1 Εισαγωγή

Λογική είναι η ανάλυση των μεθόδων του συλλογισμού. Μελετώντας αυτές τις μεθόδους, η λογική ενδιαφέρεται περισσότερο για τη *μορφή* παρά για το περιεχόμενο του συλλογισμού π.χ. θεωρήστε τους πιο κάτω συλλογισμούς:

1. Ολοι οι άνθρωποι είναι θνητοί. Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος. Αρα ο Σωκράτης είναι θνητός.

2. Ολα τα κουνέλια αγαπούν τα καρότα. Ο Μπάνυ είναι κουνέλι. Αρα ο Μπάνυ αγαπάει τα καρότα.

Αμφότεροι οι συλλογισμοί έχουν την ίδια μορφή. *Ολα τα A είναι B. Το S είναι A. Αρα το S είναι B.* Η αλήθεια ή το ψεύδος των επιμέρους υποθέσεων και συμπερασμάτων δεν ενδιαφέρουν τη Λογική. Την ενδιαφέρει μόνον εάν η αλήθεια της υπόθεσης συνεπάγεται την αλήθεια του συμπεράσματος. Η συστηματική τυποποίηση και κατάταξη των έγκυρων μεθόδων συλλογισμού είναι μια από τις κύριες ασχολίες της Λογικής. Αν δε για τη μελέτη όλων αυτών χρησιμοποιούνται μαθηματικές μέθοδοι και το ενδιαφέρον κατευθύνεται κυρίως στους Μαθηματικούς συλλογισμούς τότε λέμε τη Λογική αυτή Μαθηματική Λογική. Αλλά πέρα από κάθε ορισμό, ο καλύτερος τρόπος για να δούμε τι είναι μια επιστήμη είναι να τη μελετήσουμε. Ας αρχίσουμε λοιπόν!

2 Η Λογική των Προτάσεων

(Προτασιακός Λογισμός, Propositional calculus, Sentential calculus)

Ακολούθως θα κατασκευάσουμε μια *γλώσσα* μέσα στην οποία θα μπορούμε να μεταφράζουμε προτάσεις της ελληνικής γλώσσας. Αντίθετα με τις φυσικές γλώσσες (ελληνικά, αγγλικά, κ.λ.π.) η γλώσσα που θα κατασκευάσουμε θα είναι μια *τυπική* γλώσσα, μια γλώσσα με αυστηρούς κανόνες σχηματισμού των προτάσεων.

Ας εξετάσουμε μερικά από τα χαρακτηριστικά που θέλουμε να συμπεριλάβουμε στη γλώσσα αυτή. π.χ. πάρτε την πρόταση "παρατηρήθηκαν ίχνη ποτάσσας". Στην τυπική γλώσσα τη μεταφράζουμε με το σύμβολο, ας πούμε, K. Τότε για την πρόταση "δεν παρατηρήθηκαν ίχνη ποτάσσας" μπορούμε να γράψουμε $\neg K$ (όπου $\neg$ είναι το σύμβολο για την άρνηση). Θα μπορούσαμε, για τη μετάφραση της πρότασης "δεν παρατηρήθηκαν ίχνη ποτάσσας", να χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο σύμβολο, ας πούμε M. Αλλά προτιμούμε να "σπάσουμε" την πρόταση σε όσο το δυνατόν περισσότερα *απλά* κομμάτια.

Για μια άλλη, άσχετη με την παραπάνω, πρόταση "το δείγμα περιείχε χλώριο" διαλέγουμε, ας πούμε, το σύμβολο C. Τότε οι ακόλουθες *σύνθετες* ελληνικές προτάσεις μπορούν να μεταφραστούν στην τυπική μας γλώσσα. (χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\rightarrow$ για τη συνεπαγωγή, $\wedge$ για την σύζευξη, $\vee$ για τη διάζευξη).

Ελληνικές προτάσεις	Μετάφραση στην τυπική γλωσσα
Αν παρατηρήθηκαν ίχνη ποτάσσας, τότε το δείγμα δεν περιείχε χλώριο.	$(K \rightarrow (\neg C))$
Το δείγμα περιείχε χλώριο και παρατηρήθηκαν ίχνη ποτάσσας.	$(C \wedge K)$
Είτε δεν παρατηρήθηκαν ίχνη ποτάσσας ή το δείγμα δεν περιείχε χλώριο.	$((\neg K) \vee (\neg C))$
Ούτε το δείγμα περιείχε χλώριο ούτε παρατηρήθηκαν ίχνη ποτάσσας.	$((\neg C) \wedge (\neg K))$ ή $(\neg(C \vee K))$

Ενα σημαντικό χαρακτηριστικό είναι ότι δοσμένης της αλήθειας ή του ψεύδους των *απλών, ατομικών* προτάσεων μπορούμε αμέσως να αποφανθούμε για την αλήθεια ή το ψεύδος των *σύνθετων* προτάσεων. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι ο χημικός βγαίνει από το εργαστήριο και μας ανακοινώνει ότι παρατήρησε ίχνη ποτάσσας αλλά το δείγμα δε περιείχε χλώριο. Τότε ξέρουμε ότι οι τέσσερις παραπάνω προτάσεις είναι αληθής, ψευδής, αληθής και ψευδής αντιστοίχως.

Στην πραγματικότητα μπορούμε εκ των προτέρων να κατασκευάσουμε ένα πίνακα που να μας δίνει την αλήθεια ή το ψεύδος της σύνθετης πρότασης σε σχέση με την αλήθεια ή το ψεύδος των απλών προτάσεων απ' τις οποίες αποτελείται. π.χ.

K	C	$(\neg(C \vee K))$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

Αλλά σ' αυτό θα επανέλθουμε.

2.1 Η Γλώσσα της Λογικής των προτάσεων

Το *Αλφάβητο* της γλώσσας είναι ένα σύνολο συμβόλων που αποτελείται από:
(i) τα σύμβολα λογικών συνδέσμων: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.
(ii) Παρενθέσεις: την αριστερή παρένθεση (, και τη δεξιά παρένθεση).
(iii) Σύμβολα προτάσεων ή προτασιακές μεταβλητές: Ενα αριθμήσιμο σύνολο συμβόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$

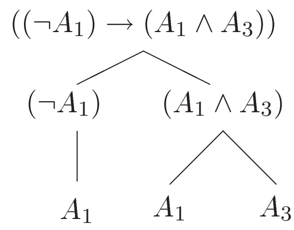
Σε κάθε γλώσσα το αλφάβητο είναι απαραίτητο. Είναι η πρώτη ύλη με την οποία στη συνέχεια κατασκευάζουμε τις προτάσεις μας, τις φράσεις μας. Οταν ορίζουμε το σύνολο των συμβόλων που αποτελούν το αλφάβητο θα νοείται ότι τα σύμβολα δεν έχουν καμμιά οντολογική σημασία πέραν του ότι είναι σύμβολα διακεκριμένα, δηλαδή ξεχωριστά μεταξύ τους.

Η παράθεση συμβόλων του αλφαβήτου, το ένα μετά το άλλο, σε ένα πεπερασμένο σχηματισμό μας δίνει τις εκφράσεις. *Εκφράσεις* λοιπόν της γλώσσας της λογικής των προτάσεων είναι οι πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων του αλφαβήτου
π.χ. $)) \rightarrow A_3($, $(A_1 \rightarrow (\neg A_2))$, $()A_{10}\neg$ είναι εκφράσεις. Από το σύνολο των εκφράσεων μας ενδιαφέρουν μόνο οι καλοφτιαγμένες, αυτές που έχουν να πουν κάτι, οι κτισμένες με τους "σωστούς" γραμματικούς κανόνες. Οι τρόποι ή ο αλγόριθμος μέσω του οποίου στο σύνολο των εκφράσεων μπορούμε να αναγνωρίσουμε τις καλοφτιαγμένες εκφράσεις θα αποτελεί τη *Γραμματική* της γλώσσας. Αποτυπώνεται δε στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.1 Σωστές *ή* καλοφτιαγμένες εκφράσεις *ή* προτασιακοί τύποι *είναι οι εκφράσεις που ορίζονται, επαγωγικά, ως εξής:*
(i) Τα σύμβολα προτάσεων είναι προτασιακοί τύποι.
(ii) Αν φ και ψ είναι προτασιακοί τύποι τότε οι εκφράσεις $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\neg\varphi)$ είναι προτασιακοί τύποι. (iii) Μόνον *οι εκφράσεις που σχηματίζονται από μια διαδοχική εφαρμογή των (i) και (ii) είναι προτασιακοί τύποι.*

Ο ορισμός 2.1 δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας μηχανισμός κατασκευής προτασιακών τύπων. Ο τύπος αυτός του ορισμού λέγεται και *γενικευμένος επαγωγικός* ορισμός. Είναι επαγωγικός επειδή μας δίνει ένα σύνολο αρχικών εκφράσεων, τις προτασιακές μεταβλητές, που τις ονομάζει προτασιακούς τύπους και στη συνέχεια δίνει κάποιους κανόνες οι οποίοι μπορούν να εφαρμοστούν, γενικώτερα, σε εκφράσεις και που μας επιτρέπουν να κατασκευάσουμε καινούργιους προτασιακούς τύπους από προτασιακούς τύπους που έχουν ήδη κατασκευαστεί. Κάθε έκφραση λοιπόν είναι προτασιακός τύπος μόνον αν στην κατασκευή της έχει προηγηθεί αυτή η διαδικασία.
λ.χ. η έκφραση $((\neg A_1 \rightarrow (A_1 \wedge A_3))$ είναι προτασιακός τύπος διότι υπάρχει η εξής κατασκευή:
1. Τα A_1, A_3 είναι προτασιακοί τύποι λόγω (i).
2. Τα $(\neg A_1), (A_1 \wedge A_3)$ είναι προτασιακοί τύποι λόγω (ii).
3. $((\neg A_1 \rightarrow (A_1 \wedge A_3))$ είναι προτασιακός τύπος λόγω (ii).

