3 Αποδεικτικό Σύστημα

Αξιωματικό σύστημα τύπου Hilbert για τον προτασιακό λογισμό.

Θα δώσουμε τον ορισμό ενός τυπικού συστήματος του οποίου σκοπός θα είναι να αποδεικνύει με αυστηρό τρόπο τις αλήθειες του προτασιακού λογισμού, δηλαδή, είτε τις απόλυτες αλήθειες οι οποίες θα είναι οι προτασιακοί τύποι που γίνονται αληθείς σε όλες τις απονομές (ταυτολογίες) ή τις σχετικές αλήθειες (σχετικές σε σχέση με ένα σύνολο υποθέσεων) οι οποίες θα αληθεύουν στις απονομές που ικανοποιούν τις υποθέσεις. Για λόγους οικονομίας της παρουσίασης η γλώσσα μας θα περιλαμβάνει μόνον τους συνδέσμους $\neg$ και $\rightarrow$. Η επιλογή αυτή δεν είναι περιοριστική αφού το σύνολο $\{\neg, \rightarrow\}$ είναι επαρκές σύνολο συνδέσμων και κάθε εμφάνιση άλλου συνδέσμου μπορεί να θεωρηθεί συντομογραφία έκφρασης που γράφεται αποκλειστικά με $\neg$ και $\rightarrow$. Γενικά, ένα αξιωματικό σύστημα αποτελείται από τα αξιώματα, που είναι οι προτάσεις που ανά πάσα στιγμή μπορούμε να επικαλεστούμε και να χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξή μας και τους κανόνες απαγωγής που θα μας επιτρέπουν να παράγουμε, από τα ήδη αποδειχθέντα, καινούργια συμπεράσματα.

Χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σχήματα λογικών *αξιωμάτων*. Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ, ψ, χ οι ακόλουθοι (πιο σύνθετοι) τύποι είναι αξιώματα:

A1 $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

A2 $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$

A3 $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$

Κανόνες Απαγωγής: Χρησιμοποιούμε τον κανόνα απαγωγής που είναι γνωστός με το λατινικό όνομα MODUS PONENS και τον συμβολίζουμε με MP. Ο κανόνας αυτός μας λέει ότι από τους $\phi \rightarrow \psi$ και ϕ απάγουμε (συμπεραίνουμε) τον ψ. Σχηματικά

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \phi}{\psi} \; MP$$

Ορισμός 3.1 *Μία* Θεωρία *είναι ένα σύνολο προτασιακών τύπων τα οποία οναμάζονται* μη-λογικά αξιώματα *της θεωρίας. Αντιθέτως, τα αξιώματα που παράγονται από τα σχήματα αξιωμάτων A1–A3 ονομάζονται* λογικά αξιώματα. *Τις θεωρίες τις συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα T,Σ,....*

Ορισμός 3.2 Απόδειξη *στη θεωρία T ονομάζεται κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ προτασιακών τύπων για τους οποίους ισχύουν τα κάτωθι:*

Για κάθε i όπου $1 \leq i \leq n$ ο τύπος ϕ_i είναι, είτε

1. *ένα λογικό αξίωμα A1, A2 ή A3*

2. *είτε ανήκει στην T, δηλαδή είναι ένα μη λογικό αξίωμα της T*

3. *είτε υπάρχουν ϕ_j, ϕ_k τύποι της ακολουθίας $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ με $j < i$ και $k < i$ ώστε $\phi_j \equiv \phi_k \to \phi_i$ (δηλαδή ο ϕ_i είναι το συμπέρασμα κανόνα MP με υποθέσεις τύπους με μικρότερο δείκτη, δηλαδή που προηγούνται στην απόδειξη από τον ϕ_i)*

Ορισμός 3.3 Θεώρημα *της θεωρίας T ονομάζεται κάθε τύπος ϕ για τον οποίο υπάρχει απόδειξη $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ στη θεωρία T με $\phi_n \equiv \phi$.*

