ΟΡΙΣΜΟΙ

Έστω $V = \{v, v', v'', \dots\}$ αριθμήσιμο σύνολο μεταβλητών.

$$V ::= v \mid V'$$

Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $x, y, z, \dots$ για να αναφερόμαστε στις μεταβλητές

Ορισμός του Λ, του συνόλου των λ-όρων. (λ-terms)

Ορισμός 1. i) $x \in V \rightarrow x \in \Lambda$

ii) $M, N \in \Lambda \rightarrow (MN) \in \Lambda$

iii) $x \in V,\ M \in \Lambda \rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda$

$$\Lambda ::= V \mid (\Lambda\Lambda) \mid (\lambda V.\Lambda)$$

π.χ. $(\lambda x.((x(\lambda y.(yy)))z)) \equiv Q$ είναι όρος

Απλοποίηση γραφής: $FM_1M_2\cdots M_n$ αντί του $(\cdots((FM_1)M_2)\cdots M_n)$

$\lambda x_1\lambda x_2\cdots\lambda x_n.M$ ή $\lambda x_1x_2\cdots x_n.M$ αντί του $(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\cdots(\lambda x_n.M)\cdots)))$

Εξωτερικές παρενθέσεις παραλείπονται.

ο όρος Q μπορεί λοιπόν να γραφεί $\lambda x.x(\lambda y.yy)z$

Κάθε όρος αποτελείται από υποόρους. π.χ. οι όροι $x, y, \lambda y.yy$ είναι υποόροι του Q. Κάθε όρος είναι υποόρος του εαυτού του.

Ορίζουμε το σύνολο $Subt(M)$ των υποόρων του M με επαγωγή (Subterms)

Ορισμός 2 (i) $Subt(x) = \{x\}$

(ii) $Subt(MN) = Subt(M) \cup Subt(N) \cup \{MN\}$

(iii) $Subt(\lambda x.M) = Subt(M) \cup \{\lambda x.M\}$

Ένας υπόρος μπορεί να εμφανίζεται σε δύο διαφορετικές θέσεις π.χ. ο υπόορος y του Q εμφανίζεται σε δύο θέσεις, στο $..yy..$.

Σε ένα όρο M μπορούμε να ορίσουμε τις εμφανίσεις (ή θέσεις) στις οποίες μπορεί να εμφανιστεί (ή να εγγραφεί) ένας υπόορος του M. Έτσι λοιπόν ένας όρος μπορεί να εμφανίζεται σε διαφορετικές εμφανίσεις.

Οι εμφανίσεις θα είναι λέξεις στο αλφάβητο $\{0,1,2\}$. Η κενή λέξη είναι η ϵ. Ορίζουμε το σύνολο $O(M)$ των εμφανίσεων (occurences) ενός όρου M και ταυτόχρονα για κάθε $u \in O(M)$ τον υπόορο $M_{|u}$ που αντιστοιχεί σ'αυτή την εμφάνιση [με επαγωγή στον M].

<u>Ορισμός 3</u>.

(i) $O(x)=\{\epsilon\}$. ορίζουμε ότι για κάθε όρο M έχουμε $M_{|\epsilon}=M$

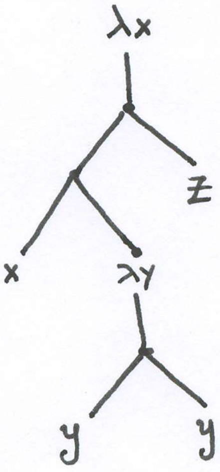
(ii) $O(MN)=\{\epsilon\} \cup 1O(M) \cup 2O(N)$. $(MN)_{|1u}=M_{|u}$ και $(MN)_{|2u}=N_{|u}$

