν ϕ είναι τύπος (που πιθανόν να έχει και ελεύθερες μεταβλητές) τότε λέμε ότι ϕ είναι* αληθής *στην ερμηνεία $\mathcal{A}$ όταν για κάθε απονομή $s : V \to |\mathcal{A}|$ έχουμε ότι $\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$ και τότε γράφουμε επίσης $\models_{\mathcal{A}} \phi$ ή $\mathcal{A} \models \phi$. Αν ένας τύπος ϕ, της γλώσσας $\mathcal{L}$, είναι αληθής σε όλες τις ερμηνείες της $\mathcal{L}$ λέμε ότι ο ϕ είναι* έγκυρος τύπος *ή λογικά* έγκυρος τύπος *και γράφουμε $\models \phi$.*

Άμεσα, από τον ορισμό, έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.20 *Αν $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ είναι τύπος τότε ϕ είναι αληθής στην $\mathcal{A}$ αν και μόνον αν $\models_{\mathcal{A}} \forall x_1 \cdots \forall x_k \phi(x_1, \ldots, x_k)$ [Η πρόταση $\forall x_1 \cdots \forall x_k \phi(x_1, \ldots, x_k)$ λέγεται και* καθολική κλειστότητα *του τύπου ϕ].*

Ορισμός 4.21 *Αν Σ είναι ένα σύνολο τύπων της γλώσσας $\mathcal{L}$ τότε η ερμηνεία $\mathcal{A}$ της $\mathcal{L}$ λέγεται* μοντέλο *του Σ (ή* ικανοποιεί *το Σ) αν για κάθε $\sigma \in \Sigma$ έχουμε ότι σ είναι αληθής στην ερμηνεία $\mathcal{A}$.*

Είναι προφανές ότι $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο του Σ αν και μόνον αν $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο του Σ', όπου Σ' είναι το σύνολο των προτάσεων που είναι οι καθολικές κλειστότητες του Σ.

Ορισμός 4.22 *Έστω $\Sigma \cup \{\phi\}$ σύνολο προτάσεων της $\mathcal{L}$. Γράφουμε $\Sigma \models \phi$ αν ϕ είναι αληθής σε όλα τα μοντέλα του Σ. Ο ορισμός επεκτείνεται και στην περίπτωση που $\Sigma \cup \{\phi\}$ είναι σύνολο τύπων. $\Sigma \models \phi$ σημαίνει και σ'αυτή την περίπτωση ότι ο τύπος ϕ είναι αληθής σε όλα τα μοντέλα του Σ.*

Ορισμός 4.23 *Έστω $\Sigma \cup \{\phi\}$ σύνολο τύπων. Λέμε ότι Σ λογικά συνεπάγεται τον ϕ αν για κάθε $\mathcal{A}$ και κάθε αποτίμηση s στην $\mathcal{A}$, αν αληθεύει ότι $\models_{\mathcal{A}} \psi[s]$ για κάθε $\psi \in \Sigma$, τότε $\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$.*

Πρόταση 4.24 *Αν Σ λογικά συνεπάγεται τον ϕ τότε $\Sigma \models \phi$.*

Απόδειξη Έστω $\mathcal{A}$ μοντέλο του Σ και έστω s αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Τότε επειδή κάθε $\psi \in \Sigma$ είναι αληθής στην $\mathcal{A}$ ισχύει ότι $\models_{\mathcal{A}} \psi[s]$, για κάθε $\psi \in \Sigma$. Άρα και $\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$, επειδή Σ λογικά συνεπάγεται τον ϕ.

Η σχέση $\Sigma \models \phi$ μπορεί να νοηθεί ως εξής: Έστω ότι ισχύουν αυτά που διατυπώνονται μέσω των προτάσεων του Σ. Άρα θα ισχύει και ο ϕ, δηλαδή μπορεί να νοηθεί ως ένα είδος έγκυρου «συλλογισμού». Αν ο συλλογισμός αυτός δεν είναι έγκυρος θα πρέπει $\Sigma \not\models \phi$. Ας δούμε ένα παράδειγμα με ένα συλλογισμό στην καθημερινή γλώσσα.

Κανένας σπουδαστής δεν είναι τρομοκράτης.
Μερικοί φανατικοί είναι τρομοκράτες.
ΑΡΑ
Μερικοί σπουδαστές είναι φανατικοί.

Μπορούμε να τυποποιήσουμε αυτό το συλλογισμό εισάγοντας σύμβολα μονοθέσιων κατηγορημάτων Σ, T και Φ για τα Σπουδαστής, Τρομοκράτης και Φανατικός και να διατυπώσουμε το συλλογισμό αποδεικνύοντας ότι δεν έγκυρος, αποδεικνύοντας δηλαδή ότι $\forall x(\Sigma(x) \to \neg T(x)),\ \exists x(\Phi(x) \wedge T(x)) \not\models \exists x(\Sigma(x) \wedge \Phi(x))$. Αυτό φαίνεται επιλέγοντας μια ερμηνεία $\mathcal{A}$ με $|\mathcal{A}| = \{a, b, c\}$ και $\Sigma^{\mathcal{A}} = \{a\}, T^{\mathcal{A}} = \{b\}, \Phi^{\mathcal{A}} = \{b, c\}$, η οποία καθιστά τις υποθέσεις αληθείς ενώ το συμπέρασμα ψευδές.

Λήμμα 4.25 *Έστω t και u όροι, s αποτίμηση. Έστω $t' = t(u/x)$ και $s' = s(x/\overline{s}(u))$. Τότε $\overline{s}(t') = \overline{s'}(t)$.*

Μια γραφική απόδοση του λήμματος είναι η παρακάτω:

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[rr, "\text{αντικατάσταση}"] \arrow[dr, "\overline{s(x/\overline{s}(u))}"'] & & t(u/x) \arrow[dl, "\overline{s}"] \\
& |\mathcal{A}| &
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη Με επαγωγή στον όρο t. Εάν $t = x$ τότε $t(u/x) = u$. Άρα $\overline{s}(t(u/x)) = \overline{s}(u)$ το οποίο ισούται με το $\overline{s'}(t)$ διότι $\overline{s'}(t) = \overline{s'}(x) = \overline{s}(u)$, [διότι η τιμή του s' στο x είναι το $\overline{s}(u)$.

Εάν $t = y$ και $y \neq x$ τότε $t(u/x) = t$. Άρα $\overline{s}(t(u/x)) = \overline{s}(t) = \overline{s}(y) = \overline{s'}(y) =$, [διότι s και s' έχουν διαφορετική τιμή μόνον στο x].

Εάν $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ τότε $\overline{s}(t(u/x)) = \overline{s}(f(t_1(u/x), \ldots, t_n(u/x))) \overset{\text{Ε.Υ.}}{=} f^{\mathcal{A}}(\overline{s'}(t_1), \ldots, \overline{s'}(t_n)) = \overline{s'}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \overline{s'}(t)$.

Πρόταση 4.26 *$\models_{\mathcal{A}} \phi(t/x)[s] \Leftrightarrow \models_{\mathcal{A}} \phi[s']$, όπου $s' = s(x/\overline{s}(t))$ και x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ϕ.*

Απόδειξη Με επαγωγή στον ϕ.

Δύο είναι οι κύριες περοπτώσεις:

Περίπτωση Α: $\phi = \forall y\psi$ και x όχι ελεύθερη στον ϕ.

Τότε s και $s(x/\overline{s}(t))$ συμφωνούν σε όλες τις ελεύθερες μεταβλητές του ϕ και $\phi(t/x) = \phi$.

Περίπτωση Β: $\phi = \forall y\psi$ και x εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ.

Επειδή x αντικαταστάσιμη από τον t στον ϕ έπεται ότι y δεν εμφανίζεται στον t και βέβαια x αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ. Επειδή y δεν εμφανίζεται στον t έχουμε ότι

$$\overline{s}(t) = \overline{s(y/d)}(t), \text{ για κάθε } d \in |\mathcal{A}| \ (*)$$

Επειδή $x \neq y$, $\phi(t/x) = \forall y\psi(t/x)$. Άρα
$\models_{\mathcal{A}} \phi(t/x)[s] \Leftrightarrow$ για κάθε d, $\models_{\mathcal{A}} \psi(t/x)[s(y/d)]$
$\overset{\text{Ε.Υ.}}{\Leftrightarrow} \ \psi[s(y/d)(x/\overline{s(y/d)}(t))]$
$\overset{*}{\Leftrightarrow} \ \psi[s(y/d)(x/\overline{s}(t))]$
$\Leftrightarrow \ \forall y\psi[s(\Leftrightarrow x/\overline{s}(t))]$.

Πόρισμα 4.1 *Εάν* $\models_{\mathcal{A}} \forall x\phi[s]$ *τότε* $\models_{\mathcal{A}} \phi(t/x)[s]$.

Απόδειξη Επειδή $\models_{\mathcal{A}} \forall x\phi[s]$, έχουμε ότι $\models_{\mathcal{A}} \phi[s(x/d)]$, για κάθε $d \in |\mathcal{A}|$. Έστω $d = \overline{s}(t)$. Τότε $\models_{\mathcal{A}} \phi[s(x/\overline{s}(t))]$, οπότε από πρόταση 4.26 $\models_{\mathcal{A}} \phi(t/x)[s]$.

Πόρισμα 4.2 *Ο τύπος* $\forall x\phi \to \phi(t/x)$ *είναι έγκυρος.*

4.3 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι οι τύποι

   i) $\forall x\phi(x) \to \phi(t)$ [όπου t είναι αντικαταστάσιμος για την x στον $\phi(x)$]

   ii) $\forall x(\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall x\psi)$ [όπου ο ϕ δεν έχει ελεύθερες εγγραφές της x]

   είναι αληθείς σε όλες τις ερμηνείες.