Η κατασκευή αυτή μπορεί να παρουσιαστεί υπό μορφή δένδρου ως εξής:



Κάθε έκφραση, στην οποία δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί η διαδικασία ορισμού δεν είναι προτασιακός τύπος. π.χ. $\neg(A_1$ δεν είναι προτασιακός τύπος.

Ο τύπος του γενικευμένου επαγωγικού ορισμού υποδεικνύει και μια μέθοδο απόδειξης που ονομάζεται *απόδειξη με επαγωγή*. Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{P}(x)$ είναι μια ιδιότητα που αναφέρεται στις εκφράσεις της γλώσσας π.χ. $\mathcal{P}(x)$ θα μπορούσε να είναι η ιδιότητα "η έκφραση x έχει τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων". Τότε, για να αποδείξουμε ότι η ιδιότητα $\mathcal{P}(x)$ ισχύει για όλους τους προτασιακούς τύπους αρκεί να αποδείξουμε τα εξής:
(i) Να αποδείξουμε ότι $\mathcal{P}(A_i)$ για κάθε σύμβολο πρότασης A_i, δηλαδή να αποδείξουμε ότι κάθε σύμβολο πρότασης έχει αυτή την ιδιότητα.
(ii) Με βάση την υπόθεση $\mathcal{P}(\varphi)$ και $\mathcal{P}(\psi)$ να αποδείξουμε ότι ισχύει και $\mathcal{P}((\neg\varphi))$, $\mathcal{P}((\varphi \vee \psi))$, $\mathcal{P}((\varphi \wedge \psi))$, $\mathcal{P}((\varphi \to \psi))$. (το επαγωγικό βήμα).

Αν λοιπόν αποδείξουμε τα (i) και (ii) για μια ιδιότητα $\mathcal{P}(x)$ τότε η ιδιότητα αυτή θα ισχύει για κάθε προτασιακό τύπο x επειδή θα μεταφέρεται στα στάδια κατασκευής του x.

Παράδειγμα 2.2 Αποδείξτε ότι κάθε προτασιακός τύπος έχει τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων.

Απόδειξη: Με επαγωγή:
(i) Η ιδιότητα ισχύει για τα σύμβολα προτάσεων γιατί ο αριθμός των παρενθέσεων είναι μηδέν.
(ii) Εστω φ και ψ έχουν τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων. Τότε $(\neg\varphi)$ έχει επίσης τον ίδιο αριθμό διότι προστέθηκε στον φ μόνο μια αριστερή και μια δεξιά παρένθεση. Επίσης, $(\varphi \wedge \psi)$ έχει τον ίδιο αριθμό διότι προφανώς η έκφραση $\varphi \wedge \psi$ έχει τον ίδιο αριθμό και στον $(\varphi \wedge \psi)$ προστέθηκε μια αριστερή και μια δεξιά παρένθεση. Για τον ίδιο λόγο τα $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ έχουν τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων.

2.2 Μοναδική Αναγνωσιμότητα

Κάθε προτασιακός τύπος, ανάλογα με το ποιό σύμβολο συνδέσμου έχει χρησιμοποιηθεί τελευταίο στην κατασκευή του, είναι είτε μια προτασιακή μεταβλητή είτε μια άρνηση της μορφής $(\neg\varphi)$ είτε μία διάζευξη της μορφής $(\varphi \vee \psi)$ είτε μία σύζευξη της μορφής $(\varphi \wedge \psi)$ είτε μια συνεπαγωγή της μορφής $(\varphi \to \psi)$.

Το στοιχείο που μας επιτρέπει την αναμφίβολη αναγνώριση του ποιό σύμβολο συνδέσμου έχει εφαρμοστεί τελευταίο είναι η χρησιμοποίηση των παρενθέσεων. Αν δεν χρησιμοποιούσαμε παρενθέσεις και σχηματίζαμε π.χ. την έκφραση $A_1 \wedge A_2 \rightarrow A_3$ τότε θα ήμασταν σε αμφιβολία αν αυτό παριστάνει τον προτασιακό τύπο $(A_1 \wedge (A_2 \rightarrow A_3))$ ή τον $((A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_3)$. Δηλαδή η αναγνωσιμότητα σ' αυτή την περίπτωση δεν θάταν μοναδική. Πιό κάτω διατυπώνεται το θεώρημα που μας εξασφαλίζει τη μοναδική αναγνωσιμότητα.

θεώρημα 2.3 *Για κάθε προτασιακό τύπο φ* μία και μόνον μία *από τις ακόλουθες συνθήκες ικανοποιείται: (το $\equiv$ δηλώνει συντακτική ταυτότητα*[1]*).*
(1) φ είναι μια προτασιακή μεταβλητή.
(2) Υπάρχει ένας μοναδικός *προτασιακός τύπος ψ ώστε $\varphi \equiv (\neg\psi)$.*
(3) Υπάρχει ένα μοναδικό *ζεύγος προτασιακών τύπων ψ_1, ψ_2 και ένα* μοναδικό *σύμβολο λογικού συνδέσμου $\diamondsuit$ έτσι ώστε $\varphi \equiv (\psi_1 \diamondsuit \psi_2)$.*
Αυτό σημαίνει ότι μια σύζευξη δεν μπορεί να είναι διάζευξη ή συνεπαγωγή κ.τ.λ.

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε πρώτα το ακόλουθο λήμμα, αφού δώσουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 2.4 *Εστω $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων. Τότε κάθε ακολουθία συμβόλων $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_\varkappa$ με $0 < \varkappa < n$ θα ονομάζεται* αρχικό μέρος *της $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$. π.χ. Αν $\varphi \equiv (A_1 \wedge (\neg A_2))$ και $\varphi' \equiv (A_1 \wedge ($ τότε η φ' είναι αρχικό μέρος της φ.*

Λήμμα 2.5 *Κάθε αρχικό μέρος ενός προτασιακού τύπου είναι μια έκφραση με πλήθος αριστερών παρανθέσεων μεγαλύτερο από το πλήθος των δεξιών.*

Απόδειξη: Με επαγωγή. Η ιδιότητα ισχύει στις προτασιακές μεταβλητές γιατί αυτές δεν έχουν αρχικό μέρος. Εστω τώρα ότι η ιδιότητα ισχύει για τους τύπους φ και ψ. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για τους $(\varphi \wedge \psi)$, $(\neg\varphi)$, κ.ο.κ. Παίρνουμε τον $(\varphi \wedge \psi)$. Κάθε αρχικό μέρος του $(\varphi \wedge \psi)$ έχει μια από τις μορφές (ή $(\varphi'$ ή $(\varphi$ ή $(\varphi\wedge$ ή $\varphi \wedge \psi'$ ή $(\varphi \wedge \psi$, όπου φ' και ψ' αρχικά μέρη αντίστοιχα των φ και ψ, άρα λόγω της υποθέσεως ισχύει γι' αυτά η ιδιότητα. Είναι εύκολο να δούμε ότι και στις τέσσερις περιπτώσεις έχουμε περισσότερες αριστερές από δεξιές παρενθέσεις. Την ίδια ακριβώς απόδειξη χρησιμοποιούμε για τους $(\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\neg\varphi)$.
Απόδειξη του θεωρήματος 2.3 Το ότι κάθε προτασιακός τύπος θα έχει μια από τις μορφές που δηλώνονται στο Θεώρημα 2.3 είναι προφανές από τον επαγωγικό ορισμό 2.1. Να αποδείξουμε τώρα τη μοναδικότητα. Εστω ότι ο τύπος έχει τη μορφή $(\psi_1 \wedge \psi_2)$. Ο τύπος αυτός είναι αδύνατον να έχει και τη μορφή $(\neg\psi)$, διότι ο τύπος ψ_1 θα άρχιζε με το σύμβολο $\neg$, αδύνατον διότι

[1] $\phi \equiv \psi$ σημαίνει ότι οι εκφράσεις ταυτίζονται ως συμβολοσειρές. Αυτό λέγεται συντακτική ταυτότητα και διαφέρει από την ισότητα π.χ. $1+1=2$ αλλά όχι $1+1 \equiv 2$ διότι $1+1$ και 2 είναι διαφορετικές συμβολοσειρές.