Αν ϕ είναι θεώρημα της T, γράφουμε $T \vdash \phi$. Αν $T = \emptyset$, δηλαδή αν θεωρήσουμε ότι έχουμε μία θεωρία χωρίς μη λογικά αξιώματα, γράφουμε $\vdash \phi$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η απόδειξη είναι στον καθαρό προτασιακό λογισμό. Είναι προφανές ότι οποιαδήποτε απόδειξη που δεν χρησιμοποιεί για την κατασκευή της μη λογικά αξιώματα είναι απόδειξη στον καθαρό προτασιακό λογισμό. Και βέβαια είναι επίσης προφανές ότι $\vdash \phi$ συνεπάγεται $T \vdash \phi$ για οποιοδήποτε T.

Παράδειγμα 3.4 *Θα αποδείξουμε ότι για κάθε ϕ ισχύει ότι*
$\vdash \phi \to \phi$.

Αρκεί να κατασκευάσουμε μία ακολουθία $\phi_1, \ldots, \phi_n$, όπως ακριβώς στον ορισμό, έτσι ώστε ο ϕ_n να είναι ο $\phi \to \phi$. Την παρουσιάζουμε παρακάτω γράφοντάς την από πάνω προς τα κάτω, όπου οι αριθμοί αριστερά είναι οι δείκτες της ακολουθίας και όπου δεξιά παρουσιάζεται η αιτιολόγηση του γιατί η ακολουθία ικανοποιεί τις προδιαγραφές του ορισμού.

1. $(\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)) \to ((\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)$
2. $\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)$
3. $(\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)$
4. $\phi \to (\phi \to \phi)$
5. $\phi \to \phi$

με την παρακάτω αντίστοιχη δικαιολόγηση

1. Αξίωμα A2
2. Αξίωμα A1
3. Από 1, 2 και MP
4. Αξίωμα A1
5. Από 3,4 και MP

Ας προσθέσουμε ένα σχόλιο για τη χρήση των λέξεων «απόδειξη» «θεώρημα» κ.λ.π. στους ορισμούς που προηγήθηκαν. Είναι πιο σωστό οταν αναφερόμαστε σ'αυτά να λέμε τυπική απόδειξη, τυπικό θεώρημα κ.λ.π. Οταν χρησιμοποιούμε τις λέξεις απόδειξη, θεώρημα κ.λ.π. με την καθημερινή μαθηματική τους σημασία δεν πρέπει να τις συγχέουμε με τα αντικείμενα που περιγράφτηκαν με τους προηγηθέντες ορισμούς. Θα μπορούσαμε π.χ. να αποδείξουμε ένα θεώρημα για τα τυπικά θεωρήματα. Σ'αυτή την περίπτωση το θεώρημα αυτό το ονομάζουμε μεταθεώρημα. Πιο γενικά επειδή οι κύριες έννοιες και πρακτικές των Μαθηματικών μπορούν να οριστούν κατά τρόπο ώστε να έχουν το τυπικό τους ανάλογο (στις γραμμές των ανωτέρω ορισμών), τα Μαθηματικά που έχουν ως αντικείμενο μελέτης αυτά τα τυπικά ανάλογα ονομάζονται Μεταμαθηματικά.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ένα (μετα)θεώρημα που θα μας βοηθάει στην εύρεση τυπικών αποδείξεων.