2. Λέμε ότι ένας τύπος είναι *στιγμιότυπο ταυτολογίας* όταν έχει προκύψει από έναν προτασιακό τύπο που είναι ταυτολογία μετά από αντικατάσταση όλων των προτασιακών μεταβλητων με τύπους της γλώσσας. λ.χ. Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ και ψ ο τύπος $\phi \to (\psi \to \phi)$ είναι περίπτωση ταυτολογίας μια και έχει προκύψει από την ταυτολογία $A_1 \to (A_2 \to A_1)$ όπου έχουμε αντικαταστήσει την A_1 με ϕ και την A_2 με ψ. Αποδείξτε ότι κάθε περίπτωση ταυτολογίας είναι αληθής σε κάθε ερμηνεία $\mathcal{A}$.

3. Αποδείξτε ότι ο τύπος

$$\forall x_2 \exists x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to \exists x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$$

δεν είναι λογικά έγκυρος.

4. Δείξτε ότι οι τύποι

$$(\forall x_1 R_1^1(x_1) \to \forall x_1 R_2^1(x_1)) \to \forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1))$$

και

$$\forall x_1 (R_1^1(x_1) \vee R_2^1(x_1)) \to (\forall x_1 R_1^1(x_1) \vee \forall x_1 R_2^1(x_1))$$

δεν είναι λογικά έγκυροι.

5. Δείξτε ότι οι κάτωθι τύποι είναι λογικά έγκυροι.

   (i) $\forall x \phi \leftrightarrow \neg \exists x \neg \phi$
   (ii) $\exists x \phi \leftrightarrow \neg \forall x \neg \phi$

   } Άρα καθένα από τα $\forall$ και $\exists$ ορίζεται συναρτήσει του άλλου

   (iii) $\forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x \phi \to \forall x \psi)$

   (iv) $(\forall x \phi \wedge \forall x \psi) \leftrightarrow \forall x(\phi \wedge \psi)$

   (v) $(\forall x \phi \vee \forall x \psi) \to \forall x(\phi \vee \psi)$

   (vi) $\exists x \exists y \phi \leftrightarrow \exists y \exists x \phi$

   (vii) $\exists x \forall y \phi \to \forall y \exists x \phi$

Παραδείγματα 4.27 *1. Ο τύπος $Q(x) \to \forall x Q(x)$, όπου $Q(x)$ είναι σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων, δεν είναι έγκυρος. Αρκεί να βρούμε μία ερμηνεία $\mathcal{A}$ και μία αποτίμηση s έτσι ώστε $\not\models_{\mathcal{A}} Q(x) \to \forall x Q(x)$. Μπορούμε να δοκιμάσουμε την $|\mathcal{A}| = \{a.b\}$, $Q = \{a\}$ με οποιαδήποτε s ώστε $s(x) = s$.*

2. $\forall x Q(x) \to \exists y Q(y)$ είναι έγκυρος.

3. Ο τύπος $\forall y \exists x R(x, y) \to \exists x \forall y R(x, y)$ δεν είναι έγκυρος. Αρκεί να πάρουμε $|\mathcal{A}| = \mathbb{Z}$ με $R(x, y)$ να είναι $x < y$.

5 Σύστημα Hilbert

Αξιωματικό σύστημα τύπου Hilbert για τον κατηγορηματικό λογισμό.

Στον προτασιακό λογισμό το ζητούμενο της αποδεικτικής διαδικασίας που ορίστηκε ήταν η παραγωγή των καθολικά ισχυόντων προτασιακών τύπων δηλ. των ταυτολογιών. Εκεί είδαμε ότι υπάρχουν δύο προσεγγίσεις στο πρόβλημα του εάν ένας δοσμένος προτασιακός τύπος ϕ είναι ταυτολογία. Η πρώτη προσέγγιση είναι σημασιολογική, σχηματίζουμε τον αληθοπίνακα που ορίζεται από τον ϕ και αν όλες οι τιμές του αληθοπίνακα είναι T τότε συμπεραίνουμε ότι ο ϕ είναι ταυτολογία. Αυτή η διαδικασία είναι απόλυτα αποτελεσματική (αλγοριθμική) αφού κατασκευαστικά, σε πεπερασμένο χρόνο, έχουμε το αποτέλεσμα. Η δεύτερη διαδικασία είναι η προσπάθεια κατασκευής μιας απόδειξης του ϕ στο τυπικό αξιωματικό σύστημα που ορίσαμε. Αυτή η διαδικασία φαίνεται να είναι λιγότερο αποτελεσματική μια και φαίνεται να εξαρτάται από την εξυπνάδα μας να ανακαλύψουμε μία τέτοια απόδειξη[5]. Το θεώρημα της ορθότητας και της πληρότητας δείχνουν ότι οι δύο διαδικασίες είναι ισοδύναμες.

Εάν μεταφέρουμε την ίδια συλλογιστική στην περίπτωση του κατηγορηματικού λογισμού θα δούμε ότι η προσπάθεια να ανακαλύψουμε με σημασιολογικό τρόπο την εγκυρότητα ενός τύπου ϕ (το ανάλογο της ταυτολογίας) προσκρούει στο γεγονός ότι σ' αυτή την περίπτωση πρέπει να εξετάσουμε την αλήθεια του ϕ σε όλες τις ερμηνείες της γλώσσας. Και παρόλο που σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις αυτό είναι εφικτό (π.χ. όταν ο ϕ έχει τη μορφή $\psi \to \psi$), στην γενική περίπτωση είναι αδύνατο να σκεφτούμε πώς αυτό μπορεί να γίνει αποτελεσματικά μια και πρέπει να εξετάσουμε άπειρες το πλήθος ερμηνείες της γλώσσας[6]. Εδώ μπορούμε να προσφύγουμε στη δεύτερη προσέγγιση δηλ. στην προσπάθεια να ανακαλύπτουμε μία απόδειξη σε ένα κατάλληλα ορισμένο αξιωματικό σύστημα. Από τη στιγμή που ανακαλύπτουμε μία τέτοια απόδειξη θα ξέρουμε ότι ο ϕ είναι έγκυρος. Αργότερα θα δούμε ότι στην περίπτωση του κατηγορηματικού λογισμού δεν υπάρχει αλγόριθμος που να απαντάει αν ο οποιοσδήποτε ϕ είναι έγκυρος τύπος ή όχι.

Ας θεωρήσουμε μία πρωτοβάθμια γλώσσα $\mathcal{L}$ όπου στα λογικά της σύμβολα έχουμε βάλει (για λόγους απλότητας) μόνον τους συνδέσμους $\neg$ και $\to$ και μόνον τον ποσοδείκτη $\forall$. Μια και το σύνολο $\{\neg, \to\}$ είναι ένα επαρκές σύνολο συνδέσμων, μπορούμε να ορίσουμε όλους τους άλλους μέσω αυτών. Όσον αφορά τον ποσοσδείκτη $\exists$ μπορούμε να τον ορίσουμε μέσω του $\forall$. Ορίζουμε $\exists x\phi$ να είναι $\neg\forall x\neg\phi$. Με αυτούς τους ορισμούς όλα τα οριζόμενα αποκτούν τη συνηθισμένη τους σημασία.

Θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε ένα τυπικό αξιωματικό σύστημα με το οποίο θα αποδεικνύουμε όλες τις μαθηματικές (και λογικές) αλήθειες.

Χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σχήματα λογικών *αξιωμάτων*. Για οποιουσ-

[5] Στην περίπτωση του προτασιακού λογισμού υπάρχει ένας αλγόριθμος που κατασκευάζει μία απόδειξη του ϕ στην περίπτωση που ο ϕ είναι ταυτολογία (άσκηση).

[6] Ας αφήσουμε και το ότι στην κάθε συγκεκριμμένη ερμηνεία είναι δύσκολο να φανταστούμε τον έλεγχο της αλήθειας μια και η ερμηνεία μπορεί να είναι άπειρη.

δήποτε τύπους ϕ, ψ, χ οι ακόλουθοι (πιο σύνθετοι) τύποι είναι αξιώματα:

A1 $\phi \to (\psi \to \phi)$

A2 $(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$

A3 $(\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$

A4 $\forall x\phi(x) \to \phi(t)$, με την προϋπόθεση ότι x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον $\phi(x)$.

A5 $\forall x(\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall x\psi)$, με την προϋπόθεση ότι ο ϕ δεν περιέχει καμμία ελεύθερη εμφάνιση της x.

Κανόνες Απαγωγής: Χρησιμοποιούμε δύο κανόνες απαγωγής:

Τον MODUS PONENS (MP). Ο κανόνας αυτός μας λέει ότι από τους $\phi \to \psi$ και ϕ απάγουμε (συμπεραίνουμε) τον ψ. Σχηματικά

$$\frac{\phi \to \psi \quad \phi}{\psi} MP$$

Τον κανόνα της Γενίκευσης (Gen): Από τον ϕ απάγουμε τον $\forall x\phi$. Σχηματικά

$$\frac{\phi}{\forall x\phi} Gen$$

Παρατήρηση: Ο Gen έχει την εξής έννοια. Πώς συμπεραίνουμε ότι για κάθε x ένας ισχυρισμός $\phi(x)$ ισχύει; δηλαδή πώς $\forall x\phi(x)$; Αρκεί ν' αποδείξουμε τον $\phi(x)$ για τυχόν x.