όλοι οι προτασιακοί τύποι είτε είναι προτασιακές μεταβλητές είτε αρχίζουν με μια αριστερή παρένθεση. Εστω τώρα ότι $(\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\psi_1' \diamondsuit \psi_2')$ για κάποιους τύπους ψ_1', ψ_2' και κάποιο σύμβολο συνδέσμου $\diamondsuit$. Αυτό σημαίνει ότι $\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv \psi_1' \diamondsuit \psi_2')$. Αλλά τότε αν το ψ_1 διαφορετικό από το ψ_1', αυτό σημαίνει ότι αν αρχίσουμε να διαγράφουμε τα ίδια σύμβολα που αναγκαστικά βρίσκονται στις ακολουθίες συμβόλων $\psi_1 \wedge \psi_2)$ και $\psi_1' \diamondsuit \psi_2')$ ανάλογα με το ποιό από τους ψ_1 και ψ_1' εξαντλήσουμε πρώτο, είτε ο ψ_1 θα είναι αρχικό μέρος του ψ_1' ή ο ψ_1' θα είναι αρχικό μέρος του ψ_1. Και τα δύο όμως αυτά είναι αδύνατα μια και σύμφωνα με το λήμμα 2.5 κάθε αρχικό μέρος ενός προτασιακού τύπου έχει περισσότερες αριστερές από δεξιές παρενθέσεις άρα αποκλείεται να είναι τύπος όπως απαιτεί το παράδειγμα 2.2. Αρα τελικά $\psi_1 \equiv \psi_1'$ και άρα $\wedge \psi_2) \equiv \diamondsuit \psi_2')$ από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $\wedge \equiv \diamondsuit$ και $\psi_2 \equiv \diamondsuit \psi_2')$. Ομοια δουλεύουμε και για τις άλλες μορφές $(\varphi \vee \psi)$ κ.τ.λ.

2.2.1 Πολωνική γραφή

Υπάρχει ένας τρόπος να ορίσουμε τους τύπους χωρίς να χρησιμοποιήσουμε παρενθέσεις και παρόλα αυτά να έχουμε μοναδική αναγνωσιμότητα. Ξεκινώντας από τις προτασιακές μεταβλητές κάθε φορά που θέλουμε την άρνηση του φ γράφουμε $\neg\varphi$, για τη διάζευξη, σύζευξη, συνεπαγωγή των φ και ψ γράφουμε αντίστοιχα $\vee\varphi\psi$, $\wedge\varphi\psi$, $\rightarrow \varphi\psi$. Ο τρόπος αυτός επειδή χρησιμοποιήθηκε πρώτα από τους Πολωνούς λογικούς ονομάζεται Πολωνικός τρόπος γραφής.

2.2.2 Ανορθογραφίες

Επειδή όταν θέλουμε να γράψουμε προτασιακούς τύπους είναι πολλές φορές κουραστικό να χρησιμοποιούμε όλες τις παρενθέσεις που απαιτούνται, θα επιτρέπουμε στον εαυτό μας να κάνουμε και ανορθογραφίες. π.χ. θα γράψουμε $\phi \wedge \psi$ και θα εννοούμε $(\phi \wedge \psi)$, θα γράφουμε $(\neg\psi) \rightarrow \psi$ και θα εννοούμε $((\neg\psi) \rightarrow \psi)$. Ο "κανόνας" στις ανορθογραφίες θα είναι ότι το $\neg$ θα δένει περισσότερο με τα γειτονικά του απ' ότι τα $\vee$ και $\wedge$ που με τη σειρά τους θα δένουν περισσότερο με τα γειτονικά τους απ' ότι το $\rightarrow$. π.χ. αν γράψω $\neg\phi\vee\psi \rightarrow \phi\vee\psi$ σύμφωνα με αυτόν τον κανόνα θα εννοώ $((\neg\phi\vee\psi) \rightarrow (\phi\vee\psi))$.

2.3 Ασκήσεις

1. Φανταστείτε ότι ο υπολογιστής σας αναγνωρίζει τα σύμβολα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ και τα σύμβολα $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Να κατασκευάσετε ένα πρόγραμμα (αλγόριθμο) ώστε όταν τον τροφοδοτείτε με μια έκφραση να σας απαντάει άν αυτή είναι προτασιακός τύπος ή όχι.

2. Αποδείξτε το θεώρημα της μοναδικής αναγνωσιμότητας για την Πολωνική γραφή.

(Υπόδειξη: Οι εκφράσεις φ και ψ λέγονται *συμβιβαστές* όταν είτε $\varphi \equiv \psi$ είτε η μία από αυτές είναι αρχικό μέρος της άλλης. Αποδείξτε με επαγωγή στον αριθμό των συμβόλων ότι αν $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ είναι προτασιακοί τύποι και οι εκφράσεις $\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n$ και $\psi_1\psi_2 \ldots \psi_n$ είναι συμβιβαστές, τότε $\varphi_i \equiv \psi_i$ για κάθε $i \leq n$.)

2.4 Σημασιολογικές έννοιες (Semantics ή Σημαντική)

Μέχρι τώρα η μελέτη της γλώσσας ήταν καθαρά *συντακτική*. Οι προτασιακοί τύποι δεν ήταν τίποτε άλλο παρά «νεκρές» ακολουθίες συμβόλων, συντακτικά αντικείμενα. Πέραν αυτού καμμιά άλλη οντολογική αξία δεν αναγνωριζόταν σ' αυτά τα σύμβολα, δεν ήταν φορτισμένα με καμμιά «ερμηνεία». Η γλώσσα όμως υπάρχει για να εκφράζει κάποια πράγματα. Για να αποκαταστήσουμε λοιπόν το λόγο για τον οποίο κατασκευάστηκε η (τυπική) γλώσσα πρέπει να δώσουμε την ερμηνεία της, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο η γλώσσα αποκτά τη σημασία της (σημασιολογία ή σημαντική). Προς το σκοπό αυτό θα σκεφτόμαστε ότι τα σύμβολα προτάσεων είναι (κάποιες) απλές, ατομικές προτάσεις της ελληνικής γλώσσας (άρα προτάσεις που είναι αληθείς ή ψευδείς), τα υπόλοιπα σύμβολα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ έχουν τη συνήθη σημασία και ότι ο ορισμός της κατασκευής των προτασιακών τύπων αντανακλά τον τρόπο κατασκευής προτάσεων, στη φυσική γλώσσα, με βάση τους λογικούς συνδέσμους.

Συνήθεις λογικοί σύνδεσμοι: θεωρούμε σκόπιμο να παρεμβάλουμε μιά εξέταση των συνήθων λογικών συνδέσμων $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$. Εδώ θα πρέπει να προσέξουμε. Τα σύμβολα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ τα μεταχειριστήκαμε ως σύμβολα συνδέσμων στην τυπική μας γλώσσα. Και τώρα προτιθέμεθα να τα μεταχειριστούμε και σαν σύμβολα των ίδιων των πραγματικών συνδέσμων. Μια λύση θα ήταν να γράφουμε $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ για τα σύμβολα ως συντακτικά αντικείμενα και κάτι σαν $\tilde{\neg}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\rightarrow}$ για τη σημασία τους δηλ. τους συνδέσμους. Το αποφεύγουμε και ελπίζουμε ότι ο αναγνώστης θα καταλαβαίνει κάθε φορά τι εννοούμε. Δεχόμαστε ότι κάθε προτασιακός τύπος (που παριστάνει μιά πρόταση της φυσικής γλώσσας) μπορεί να έχει μια από τις εξής δύο *αληθοτιμές*: *αληθής* (T, True) ή *ψευδής* (F, False). Η αληθοτιμή μιας σύνθετης πρότασης καθορίζεται πλήρως από τις αληθοτιμές των απλούστερων προτάσεων που συνδέθηκαν με κάποιον λογικό σύνδεσμο για να τη σχηματίσουν. Ο καθορισμός αυτός γίνεται σύμφωνα με τους παρακάτω αληθοπίνακες: *Αρνηση*:

φ	$\neg\varphi$
T	F
F	T

Η άρνηση αλλάζει την τιμή αλήθειας της πρότασης στην οποία αναφέρεται. *Σύζευξη*:

φ	ψ	$\varphi\wedge\psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

"$\varphi \wedge \psi$" σημαίνει "φ και ψ".