θεώρημα 3.5 (Το θεώρημα της απαγωγής) *Αν $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$ (γράφουμε και $T, \phi \vdash \psi$) τότε $T \vdash \phi \to \psi$.*

Απόδειξη: Το θεώρημα το αποδεικνύουμε με επαγωγή στο μήκος n της απόδειξης $\psi_1, \ldots, \psi_n$ της ψ ($\psi \equiv \psi_n$). Γενικά παρατηρούμε πρώτα ότι αν ψ είναι ένα από τα ακόλουθα

1. ψ είναι λογικό αξίωμα

2. $\psi \in T$

3. $\psi \equiv \phi$

τότε η πρόταση ισχύει διότι:

Στην πρώτη και στην δεύτερη περίπτωση ισχύει ότι $T \vdash \psi$. Και επειδή ισχύει επίσης ότι $T \vdash \psi \to (\phi \to \psi)$ (επειδή $\psi \to (\phi \to \psi)$ είναι λογικό αξίωμα) θα έχουμε $T \vdash \phi \to \psi$ από εφαρμογή του κανόνα Modus Ponens. Στην τρίτη περίπτωση θα έχουμε βέβαια $T \vdash \phi \to \phi$ επειδή $\vdash \phi \to \phi$, από προηγούμενο παράδειγμα.

Έστω τώρα ότι η ψ είναι αποτέλεσμα ενός κανόνα MP. Τότε έχουν προηγηθεί στην απόδειξη τα ψ_i και $\psi_i \to \psi$.Επειδή αυτά έχουν προηγηθεί οι αποδείξεις τους έχουν μικρότερο μήκος από το n και άρα για αυτά ισχύει η επαγωγική υπόθεση, άρα $T \vdash \phi \to \psi_i$ και $T \vdash \phi \to (\psi_i \to \psi)$. Το αποτέλεσμα έρχεται επειδή λόγω A2 ισχύει $T \vdash (\phi \to (\psi_i \to \psi)) \to ((\phi \to \psi_i) \to (\phi \to \psi))$. Χρησιμοποιούμε δύο φορές τον κανόνα MP.

θεώρημα 3.6 (Θεώρημα της ορθότητας) *Αν $T \vdash \phi$ τότε $T \models \phi$. Στην ειδική περίπτωση που $T = \emptyset$, έχουμε ότι $\vdash \phi$ συνεπάγεται $\models \phi$ δηλαδή τα θεωρήματα του καθαρού προτασιακού λογισμού είναι ταυτολογίες.*

Απόδειξη εύκολη διότι η ικανοποιησιμότητα ισχύει για τα αξιώματα (τα λογικά αξιώματα είναι ταυτολογίες) και μεταφέρεται από τις υποθέσεις ενός κανόνα Modus Ponens στο συμπέρασμα.

Το ανωτέρω θεώρημα μας λέει ότι όλα τα θεωρήματα είναι ορθά. Ισχύει όμως και το αντίστροφο; Δηλαδή ισχύει ότι αν έχουμε μία ταυτολογία τότε αυτή θα είναι ένα θεώρημα του τυπικού συστήματος; Ισχύει, με άλλα λόγια, ότι το τυπικό σύστημα έχει τη δυνατότητα να αποδεικνύει όλες τις ταυτολογίες;

θεώρημα 3.7 (Θεώρημα της πληρότητας) *Αν* $\models \phi$, *δηλαδή αν* ϕ *είναι ταυτολογία, τότε* $\vdash \phi$.

Θα αποδείξουμε πρώτα τα ακόλουθα λήμματα:

Λήμμα 3.8 *Οι παρακάτω προτασιακοί τύποι είναι τυπικά θεωρήματα του αποδεικτικού συστήματος τύπου Hilbert (δηλ. αν* τ *είναι ένας από τους παρακάτω προτασιακούς τύπους έχουμε* $\vdash \tau$*).*

(a) $\neg\neg\phi \to \phi$

(b) $\phi \to \neg\neg\phi$

(c) $\neg\phi \to (\phi \to \psi)$

(d) $(\neg\psi \to \neg\phi) \to (\phi \to \psi)$

(e) $(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$

(f) $\phi \to (\neg\psi \to \neg(\phi \to \psi))$

(g) $(\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \psi) \to \psi)$

Απόδειξη:
Θα αποδείξουμε πρώτα την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.9 **i)** $\phi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \phi \to \chi$

ii) $\phi \to (\psi \to \chi), \psi \vdash \phi \to \chi$

Απόδειξη του 3.9, i).