Ορισμός 5.1 *Μία* Θεωρία *(στη γλώσσα $\mathcal{L}$) είναι ένα σύνολο τύπων της γλώσσας $\mathcal{L}$, οι οποίες ονομάζονται* μη-λογικά αξιώματα *της θεωρίας. Αντιθέτως, τα αξιώματα που παράγονται από τα σχήματα αξιωμάτων A1–A5 ονομάζονται* λογικά αξιώματα. *Τις θεωρίες τις συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα T,Σ,...*

Ορισμός 5.2 (Τυπική) Απόδειξη *στη θεωρία T ονομάζεται κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ τύπων για τους οποίους ισχύουν τα κάτωθι:*

Για κάθε i όπου $1 \leq i \leq n$ ο τύπος ϕ_i είναι, είτε

1. *ένα λογικό αξίωμα $A1$, $A2$,$A3$,$A4$, ή $A5$*
2. *είτε ανήκει στην T, δηλαδή είναι ένα μη λογικό αξίωμα της T*
3. *είτε υπάρχουν ϕ_j, ϕ_k τύποι της ακολουθίας $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ με $j < i$ και $k < i$ ώστε $\phi_j \equiv \phi_k \to \phi_i$ (δηλαδή ο ϕ_i είναι το συμπέρασμα κανόνα MP με υποθέσεις τύπους με μικρότερο δείκτη, δηλαδή που προηγούνται στην απόδειξη από τον ϕ_i)*

4. *είτε υπάρχει ϕ_j με $j < i$ και ϕ_i έχει τη μορφή $\forall x \phi_j$*

   (δηλαδή είναι το συμπέρασμα κανόνα Gen με υπόθεση που προηγείται στην απόδειξη από τον ϕ_i).

Παρατήρηση 5.3 *Για να είναι μια ακολουθία τύπων απόδειξη θα πρέπει να υπάρχει μια «αιτιολογία» ότι σε κάθε βήμα ικανοποιείται η προδιαγραφή που επιβάλλει ο ορισμός 5.2. Όταν παρουσιάζουμε μια απόδειξη, καταγράφουμε ως σχόλιο σε κάθε βήμα αυτή την αιτιολογία, οπότε ο έλεγχος ότι όντως η ακολουθία είναι απόδειξη να γίνεται πολύ εύκολα. Όταν σε μια απόδειξη υπάρχει μια εφαρμογή του κανόνα της γενίκευσης με συμπέρασμα της μορφής $\forall x \phi$ λέμε ότι έχουμε εφαρμογή του κανόνα της γενίκευσης με μεταβλητή x. Όταν αναφερόμαστε σε μια απόδειξη ωε ακολουθία τύπων, θα χρησιμοποιούμε τον όρο* τυπική απόδειξη.

Ορισμός 5.4 Θεώρημα *της θεωρίας T ονομάζεται κάθε τύπος ϕ για τον οποίο υπάρχει απόδειξη $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ στη θεωρία T με $\phi_n \equiv \phi$.*

Αν ϕ είναι θεώρημα της T, γράφουμε $T \vdash \phi$. Αν $T = \emptyset$, δηλαδή αν θεωρήσουμε ότι έχουμε μία θεωρία χωρίς μη λογικά αξιώματα, γράφουμε $\vdash \phi$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η απόδειξη είναι στον καθαρό κατηγορηματικό λογισμό. Είναι προφανές ότι όποια απόδειξη δεν χρησιμοποιεί για την κατασκευή της μη λογικά αξιώματα, είναι απόδειξη στον καθαρό κατηγορηματικό λογισμό. Και βέβαια είναι επίσης προφανές ότι $\vdash \phi$ συνεπάγεται $T \vdash \phi$ για οποιοδήποτε T.

Ορισμός 5.5 *Ο τύπος ϕ είναι* στιγμιότυπο ταυτολογίας *εάν έχει προκύψει από ένα προτασιακό τύπο που είναι ταυτολογία με την αντικατάσταση των προτασιακών του μεταβλητών από τύπους. Εννοείται ότι όταν αντικαθιστούμε μία προτασιακή μεταβλητή A με ένα τύπο αντικαθιστούμε όλες τις εμφανίσεις της A με τον τύπο αυτό.*

π.χ. Οι τύποι $\phi \to \phi$, $(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$, κ.λ.π. έναι στιγμιότυπα ταυτολογίας.

Παρατήρηση 5.6 *Το τυπικό σύστημα που ορίσαμε περιλαμβάνει τα αξιώματα A1, A2, A3, του αντίστοιχου συστήματος του προτασιακού λογισμού, καθώς και τον κανόνα Modus Ponens. Είναι λοιπόν επέκταση αυτού του συστήματος. Άρα είναι φανερό ότι κάθε στιγμιότυπο ταυτολογίας είναι θεώρημα του συστήματος τύπου Hilbert για τον κατηγορηματικό λογισμό. Διότι αν ένας τύπος είναι στιγμιότυπο ταυτολογίας η ταυτολογία από την οποία προέκυψε θα αποδεικνύεται από το σύστημα του προτασιακού λογισμού. Άρα χρησιμοποιώντας την ίδια ακριβώς απόδειξη, όπου όμως αντί των προτασιακών τύπων έχουμε τώρα τα στιγμιότυπα που προκύπτουν από την αντικατάσταση των προτασιακών μεταβλητών από τους αντίστοιχους τύπους, δημιουργούμε μια απόδειξη στο σύστημα του κατηγορηματικού λογισμού.*

Παρατήρηση 5.7 *Για τους περιορισμούς που έχουμε θέσει στα αξιώματα A4 και A5. Θέλουμε όλα τα λογικά αξιώματα να είναι έγκυροι λογικοί τύποι. Γι' αυτό οι περιορισμοί στα A4 και A5 είναι απαραίτητοι.*

π.χ. στο αξίωμα A4. Έστω $\phi(x)$ το $\neg\forall y R(x,y)$ και έστω t το y. Εδώ η x δεν είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον $\phi(x)$. Θεωρείστε τώρα μια περίπτωση του αξιώματος A4 (χωρίς τον περιορισμό) $\forall x(\neg\forall y R(x,y)) \to \neg\forall y R(y,y)$. Πάρτε τώρα σαν ερμηνεία ένα πεδίο με δύο στοιχεία και έστω R να ερμηνεύεται με την ισότητα δηλ. $R^{\mathcal{A}}(a,b)$ να σημαίνει $a = b$. Τότε η υπόθεση της πρότασης είναι αληθής ανώ το συμπέρασμα ψευδές.

Στην περίπτωση του A5, έστω ϕ και ψ είναι αμφότερα το $R(x)$. Τότε x είναι ελεύθερη στο ϕ. Μια περίπτωση του A5 θα είναι $\forall x(R(x) \to R(x)) \to (R(x) \to \forall x R(x))$. Αλλά η υπόθεση της πρότασης είναι λογικά έγκυρη (αληθής) ενώ το συμπέρασμα όχι διότι αν πάρουμε μία δομή όπου η $R^{\mathcal{A}}$ να αληθεύει για κάποια αλλά όχι για όλα τα στοιχεία του $|\mathcal{A}|$ τότε το συμπέρασμα δεν είναι αληθές.

Θεώρημα 5.8 (Θεώρημα κλειστότητας) *Εάν ϕ' είναι η καθολική κλειστότητα του ϕ τότε*

$$T \vdash \phi \Leftrightarrow T \vdash \phi'$$

Απόδειξη $\Rightarrow$: Προφανές από τον κανόνα Gen.

$\Leftarrow$: Έστω ϕ' η πρόταση $\forall x_1 \cdots \forall x_n \phi$. Μπορούμε να βγάλουμε τους ποσοδείκτες με διαδοχικές εφαρμογές των A_4 και MP. □

Θεώρημα 5.9 (Το θεώρημα της απαγωγής) *Αν $T, \phi \vdash \psi$ και αν στην απόδειξη του ψ από το T, ϕ δεν υπάρχει εφαρμογή του κανόνα της γενίκευσης με μεταβλητή που εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ, τότε $T \vdash \phi \to \psi$.*

Απόδειξη Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο μήκος n της τυπικής απόδειξης $\phi_1, \ldots, \phi_n \equiv \psi$ του ψ από το T, ϕ. Είναι προφανές ότι αν σε μία τυπική απόδειξη δεν έχουμε εφαρμογή κανόνα γενίκευσης με κάποια μεταβλητή x, τότε και σε κανένα αρχικό τμήμα της τυπικής απόδειξης (η οποία είναι απόδειξη με μικρότερο μήκος) δεν έχουμε εφαρμογή του κανόνα της γενίκευσης με μεταβλητή x. Άρα θα μπορούμε να εφαρμόζουμε της επαγωγική υπόθεση.

Υπάρχουν τρείς περιπτώσεις όπου το θεώρημα ισχύει άμεσα. Είναι οι περιπτώσεις όπου ο ψ είναι ϕ ή ανήκει στο T ή είναι λογικό αξίωμα. Στην πρώτη περίπτωση το θεώρημα ισχύει επειδή $\phi \to \phi$ είναι στιγμιότυπο ταυτολογίας, στη δεύτερη και τρίτη περίπτωση από Modus Ponens, επειδή $T \vdash \phi \to (\psi \to \phi)$ (στιγμιότυπο ταυτολογίας) και προφανώς $T \vdash \phi$. Οι περιπτώσεις αυτές καλύπτουν την περίπτωση $n = 1$, καθώς και την περίπτωση όπου $n > 1$ και η αιτιολόγηση για το $\psi \equiv \phi_n$ είναι ότι εμπίπτει σε μία από τις τρείς ως άνω περιπτώσεις. Έστω τώρα $n > 1$. Υπάρχουν δύο εναπομείνασες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Ο ψ προκύπτει με εφαρμόγή κανόνα MP με υποθέσεις ϕ' και $\phi' \to \psi$. Στους ϕ' και $\phi' \to \psi$ αντιστοιχούν τυπικές αποδείξεις με μήκος μικρότερο του n. Από Ε.Υ. έχουμε ότι $T \vdash \phi \to \phi'$ και $T \vdash \phi \to (\phi' \to \psi)$.

Οπότε με χρήση του αξιώματος A3 και εφαρμογές του MP, παίρνουμε το ζητούμενο $T \vdash \phi \to \psi$.

