ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ 1
17/03/2012

ΑΣΚΗΣΗ 1. (**Επαγωγικός ορισμός**) Δίνουμε τους δύο ακόλουθους ορισμούς του συνόλου των προτασιακών τύπων.

Α. Το σύνολο των προτασιακών τύπων είναι το μικρότερο σύνολο εκφράσεων T για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω:

1. Κάθε προτασιακή μεταβλητή ανήκει στο T.
2. Εάν $\phi \in T$, τότε $(\neg\phi) \in T$.
3. Εάν $\phi \in T$ και $\psi \in T$, τότε $(\phi \wedge \psi) \in T$, $(\phi \vee \psi) \in T$, $(\phi \to \psi) \in T$.

[Λέμε ότι το T είναι το μικρότερο σύνολο που περιέχει τις προτασιακές μεταβλητές και είναι κλειστό για τους κανόνες σχηματισμού σύνθετων τύπων.]

Β. Το σύνολο των προτασιακών τύπων είναι το σύνολο εκείνων των εκφράσεων ϕ για τις οποίες υπάρχει μια ακολουθία εκφράσεων $\phi_1, \ldots, \phi_n$ με $\phi_n \equiv \phi$ και για κάθε i $(1 \leq i \leq n)$ ισχύει ένα από τα κάτωθι:

1. Η ϕ_i είναι προτασιακή μεταβλητή.
2. Υπάρχει $j < i$ ώστε $\phi_i \equiv (\neg\phi_j)$.
3. Υπάρχουν $j, k < i$ ώστε είτε $\phi_i \equiv (\phi_j \wedge \phi_k)$ είτε $\phi_i \equiv (\phi_j \vee \phi_k)$ είτε $\phi_i \equiv (\phi_j \to \phi_k)$.

Αποδείξτε ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι, δηλαδή δίνουν το ίδιο σύνολο εκφράσεων. Κάθε επαγωγικός ορισμός μπορεί να δοθεί είτε με τη μορφή Α είτε με τη μορφή Β.

Μπορεί αντί της ακολουθίας $\phi_1, \ldots, \phi_n$ να χρησιμοποιηθεί η έννοια του δέντρου; Πώς θα διατυπώνατε σ' αυτή την περίπτωση τον ορισμό;

ΑΣΚΗΣΗ 2. Προσθέτουμε στη γλώσσα του προτασιακού λογισμού τις προτασιακές σταθερές $\mathcal{T}$ και $\mathcal{F}$, με σταθερές τιμές για κάθε απονομή V αντίστοιχα T και F. Για κάθε προτασιακό τύπο ϕ αυτής της γλώσσας και για κάθε προτασιακή μεταβλητή A έστω $\phi^A_{\mathcal{T}}$ ο τύπος που προκύπτει από τον ϕ με την αντικατάσταση των εμφανίσεων του A από το $\mathcal{T}$. Ομοίως παίρνουμε το $\phi^A_{\mathcal{F}}$. Έστω τώρα $\phi^A_* = (\phi^A_{\mathcal{T}} \vee \phi^A_{\mathcal{F}})$. Αποδείξτε ότι:

1. $\phi \models \phi^A_*$.
2. Αν $\phi \models \psi$ και A δεν εμφανίζεται στον ψ, τότε $\phi^A_* \models \psi$.

3. (Θεώρημα της παρεμβολής) Αν $\phi \models \psi$ τότε υπάρχει κάποιο γ του οποίου οι προτασιακές μεταβλητές εμφανίζονται σε αμφότερα τα ϕ, ψ έτσι ώστε $\phi \models \gamma \models \psi$.

ΑΣΚΗΣΗ 3. Αποδείξτε το θεώρημα της μοναδικής αναγνωσιμότητας για την πολωνική γραφή.

[Υπόδειξη: Για τα σύμβολα της γλώσσας σ ορίστε συνάρτηση K ώστε η τιμή $K(\sigma)$ να είναι ο αριθμός των «ορισμάτων» του σ. Για κάθε έκφραση $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ ορίστε $K(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n) = K(\sigma_1) + K(\sigma_2) + \cdots + K(\sigma_n)$. Κατόπιν, αποδεικνύοντας ότι κάθε τερματικό τμήμα ενός προτασιακού τύπου είναι παράθεση ενός ή περισσοτέρων προτασιακών τύπων, αξιοποιήστε την K για να αποδείξτε ότι κανένα γνήσιο αρχικό τμήμα ενός προτασιακού τύπου δεν είναι προτασιακός τύπος.]

ΑΣΚΗΣΗ 4. 1. Αποδείξτε ότι οι πιο κάτω προτασιακοί τύποι είναι ταυτολογίες.

(i) Προσεταιριστική, Αντιμεταθετική ιδιότητα για τα $\wedge, \vee, \leftrightarrow$.

π.χ. $\phi \wedge (\psi \wedge \tau) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \wedge \tau, \phi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \phi$ κ.λ.π.

(ii) Επιμεριστικοί νόμοι:

$$
\begin{aligned}
(\varphi \wedge (\psi \vee \tau)) &\leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \tau)) \\
(\varphi \vee (\psi \wedge \tau)) &\leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \tau))
\end{aligned}
$$

(iii) Αρνηση:

$(\neg(\neg\varphi)) \leftrightarrow \varphi, \quad \neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)$

$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi))$

$$\left.\begin{array}{l} \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \end{array}\right\} \text{Νόμοι του De Morgan}$$

$(\varphi \vee \neg\varphi)$ Αρχή του αποκλειομένου τρίτου ή νόμος του Αριστοτέλη

$\neg(\varphi \wedge (\neg\varphi))$

$(\varphi \to \psi) \leftrightarrow ((\neg\psi) \to (\neg\varphi))$ Αντιστροφοαντίθετη

ΑΣΚΗΣΗ 5. (*Δυϊκότητα*) Εστω φ προτασιακός τύπος για την κατασκευή του οποίου έχουν χρησιμοποιηθεί ως σύμβολα συνδέσμων μόνον τα $\wedge, \vee$ και $\neg$. Εστω φ^* ο προτασιακός τύπος που προκύπτει αν στον φ εναλλάξουμε τα $\wedge$ και $\vee$ και αντικαταστήσουμε κάθε προτασιακή μεταβλητή A με το $\neg A$. Αποδείξτε ότι $\varphi \models\, \dashv \neg\varphi^*$.

ΑΣΗΣΗ 6. Μία πρόταση που περιέχει μόνο τον σύνδεσμο $\leftrightarrow$ είναι ταυτολογία αν και μόνον αν κάθε προτασιακό σύμβολο απαντάται έναν άρτιο αριθμό φορών.