1.	$\phi \to \psi$	ΥΠ (ΥΠ=Υπόθεση)
2.	$\psi \to \chi$	ΥΠ
3.	ϕ	ΥΠ
4.	ψ	1,3, MP
5.	χ	2,4 MP

Άρα $\phi \to \psi, \psi \to \chi, \phi \vdash \chi$. Άρα, από θεώρημα απαγωγής, $\phi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \phi \to \chi$.

Απόδειξη του ii). Εύκολη, με το θεώρημα της απαγωγής.

Απόδειξη του λήμματος 3.8.

(a):

1.	$(\neg\phi \to \neg\neg\phi) \to ((\neg\phi \to \neg\phi) \to \phi)$	Αξίωμα A3
2.	$\neg\phi \to \neg\phi$	γνωστό
3.	$(\neg\phi \to \neg\neg\phi) \to \phi$	1,2,Λήμ. 3.1.ii
4.	$\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi)$	Αξίωμα A1
5.	$\neg\neg\phi \to \phi$	3,4 Λήμ. 3.1.i

(b):

1.	$(\neg\neg\neg\phi \to \neg\phi) \to ((\neg\neg\neg\phi \to \phi) \to \neg\neg\phi)$	Αξ. Α3
2.	$\neg\neg\neg\phi \to \neg\phi$	από (a)
3.	$(\neg\neg\neg\phi \to \phi) \to \neg\neg\phi$	1,2,MP
4.	$\phi \to (\neg\neg\neg\phi \to \phi)$	Αξ. Α1
5.	$\phi \to \neg\neg\phi$	3,4, 3.1.i

(c):

1.	$\neg\phi$	ΥΠ
2.	ϕ	ΥΠ
3.	$\phi \to (\neg\psi \to \phi)$	Αξίωμα Α1
4.	$\neg\phi \to (\neg\psi \to \neg\phi)$	Αξίωμα Α1
5.	$\neg\psi \to \phi$	2,3,MP
6.	$\neg\psi \to \neg\phi$	1,4,MP
7.	$(\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$	Αξίωμα Α3
8.	$(\neg\psi \to \phi) \to \psi$	6,7,MP
9.	ψ	5,8,MP

Άρα, από 1-9, $\neg\phi, \phi \vdash \psi$. Κατά συνέπεια, από το θεώρημα της απαγωγής, $\neg\phi \vdash \phi \to \psi$, και, ξανά απ'το θεώρημα της απαγωγής, $\vdash \neg\phi \to (\phi \to \psi)$.

(d):

1.	$\neg\psi \to \neg\phi$	ΥΠ
2.	ϕ	ΥΠ
3.	$(\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$	Αξίωμα Α3
4.	$\phi \to (\neg\psi \to \phi)$	Αξίωμα Α1
5.	$(\neg\psi \to \phi) \to \psi$	1,3,MP
6.	$\phi \to \psi$	4,5,Λήμμα3.1.i
7.	ψ	2,6,MP

Από 1-7, $\neg\psi \to \neg\phi, \phi \vdash \psi$, και δύο εφαρμογές του θεωρήματος της απαγωγής δίνουν το αποτέλεσμα.

(e):

1.	$\phi \to \psi$	ΥΠ
2.	$\neg\neg\phi \to \phi$	Από (a)
3.	$\neg\neg\phi \to \psi$	1,2,Λήμμα 3.1.i
4.	$\psi \to \neg\neg\psi$	Από (b)
5.	$\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi$	3,4,Λήμμα 3.1.i
6.	$(\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$	Από (d)
7.	$(\neg\psi \to \neg\phi)$	5,6,MP

Άρα, από 1-7, $\phi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\phi$, και, από θεώρημα απαγωγής έχουμε το αποτέλεσμα.