Περίπτωση 2. Ο ψ έχει τη μορφή $\forall x \psi_1$ και προκύπτει με εφαρμογή κανόνα γενίκευσης με μεταβλητή x. Τότε η μεταβλητή x δεν μπορεί να εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ. Η τυπική απόδειξη που αντιστοιχεί στον ψ_1 έχει μήκος μικρότερο του n και βέβαια δεν μπορεί να έχει εφαρμογή κανόνα γενίκευσης με μεταβλητή που εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ. Άρα από Ε.Υ. έχουμε $T \vdash \phi \to \psi_1$. Από κανόνα γενίκευσης παίρνουμε $T \vdash \forall x(\phi \to \psi_1)$. Επειδή η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ έχουμε ότι $T \vdash \forall x(\phi \to \psi_1) \to (\phi \to \forall x \psi_1)$ (αξίωμα A5). Με MP παίρνουμε το ζητούμενο.

Ως άμεση εφαρμογή του θεωρήματος της επαγωγής παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα

Πόρισμα 5.1 *Αν $T, \phi \vdash \psi$ και ϕ είναι πρόταση τότε $T \vdash \phi \to \psi$.*

Παράδειγμα 5.10 Θα αποδείξουμε ότι $\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x \phi \to \forall x \psi)$. Από το θεώρημα της επαγωγής αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\forall x(\phi \to \psi), \forall x \phi \vdash \forall x \psi$$

Κατασκευάζουμε την απόδειξη ως εξής:

1.	$\forall x(\phi \to \psi)$	Υπόθεση
2.	$\phi \to \psi$	1,A4
3.	$\forall x \phi$	Υπόθεση
4.	ϕ	3,A4
5.	ψ	2,4,MP
6.	$\forall x \psi$	5,Gen

Παρατηρούμε ότι, στην τυπική απόδειξη που κατασκευάσαμε, έχουμε εφαρμογή του κανόνα της γενίκευσης με μεταβλητή x που βέβαια δεν εμφανίζεται ελεύθερη στους τύπους $\forall x(\phi \to \psi), \forall x \phi$. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα της επαγωγής.

Παραδείγματα 5.11 *Θα δώσουμε και κάποια άλλα παραδείγματα τυπικών αποδείξεων. Στις τυπικές αποδείξεις θα πρέπει να μην εφαρμόζουμε τον κανόνα Gen με μεταβλητή που εμφανίζεται ελεύθερη σε κάποια από τις υποθέσεις, ώστε να μπορούμε να εφαρμόζουμε το θεώρημα της απαγωγής.*

$\vdash \forall x \forall y \phi \to \forall y \forall x \phi$, διότι

1.	$\forall x \forall y \phi$	*Υπόθεση*
2.	$\forall x \forall y \phi \to \forall y \phi$	*A4*
3.	$\forall y \phi$	*1, 2, MP*
4.	$\forall y \phi \to \phi$	*A4*
5.	ϕ	*3, 4, MP*
6.	$\forall x \phi$	*5, Gen*
7.	$\forall y \forall x \phi$	*6, Gen*

$\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$

1.	$\forall x(\phi \to \psi)$	*Υπόθεση*
2.	$\phi \to \psi$	*A4, MP*
3.	$\forall x\phi$	*Υπόθεση*
4.	ϕ	*A4, MP*
5.	ψ	*2, 4, MP*
6.	$\forall x\psi$	*5, Gen*

$\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to (\exists x\phi \to \exists x\psi)$

Ας θυμηθούμε ότι $\exists x$ *είναι το* $\neg\forall x\neg$. *Έχουμε την ακόλουθη απόπδειξη.*

1.	$\forall x(\phi \to \psi)$	*Υπόθεση*
2.	$\phi \to \psi$	*A4, MP*
3.	$\neg\psi \to \neg\phi$	*Από στιγμ. ταυτ.* $(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$, *MP*
4.	$\forall x\neg\psi$	*Υπόθεση*
5.	$\neg\psi$	*A4, MP*
6.	$\neg\phi$	*3, 5, MP*
7.	$\forall x\neg\phi$	*6. Gen*

Οπότε από θεώρημα απαγωγής $\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to \forall x\neg\psi \to \forall x\neg\phi$. *Από την ταυτολογία* $(C \to (A \to B)) \to (C \to\to (\neg B \to \neg A)$ *και MP παίρνουμε* $\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to (\neg\forall x\neg\phi \to \neg\forall x\neg\psi)$, *το οποίο είναι και το ζητούμενο.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ

I. **Μερική διάταξη:** Η γλώσσα έχει ως μη λογικά σύμβολα ένα μόνον σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων R_1^2 και δεν έχει σύμβολα σταθερών ή συναρτήσεων. Γράφουμε $x_i < x_j$ αντί για $R_1^2(x_i, x_j)$ και $x_i \not< x_j$ αντί για $\neg(x_i < x_j)$. Έχουμε δύο μη λογικά αξιώματα, τα εξής:

1. $\forall x_1(x_1 \not< x_1)$ (Μη αυτοπαθής)

2. $\forall x_1\forall x_2\forall x_3((x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3) \to (x_1 < x_3))$ (Μεταβατική)

Ένα μοντέλο αυτών των αξιωμάτων ή όπως λέμε ένα μοντέλο της θεωρίας θα ονομάζεται μερικώς διατεταγμένη δομή.

II. **Θεωρία Ομάδων:** Η γλώσσα θα περιλαμβάνει ένα σύμβολο κατηγορήματος R_1^2, ένα σύμβολο συναρτήσεως f_1^2 και ένα σύμβολο σταθεράς c_1. Θα γράφουμε $t = s$ αντί για $R_1^2(t, s)$, $t + s$ αντί για $f_1^2(t, s)$ και 0 αντί για c_1. Τα μη λογικά αξιώματα θα είναι:

1. $\forall x_1\forall x_2\forall x_3(x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3)$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

2. $\forall x_1(0 + x_1 = x_1)$ (ουδέτερο στοιχείο)

3. $\forall x_1 \exists x_2 (x_2 + x_1 = 0)$ (αντίθετο)

4. $\forall x_1 (x_1 = x_1)$

5. $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \rightarrow x_2 = x_1)$

6. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \rightarrow (x_2 = x_3 \rightarrow x_1 = x_3))$

7. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_2 = x_3 \rightarrow (x_1 + x_2 = x_1 + x_3 \wedge x_2 + x_1 = x_3 + x_1))$

Τα αξιώματα 4,5,6,7 είναι αξιώματα που περιγράφουν τις ιδιότητες της ισότητας $=$. Κάθε μοντέλο αυτής της θεωρίας καλείται (προσθετική) ομάδα. Αν αυτό το μοντέλο ικανοποιεί επιπρόσθετα και την $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 + x_2 = x_2 + x_1)$ καλείται αβελιανή ομάδα.

Παρατήρηση: Τα αξιώματα 4,5,6, και 7 είναι αξιώματα τα οποία περιγράφουν τις ιδιότητες της σχέσης $=$ όταν την ερμηνεύουμε ως ισότητα (δηλ. αν $\mathcal{A}$ ερμηνεία της γλώσσας τότε $=^{\mathcal{A}} = \{(a,a) \mid a \in A\}$). Τα αξιώματα αυτά διατυπώνονται στα πλαίσια της συγκεκριμμένης θεωρίας. Μπορούμε όμως να τα γενικεύσουμε έτσι ώστε να έχουμε τις βασικές ιδιότητες της ισότητας σε οποιαδήποτε θεωρία.

Ορισμός 5.12 *Μία θεωρία T (δηλαδή ένα σύνολο τύπων) θα λέγεται* θεωρία με ισότητα *αν στη γλώσσα της θεωρίας υπάρχει ένα σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων $=$ και οι ακόλουθοι τύποι περιλαμβάνονται στα λογικά αξιώματα της θεωρίας (ονομάζονται και αξιώματα της ισότητας. Το σύνολο αυτών των αξιωμάτων το ονομάζουμε ΑξΙ).*

1. $\forall x_1 (x_1 = x_1)$

2. $x = y \rightarrow (\phi(x,x) \rightarrow \phi(x,y))$ *(Αντικαταστασιμότητα της ισότητας), όπου x, y οποιεσδήποτε μεταβλητές, $\phi(x,x)$ τυχαίος τύπος και $\phi(x,y)$ προκύπτει από τον $\phi(x,x)$ με αντικατάσταση κάποιων, αλλά όχι αναγκαστικά όλων, ελευθέρων εμφανίσεων της x από την y, με τον περιορισμό ότι η εμφάνιση της x είναι αντικαταστάσιμη από τις μεταβλητές y που την αντικαθιστούν.*

Στην περίπτωση αυτή ένας τύπος ϕ είναι θεώρημα μιας θεωρίας T με ισότητα αν στην τυπική απόδειξη του ϕ από το T μπορούμε να χρησιμοποιούμε και αξιώματα από το ΑξΙ, δηλαδή αν $T, \text{ΑξΙ} \vdash \phi$. Γράφουμε τότε $T \vdash_I \phi$. Όταν είναι σαφές ότι βρισκόμαστε σε μια θεωρία με ισότητα, μπορούμε, χάριν ευκολίας, να γράφουμε απλώς $T \vdash \phi$.

Άσκηση: Αποδείξτε ότι σε κάθε θεωρία με ισότητα ισχύουν τα κάτωθι:

1. Για κάθε όρο t, $\vdash t = t$.

2. $\vdash x = y \rightarrow y = x$.

3. $\vdash x = y \to (y = z \to x = z)$.

