ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ 1
ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1. Η λύση στις σελίδες 12 και 13 των σημειώσεων.

ΑΣΚΗΣΗ 2.

1. Δείξτε ότι κανένας από τούς δύο προτασιακούς τύπους δεν συνεπάγεται ταυτολογικά τον άλλο:
$(\varphi \wedge ((\psi \to \tau) \wedge (\tau \to \psi)))$ και $((\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \vee ((\neg\varphi) \wedge ((\neg\psi) \wedge (\neg\tau))))$

2. Είναι ο $(((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi)$ ταυτολογία;

3. (i) $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi \iff \Sigma \models (\varphi \to \psi)$
(ii) $\sigma \models\dashv \tau \iff \models (\sigma \to \tau) \wedge (\tau \to \sigma)$

Λύσεις:

1. Ο προτασιακός τύπος ϕ δεν συνεπάγεται ταυτολογικά τον ψ αν μία απονομή δίνει T στον ϕ και F στον ψ. Για τις περιπτώσεις της ασκήσεως πάρτε τις απονομές $V_1(\phi) = T, V_1(\tau) = V_1(\psi) = F$ και $V_2(\phi) = V_2(\tau) = V_2(\psi) = F$.

2. Εύκολη, είναι ο νόμος του Peirce.

3. π.χ. το (i) αν $\Sigma, \phi \models \psi$ τότε αν V ικανοποιεί όλους τους τύπους του Σ τότε δεν είναι δυνατόν να μην ικανοποιεί το $\phi \to \psi$ αφού αυτό θα προϋπέθετε ότι ικανοποιεί το ϕ και όχι το ψ, αδύνατο από υπόθεση.

Ομοίως και για τις άλλες περιπτώσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 3.

Για την άσκηση 2: Λύση.΄Εστω $A_1, A_2, \cdots, A_n$ τα προτασικά σύμβολα που εμφανίζονται στην ϕ (Μπορεί να έχουμε πολλές ίδιες εμφανίσεις του ιδίου συμβόλου). Τότε επειδή για το $\leftrightarrow$ ισχύει ο προσεταιριστικός και αντιμεταθετικός νόμος έχουμε ότι $\phi \models\dashv A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n$. Μαζεύοντας τα A που εμφανίζονται και ακόμα μία φορά στον ϕ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi \quad &\models\dashv \quad A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n \\ &\models\dashv \quad (A_1' \leftrightarrow A_1') \leftrightarrow (A_2' \leftrightarrow A_2') \leftrightarrow \cdots (A_k' \leftrightarrow A_k') \leftrightarrow A_\lambda \leftrightarrow A_{\lambda+1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n \end{aligned}$$

όπου $A_1', \dots, A_k'$ $A_1, \dots, A_n$ είναι κάποια από τα $A_1, \dots, A_n$ που εμφανίζονται διπλά και έστω $A_\lambda, A_{\lambda+1}, \dots A_n$ τα υπόλοιπα A αφού ξεχωρίσουμε τα ζεύγη. Επειδή τα $A_i' \leftrightarrow A_i'$ είναι ταυτολογίες, $\phi \models\dashv A_\lambda \leftrightarrow A_{\lambda+1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n$ που σημαίνει ότι ϕ είναι ταυτολογία $\Leftrightarrow$ δεν υπάρχουν τα $A_\lambda, \dots, A_n$ $\Leftrightarrow$ κάθε προτασιακό σύμβολο εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών.

Για την άσκηση 3. α) $\{\wedge, \vee, \to, \leftarrow, \leftrightarrow\}$ δεν είναι επαρκές. Διότι όλοι οι σύνδεσμοι σ'αυτό το σύνολο την αληθοτιμή T την διατηρούν T και άρα δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να πραγματοποιήσουν την άρνηση ή έναν άλλο σύνδεσμο που στέλνει το T, . . . , T στο T.

β) $\{\wedge, \vee, <, >, +\}$ δεν είναι επαρκές. Διότι εδώ οι σύνδεσμοι διατηρούν το F και δεν μπορούν να πραγματοποιήσουν τους συνδέσμους που στέλνουν το F, . . . , F στο T.

Από α) και β) αποκλείουμε $[\frac{5!}{(5-2)!\,2!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10]$ 10+10-1=19 ζεύγη. Άρα μας μένουν 9 ζεύγη.