Διάζευξη:

“$\varphi \vee \psi$” σημαίνει “φ ή ψ”. Υπάρχουν δύο σημασίες της διάζευξης στην καθημερινή της χρήση. Η *μη-αποκλειστική* και η *αποκλειστική* σημασία. Η *μη-αποκλειστική* διάζευξη δύο προτάσεων εκφράζει ότι μία από τις προτάσεις είναι αληθινή, χωρίς να λέει τίποτα για το αν αμφότερες οι προτάσεις πρέπει να είναι αληθινές ή όχι. Η *αποκλειστική* διάζευξη δύο προτάσεων μας λέει ότι μία από τις προτάσεις είναι αληθής ενώ η άλλη είναι ψευδής. π.χ. Αν σ' ένα βιβλιοπωλείο είναι γραμμένη η επιγραφή “Οι πελάτες που είναι καθηγητές ή φοιτητές έχουν μια ειδική έκπτωση” τότε προφανώς έχουμε μια μη-αποκλειστική διάζευξη. Αν ενα κινηματογραφικό έργο παίζεται την ίδια στιγμή μ' ένα θεατρικό έργο τότε η πρόταση “θα πάμε στον κινηματογράφο ή στο θέατρο” έχει την αποκλειστική σημασία. Στα Μαθηματικά η διάζευξη χρησιμοποιείται πάντα με την μη-αποκλειστική της σημασία. Αρα μπορούμε να λέμε ότι κάθε αριθμός είναι θετικός ή μικρότερος του 3 ξέροντας ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί μικρότεροι του 3. Ο αληθοπίνακας της μη-αποκλειστικής διάζευξης είναι:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Συνεπαγωγή:

“$\varphi \to \psi$” σημαίνει “εάν φ τότε ψ”.

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Η περίπτωση (2η σειρά) όπου η υπόθεση είναι αληθής και το συμπέρασμα ψευδές είναι σαφής. Στην περίπτωση αυτή στο $\varphi \to \psi$ πρέπει να αποδοθεί η τιμή F. Επίσης σαφής είναι και η περίπτωση της πρώτης σειράς. Για να δικαιολογήσουμε τις υπόλοιπες σειρές του αληθοπίνακα παρατηρούμε ότι είναι επιθυμητό η πρόταση “εάν φ και ψ τότε ψ” να είναι *πάντα* αληθινή. Δηλαδή η $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$ πρέπει να παίρνει πάντα την τιμή T. Αλλά τότε: (γράφοντας $\varphi = \mathsf{T}$ ή $\varphi = \mathsf{F}$ αν η φ παίρνει την τιμή T ή την τιμή F)

- Αν $\varphi = \mathsf{T}$ και $\psi = \mathsf{T}$ τότε $(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{T}$ και $\psi = \mathsf{T}$. Αρα δικαιολογείται η πρώτη σειρα.
- Αν $\varphi = \mathsf{F}$ και $\psi = \mathsf{T}$ τότε $(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{F}$ αρα δικαιολογείται η τρίτη σειρα.
- Αν $\varphi = \mathsf{F}$ και $\psi = \mathsf{F}$ τότε $(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{F}$ αρα
  δικαιολογείται η τέταρτη σειρα.

Αλλη δικαιολόγηση του αληθοπίνακα είναι η εξής: Θεωρούμε την πρόταση "αν x περιττός τότε x^2 περιττός". Τη θεωρούμε *αληθινή* πρόταση. Προφανώς για να διαψεύσουμε αυτήν την πρόταση δεν θα θέλαμε να θεωρήσουμε περιπτώσεις όπου x δεν είναι περιττός. Αυτό δικαιολογεί την 3η και 4η σειρά. Επίσης κάθε περίπτωση x περιττού μας δίνει x^2 περιττό που επιβεβαιώνει το γενικό ισχυρισμό. Αυτό δικαιολογεί την 1η σειρά.

2.5 Απονομές Αλήθειας

Θέλουμε να ορίσουμε τι σημαίνει για ένα προτασιακό τύπο να είναι λογική συνέπεια άλλων προτασιακών τύπων π.χ. A_1 ειναι λογική συνέπεια του $(A_1 \wedge A_2)$. Γιατί πράγματι όποιες προτάσεις της ελληνικής γλώσσας και να συμβολίζουν οι A_1 και A_2, αν η πρόταση $(A_1 \wedge A_2)$ είναι αληθής τότε η A_1 θα είναι επίσης αληθής. Το σύνολο $\{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ το ονομάζουμε σύνολο των *αληθοτιμών* ή *τιμών αλήθειας* και αποτελείται από δύο ξεχωριστά στοιχεία, το T και το F. Το T ονομάζουμε *αληθές* (True). Το F ονομάζουμε *ψευδές* (False). (Δεν έχει σημασία *ποιά* είναι τα T και F , θα μπορούσε να ήταν οι αριθμοι 1 και 0). Εστω $\mathcal{A}$ το σύνολο συμβόλων προτάσεων της γλώσσας της λογικής των προτάσεων και $\mathcal{P}$ το σύνολο όλων των προτασιακών τύπων.

Ορισμός 2.6 Απονομή αλήθειας *ονομάζουμε κάθε συνάρτηση*

$$V : \mathcal{A} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$$

(δηλαδή κάθε συνάρτηση από το σύνολο $\mathcal{A}$ στο σύνολο των αληθοτιμών).

Αν V είναι μία απονομή αλήθειας τότε σε κάθε «ατομική πρόταση» A_k αντιστοιχεί μέσω της V μία τιμή T ή F. Αν υποθέσουμε ότι οι $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ αντιστοιχούν στις ατομικές προτάσεις που μπορούμε να σχηματίσουμε στην ελληνική γλώσσα, τότε η τιμή T ή F που θα παίρνουμε μεσω της V θα μας λέει ότι η πρόταση είναι αντίστοιχα αληθής ή ψευδής. Δηλαδή μία απονομή αλήθειας αποτελεί ένα «κόσμο» μέσα στον οποίο μία ατομική πρόταση (δηλ. τα σύμβολα προτάσεων) αποκτά τη σημασία του, να είναι δηλαδή αληθής ή ψευδής στον κόσμο αυτό. Άπαξ και δοθεί μια απονομή αλήθειας, οι τιμές αλήθειας των σύνθετων προτάσεων θα καθορίζονται βάσει των αληθοπινάκων. Αυτό αυτόματα θα μας δώσει μια επέκταση της συνάρτησης V στο σύνολο όλων των προτάσεων. Αν ονομάσουμε $\bar{V}$ αυτήν την επέκταση, η $\bar{V}$ θα είναι μια συνάρτηση $\bar{V} : \mathcal{P} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ που ορίζεται ως ακολούθως: Ο ορισμός γίνεται με (γενικευμένη) επαγωγή στον τρόπο κατασκευής των προτασιακών τύπων:

0. Για κάθε $A_i \in \mathcal{A}$ έχουμε $\bar{V}(A_i) = V(A_i)$ (αρα $\bar{V}$ είναι επέκταση της V).

   Αν τώρα $\varphi, \psi \in \mathcal{P}$ και έχουν ήδη ορισθεί οι $\bar{V}(\varphi)$ και $\bar{V}(\psi)$,

1. $\bar{V}((\neg\varphi)) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{F} \\ \mathsf{F} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{T} \end{cases}$

2. $\bar{V}((\varphi \wedge \psi)) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{T} \text{ και } \bar{V}(\psi) = \mathsf{T} \\ \mathsf{F} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

3. $\bar{V}((\varphi \vee \psi)) = \begin{cases} \mathsf{F} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{F} \text{ και } \bar{V}(\psi) = \mathsf{F} \\ \mathsf{T} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

4. $\bar{V}((\varphi \to \psi)) = \begin{cases} \mathsf{F} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{T} \text{ και } \bar{V}(\psi) = \mathsf{F} \\ \mathsf{T} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Σημείωση: Είναι εύκολο να δούμε ότι οι συνθήκες δεξιά αντιστοιχούν στον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε την τιμή αλήθειας μιας σύνθετης πρότασης βάσει του αληθοπίνακα (όταν οι τιμές αλήθειας των επί μέρους προτάσεων είναι γνωστές). Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα θεωρήματα:

θεώρημα 2.7 *Για κάθε απονομή αλήθειας V υπάρχει μία και μόνον μία επέκταση $\bar{V}$.*

θεώρημα 2.8 *Αν φ είναι ένας προτασιακός τύπος στον οποίο εμφανίζονται τα σύμβολα προτάσεων $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_n}$ (και μόνον αυτά) και αν V_1, V_2 είναι δύο απονομές αλήθειας που συμφωνούν σ' αυτά τα σύμβολα δηλ. $V_1(A_{k_i}) = V_2(A_{k_i}) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$, τότε $\bar{V}_1(\varphi) = \bar{V}_2(\varphi)$.*

π.χ. Αν $\varphi \equiv (A_1 \to (A_2 \to A_5))$ τότε η τιμή $\bar{V}(\varphi)$ εξαρτάται μόνον από τις τιμές $V(A_1), V(A_2), V(A_5)$ και όχι από άλλες λ.χ. την $V(A_{50})$.

Ορισμός 2.9 *Λέμε ότι μια απονομή αλήθειας V* ικανοποιεί *τον προτασιακό τύπο φ αν $\bar{V}(\varphi) = \mathsf{T}$.*

Ας υποθέσουμε τώρα ότι Σ είναι ένα σύνολο προτασιακών τύπων (άπειρο ή πεπερασμένο) και ότι τ είναι επίσης ένας προτασιακός τύπος.