Σύμβαση: Από δω και στο εξής, όταν στη γλώσσα της θεωρίας υπάρχει το σύμβολο $=$, θα υποθέτουμε ότι έχουμε μία θεωρία με ισότητα, με $=$ το σύμβολο της ισότητας. Σ' αυτήν την περίπτωση η ερμηνεία της ισότητας θα είναι standard δηλ. αν $\mathcal{A}$ ερμηνεία της γλώσσας τότε $=^{\mathcal{A}} = \{(a, a) \mid a \in A\}$. Στην περίπτωση που δεν απαιτούμαι η ερμηνεία $\mathcal{A}$ να είναι η standard ερμηνεία, δηλαδή στην περίπτωση που $=^{\mathcal{A}}$ είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $|\mathcal{A}|^2$, η ερμηνεία ονομάζεται *ψευδοερμηνεία* της $\mathcal{A}$.

III. **Αριθμητική:** Η γλώσσα περιλαμβάνει τη σταθερά 0, το σύμβολο συνάρτησης μιας θέσεως S (που συμβολίζει τον επόμενο), τα σύμβολα συναρτήσεων $+$ και $\cdot$ καθώς και τα σύμβολα κατηγορημάτων $=$ και $<$. Τα αξιώματα (μη λογικά) γραφόμενα ανορθόγραφα για να γίνουν πιο κατανοητά είνα τα ακόλουθα:[7]

N1. $Sx \neq 0$

N2. $Sx = Sy \to x = y$

N3. $x + 0 = x$

N4. $x + Sy = S(x + y)$

N5. $x \cdot 0 = 0$

N6. $x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$

N7. $\neg(x < 0)$

N8. $x < Sy \leftrightarrow x < y \vee x = y$

N9. $x < y \vee x = y \vee y < x$

Η θεωρία αυτή ονομάζεται και αριθμητική του Robinson.

IV. **Αριθμητική του Peano:** Αν επιπλέον στην αριθμητική του Robinson προσθέσουμε το αξίωμα (πιο σωστά σχήμα αξιώματος)

$$(\phi(0) \wedge \forall x(\phi \to \phi(S(x)))) \to \forall x \phi(x)$$

όπου $\phi(x)$ είναι ένας τυχαίος τύπος της γλώσσας, τότε η θεωρία αυτή ονομάζεται αριθμητική του Peano και το επιπλέον αυτό αξίωμα ονομάζεται αξίωμα (ή αρχή) της μαθηματικής επαγωγής.

[7] Βεβαίως στη θεωρία αυτή, όπως απαιτεί η σύμβαση, περιλαμβάνονται και τα αξιώματα τηε ισότητας.

Ορισμός 5.13 *Έστω Σ ένα σύνολο τύπων και ϕ ένας τύπος (όλα στη γλώσσα $\mathcal{L}$). Γράφουμε $\Sigma \models \phi$ αν για κάθε μοντέλο $\mathcal{A}$ του Σ έχουμε ότι $\models_{\mathcal{A}} \phi$. Δηλαδή αν σε κάθε ερμηνεία $\mathcal{A}$, στην οποία είναι αληθείς όλοι οι τύποι του Σ, ο τύπος ϕ είναι αληθής. Αν $\Sigma = \emptyset$ γράφουμε $\models \phi$ που σημαίνει ότι ϕ είναι λογικά έγκυρος.*

Σημείωση: $\Sigma \vdash \phi$ είναι ισοδύναμο με το $\Sigma' \vdash \phi'$,όπου για κάθε $\psi \in \Sigma \cup \{\phi\}$, ψ' είναι η καθολική κλειστότητα του ψ.

Θεώρημα 5.14 (Θεώρημα της ορθότητας) *Αν T είναι μία θεωρία τότε $T \vdash \phi$ συνεπάγεται ότι $T \models \phi$. Δηλαδή αν ϕ είναι θεώρημα της T τότε η ϕ αληθεύει σε όλες τις δομές που είναι μοντέλα της T.*

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε ότι αν ϕ είναι λογικό αξίωμα τότε $\models \phi$, άρα και $T \models \phi$. Αυτό ισχύει για τα αξιώματα A1, A2 και A3 διότι είναι στιγμιότυπα ταυτολογιών. Για το A4 ισχύει λόγω του 4.2 και για το A5 λόγω του 4.3. Κατόπιν αποδεικνύουμε εύκολα ότι $T \models \phi$ και $T \models \phi \to \psi$ συνεπάγεται $T \models \psi$. Για τον κανόνα Gen έστω $T \models \phi(x)$ και έστω $\mathcal{A}$ μοντέλο του T. Αυτό σημαίνει ότι $\models_{\mathcal{A}} \phi[u]$ για κάθε αποτίμηση u στην $\mathcal{A}$. Έστω τώρα s οποιαδήποτε αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ και a οποιοδήποτε στοιχείο του $|\mathcal{A}|$. Η $s(x/a)$ είναι αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ και άρα, λόγω της πρτοηγούμενης παρατήρησης, $\models_{\mathcal{A}} \phi[s(x/a)]$. Άρα, τελικά $\models_{\mathcal{A}} \forall x\phi$, δηλαδή $T \models \forall x\phi$.

Ορισμός 5.15 Αντίφαση *ονομάζεται κάθε τύπος ο οποίος είναι στιγμιότυπο ενός προτασιακού τύπου που, κάτω από οποιαδήποτες απονομή, παίρνει την τιμή* T. *Στη γλώσσα με προτασιακούς συνδέσμους μόνον τους $\neg, \to$ μπορεί να έχει τη μορφή $\neg(\phi \to \phi)$, ενώ αν διαθέτουμε και τη σύζευξη μπορεί να έχει τη μορφή $\phi \wedge \neg\phi$. Μια αντίφαση δεν αληθεύει ποτέ σε καμμία δομή.*

Ένα σύνολο τύπων Σ λέγεται συνεπές *όταν δεν δυνατόν να έχουμε $\Sigma \vdash \phi$ και $\Sigma \vdash \neg\phi$. Ισοδύναμα όταν το Σ δεν μπορεί να αποδείξει μία αντίφαση (γιατί;). Μία θεωρία T λέγεται συνεπής όταν το σύνολο T είναι συνεπές.*

Ένα σύνολο Σ λέγεται ικανοποιήσιμο *όταν υπάρχει ένα μοντέλο του Σ.*

Είναι προφανές ότι για καμμία δομή $\mathcal{A}$ δεν είναι δυνατόν να έχουμε ότι $\models_{\mathcal{A}} \phi \wedge \neg\phi$. Άρα λόγω του θεωρήματος της ορθότητας:

Θεώρημα 5.16 *Αν Σ είναι ικανοποιήσιμο τότε Σ είναι συνεπές.*

Απόδειξη Επειδή Σ είναι ικανοποιήσιμο τότε υπάρχει $\mathcal{A}$ μοντέλο του Σ. Αν Σ δεν ήταν συνεπές τότε θα είχαμε $\Sigma \vdash \phi \wedge \neg\phi$. Αλλά λόγω του θεωρήματος της ορθότητας θα ήταν $\Sigma \models \phi \wedge \neg\phi$ άρα και $\models_{\mathcal{A}} \phi \wedge \neg\phi$, πράγμα αδύνατο. $\square$

Είδαμε ότι Σ είναι συνεπές όταν δεν είναι δυνατόν με βάση το Σ να αποδείξουμε μια αντίφαση. Είναι δυνατόν να δώσουμε ένα χαρακτηρισμό των μη–συνεπών (ασυνεπών) συνόλων;

Θεώρημα 5.17 *Ένα σύνολο προτάσεων Σ στη γλώσσα $\mathcal{L}$ είναι ασυνεπές όταν και μόνον όταν για κάθε πρόταση ψ της $\mathcal{L}$ έχουμε ότι $\Sigma \vdash \psi$.*

[Δηλαδή μία ασυνεπής θεωρία είναι χωρίς ενδιαφέρον αφού αποδεικνύει όλες τις προτάσεις!]

Απόδειξη $\Rightarrow$: Έστω Σ ασυνεπές. Τότε $\Sigma \vdash \phi$ και $\Sigma \vdash \neg\phi$. Για την οποιαδήποτε πρόταση ψ, από στιγμιότυπο ταυτολογίας έχουμε ότι $\Sigma \vdash (\phi \to (\neg\phi \to \psi))$ και άρα, με εφαρμογή MP, $\Sigma \vdash \psi$.

$\Leftarrow$: Αν $\Sigma \vdash \psi$ για κάθε πρόταση ψ τότε για κάθε τύπο ϕ έχουμε ότι $\Sigma \vdash (\phi \wedge \neg\phi)'$, όπου $(\phi \wedge \neg\phi)'$ είναι η καθολική κλειστότητα του $\phi \wedge \neg\phi$. Αλλά αν το Σ αποδεικνύει την καθολική κλειστότητα ενός τύπου τότε αποδεικνύει και τον τύπο. Άρα και $\Sigma \vdash \phi \wedge \neg\phi$. □

Θεώρημα 5.18 *Αν Σ είναι σύνολο τύπων, ϕ πρόταση και $\Sigma \nvdash \phi$ τότε $\Sigma, \neg\phi$ είναι συνεπές σύνολο.*

Απόδειξη Έστω $\Sigma, \neg\phi$ ασυνεπές. Τότε $\Sigma, \neg\phi \vdash (\neg\psi \wedge \neg\psi)$. Από θεώρημα απαγωγής 5.1, $\Sigma \vdash \neg\phi \to (\neg\psi \wedge \psi)$ και επειδή $(\neg\phi \to (\neg\psi \wedge \psi)) \to \phi$ είναι στιγμιότυπο ταυτολογίας, τελικά έχουμε $\Sigma \vdash \phi$ (Ατοπο). □

Είδαμε , με το θεώρημα της ορθότητας, πως ό,τι αποδεικνύεται από μία θεωρία είναι ορθό – δηλαδή αληθεύει – σε όλα τα μοντέλα της θεωρίας (έχει δηλαδή γενική ισχύ). Μπορούμε να ελπίζουμε ότι ισχύει το αντίστροφο; Δηλαδή αν μια πρόταση έχει αυτή τη γενική ισχύ μπορούμε να αναμένουμε ότι αυτή αποδεικνύεται από τα αξιώματα της θεωρίας; Δηλαδή οι αποδεικτικές δυνατότητες θα είναι ακριβώς ίσες ή θα υπολείπονται του συνόλου των προτάσεων που έχουν γενική ισχύ; Στο παρακάτω θεώρημα βλέπουμε πως για τα αξιωματικά μας συστήματα ισχύει μια πληρότητα, δηλαδή αυτά που μπορούμε να αποδείξουμε σε μια θεωρία είναι ακριβώς αυτά που αληθεύουν σε όλα τα μοντέλα της θεωρίας. Το θεώρημα αυτό, ένα από τα θεμελιώδη της μαθηματικής λογικής οφείλεται στον μεγάλο λογικό Kurt Gödel.