γ) Τα $\{\rightarrow, \mathcal{F}\}$, $\{\leftarrow, \mathcal{F}\}$ είναι επαρκή γιατί

$\neg\phi \models\,\dashv \phi \rightarrow \mathcal{F}$ και $\phi \vee \psi \models\,\dashv \neg\phi \rightarrow \psi \models\,\dashv \psi \leftarrow \neg\phi$

Άρα τα $\neg, \vee$ ορίζονται με $\rightarrow, \mathcal{F}$ και $\leftarrow, \mathcal{F}$ και $\{\neg, \vee\}$ είναι επαρκές.

Συμπεραίνουμε ότι τα έξι ζεύγη της εκφωνήσεως είναι επαρκή διότι $\mathcal{F} \models\,\dashv A < A \models\,\dashv A > A \models\,\dashv A + A$.

δ) Τα $\{<, \mathcal{T}\}$, $\{>, \mathcal{T}\}$ είναι επαρκή διότι

$\neg\phi \models\,\dashv \phi < \mathcal{T} \models\,\dashv \mathcal{T} > \phi$

$\phi \wedge \psi \models\,\dashv \neg\phi < \psi \models\,\dashv \psi > \neg\phi$

και $\{\neg, \wedge\}$ είναι επαρκές.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Το $\{\neg, +, \leftrightarrow\}$ δεν είναι επαρκές ή ισοδύναμα (επειδή $\neg$ ορίζεται από τα $+$ και $\leftrightarrow$, αφού $\neg A \models\,\dashv A \leftrightarrow (A + A)$) το $\{+, \leftrightarrow\}$ δεν είναι επαρκές. Θα αποδείξουμε ότι αν ο σύνδεσμος $C(x, y) : \{T, F\}^2 \rightarrow \{T, F\}$ πραγματοποιείται από τα $+, \leftrightarrow$ τότε ο αριθμός των T στο πεδίο τιμών είναι άρτιος (δηλαδή η τελευταία στήλη στον αληθοπίνακα περιέχει άρτιο αριθμό από T). Άρα οι σύνδεσμοι με περιττό αριθμό T σ'αυτή τη στήλη, όπως οι $\wedge, \vee, \rightarrow, \ldots$ δεν πραγματοποιούνται από το $\{+, \leftrightarrow\}$.

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στον σύνδεσμο που πραγματοποιείται από το $\{+, \leftrightarrow\}$. Έστω $C(x, y)$ είναι ένας οποιοσδήποτε διπλός σύνδεσμος που πραγματοποιείται από $\{+, \leftrightarrow\}$ τότε ο αληθοπίνακας θα έχει μία από τις μορφές:

περίπτωση 1: $C(x, y) = +(C_1(x, y), C_2(x, y))$

περίπτωση 2: $C(x, y) = \leftrightarrow (C_1(x, y), C_2(x, y))$

όπου C_1, C_2 σύνδεσμοι για τους οποίους ισχύει η επαγωγική υπόθεση δηλαδή στους αληθοπίνακες των C_1, C_2 υπάρχει άρτιος αριθμός από T. Υπάρχουν όμως 8 διπλοί σύνδεσμοι με άρτιο αριθμό από T στο πεδίο τιμών, ήτοι:

T	T	T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	T	T	F	F	T	F	T	F
F	T	F	T	F	T	F	T	T	F
F	F	F	T	F	T	T	F	F	T

Μπορούμε λοιπόν να πάρουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις, πρώτα για την περίπτωση 1 του και μετά για την περίπτωση 2 του εργαζόμενοι με ζευγάρια.

	T	T	F	F	F	T	F	T
	T	T	F	F	T	F	T	F
+	F	T	F	T	F	T	T	F
	F	T	F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T	T	T	F
F	F	T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T	F	T
T	T	F	T	F	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	T	F
F	F	T	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T	F	T	F
T	T	F	T	F	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	F	T	T	F
T	T	F	T	F	F	T	T	F
T	F	F	T	T	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	F	T	F
T	T	F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T	F	T
T	T	F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	T	F
T	T	F	T	F	F	T	T	F

Θα πρέπει να έχετε την υπομονή να επαληθεύστε τον πίνακα αυτό. Βλέπουμε ότι όλες οι υποστήλες με 4 γραμμές που δίνουν όλες τις δυνατές περιπτώσεις συνδυασμών έχουν άρτιο αριθμό από T. Το ίδιο κάνουμε και στην περίπτωση του $\leftrightarrow$!!