(iii) $O(\lambda x.M)=\{\epsilon\} \cup 0O(M)$. $(\lambda x.M)_{|0u}=M_{|u}$

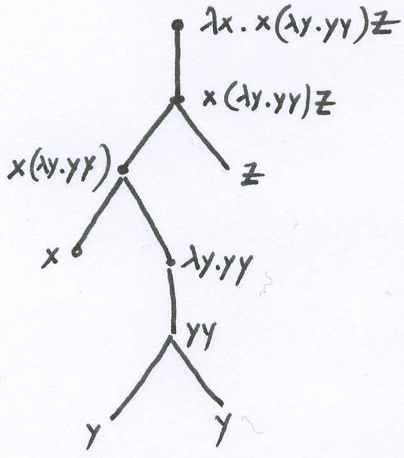
<u>Σημείωση</u>: Αν $\sigma \in \{0,1,2\}$ και $u \in O(M)$ τότε σu είναι η παράθεση του σ με το u και $\sigma O(M)=\{\sigma u \mid u \in O(M)\}$.

Η ιδέα είναι ότι κάθε όρος έχει ένα δέντρο «κατασκευής» του από τους υπόορους του. Σε κάθε κόμβο του δέντρου αντιστοιχεί ένας υπόορος. Ο κάθε κόμβος ορίζεται από το κλαδί που ενώνει τον κόμβο με τη ρίζα του δέντρου. Στα φύλλα του δέντρου κατασκευής βρίσκονται οι μεταβλητές.

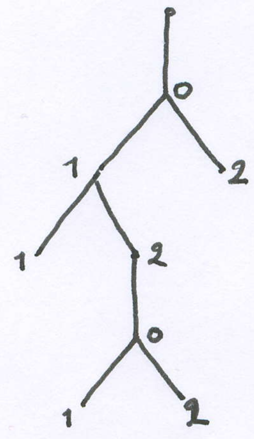
π.χ. Για τον όρο Q το δέντρο κατασκευής είναι



Σχ. 1



Σχ. 2



Σχ. 3

Στο σχήμα 1 είναι η δομική δεντρική ανάλυση του όρου, στο σχήμα 2 σε κάθε κόμβο βρίσκεται ο υπόορος που αντιστοιχεί και στο σχήμα 3 ο τρόπος με τον οποίο ορίζονται οι εμφανίσεις. π.χ. στην εμφάνιση 012 βρίσκεται ο όρος $\lambda y.yy$.

Διότι, $\lambda x.x(\lambda y.yy)z\,|_{012} = (x(\lambda y.yy))z\,|_{12} = x(\lambda y.yy)\,|_{2} = \lambda y.yy\,|_{\epsilon} = \lambda y.yy$.

Στις εμφανίσεις 01201 και 01202 βρίσκεται ο ίδιος όρος y.

Ας σημειωθεί ότι οι μεταβλητές που βρίσκονται αμέσως μετά το λ σε ένα όρο δεν αντιστοιχούν σε εμφάνιση π.χ. στον όρο $\lambda x.xx$ μόνον στον υπόορο xx έχουμε εμφάνιση της x και όχι στο λx.

Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται <u>μεταβλητές δέσμευσης</u>.

Εάν uw μια εμφάνιση στον όρο M $(u,w \in \{0,1,2\}^*)$ τότε ο υπόορος $M|_{uw}$ έχει εμφάνιση w στον υπόορο $M|_{u}$ δηλ. $(M|_{u})|_{w} = M|_{uw}$.

Εάν u και w λέξεις τότε $u<w$ αν $\exists v$ λέξη $\neq \epsilon$ ώστε $w=uv$ δηλ. η u είναι γνήσιο αρχικό τμήμα της w. Το σύνολο $O(M)$ είναι μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση $<$.

Ο τελεστής λx λειτουργεί ως δεσμευτής των εμφανίσεων της x που βρίσκονται στο βεληνεκές του. [Δες το αντίστοιχο μέρος των σημειώσεων].

π.χ. $(\lambda x. y x) x$

δεσμευμένη ελεύθερη

<u>Ορισμός 4</u> Η εμφάνιση u μιας μεταβλητής x σε έναν όρο M (δηλ $M_{|u} = x$) είναι <u>δεσμευμένη</u> εάν υπάρχει $w < u$ ώστε $M_{|w} = \lambda x. N$, δηλ. $u = wv$. Τότε $(\lambda x. N)_{|v} = x$. Ο δεσμευτής αυτής της εμφάνισης είναι το maximum w που ικανοποιεί αυτή την συνθήκη.