Θεώρημα 5.19 (Θεώρημα πληρότητας, Gödel 1930) *Αν $\Sigma \models \phi$ τότε $\Sigma \vdash \phi$.*

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε το θεώρημα της πληρότητας.

Ορισμός 5.20 *Η θεωρία T είναι πλήρης εάν για κάθε πρόταση ϕ είτε $T \vdash \phi$ είτε $T \vdash \neg\phi$. Αλλιώς η θεωρία είναι μη-πλήρης. Η θεωρία T είναι επέκταση της S εάν $T \subseteq S$.*

Λήμμα 5.2 (Το λήμμα του Lindenbaum) *Έστω S μια συνεπής θεωρία στη γλώσσα $\mathcal{L}$. Τότε υπάρχει μια πλήρης και συνεπής επέκταση της S.*

Απόδειξη Έστω $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n, \ldots$ μια αρίθμηση όλων των προτάσεων της γλώσσας $\mathcal{L}$. Ορίζουμε μια ακολουθία θεωριών $T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$, ως ακολούθως:

$$T_0 = S$$

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n \cup \{\neg\phi_{n+1}\} & \text{αν } T_n \nvdash \phi_{n+1} \\ T_n & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι $T_0 \subseteq T_1 \subseteq \cdots$ και επίσης από το 5.18 με επαγωγή ότι κάθε T_n είναι συνεπές. Έστω τώρα $T = \cup_{n=0}^{\infty} T_n$.

T είναι συνεπές: Διότι ας υποθέσουμε ότι $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$, για κάποιο ψ. Τότε, επειδή οι αποδείξεις των ψ και $\neg\psi$ χρησιμοποιούν μόνον πεπερασμένο πλήθος αξιωμάτων θα έχουμε $T_n \vdash \psi$ και $T_n \vdash \neg\psi$, για κάποιο n, πράγμα που αντιβαίνει στην συνέπεια του T_n.

T είναι πλήρες: Είναι προφανές διότι κάθε πρόταση της $\mathcal{L}$ είναι μια ϕ_n, για κάποιο n, άρα έχει χρησιμοποιηθεί, αυτή ή η άρνησή της, σε κάποιο T_n. $\square$

Ορισμός 5.21 *Ονομάζουμε τη θεωρία T,* θεωρία Henkin *εάν για κάθε τύπο της γλώσσας $\phi(x)$, με ακριβώς μια ελεύθερη μεταβλητή x, υπάρχει ένα σύμβολο σταθεράς c για το οποίο ισχύει ότι $T \vdash \exists x\phi(x) \to \phi(c)$.*

Για μια τέτοια θεωρία, με την προϋπόθεση ότι είναι πλήρης και συνεπής, βγαίνει ότι εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο $\mathcal{A}$. Για την κατασκευή χρησιμοποιούμε το συντακτικό - αποδεικτικό υλικό της θεωρίας.

Πρόταση 5.22 *Κάθε πλήρης και συνεπής θεωρία Henkin T έχει μοντέλο.*

Απόδειξη Ορίζουμε μια ερμηνεία $\mathcal{A}$ της γλώσσας $\mathcal{L}$ της θεωρίας T ως εξής:

Θέτουμε $|\mathcal{A}| = \{t|\ t$ είναι κλειστός όρος της γλώσσας$\}$ και ορίζουμε $R^{\mathcal{A}} = \{< t_1, \ldots, t_n > \mid T \vdash R(t_1, \ldots, t_n)\}$ για κάθε σύμβολο κατηγορήματος n-θέσεων R, ορίζουμε $f^{\mathcal{A}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_2)$ για κάθε σύμβολο συνάρτησης n-θέσεων f και $c^{\mathcal{A}} = c$ για κάθε σύμβολο σταθεράς c. Θα αποδείξουμε (και αυτό αποτελεί το κλειδί στην απόδειξη του θεωρήματος της πληρότητας) ότι

$$T \vdash \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \phi$$

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο μήκος του τύπου ϕ, δηλαδή στον αριθμό των συνδέσμων και ποσοδεικτών που εμφανίζονται στον ϕ.

Παρατηρούμε πρώτα ότι, λόγω του θεωρήματος της κλειστότητας, αρκεί να το αποδείξουμε για τις προτάσεις. Διότι, αν ισχύει για τις προτάσεις, θα ισχύει ότι $T \vdash \phi' \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \phi'$, όπου ϕ' είναι η καθολική κλειστότητα του ϕ. Οπότε, από το θεώρημα της κλειστότητας, $T \vdash \phi' \Leftrightarrow T \vdash \phi$ και βέβαια $\mathcal{A} \models \phi' \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \phi$. Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε κλειστό όρο t έχουμε ότι $t^{\mathcal{A}} = t$. Όθεν, η επαγωγική υπόθεση ισχύει, λόγω του ορισμού του $\mathcal{A}$, όταν ο ϕ είναι ατομικός. Χωρίζουμε τώρα την επαγωγή σε τρεις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. ϕ είναι $\neg\psi$. Τότε
$\mathcal{A} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \nvDash \psi$
$\Leftrightarrow T \nvdash \psi$, από την Ε.Υ. (Επαγωγική Υπόθεση)
$\Leftrightarrow T \vdash \neg\psi$, από πληρότητα και συνέπεια του T
$\Leftrightarrow T \vdash \phi$

Περίπτωση 2. ϕ είναι $\psi_1 \to \psi_2$. Τότε
$\mathcal{A} \nvDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \psi_1$ και $\mathcal{A} \nvDash \psi_2$
$\Leftrightarrow T \vdash \psi_1$ και $T \nvdash \psi_2$, από Ε.Υ.
$\Leftrightarrow T \vdash \psi_1$ και $T \vdash \neg\psi_2$, από πληρότητα και συνέπεια του T.

Άρα $\mathcal{A} \nvDash \phi \Leftrightarrow T \vdash \psi_1$ και $T \vdash \neg\psi_2$
$\Rightarrow T \vdash \neg(\psi_1 \to \psi_2)$, λόγω της ταυτολογίας $\psi_1 \to (\neg\psi_2 \to \neg(\psi_1 \to \psi_2))$ και του κανόνα MP
$\Rightarrow T \nvdash \phi$, λογω της συνέπειας του T.

Αντιστρόφως $T \nvdash \phi \Rightarrow T \vdash \neg(\psi_1 \to \psi_2)$, από την πληρότητα του T
$\Rightarrow T \vdash \psi_1$ και $T \vdash \psi_2$ από τις ταυτολογίες $\neg(\psi_1 \to \psi_2) \to \psi_1$, $\neg(\psi_1 \to \psi_2) \to \neg\psi_2$ και τον κανόνα MP
$\Rightarrow \mathcal{A} \nvDash \phi$ (όπως πιο πάνω).

Περίπτωση 3. ϕ είναι $\forall x\psi$ (για κάποια μεταβλητή x)
[Μπορεί να υποθέσουμε ότι ο ψ έχει την x ως μοναδική υπαρκτή ελεύθερη μεταβλητή, επειδή διαφορετικά η ψ θα είναι πρόταση και προφανώς θα ισχύει $\mathcal{A} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \psi \Leftrightarrow T \vdash \psi \Leftrightarrow T \vdash \phi$]
Ας σημειώσουμε επίσης ότι από την συνθήκη του Henkin θα έχουμε ότι $T \vdash \exists x\neg\psi(x) \to \neg\psi(d)$, για κάποια σταθερά d. Τώρα

$\mathcal{A} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \forall x\psi(x)$
$\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \forall x\psi(x)[s]$, για μία αποτίμηση s, επειδή $\forall x\psi(x)$ είναι πρόταση
$\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \psi[s(x/t)]$, για κάθε $t \in |\mathcal{A}|$
$\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \psi[s(x/\overline{s}(t))]$, για κάθε $t \in |\mathcal{A}|$, επειδή $\overline{s}(t) = t$
$\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \psi(t/x)[s]$, για κάθε $t \in |\mathcal{A}|$, από την πρόταση refprorasi
$\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \psi(t/x)$, για κάθε $t \in |\mathcal{A}|$, επειδή $\psi(t/x)$ πρόταση
$\Leftrightarrow T \vdash \psi(t/x)$, για κάθε $t \in |\mathcal{A}|$ (από Ε.Υ. επειδή $\psi(t/x)$ έχει κατά ένα λιγότερο ποσοδείκτη από τον $\forall x\psi$)
$\Rightarrow T \nvdash \exists x\neg\psi(x)$ επειδή διαφορετικά από τα αξιώματα Henkin και τον MP θα είχαμε $T \vdash \neg\psi(t)$, για κάποιο t, πράγμα που θα αντίκρουε την συνέπεια.
$\Rightarrow T \nvdash \neg\forall x\neg\neg\psi(x)$
$\Rightarrow T \vdash \forall x\neg\neg\psi(x)$, από την πληρότητα του T
$\Rightarrow T \vdash \neg\neg\psi(x)$, από το A4 και MP
$\Rightarrow T \vdash \psi(x)$, από την ταυτολογία $\neg\neg\psi \to \psi$ και τον MP
$\Rightarrow T \vdash \forall x\psi(x)$, από τον Gen
$\Rightarrow T \vdash \phi$.