Ορισμός 2.10 *Το Σ* ταυτολογικα συνεπάγεται *τον τ (και γράφουμε $\Sigma \models \tau$) αν κάθε απονομή αλήθειας που ικανοποιεί όλους τους τύπους στο Σ ικανοποιεί και τον τ.*

Ο ορισμός αυτός αντανακλά το αίσθημα που έχουμε να θεωρούμε ότι ένα συμπέρασμα (το τ) έπεται από ένα σύνολο υποθέσεων (το Σ) αν η παραδοχή ότι οι υποθέσεις είναι αληθινές εξασφαλίζει ότι και το συμπέρασμα είναι αληθές. Ορισμένες ειδικές περιπτώσεις του $\Sigma \models \tau$ αξίζει να μνημονευτούν. Ας είναι το Σ το κενό σύνολο $\emptyset$. Παρατηρούμε ότι είναι *πάντα* αλήθεια ότι κάθε απονομή αλήθειας ικανοποιεί όλα τα μέλη του Σ (γιατί;). Αρα όταν έχουμε $\emptyset \models \tau$, αυτό σημαίνει ότι *κάθε* απονομή αλήθειας ικανοποιεί τον τ. Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι ο τ είναι *ταυτολογία* και γράφουμε $\models \tau$. Αλλη ειδική περίπτωση είναι όταν καμία απονομή αλήθειας δεν ικανοποιεί όλα μαζί τα μέλη του Σ. Τότε ισχύει (δηλαδή σ' αυτή την περίπτωση είναι αληθές) το $\Sigma \models \tau$. π.χ. $\Sigma = \{\varphi, \neg\varphi\} \models \psi$. Αν το Σ είναι μονομελές δηλ. $\Sigma = \{\sigma\}$ για κάποιο σ, τότε αντί για $\{\sigma\} \models \tau$ γράφουμε $\sigma \models \tau$. Αν έχουμε $\sigma \models \tau$ και $\tau \models \sigma$ λέμε ότι οι σ και τ είναι *ταυτολογικά ισοδύναμοι* και γράφουμε $\sigma \bowtie \tau$.

π.χ. $\neg(\varphi \wedge \psi) \bowtie \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

2.6 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι κανένας από τούς δύο προτασιακούς τύπους δεν συνεπάγεται ταυτολογικά τον άλλο:
$(\varphi \wedge ((\psi \to \tau) \wedge (\tau \to \psi)))$ και $((\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \vee ((\neg\varphi) \wedge ((\neg\psi) \wedge (\neg\tau))))$

2. Είναι ο $(((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi)$ ταυτολογία;

3. (i) $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi \iff \Sigma \models (\varphi \to \psi)$
(ii) $\sigma \bowtie \tau \iff \models (\sigma \to \tau) \wedge (\tau \to \sigma)$

2.7 Προτασιακοί Σύνδεσμοι

Μέχρι τώρα έχουμε χρησιμοποιήσει τέσσερεις προτασιακούς (ή λογικούς) συνδέσμους. Αναρωτιέμαστε αν θα κερδίζαμε τίποτα προσθέτοντας κι' άλλους συνδέσμους ή θα χάναμε παραλείποντας μερικούς. Θα προσπαθήσουμε τέτοιου είδους ερωτήσεις να τίς κάνουμε ακριβείς ώστε να μπορέσουμε να δώσουμε και ακριβείς απαντήσεις. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα. Εστω ότι επεκτείνουμε τη γλώσσα μας προσθέτοντας ένα τριπλό σύνδεσμο $\#$. Δηλαδή τώρα αν φ, ψ, τ είναι προτασιακοί τύποι, ο $(\#\varphi\psi\tau)$ θα είναι προτασιακός τύπος. Πρέπει να δώσουμε μια ερμηνεία σ' αυτό το σύμβολο. Δηλαδή να υπολογίζουμε την τιμή $\bar{V}((\#\varphi\psi\tau))$, όπου V είναι μια απονομή αλήθειας, όταν είναι γνωστές οι τιμές $\bar{V}(\varphi), \bar{V}(\psi), \bar{V}(\tau)$. Ορίζουμε $\bar{V}((\#\varphi\psi\tau))$ να είναι ό,τι και η πλειοψηφία των $\bar{V}(\varphi)$, $\bar{V}(\psi)$, $\bar{V}(\tau)$ π.χ. αν $\bar{V}(\varphi) = \bar{V}(\psi) = \mathsf{T}$ και $\bar{V}(\tau) = \mathsf{F}$ τότε $\bar{V}((\#\varphi\psi\tau)) = \mathsf{T}$. Ισχυριζόμαστε ότι με την επέκταση αυτή που κάναμε στο σύνολο των συνδέσμων μας δεν κερδίσαμε τίποτα, γιατί κάθε προτασιακός τύπος στην επεκτεταμένη καινούργια μας γλώσσα είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με έναν προτασιακό τύπο της αρχικής μας γλώσσας. Κι' αυτό γιατί $(\#\varphi\psi\tau)$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\tau)\vee(\psi\wedge\tau))$.

Ορισμός 2.11 *Κάθε συνάρτηση $\mathcal{B} : \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n \rightarrow \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$ ονομάζεται* συνάρτηση Boole *n θέσεων ή (λογικός, προτασιακός)* σύνδεσμος *n θέσεων. Εδώ $\{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n = \underbrace{\{\mathsf{T},\mathsf{F}\} \times \ldots \times \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}}_{n}$. Επιτρέπουμε και στις τιμές T και F να είναι συναρτήσεις Boole με 0 θέσεις. Σ' αυτήν την περίπτωση συνήθως γράφουμε $\mathcal{T}$ και $\mathcal{F}$.*

Η έννοια της συνάρτησης Boole γενικεύει την ιδέα του συνδέσμου. Οταν ερμηνεύουμε ένα σύνδεσμο λέμε ποιοί συνδυασμοί τιμών αλήθειας (διατεταγμένες n-άδες αληθοτιμών) δίνουν ποιές τιμές αλήθειας (π.χ. ο αληθοπίνακας). Κάθε προτασιακός τύπος ορίζει μια συνάρτηση Boole.
π.χ. θεωρούμε τον $(A_1 \wedge A_2) \vee A_1$. Παίρνουμε την εξής συνάρτηση Boole.

A_1	A_2	$(A_1 \wedge A_2) \vee A_1$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	F

Και γενικώτερα:

Ορισμός 2.12 *Εστω τ προτασιακός τύπος που οι προτασιακές μεταβλητές που περιέχει είναι οι $A_1, \ldots, A_n$. Ορίζουμε τη συνάρτηση Boole με n θέσεις $\mathcal{B}_\mathcal{T}$ ως ακολούθως. $\mathcal{B}_\mathcal{T}(x_1, \ldots, x_n) = \bar{V}(\tau)$, όπου $x_i \in \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$, η $\bar{V}$ είναι απονομή αλήθειας με $V(A_i) = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Λέμε ότι η $\mathcal{B}_\mathcal{T}$ είναι η* συνάρτηση Boole *που* πραγματοποιείται *από τον τ.*

θεώρημα 2.13 *Εστω $\mathcal{G}$ μια συνάρτηση Boole με n θέσεις ($n \geq 1$). Τότε υπάρχει ένας προτασιακός τύπος τ στη γλώσσα της λογικής των προτάσεων έτσι ώστε $\mathcal{G} = \mathcal{B}_\tau$, δηλαδή $\mathcal{G}$ πραγματοποιείται από τόν τ.*

Απόδειξη: 1η περίπτωση: πεδίο τιμών της $\mathcal{G}$ είναι το σύνολο $\{\mathsf{F}\}$. Τότε

$$\tau \equiv (A_1 \wedge \neg A_1) \wedge \ldots \wedge (A_n \wedge \neg A_n)$$

2η περίπτωση: Η 1η περίπτωση δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχουν k περιπτώσεις στις οποίες η $\mathcal{G}$ παίρνει την τιμή T, όπου $0 < k \leq 2^n$. Κάνουμε μια λίστα αυτών των περιπτώσεων.

$$\left.\begin{array}{cc} x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n} & (1) \\ x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n} & (2) \\ \vdots & \vdots \\ x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn} & (k) \end{array}\right\}$$

Εστω

$$\beta_{ij} = \begin{cases} A_j & \text{αν } x_{ij} = \mathsf{T} \\ (\neg A_j) & \text{αν } x_{ij} = \mathsf{F} \end{cases}$$