(f):

Προφανώς, $\phi, \phi \to \psi \vdash \psi$ από MP. Άρα, $\vdash \phi \to ((\phi \to \psi) \to \psi)$ με δύο εφαρμογές του θεωρήματος της απαγωγής. Από (e) $\vdash ((\phi \to \psi) \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg(\phi \to \psi))$. Άρα χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.1.i παίρνουμε το αποτέλεσμα.

(g):

1.	$\phi \to \psi$	ΥΠ
2.	$\neg\phi \to \psi$	ΥΠ
3.	$(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$	Από (e)
4.	$\neg\psi \to \neg\phi$	1,3,MP
5.	$(\neg\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\neg\phi)$	Από (e)
6.	$\neg\psi \to \neg\neg\phi$	2,5,MP
7.	$(\neg\psi \to \neg\neg\phi) \to ((\neg\psi \to \neg\phi) \to \psi)$	Αξίωμα Α3
8.	$(\neg\psi \to \neg\phi) \to \psi$	6,7,MP
9.	ψ	4,8,MP

Άρα, $\phi \to \psi, \neg\phi \to \psi \vdash \psi$. Δύο εφαρμογές του θεωρήματος της απαγωγής δίνουν το αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.10 *Έστω ότι όλες οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον προτασιακό τύπο ϕ είναι ανάμεσα στις $B_1, \ldots, B_k$. Έστω V απονομή αλήθειας (μας ενδιαφέρουν μόνον οι τιμές που παίρνει στα B_i). Ορίζουμε B_i' να είναι B_i αν $V(B_i) = T$ και B_i' να είναι $\neg B_i$ αν $V(B_i) = F$. Ορίζουμε επίσης ϕ' να είναι ϕ αν $\overline{V}(\phi) = T$ και ϕ' να είναι $\neg\phi$ αν $\overline{V}(\phi) = F$. Τότε $B_1', \ldots, B_k' \vdash \phi'$.*

Παράδειγμα. Έστω $\phi \equiv \neg(\neg A_1 \to A_2)$. Τότε για τις διάφορες απονομές μπορούμε να δημιουργήσουμε τον αληθοπίνακα του ϕ. Έχουμε

A_1	A_2	$\neg(\neg A_1 \to A_2)$
T	T	F
F	T	F
T	F	F
F	F	T

Αν εφαρμόσουμε την πρόταση στην απονομή που αντιστοιχεί στην τρίτη γραμμή έχουμε $A_1, \neg A_2 \vdash \neg\neg(\neg A_1 \to A_2)$ και στην τέταρτη γραμμή $\neg A_1, \neg A_2 \vdash \neg(\neg A_1 \to A_2)$.

Απόδειξη: Με επαγωγή στο ϕ. Αν ο ϕ είναι η προτασιακή μεταβλητή B_1 τότε το ζητούμενο ανάγεται στο $B_1 \vdash B_1$ και $\neg B_1 \vdash \neg B_1$.

Περίπτωση 1. ϕ είναι $\neg\psi$. Τότε η ΕΥ ισχύει για το ψ.

Υποπερίπτωση 1a. Έστω ψ παίρνει την τιμή T σε μία απονομή V. Τότε ϕ παίρνει την τιμή F. Άρα, ψ' είναι ψ και ϕ' είναι $\neg\phi$. Από ΕΥ για ψ, $B_1', \ldots, B_k' \vdash \psi$. Άρα από άσκηση 4 (b) και MP , $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\neg\psi$. Αλλά $\neg\neg\psi$ είναι ϕ'.

Υποπερίπτωση 1b. Έστω ψ παίρνει την τιμή F. Τότε ψ' είναι $\neg\psi$ και ϕ' είναι ϕ. Από ΕΥ $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\psi$. Αλλά $\neg\psi$ είναι ϕ'.

Περίπτωση 2. ϕ είναι $\psi \to \chi$ Τότε για τα ψ και χ ισχύει η ΕΥ, άρα $B_1', \ldots, B_k' \vdash \psi'$ και $B_1', \ldots, B_k' \vdash \chi'$.