Αντιστρόφως $T \vdash \phi \Rightarrow T \vdash \forall x\psi(x)$
$\Rightarrow T \vdash \psi(t)$, για όλα τα $t \in |\mathcal{A}|$, από A4 και MP

$\Rightarrow \mathcal{A} \models \phi$, όπως και πιο πάνω.

και με αυτό τελειώνει η επαγωγή.

Άρα $\mathcal{A} \models \phi \Leftrightarrow T \vdash \phi$ για όλες τις προτάσεις και άρα και για όλους τους τύπους ϕ. Ειδικότερα, όλα τα αξιώματα του T είναι αληθή στην $\mathcal{A}$, όθεν $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο του T. □

Για να αποδείξουμε ότι κάθε συνεπής θεωρία S έχει μοντέλο αρκεί να αποδείξουμε ότι S έχει μια επέκταση T η οποία είναι θεωρία Henkin. Τώρα, δεν μπορούμε γενικά να βρούμε μια τέτοια επέκταση T στην $\mathcal{L}$ και γιαυτό το λόγο επεκτείνουμε τη γλώσσα $\mathcal{L}$ σε μια γλώσσα $\mathcal{L}^*$, προσθέτοντας ένα αριθμήσιμο σύνολο από ειδικές καινούργιες σταθερές (καινούργια σύμβολα σταθερών)

$$d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$$

Τα λογικά αξιώματα για την $\mathcal{L}^*$ ορίζονται ακριβώς όπως και για τη γλώσσα $\mathcal{L}$ (για τους τύπους, όρους κ.λ.π. της $\mathcal{L}^*$). Παρόλα αυτά χρειάζεται να κατοχυρώσουμε το διαισθητικά προφανές γεγονός ότι επεκτείνοντας τη γλώσσα από την $\mathcal{L}$ στην $\mathcal{L}^*$ δεν αυξάνουμε τους τύπους της $\mathcal{L}$ που είναι θεωρήματα του κατηγορηματικού λογισμού.

Λήμμα 5.3 *Έστω T μια θεωρία στη γλώσσα $\mathcal{L}$ και T^* η θεωρία στη γλώσσα $\mathcal{L}^*$ η οποία έχει τα ίδια μη λογικά αξιώματα με την T. Τότε για κάθε τύπο ϕ της γλώσσας $\mathcal{L}$*

$$T \vdash \ \Leftrightarrow \ T^* \vdash \phi$$

Απόδειξη Η κατεύθυνση $\Rightarrow$ είναι προφανής.

$\Leftarrow$: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια απόδειξη του ϕ στη θεωρία T^*. Τότε εάν αντικαταστήσουμε κάθε καινούργια σταθερά d_n που εμφανίζεται στην απόδειξη με μια (ξεχωριστή) μεταβλητή x_{i_n} η οποία δεν εμφανίζεται στην απόδειξη, αποκτούμε μια απόδειξη του ϕ στη θεωρία T. □

Λήμμα 5.4 *Κάθε συνεπής θεωρία T στη γλώσσα $\mathcal{L}$ έχει μια συνεπή επέκταση Henkin T_H στη γλώσσα $\mathcal{L}^*$.*

Απόδειξη Έστω $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ μια αρίθμηση του αριθμήσιμου συνόλου των τύπων της γλώσσας $\mathcal{L}^*$ που έχουν ακριβώς μία ελεύθερη μεταβλητή. Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε μια πρόταση ψ_n να είναι η πρόταση

$$\exists x \phi_n(x) \rightarrow \phi_n(d_{i_n})$$

όπου x δηλώνει την ελεύθερη μεταβλητή της ϕ_n και i_n είναι ο ελάχιστος ακέραιος τ.ω. d_{i_n} δεν εμφανίζεται σε κανένα από τα $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$, άρα λόγω κατασκευής και σε κανένα από τα $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$.

Έστω T_0 η θεωρία της $\mathcal{L}^*$ της οποίας τα (μη λογικά) αξιώματα είναι τα αξιώματα της T. Από 5.3 η T_0 είναι συνεπής.

Έστω τώρα $T_n = T_0 \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ για $n \geq 1$ και $T_H = \cup_{n=0}^{\infty} T_n$.

Ισχυρισμός: T_H είναι συνεπής.

Διότι ας υποθέσουμε ότι όχι. Τότε για κάποιο n, T_n πρέπει να είναι ασυνεπής (επειδή οι αποδείξεις κάποιων χ και $\neg\chi$ μπορούν να χρησιμοποιούν μόνον πεπερασμένο πλήθος από τα ψ_n). Έστω n ο ελάχιστος ακέραιος τ.ω. T_n είναι ασυνεπής (προφανώς $n \geq 1$). Από 5.17 κάθε τύπος αποδεικνύεται στην T_n, άρα $T_n \vdash \neg\psi_n$ και $T_n, \psi_n \vdash \neg\psi_n$, άρα από θεώρημα απαγωγής 5.1 $T_{n-1} \vdash \psi_n \to \neg\psi_n$ και άρα επειδή $T_{n-1} \vdash (\psi_n \to \neg\psi_n) \to \neg\psi_n$ (από στιγμιότυπο ταυτολογίας) έχουμε ότι $T_{n-1} \vdash \neg\psi_n$, δηλαδή $T_{n-1} \vdash \neg(\exists x \phi_n(x) \to \phi_n(d_{i_n}))$.

Κατά συνέπεια, χρησιμοποιώντας τα στιγμιότυπα ταυτολογίας $\neg(A \to B) \to A$ και $\neg(A \to B) \to \neg B$ καθώς και τον MP παίρνουμε ότι

$$T_{n-1} \vdash \exists x \phi_n(x) \quad \text{και } T_{n-1} \vdash \neg\phi_n(d_{i_n}.$$

Τώρα, στην απόδειξη του $\neg\phi_n(d_{i_n})$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε το d_{i_n} με μια μεταβλητή y η οποία δεν εμφανίζεται στην απόδειξη για να αποκτήσουμε το $T_{n-1} \vdash \neg\phi_n(y)$ και άρα το $T_{n-1} \vdash \forall y \neg\phi_n(y)$. Αλλάζοντας μεταβλητή παίρνουμε το $T_{n-1} \vdash \forall x \neg\phi_n(x)$. Άρα T_{n-1} είναι ασυνεπής, αντίθετο με την υπόθεσή μας, επειδή ήδη έχουμε ότι $T_{n-1} \vdash \neg\forall\neg\phi_n(x)$ (επειδή $T_{n-1} \vdash \exists x \phi_n(x)$). Η T_H είναι λοιπόν μια συνεπής επέκταση της T, η οποία είναι προφανώς και θεωρία Henkin. □

Θεώρημα 5.23 *Κάθε συνεπής θεωρία T στη γλώσσα $\mathcal{L}$ έχει μοντέλο.*

Απόδειξη Ξεκινάμε από τη συνεπή θεωρία T. Η γλώσσα της θεωρίας T είναι η $\mathcal{L}$. Από το λήμμα 5.4 υπάρχει μια συνεπής επέκταση T_H, η οποία είναι και θεωρία Henkin. Από το λήμμα του Lindenbaum 5.2 η T_H έχει μια πλήρη και συνεπή επέκταση T_H^*. Είναι προφανές ότι κάθε επέκταση μιας θεωρίας Henkin παραμένει θεωρία Henkin. Άρα η T_H^* είναι θεωρία Henkin. Από πρόταση 5.22 η T_H^* έχει μοντέλο, έστω το μοντέλο $\mathcal{A}^*$. Το $\mathcal{A}^*$ είναι ερμηνεία της γλώσσας $\mathcal{L}^*$, δηλαδή έχει και μια ερμηνεία $d^{\mathcal{A}^*}$ για κάθε καινούργια σταθερά d που έχει προστεθεί στην $\mathcal{L}$ για να αποκτηθεί η $\mathcal{L}^*$. Στην $\mathcal{A}^*$ αληθεύει κάθε στοιχείο της T, το οποίο βέβαια γράφεται στη γλώσσα $\mathcal{L}$ και δεν περιέχει καμμιά από τις σταθερές d. Αν στην ερμηνεία $\mathcal{A}^*$ διατηρήσουμε όλες τις ερμηνείες των συμβόλων της $\mathcal{L}$, όπως έχουν και καταργήσουμε τις ερμηνείες των σταθερών $d_1, \ldots, d_n$, τότε αυτό που προκύπτει (έστω $\mathcal{A}$) είναι μια ερμηνεία της $\mathcal{L}$ η οποία διατηρεί βέβαια τις αλήθειες της $\mathcal{L}$, επειδή αυτές δεν επηρεάζονται από τις ερμηνείες των «ξένων» στοιχείων $d^{\mathcal{A}^*}$. Άρα η $\mathcal{A}$ (την ονομάζουμε *περιορισμό* της $\mathcal{A}^*$) είναι μοντέλο της θεωρίας T. □

Σημείωση: Επειδή $\mathcal{L}$ είναι αριθμήσιμο, το μοντέλο $\mathcal{A}$ είναι, από τον τρόπο που ορίστηκε, και αυτό αριθμήσιμο. Άρα κάθε συνεπής αριθμήσιμη θεωρία (δηλαδή με αριθμήσιμο πλήθος συμβόλων άρα και συνόλου τύπων) έχει αριθμήσιμο μοντέλο (δηλαδή το πεδίο της ερμηνείας που είναι μοντέλο είναι αριθμήσιμο σύνολο).