και $\gamma_i = \beta_{i1} \wedge \ldots \wedge \beta_{in}$ και $\tau = \gamma_1 \vee \ldots \vee \tau_k$.
Ισχυριζόμαστε ότι $\mathcal{G} = \mathcal{B}_\tau$. Πότε η τ γίνεται αληθινή; Οταν *όλα* τα $\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in}$ γίνουν αληθινά. Τα β_{ij} όμως είναι κατασκευασμένα έτσι ώστε να παίρνουν την τιμή T *μόνον* όταν τα A_j πάρουν τις τιμές που έχουμε στον πίνακα. Ενας οποιοσδήποτε άλλος συνδυαμός εκτός πίνακα κάνει ένα από τα β_{ij} ψευδές, άρα όλα τα γ_i ψευδή, άρα την τ ψευδή. Ολα αυτά φαίνονται καθαρά αν εξετάσουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Εστω $\mathcal{G}$ ως ακολούθως:

$$\begin{array}{c} \mathcal{G}(\mathsf{T},\mathsf{T},\mathsf{T})=\mathsf{T} \\ \mathcal{G}(\mathsf{T},\mathsf{T},\mathsf{F})=\mathsf{F} \\ \mathcal{G}(\mathsf{T},\mathsf{F},\mathsf{T})=\mathsf{F} \\ \mathcal{G}(\mathsf{T},\mathsf{F},\mathsf{F})=\mathsf{T} \\ \mathcal{G}(\mathsf{F},\mathsf{T},\mathsf{T})=\mathsf{F} \\ \mathcal{G}(\mathsf{F},\mathsf{T},\mathsf{F})=\mathsf{T} \\ \mathcal{G}(\mathsf{F},\mathsf{F},\mathsf{T})=\mathsf{T} \\ \mathcal{G}(\mathsf{F},\mathsf{F},\mathsf{F})=\mathsf{F} \end{array}$$

Τότε στις τριάδες των αληθοτιμών που αντιστοιχεί τιμή T δημιουργούμε τους εξής τύπους:

$$\left.\begin{array}{ccccc} \mathsf{F} & \mathsf{F} & \mathsf{T} & & (\neg A_1) \wedge (\neg A_2) \wedge A_3 \\ \mathsf{F} & \mathsf{T} & \mathsf{F} & & (\neg A_1) \wedge A_2 \wedge (\neg A_3) \\ \mathsf{T} & \mathsf{F} & \mathsf{F} & & A_1 \wedge (\neg A_2) \wedge (\neg A_3) \\ \mathsf{T} & \mathsf{T} & \mathsf{T} & & A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \end{array}\right\} \text{ αυτά είναι τα } \gamma_i$$

Τότε $\tau = ((\neg A_1) \wedge (\neg A_2) \wedge A_3) \vee ((\neg A_1) \wedge A_2 \wedge (\neg A_3)) \vee (A_1 \wedge (\neg A_2) \wedge (\neg A_3)) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$

Το συμπέρασμα του πιο πάνω θεωρήματος είναι ότι έχουμε αρκετούς (στην πραγματικότητα πιο πολλούς απ' ό,τι χρειαζόμαστε) συνδέσμους στη διάθεσή μας. Γιατί, αν υποθέσουμε ότι στη γλώσσα μας εισάγουμε κάποιους καινούργιους «εξωτικούς» συνδέσμους (όπως τον τριπλό #) τότε κάθε πρόταση φ στην καινούργια γλώσσα θα πραγματοποιεί μια συνάρτηση Boole, $\mathcal{B}_\varphi$. Αλλά απ' το πιο πάνω θεώρημα η $\mathcal{B}_\varphi$ θα πραγματοποιείται από μια πρόταση τ στην αρχική μας γλώσσα δηλ. $\mathcal{B}_\varphi = \mathcal{B}_\tau$. Πράγμα που μας λέει ότι φ και τ είναι ταυτολογικά ισοδύναμες. (Γιατί;)

Ορισμός 2.14 Διαζευκτική κανονική μορφή *καλείται κάθε μορφή* $\gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_k$ *όπου* $\gamma_i = \beta_{i1} \wedge \ldots \wedge \beta_{in_i}$ *και κάθε* β_{ij} *είναι μία προτασιακή μεταβλητή ή η άρνηση μιας προτασιακής μεταβλητής.*

Αν προσέξουμε την απόδειξη του θεωρήματος 2.13 βλέπουμε ότι ο τύπος τ που κατασκευάσαμε είναι σε διαζευκτική κανονική μορφή.

θεώρημα 2.15 *Για κάθε προτασιακό τύπο μπορούμε να βρούμε έναν ταυτολογικά ισοδύναμο σε διαζευκτική κανονική μορφή.*

Απόδειξη: Εστω ο προτασιακός τύπος φ. Τότε υπάρχει τύπος τ σε διαζευκτική κανονική μορφή που πραγματοποιεί την $\mathcal{B}_\varphi$. Δηλαδή $\mathcal{B}_\varphi = \mathcal{B}_\tau$. Αλλά τότε φ και τ είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι.

2.8 Επάρκεια Συνδέσμων

Ορισμός 2.16 *Εστω* $\mathcal{S}$ *ένα σύνολο συνδέσμων π.χ.* $\mathcal{S} = \{\wedge, \vee, \neg\}$. *Το* $\mathcal{S}$ *λέγεται* επαρκές *αν κάθε συνάρτηση Boole μπορεί να πραγματοποιηθεί από έναν προτασιακό τύπο για το κτίσιμό του οποίου έχουμε μεταχειριστεί συνδέσμους μόνον από το* $\mathcal{S}$.

Είδαμε ότι κάθε συνάρτηση Boole πραγματοποιείται από έναν προτασιακό τύπο στον οποίο εμφανίζονται μόνον οι σύνδεσμοι $\wedge$, $\vee$ και $\neg$ (διαζευκτική κανονική μορφή). Αρα το σύνολο $\{\neg, \wedge, \vee\}$ και βέβαια, κατά μείζονα λόγο, το σύνολο $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ της γλώσσας μας είναι επαρκές. Μπορούμε όμως να βελτιώσουμε το αποτέλεσμα:

θεώρημα 2.17 *Τα σύνολα* $\{\neg, \wedge\}$ *και* $\{\neg, \vee\}$ *είναι επαρκή.*

Απόδειξη: Αφού το $\{\neg, \wedge, \vee\}$ είναι επαρκές, για να αποδείξουμε ότι το $\{\neg, \wedge\}$ είναι επαρκές αρκεί να εκφράσουμε το σύνδεσμο $\vee$ συναρτήσει των υπολοίπων. Εχουμε

$$(\varphi \vee \psi) \bowtie \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

Αρα κάθε χρήση του $\varphi \vee \psi$ μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με το ισοδύναμό της. Για να αποδείξουμε ότι $\{\neg, \vee\}$ είναι επαρκές παρατηρούμε ότι

$(\varphi \wedge \psi) \bowtie \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$. *Ασκηση*: $\{\wedge, \rightarrow\}$ δεν είναι επαρκές (υπόδειξη: Δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί η άρνηση).

Για κάθε φυσικό αριθμό n, υπάρχουν 2^{2^n} συναρτήσεις Boole ή σύνδεσμοι n θέσεων. *Σύνδεσμοι* 0 *θέσεων*: Συμβατικά εξετάζουμε και την περίπτωση $n = 0$. Εχουμε δύο τέτοιους σύνδεσμους τον $\mathcal{T}$ και τον $\mathcal{F}$. Μπορουμε να τους μεταφέρουμε και στη γλώσσα θεωρώντας τους σαν προτασιακούς τύπους ατομικούς. Τότε όμως για κάθε απονομή αλήθειας V πρέπει να έχουμε πάντα ότι $V(\mathcal{T}) = \mathsf{T}$ και $V(\mathcal{F}) = \mathsf{F}$.
π.χ. ο τύπος $A \rightarrow \mathcal{F}$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $(\neg A)$. *Σύνδεσμοι* 1 *θέσης*: Υπάρχουν 4. Μόνον ένας, η άρνηση, έχει ενδιαφέρον. *Σύνδεσμοι* 2 *θέσεων*: Υπάρχουν $2^{2^2} = 16$. Εκτός των $\wedge, \vee, \rightarrow$ οι άλλοι ειναι:

Σύμβολο	Ισοδυναμία	Παρατηρήσεις
	$\mathcal{T}$	σταθερός με τιμή T
	$\mathcal{F}$	σταθερός με τιμή F
	A	πρώτη προβολή
	B	δεύτερη προβολή
	$\neg A$	
	$\neg B$	
$A \leftrightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	ισοδυναμία
$A \leftarrow B$	$B \rightarrow A$	αντίσ. συνεπαγωγή
$A + B$	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$	διάζευξη (xor)
$A \downarrow B$	$\neg(A \vee B)$	ούτε A ούτε B (nor)
$A \vert B$	$\neg(A \wedge B)$	nand
$A < B$	$(\neg A) \wedge B$	$\mathsf{F} < \mathsf{T}$ (διάταξη)
$A > B$	$A \wedge (\neg B)$	$\mathsf{T} > \mathsf{F}$

θεώρημα 2.18 *Τα* $\{|\}$ *και* $\{\downarrow\}$ *είναι επαρκή.*

Απόδειξη: Οι αληθοπίνακες των $|$ και $\downarrow$ είναι:

A	B	$A\vert B$	$A \downarrow B$
T	T	F	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	T	T

Εχουμε:

$$\begin{aligned} \neg A &\bowtie (A|A) \\ A \vee B &\bowtie ((\neg A)|(\neg B)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg A &\bowtie (A \downarrow A) \\ A|B &\bowtie \neg((\neg A) \downarrow (\neg B)) \end{aligned}$$

2.9 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι οι πιο κάτω προτασιακοί τύποι είναι ταυτολογίες.