Περίπτωση 2a. ψ παίρνει την τιμή F. Άρα ϕ παίρνει την τιμή T. Τότε ψ' είναι $\neg\psi$ και ϕ' είναι ϕ. Άρα, $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\psi$. Από άσκηση 3 (c), $B_1', \ldots, B_k' \vdash \psi \to \chi$. Αλλά $\psi \to \chi$ είναι ϕ'.

Περίπτωση 2b. χ παίρνει την τιμή T. Άρα ϕ παίρνει την τιμή T. Τότε χ' είναι χ και ϕ' είναι ϕ. Ισχύει $B_1', \ldots, B_k' \vdash \chi$. Τότε από αξίωμα A1 $B_1', \ldots, B_k' \vdash \psi \to \chi$. Αλλά $\psi \to \chi$ είναι ϕ'.

Περίπτωση 2c. ψ παίρνει την τιμή T , χ παίρνει την τιμή F. Τότε ϕ έχει την τιμή F, ψ' είναι ψ, χ' είναι $\neg\chi$ και ϕ' είναι $\neg\phi$. Ισχύει $B_1', \ldots, B_k' \vdash \psi$ και $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\chi$. Άρα από άσκηση 3 (f), $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg(\psi \to \chi)$. Αλλά $\neg(\psi \to \chi)$ είναι ϕ'.

Αυτό εξαντλεί τις δυνατές περιπτώσεις, επειδή η γλώσσα περιέχει μόνον του συνδέσμους $\neg$ και $\to$.

Απόδειξη του θεωρήματος της πληρότητας. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 3.10. Έστω ϕ είναι ταυτολογία και έστω $B_1, \ldots, B_k$ είναι οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον ϕ. Για οποιαδήποτε απονομή αλήθειας (στα $B_1, \ldots, B_k$), από την άσκηση έχουμε ότι $B_1', \ldots, B_k' \vdash \phi$. ($\phi'$ είναι ϕ επειδή ϕ παίρνει πάντα την τιμή T.) Άρα, αν B_k πάρει την τιμή T, $B_1', \ldots, B_{k-1}', B_k \vdash \phi$, και, αν B_k πάρει την τιμή F, $B_1', \ldots, B_{k-1}', \neg B_k \vdash \phi$. Άρα, από το θεώρημα της απαγωγής, $B_1', \ldots B_{k-1}' \vdash B_k \to \phi$ και $B_1', \ldots, B_{k-1}' \vdash \neg B \to \phi$. Τότε από λήμμα 3.8, (g) $B_1', \ldots, B_{k-1}' \vdash \phi$ και βέβαια τα $B_1', \ldots, B_k'$ μπορούν να αντιστοιχούν σε οποιαδήποτε απονομή. Ομοίως B_{k-1} μπορεί να είναι T ή F και ξανά εφαρμόζοντας το θεώρημα της απαγωγής και το λήμμα 3.8, (g) μπορούμε να απαλείψουμε το B_{k-1}' όπως ακριβώς απαλείψαμε το B_k'. Μετά από k τέτοια βήματα τελικά παίρνουμε $\vdash \phi$.

Πόρισμα 3.11 *Εάν T θεωρία (T μπορεί να είναι άπειρο σύνολο) τότε $T \models \phi$ συνεπάγεται $T \vdash \phi$.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της συμπάγειας. Από το πόρισμα του θεωρήματος της συμπάγειας έχουμε ότι $T_0 \models \phi$, για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο του T το $T_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Δηλαδή $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \phi$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το $\models \psi_1 \to (\cdots \to (\psi_n \to \phi) \cdots)$. Από θεώρημα πληρότητας έχουμε ότι $\vdash \psi_1 \to (\cdots \to (\psi_n \to \phi) \cdots)$. Και βέβαια επειδή κάθε $\phi_i \in T$, εφαρμόζοντας n φορές τον κανόνα MP, παίρνουμε τελικά ότι $T \vdash \phi$.