Απόδειξη του θεωρήματος πληρότητας 5.19 του Gödel.

Αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για την περίπτωση που ϕ είναι πρόταση. Διότι αν το θεώρημα ισχύει για τις προτάσεις και ϕ είναι τύπος, τότε $T \vdash \phi$ είναι ισοδύναμο με το $T \vdash \phi'$ όπου ϕ' είναι η καθολική κλειστότητα του ϕ και βέβαια είναι πρόταση. Άρα από θεώρημα για τις προτάσεις θα έχουμε $T \vdash \phi'$ και από 5.8 $T \vdash \phi$.

Άρα υποθέτουμε ότι ϕ είναι πρόταση. Αν $T \vDash \phi$ τότε το σύνολο $T, \neg\phi$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Άρα από 5.23 δεν είναι συνεπές. Άρα θα έχουμε ότι $T \vdash \phi$, διότι αν $T \nvdash \phi$ τότε από 5.18 το σύνολο $T, \neg\phi$ θα ήταν συνεπές. $\square$

Παρατηρήσεις για την απόδειξη του θεωρήματος της πληρότητας.

Στην απόδειξη του θεωρήματος της πληρότητας κάναμε δύο υποθέσεις οι οποίες μπορούν να τροποποιηθούν.

1. Στην απόδειξη υποθέσαμε ότι η $\mathcal{L}$ δεν περιέχει το σύμβολο της ισότητας $=$. Τώρα ας υποθέσουμε ότι η $\mathcal{L}$ περιέχει το σύμβολο $=$. Τότε εάν T είναι μια συνεπής θεωρία έπεται από το 5.23 ότι η $\mathcal{L}$ έχει μια ψευδοερμηνεία $\mathcal{A}$ η οποία ικανοποιεί τα αξιώματα της T.

Θέλουμε να αποδείξουμε ένα θεώρημα πληρότητας που να αναφέρεται σε θεωρίες με ισότητα, δηλαδή σε θεωρίες που περιλαμβάνουν στα λογικά τους αξιώματα τα αξιώματα ΑξΙ της ισότητας. Διατυπωμένο με όρους που έχουν οριστεί στον ορισμό 5.12, το θεώρημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Εάν T θεωρία με ισότητα και ϕ τύπος στη γλώσσα της θεωρίας, τότε

$$T \models_I \phi \;\Leftrightarrow\; T \vdash_I \phi$$

όπου $T \models_I \phi$ σημαίνει ότι ϕ είναι αληθής σε κάθε standard ερμηνεία της $\mathcal{L}$ η οποία είναι μοντέλο του T. Ας δούμε πώς μπορούμε να τροποποιήσουμε το αποδειχθέν θεώρημα πληρότητας ώστε να καλύπτεται και αυτή η απαίτηση.

Είναι σχετικά εύκολο να μετατρέψουμε μια ψευδοερμηνεία $\mathcal{A}$, της γλώσσας $\mathcal{L}$, σε μια (standard) ερμηνεία $\overline{\mathcal{A}}$ η οποία να ικανοποιεί τις ίδιες προτάσεις με την $\mathcal{A}$. Η $\overline{\mathcal{A}}$ θα είναι η «ομομορφική» εικόνα της $\mathcal{A}$.

Ας σημειωθεί, κατά πρώτον, ότι από τα αξιώματα Ι1 και Ι2 και τις ιδιότητες της ισότητας στη σελίδας 51 η $=^{\mathcal{A}}$ θα είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathcal{A}$.

Τώρα, για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$, έστω $[a]$ συμβολίζει την κλάση ισοδυναμίας του a ως προς τη σχέση $=^{\mathcal{A}}$.

Έστω $|\overline{\mathcal{A}}| = \{[a] \mid a \in \mathcal{A}\}$.

Στην πραγματικότητα έπεται από τα αξιώματα της ισότητας ότι $=^{\mathcal{A}}$ δεν είναι μόνον σχέση ισοδυναμίας αλλά ότι ικανοποιεί και την εξής ιδιότητα: Εάν

$$a_1 =^{\mathcal{A}} a'_1, \ldots, a_n =^{\mathcal{A}} a'_n$$

και $R^{\mathcal{A}}$ είναι η ερμηνεία του συμβόλου κατηγορήματος n-θέσεων R, τότε

$$< a_1, \ldots, a_n > \in R^{\mathcal{A}} \;\; \Leftrightarrow \;\; < a'_1, \ldots, a'_n > \in R^{\mathcal{A}}$$

και εάν $f^{\mathcal{A}}$ είναι η ερμηνεία του συμβόλου n-θέσεων f, τότε

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(a'_1, \ldots, a'_n).$$

Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε χωρίς αμφισημία τα ακόλουθα

- $R^{\overline{\mathcal{A}}} = \{< [a_1], \ldots, [a_n] > \;\; | \;\; < a_1, \ldots, a_n > \in R^{\mathcal{A}}$
- $f^{\overline{\mathcal{A}}}([a_1], \ldots, [a_n]) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]$
- $c^{\overline{\mathcal{A}}} = [c^{\mathcal{A}}]$.

Προφανώς, εκ κατασκευής, στην ειδική περίπτωση που το R είναι $=$, παίρνουμε ότι $=^{\overline{\mathcal{A}}}$ είναι η ταυτοτική σχέση στο $|\overline{\mathcal{A}}|$. Έτσι το $\overline{\mathcal{A}}$ είναι μια standard ερμηνεία της $\mathcal{L}$. Είναι σχετικά εύκολο, αλλά σχοινοτενές, να αποδείξουμε με επαγωγή στον ϕ ότι

$$\mathcal{A} \vDash \phi \;\; \Leftrightarrow \;\; \overline{\mathcal{A}} \vDash \phi.$$

Άρα $\overline{\mathcal{A}}$ είναι μοντέλο του S.

Έστω T θεωρία ισότητας και συνεπής δηλ. $T, A\xi I \nvdash \phi \wedge \neg\phi$. Τότε από 5.23 υπάρχει μια ψευδοερμηνεία $\mathcal{L}$ που είναι μοντέλο του $T, A\xi I$, δηλαδή η $\mathcal{A}$ είναι ψευδοερμηνεία που ικανοποιοεί τα αξιώματα της ισότητας. Από την πρηγούμενη κατασκευή βλέπουμε ότι η $\overline{\mathcal{A}}$ είναι μια standard ερμηνεία της $\mathcal{L}$ που ικανοποιεί την T. Άρα η θεωρία T δέχεται standard μοντέλο. Επανερχόμαστε στο θεώρημα πληρότητας για την ισότητα. Η κατεύθυνση $T \vdash_I \Rightarrow \; T \models_I \phi$ είναι προφανής. Έστω τώρα $T \models_I \phi$. Αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε μοντέλο $\mathcal{A}$ (ψευδοερμηνεία) που ικανοποιεί τα αξιώματα της ισότητας, τότε $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο του $T, A\xi I$. Από τα παραπάνω $\overline{\mathcal{A}}$ είναι standard μοντέλο του T, άρα ικανοποιεί το ϕ, άρα και το $\mathcal{A}$ ικανοποιεί το ϕ δηλ. έχουμε $T, A\xi I \models \phi$, που από το θεώρημα πληρότητας μας δίνει το ζητούμενο, δηλαδή $T \vdash_I \phi$.

2. Δεν είναι απαραίτητο να υποθέσουμε ότι η γλώσσα $\mathcal{L}$ είναι αριθμήσιμη. Η υπόθεση αυτή χρησιμοποιείται μόνον στις αποδείξεις των 5.2 και 5.4. Και στις δύο περιπτώσεις εάν αντί αυτού υποθέσουμε ότι το σύνολο των τύπων της $\mathcal{L}$ μπορούν να διαταχθούν καλώς, μπορούμε να τροποποιήσουμε το επιχείρημα και να έχουμε την απόδειξη με υπρπεπερασμένη επαγωγή ή εναλλακτικά με το λήμμα του Zorn και σ' αυτή την περίπτωση. Βέβαια αυτό προϋποθέτει το αξίωμα της επιλογής.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις και αποδείξεις μας επιτρέπουν να διατυπώσουμε τα ακόλουθα:

Όταν έχουμε γλώσσα και θεωρία με ισότητα, τότε έχουμε πάντα ως ερμηνεία της γλώσσας τη standard ερμηνεία οπότε κάθε μοντέλο θα είναι standard μοντέλο. Θα γράφουμε $T \vdash \phi$, $T \models \phi$ ακόμα και στην περίπτωση των θεωριών με ισότητα. Τα θεωρήματα πληρότητας, συμπάγειας και όλα όσα θα διατυπώσουμε ισχύουν και στην περίπτωση των θεωριών με ισότητα.

Θεώρημα 5.24 *Έστω T θεωρία σε αριθμήσιμη γλώσσα. Τότε*

1. *Αν η T είναι συνεπής, τότε δέχεται αριθμήσιμο μοντέλο.*
2. *Αν ϕ είναι αληθής σε όλα τα αριθμήσιμα μοντέλα του T, τότε $T \vdash \phi$.*

Θεώρημα 5.25 (Θεώρημα της συμπάγειας) *Αν T είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο τότε είναι ικανοποιήσιμο.*

Απόδειξη Διότι αν το T δεν ήταν ικανοποιήσιμο τότε $T \models \phi \wedge \neg\phi$. Από θεώρημα 5.19 έχουμε $T \vdash \phi \wedge \neg\phi$ και άρα για ένα πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ θα έχουμε $T_0 \vdash \phi \wedge \neg\phi$. Αλλά το T_0 έχει μοντέλο στο οποίο, από το θεώρημα της ορθότητας, το $\phi \wedge \neg\phi$ θα ήταν αληθές (άτοπο).