   (i) Προσεταιριστική, Αντιμεταθετική ιδιότητα για τα $\wedge, \vee, \leftrightarrow$.
   π.χ. $\phi \wedge (\psi \wedge \tau) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \wedge \tau, \phi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \phi$ κ.λ.π.

   (ii) Επιμεριστικοί νόμοι:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge (\psi \vee \tau)) &\leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \tau)) \\ (\varphi \vee (\psi \wedge \tau)) &\leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \tau)) \end{aligned}$$

   (iii) Αρνηση:

$(\neg(\neg\varphi)) \leftrightarrow \varphi$
$\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)$
$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi))$
$\left.\begin{array}{l} \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \end{array}\right\}$ Νόμοι του De Morgan
$(\varphi \vee \neg\varphi)$ Αρχή του αποκλειομένου τρίτου
ή νόμος του Αριστοτέλη
$\neg(\varphi \wedge (\neg\varphi))$
$(\varphi \to \psi) \leftrightarrow ((\neg\psi) \to (\neg\varphi))$ Αντιστροφοαντίθετη

2. (*Δυϊκότητα*) Εστω φ προτασιακός τύπος για την κατασκευή του οποίου έχουν χρησιμοποιηθεί ως σύμβολα συνδέσμων μόνον τα $\wedge, \vee$ και $\neg$. Εστω φ^* ο προτασιακός τύπος που προκύπτει αν στον φ εναλλάξουμε τα $\wedge$ και $\vee$ και αντικαταστήσουμε κάθε προτασιακή μεταβλητή A με το $\neg A$. Αποδείξτε ότι $\varphi \bowtie \neg\varphi^*$.

3. Αποδείξτε ότι $|$ και $\downarrow$ είναι οι μόνοι σύνδεσμοι δύο θέσεων που είναι πλήρεις από μόνοι τους.

4. Μία πρόταση που περιέχει μόνο τον σύνδεσμο $\leftrightarrow$ είναι ταυτολογία αν και μόνον αν κάθε προτασιακό σύμβολο απαντάται έναν άρτιο αριθμό φορών.

5. Οι σύνδεσμοι δύο θέσεων είναι 16 τον αριθμό. Απ' αυτούς μόνον οι 10 είναι πραγματικά διπλοί. Οι υπόλοιποι είναι είτε ουσιωδώς μονοί (προβολές, $\neg A$, $\neg B$) ή 0 θέσεων (σταθεροί). Από τους 10 ξέρουμε ότι οι $|$ και $\downarrow$ αποτελούν από μόνοι τους (και μόνον αυτοί) επαρκή σύνολα. Από τους 8 που μας μένουν μπορούμε να σχηματίσουμε 28 ζευγάρια. Η ερώτηση είναι: πόσα απ' αυτά τα ζευγάρια αποτελούν επαρκή σύνολα;
(Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $\{\wedge, \vee, \to, \leftarrow, \leftrightarrow\}$ και $\{\wedge, \vee, <, >, +\}$ δεν είναι επαρκή σύνολα. Αρα αποκλείονται 19 ζεύγη! Μετά αποδείξτε ότι $\{\to, \mathcal{F}\}$, $\{\leftarrow, \mathcal{F}\}$ είναι επαρκή και άρα συμπεράνετε ότι $\{\to, <\}$, $\{\to, >\}$, $\{\to, +\}$, $\{\leftarrow, <\}$, $\{\leftarrow, >\}$, $\{\leftarrow, +\}$ είναι επαρκή. Κατόπιν αποδείξτε ότι $\{<, \mathcal{T}\}$, $\{>, \mathcal{T}\}$ είναι επαρκή και συμπεράνετε ότι $\{<, \leftrightarrow\}$, $\{>, \leftrightarrow\}$ είναι επαρκή. (Εδώ $\varphi \to$

$\psi \bowtie \mathcal{T} > (\varphi > \psi)$ και $\{\rightarrow, <\}$ επαρκές. Επίσης $\mathcal{T} \bowtie (A \leftrightarrow A)$.) Αρα μας μένει μόνο ένα ζευγάρι να ασχοληθούμε: το $\{+, \leftrightarrow\}$. Αποδείξτε τώρα ότι:
Πρόταση Το $\{\neg, +, \leftrightarrow\}$ δεν είναι επαρκές.)

6. Βρίσκεστε στη χώρα των θαυμάτων όπου όλοι οι κάτοικοι λένε είτε πάντα αλήθεια (οι "καλοί") ή πάντα ψέμματα (οι "κακοί"). Πηγαίνετε για το μαγεμένο κάστρο ώσπου ξαφνικά ο δρόμος σχηματίζει μια διχάλα. Εκεί βρίσκεται ένας κάτοικος που δεν ξέρετε αν είναι καλός ή κακός. Με την προυπόθεση ότι αυτός θα σας απαντήσει σε μια μόνο ερώτηση και μόνον με ένα ναι ή ένα όχι, τι ερώτηση θα του κάνετε για να δείτε ποιός απο τους δύο δρόμους της διχάλας πάει στο κάστρο.
(Υπόδειξη: Θεωρείστε τις προτάσεις: φ να σημαίνει "λες την αλήθεια" και ψ "αυτός ο δρόμος πάει στο κάστρο". Σχηματίστε ένα κατάλληλο αληθοπίνακα ώστε η πραγματοποίησή του με βάση τις φ και ψ να σας δίνει την κατάλληλη ερώτηση.)

7. Αποδείξτε ότι κανένας από τους $\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \tau)$ και $(\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \vee (\neg\varphi \wedge (\neg\psi \wedge \neg\tau))$ δεν είναι λογική συνεπαγωγή ο ένας του άλλου.

8. Αποδείξτε ή ανταποδείξτε τα ακόλουθα:

(i) αν είτε $\Sigma \models \varphi$ ή $\Sigma \models \psi$ τότε $\Sigma \models \varphi \vee \psi$.

(ii) αν $\Sigma \models \varphi \vee \psi$ τότε είτε $\Sigma \models \varphi$ ή $\Sigma \models \psi$.

9. Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση γνωστή και ως *λήμμα παρεμβολής*: Αν ο προτασιακός τύπος $\varphi \rightarrow \psi$ είναι ταυτολογία ($\models \varphi \rightarrow \psi$) τότε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις αληθεύει:

(1) ο φ είναι αντιλογία ($\models \neg\varphi$),

(2) ο ψ είναι ταυτολογία ($\models \psi$),

(3) υπάρχει προτασιακός τύπος γ τέτοιος ώστε:

- κάθε προτασιακή μεταβλητή του γ εμφανίζεται και στον φ και στον ψ,
- οι $\varphi \rightarrow \gamma$, $\gamma \rightarrow \psi$ ειναι ταυτολογίες ($\models \varphi \rightarrow \gamma$, $\models \gamma \rightarrow \psi$).

10. Από την απόδειξη της προηγούμενης άσκησης προκύπτει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε τον τύπο γ όταν ξέρουμε τα φ και ψ. Εστω $\varphi \equiv ((q \rightarrow p) \vee r) \wedge ((r \rightarrow p) \vee \neg q)$ και $\psi \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee s$. Κατασκευάστε τον γ.

11. *Θεώρημα Ορισιμότητας*: Έστω $p, q, p_1, \ldots, p_k$ διακεκριμένες μεταξύ τους προτασιακές μεταβλητές και $\varphi \equiv \varphi(p, p_1, \ldots, p_k)$ ένας προτασιακός τύπος

του οποίου οι προτασιακές μεταβλητές είναι μεταξύ των $p, p_1, \ldots, p_k$. Αν ο προτασιακός τύπος

$$(\varphi(p, p_1, \ldots, p_k) \wedge \varphi(q, p_1, \ldots, p_k)) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$

είναι ταυτολογία, τότε υπάρχει ένας προτασιακός τύπος $\gamma \equiv \gamma(p_1, \ldots, p_k)$, με προτασιακές μεταβλητές μεταξύ των $p_1, \ldots, p_k$, έτσι ώστε ο τύπος

$$\varphi(p, p_1, \ldots, p_k) \rightarrow (p \leftrightarrow \gamma)$$

να είναι ταυτολογία.
(Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε το λήμμα παρεμβολής.)