Η απόδειξη αυτή βασίζεται στον έλεγχο όλων των δυνατών περιπτώσεων. Αν οι περιπτώσεις αυτές ήταν δραματικά περισσότερες θα μπορούσαμε να είχαμε ζητήσει τη βοήθεια ενός υπολογιστή για να μας τις επαληθεύσει. Βέβαια στη συγκεκριμμένη περίπτωση μπορούμε να σκεφτούμε και άλλη πιο κομψή απόδειξη που δεν βασίζεται στον έλεγχο όλων των δυνατών περιπτώσεων. (Η καταφυγή στον υπολογιστή για την απόδειξη θεωρημάτων στα Μαθηματικά έχει χρησιμοποιηθεί με πιο περίφημη περίπτωση την απόδειξη της εικασίας των τεσσάρων χρωμάτων. Στην περίπτωση αυτή όμως ακόμα δεν έχει βρεθεί η κομψή συνδυαστική λύση!

Για την άσκηση 4: Ας υποθέσουμε ότι στη διχάλα ο ένας δρόμος είναι ο δρόμος 1 και ο άλλος ο δρόμος 2. Δείχνοντας στον κάτοικο τον δρόμο 1 χρησιμοποιείτε δύο προτάσεις.

- $\phi \equiv$ λες (πάντα) την αλήθεια
- $\psi \equiv$ αυτός ο δρόμος (δηλ. ο 1) πάει στο κάστρο

Θέλετε αν η απάντηση είναι ΝΑΙ να ξέρετε ότι οδρόμος 1 πάει στο κάστρο αν είναι ΟΧΙ ότι ο δρόμος 2 πάει στο κάστρο. Η πρόταση $\phi\Diamond\psi$ που θα διατυπώσετε πρέπει να έχει τον ακόλουθο αληθοπίνακα.

ϕ	ψ	$\phi\Diamond\psi$	
T	T	T	1
T	F	F	2
F	T	F	3
F	F	T	4

Η εξήγηση του αληθοπίνακα σε σχέση με την κάθε γραμμή του έχει ως εξής:

1. Λέει την αλήθεια, ο δρόμος πάει στο κάστρο άρα πρέπει να αναγνωρίσει την πρόταση σαν αληθή και να πει ΝΑΙ.
2. Λέει αλήθεια, ο 1 δεν πάει στο κάστρο, πρέπει να την αναγνωρίσει σαν ψευδή και να πει ΟΧΙ.
3. Λέει ψέμματα και ο δρόμος πάει στο κάστρο, πρέπει να αναγνωρίσει την πρόταση σαν ψευδή οπότε ψευδόμενος θα πει ΝΑΙ.
4. Ομοίως.

Άρα η πρόταση είναι:

$$(\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi) \models\dashv \phi \leftrightarrow \psi$$

Οι υπόλοιπες ασκήσεις είτε είναι εύκολες ή έχουν γίνει στις διαλέξεις.

ΑΣΚΗΣΗ 4. Θα αποδείξουμε πρώτα τη μοναδική αναγνωσιμότητα για την περίπτωση της προτασιακής λογικής και μετά θα επεκτείνουμε την απόδειξη και στην περίπτωση του κατηγορηματικού λογισμού (παρόλο που δεν το ζητάει η άσκηση).

Προτασιακός Λογισμός: θυμίζουμε ότι τα σύμβολα της γλώσσας μας είναι τα σύμβολα των προτασιακών μεταβλητών καθώς και τα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$. Ορίζουμε μία συνάρτηση K σ'αυτά τα σύμβολα ως εξής: Αν s είναι ένα τέτοιο σύμβολο τότε $K(s) = 1 - n$ όπου n είναι ο αριθμός των συμβόλων που πρέπει να ακολουθούν το n ώστε να είναι δυνατόν να σχηματίζεται ένας προτασιακός τύπος (ο αριθμός των ορισμάτων που δέχεται το s). Πιο συγκεκριμένα:

$K(A) = 1 - 0 = 1$ αν A είναι μία προτασιακή μεταβλητή.

$K(\neg) = 1 - 1 = 0$

$K(\wedge) = K(\vee) = K(\rightarrow) = 1 - 2 = -1$

Κατόπιν επεκτείνουμε την K στο σύνολο των εκφράσεων της γλώσσας ορίζοντας

$$K(s_1 s_2 \cdots s_n) = K(s_1) + K(s_2) + \cdots + K(s_n)$$

όπου $s_1, s_2, \ldots, s_n$ είναι σύμβολα της γλώσσας. Σημειώστε ότι ο ορισμός είναι αναμφίβολος επειδή κανένα από τα σύμβολα της γλώσσας δεν είναι πεπερασμένη ακολουθία άλλων συμβόλων της γλώσσας.

Λήμμα 1. Για κάθε προτασιακό τύπο ϕ, $K(\phi) = 1$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στον ϕ. Αν ϕ είναι προτασιακή μεταβλητή άμεσο από ορισμό. Αν $\phi \equiv \neg\psi$ τότε από επαγωγική υπόθεση $K(\psi) = 1$ και

$$K(\phi) = K(\neg) + K(\psi) = 0 + 1 = 1$$

Αν $\phi \equiv \wedge\phi_1\phi_2$ τότε από Ε.Υ. $K(\phi_1) = K(\phi_2) = 1$ και

$$K(\phi) = K(\wedge) + K(\phi_1) + K(\phi_2) = -1 + 1 + 1 = 1$$

Ομοίως και για τους άλλους συνδέσμους.

Με *τερματικό* τμήμα μιας ακολουθίας $s_1, s_2, \ldots, s_n$ θα εννοούμε κάθε ακολουθία της μορφής $s_k, s_{k+1}, \ldots, s_n$, όπου $1 \leq k \leq n$.

Λήμμα 2. Κάθε τερματικό τμήμα ενός προτασιακού τύπου είναι παράθεση ενός ή περισσοτέρων προτασιακών τύπων.

Απόδειξη. Με επαγωγή στον προτασιακό τύπο. Στην περίπτωση ενός συμβόλου δηλ. αν ο προτασιακός τύπος είναι προτασιακή μεταβλητή το απότελέσμα συνάγεται τετριμμένα. Αν ο τύπος έχει π.χ. τη μορφή $\rightarrow \phi_1\phi_2$ τότε κάθε τερματικό τμήμα (διαφορετικό από τον εαυτό του) έχει τη μορφή $\phi_1^{'}\phi_2$ ή $\phi_2^{'}$. Και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιώντας την Ε.Υ. έχουμε το αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3. Κανένα γνήσιο αρχικό τμήμα ενός προτασιακού τύπου δεν είναι προτασιακός τύπος.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ενας προτασιακός τύπος ϕ χωρίζεται σε δύο μέρη, ένα γνήσιο αρχικό τμήμα ϕ_1 και ένα τερματικό τμήμα ϕ_2. Τότε $1 = K(\phi) = K(\phi_1) + K(\phi_2)$ και από λήμμα 2 έχουμε ότι $K(\phi_2) \geq 1$. Άρα $K(\phi_1) < 1$ και ϕ_1 δεν μπορεί να είναι πρτασιακός τύπος.

Μοναδική αναγνωσιμότητα: Είναι προφανές ότι αρκεί να εξετάσουμε περιπτώσεις της μορφής "Αν $\rightarrow \phi\psi \equiv \rightarrow \phi^{'}\psi^{'}$ τότε $\phi \equiv \phi^{'}$ και $\psi \equiv \psi^{'}$". Αλλά σ'αυτή την περίπτωση αν δεν είχαμε $\phi \equiv \phi^{'}$ τότε το ένα από τα δύο θα ήταν γνήσιο αρχικό τμήμα του άλλου και έτσι δεν θα μπορούσε να είναι προτασιακός τύπος.

ΠΟΛΩΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ ΣΤΟΝ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

έχουμε τους εξής ορισμούς:
Για τους όρους.

1. Οι μεταβλητές και τα σύμβολα σταθερών είναι όροι.
2. Αν f είναι σύμβολο συνάρτησης n-θέσεων και $t_1, t_2, \ldots, t_n$ είναι όροι, τότε $ft_1t_2 \cdots t_n$ είναι όρος.

Ορίζοντας $K(x) = 1$ αν x είναι μεταβλητή, $K(c) = 1$ αν c είναι σύμβολο σταθεράς και $K(f) = 1 - n$ αν f είναι σύμβολο συνάρτησης n-θέσεων, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε τη μοναδική αναγνωσιμότητα για τους όρους.

Μπορούμε να επεκταθούμε με τον ίδιο τρόπο και στους τύπους. Στην Πολωνική γραφή οι ατομικοί τύποι έχουν τη μορφή $Rt_1 \cdots t_n$ όπου R είναι σύμβολο κατηγορήματος n-θέσεων και $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι. Επίσης με τη χρήση των ποσοδεικτών σχηματίζονται τύποι της μορφής $\forall x\phi$ και $\exists x\phi$. Η μοναδική αναγνωσιμότητα αντιμετωπίζεται επεκτείνοντας την K ως εξής: $K(R) = 1-n$ αν R είναι σύμβολο κατηγορήματος n-θέσεων και $K(\forall) = K(\exists) = -1$.