2.10 Το θεώρημα της συμπάγειας

Ορισμός 2.19 *Έστω Σ ένα σύνολο προτασιακών τύπων. Λέμε ότι το Σ είναι ικανοποιήσιμο εάν υπάρχει μία απονομή αλήθειας V τέτοια ώστε για κάθε $\sigma \in \Sigma$ έχουμε ότι $\overline{V}(\sigma) = \mathsf{T}$. Λέμε ότι το Σ είναι* πεπερασμένα ικανοποιήσιμο *(πεπ. ικαν.) εάν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποιήσιμο.*

θεώρημα 2.20 (θεώρημα της συμπάγειας) *Ένα σύνολο προτασιακών τύπων είναι ικανοποιήσιμο εάν και μόνον εάν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.*

Απόδειξη: Το μη προφανές μέρος του θεωρήματος είναι ν' αποδείξουμε ότι αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποήσιμο τότε όλο το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο. Θα το αποδείξουμε με διάφορα βήματα.

Ορισμός 2.21 *Ένα σύνολο προτάσεων Σ λέγεται* πλήρες *αν για οποιοδήποτε προταbσιακό τύπο ϕ έχουμε είτε $\phi \in \Sigma$ ή $(\neg\phi) \in \Sigma$.*

Παρατηρούμε ότι αν έχουμε μία απονομή αλήθειας V τότε το σύνολο $\Sigma = \{\sigma \mid \overline{V}(\sigma) = \mathsf{T}\}$ είναι πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.

Αλλά και αντιστρόφως κάθε πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο είναι ικανοποιήσιμο. Για να το αποδείξουμε αυτό παρατηρούμε πρώτα ότι ισχύει το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.22 *Σε κάθε πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο Σ ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. $\phi \in \Sigma \Leftrightarrow (\neg\phi) \notin \Sigma$
2. $(\phi \wedge \psi) \in \Sigma \Leftrightarrow \phi \in \Sigma$ *και* $\psi \in \Sigma$
3. $(\phi \vee \psi) \in \Sigma \Leftrightarrow \phi \in \Sigma$ *ή* $\psi \in \Sigma$
4. $(\phi \to \psi) \in \Sigma \Leftrightarrow \phi \notin \Sigma$ *ή* $\psi \in \Sigma$

Απόδειξη λήμματος: Για το 1. Αν $\phi \in \Sigma$ τότε οπωσδήποτε δεν μπορούμε να έχουμε $(\neg\phi) \in \Sigma$ επειδή το Σ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο και το σύνολο $\{\phi, \neg\phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Αντίστροφα, εάν $\neg\phi \notin \Sigma$ τότε επειδή το Σ είναι πλήρες θα έχουμε $\phi \in \Sigma$. Για το 2. Έστω $(\phi \wedge \psi) \in \Sigma$. Τότε δεν είναι δυνατόν να έχουμε π.χ. $\neg\phi \in \Sigma$ διότι το σύνολο $\{(\phi \wedge \psi), \neg\phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Άρα θα είναι $\phi \in \Sigma$ επειδή το Σ είναι πλήρες. Ομοίως για το ψ. Αντίστροφα εάν έχουμε $\phi \in \Sigma$ και $\psi \in \Sigma$ δεν μπορούμε να έχουμε ότι $\neg(\phi \wedge \psi) \in \Sigma$ επειδή το Σ είναι ππεπερασνένα ικανοποιήσιμο. Άρα από πληρότητα του Σ θα έχουμε $(\phi \wedge \psi) \in \Sigma$. Ομοίως και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Με βάση αυτό το λήμμα μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο:

Λήμμα 2.23 *Κάθε πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο Σ είναι ικανοποιήσιμο.*

Απόδειξη λήμματος: Ορίζουμε μία απονομή αλήθειας V ως εξής:
Αν A είναι προτασιακή μεταβλητή, τότε

$$V(A) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{αν } A \in \Sigma \\ \mathsf{F} & \text{αν } \neg A \in \Sigma \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι λόγω της πληρότητας του Σ για κάθε προτασιακή μεταβλητή A υπάρχει η τιμή $V(A)$, και ότι λόγω του πεπερασμένα ικανοποιήσιμου η τιμή αυτή είναι μοναδική. Δηλαδή ότι ο ορισμός της V είναι καλός.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε με επαγωγή στους προτασιακούς τύπους ότι για κάθε τύπο ϕ ισχύει:

$$\phi \in \Sigma \Leftrightarrow \overline{V}(\phi) = \mathsf{T}$$

Για τις προτασιακές μεταβλητές η ισχύς του ανωτέρω είναι προφανής. Για τις άλλες περιπτώσεις ας εξετάσουμε την περίπτωση $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$. Έχουμε:

$\phi_1 \wedge \phi_2 \in \Sigma \Leftrightarrow$ (από προηγ. λήμμα) $\phi_1 \in \Sigma$ και $\phi_2 \in \Sigma \Leftrightarrow$ (επαγ. υπόθεση) $\overline{V}(\phi_1) = \mathsf{T}$ και $\overline{V}(\phi_2) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \overline{V}(\phi_1 \wedge \phi_2) = \mathsf{T}$. Ομοίως όλες τις άλλες περιπτώσεις.

Άρα λοιπόν, τελικά, αν μας δοθεί ένα σύνολο προτασιακών τύπων Σ , για να αποδείξουμε ότι είναι ικανοποιήσιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν να επεκταθεί σε ένα σύνολο $\Sigma' \supseteq \Sigma$ ώστε Σ' να είναι πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Άρα λοιπόν αρκεί να αποδείξουμε το ακόλουθο σπουδαίο λήμμα.

Λήμμα 2.24 (Lindenbaum) *Κάθε πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο Σ μπορεί να επεκταθεί σε ένα πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο $\Sigma' \supseteq \Sigma$.*

Απόδειξη: Εφ' όσον το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών είναι αριθμήσιμο, το σύνολο όλων των προτασιακών τύπων μπορεί να αριθμηθεί.[2] Έστω $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ μία τέτοια αρίθμηση. Ορίζουμε την ακολουθία συνόλων προτασιακών τύπων $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \cdots \subseteq \Sigma_n \subseteq \cdots$ ως εξής:

$$\Sigma_0 = \Sigma$$

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\phi_n\} & \text{αν } \Sigma_n \cup \{\phi_n\} \text{ είναι πεπ. ικαν.} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\phi_n\} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε Σ_n είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Το αποδεικνύουμε με αριθμητική επαγωγή στο n. Για $n = 0$ ισχύει από τον

[2] Από τη συνολοθεωρία γνωρίζουμε ότι εάν Σ είναι αριθμήσιμο τότε το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από στοιχεία του Σ είναι αριθμήσιμο. Αριθμήσιμο σημαίνει ότι υπάρχει μία 1–1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών.

ορισμό. Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει για n δηλαδή ότι το Σ_n είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Για να αποδείξουμε ότι το Σ_{n+1} είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι για τυχόν ϕ αν το $\Sigma_n \cup \{\phi\}$ δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο τότε το $\Sigma_n \cup \{\neg\phi\}$ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Έστω λοιπόν $\{\psi_1, \ldots, \psi_k, \neg\phi\}$ τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του $\Sigma_n, \neg\phi$. Επειδή το Σ_n, ϕ δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο υπάρχει υποσύνολό του $\{\psi_1^{'}, \ldots, \psi_l^{'}, \phi\}$ που δεν ικανοποιείται. Επειδή το Σ_n είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο θα υπάρχει μία απονομή, έστω V, που ικανοποιεί το $\{\psi_1, \ldots, \psi_k, \psi_1^{'}, \ldots, \psi_l^{'}\}$. Αλλά τότε η V δεν μπορεί να ικανοποιεί την ϕ άρα $\overline{V}(\neg\phi) = \mathsf{T}$, δηλαδή η V ικανοποιεί το $\{\psi_1, \ldots, \psi_k, \neg\phi\}$.

Ορίζουμε τώρα το $\Sigma^{'} = \cup_{n=0}^{\infty}\Sigma_n$. Το $\Sigma^{'}$ είναι πλήρες διότι κάθε προτασιακός τύπος είναι κάποιο ϕ_n στη λίστα της αρίθμησης και για τη δημιουργία του $\Sigma^{'}$ έχουν χρησιμοποιηθεί όλα τα ϕ_n ή $\neg\phi_n$. Το $\Sigma^{'}$ είναι και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο διότι αν $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ ένα υποσύνολό του θα υπάρχει ένα n αρκούντως μεγάλο ώστε $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\} \subseteq \Sigma_n$ και επειδή το Σ_n είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο το σύνολο $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ θα ικανοποιείται.

Πόρισμα 2.25 *Εάν $\Sigma \models \phi$ τότε υπάρχει πεπερασμένο $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ώστε $\Sigma_0 \models \phi$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη βασίζεται στο ότι $\Sigma \models \phi$ τότε και μονον τότε $\Sigma, \neg\phi$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Έστω τώρα $\Sigma \models \phi$. Τότε το σύνολο $\Sigma, \neg\phi$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, άρα από θεώρημα της συμπάγειας δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Άρα υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\Sigma_0, \neg\phi$ που δεν είναι ικανοποιήσιμο ($\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ και Σ_0 πεπερασμένο). Άρα $\Sigma_0 \models \phi$.