Η εμφάνιση u μιας μεταβλητής x είναι ελεύθερη εάν δεν είναι δεσμευμένη.

Η μεταβλητή x είναι ελεύθερη στον M εάν υπάρχει εμφάνιση της x στον M που είναι ελεύθερη. Σημειώστε ότι μια εμφάνιση u της x στον M είναι ελεύθερη όταν $w < u$ συνεπάγεται ότι $M_{|w}$ δεν είναι της μορφής $\lambda x. N$.

<u>Ορισμός 5</u> Ορίζουμε με επαγωγή στο M το $FV(M)$. (σύνολο των free variables)

(i) $FV(x) = \{x\}$

(ii) $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$

(iii) $FV(\lambda x. M) = FV(M) \setminus \{x\}$

<u>Άσκηση 1</u> Αποδείξτε ότι: $x \in FV(M) \Leftrightarrow x$ είναι ελεύθερη στον M.

Επειδή η ερμηνεία της αφαίρεσης – εφαρμογής θα είναι ότι ο όρος $(\lambda x.M)N$ μετατρέπεται στον $M[N/x]$ = ο όρος που προκύπτει εάν στον όρο M αντικαταστήσουμε ταυτόχρονα τις ελεύθερες εμφανίσεις της x με τον όρο N, πρέπει να ορίσουμε με ακρίβεια την έννοια της αντικατάστασης.

Ορισμός 6. Έστω $M, N_1, \ldots, N_k$ όροι και $x_1, \ldots, x_k$ ξεχωριστές μεταβλητές. Ορίζουμε με επαγωγή στον M τον όρο $M\langle N_1/x_1, \ldots, N_k/x_k\rangle$ (θα προκύπτει στο παράλληλη αντικατάσταση ~~των~~ όλων των ελεύθερων εμφανίσεων των $x_1, \ldots, x_k$ αντίστοιχα από τους $N_1, \ldots, N_k$). [Συμβολίζουμε το $M\langle N_1/x_1, \ldots, N_k/x_k\rangle$ με $M\langle \overline{N}/\overline{x}\rangle$].

- $x_i\langle \overline{N}/\overline{x}\rangle = N_i$, $y \notin \{x_1, \ldots, x_k\}$ τότε $y\langle \overline{N}/\overline{x}\rangle = y$
- $PQ\langle \overline{N}/\overline{x}\rangle = P\langle \overline{N}/\overline{x}\rangle Q\langle \overline{N}/\overline{x}\rangle$
- $(\lambda x_i.P)\langle \overline{N}/\overline{x}\rangle = P\langle N_1/x_1, \ldots, N_{i-1}/x_{i-1}, N_{i+1}/x_{i+1}, \ldots, N_k/x_k\rangle$
- $y \notin \{x_1, \ldots, x_k\}$ τότε $(\lambda y.P)\langle \overline{N}/\overline{x}\rangle = \lambda y.P\langle \overline{N}/\overline{x}\rangle$.

Η αντικατάσταση $M\langle \overline{N}/\overline{x}\rangle$ ονομάζεται απλή αντικατάσταση.

π.χ. $(\lambda y.xxz)\langle x/y, z/w\rangle = \lambda y.yyw$

Αν τ είναι μια αντιμετάθεση των $1, \ldots, k$ δηλ. $\tau : \{1, \ldots, k\} \xrightarrow{1-1} \{1, \ldots, k\}$ (1-1, επί) τότε $M\langle N_1/x_1, \ldots, N_k/x_k\rangle = M\langle N_{\sigma(1)}/x_{\sigma(1)}, \ldots, N_{\sigma(k)}/x_{\sigma(k)}\rangle$ δηλ. το $M\langle N_1/x_1, \ldots, N_k/x_k\rangle$ δεν εξαρτάται από τη διάταξη (σειρά) των $x_1, \ldots, x_k$. [Απλή επαγωγή στο M].

Άσκηση 2 Έστω $x_i \in FV(M)$ και $M_{|u} = x_i$. Τότε $\left(M\langle N_1/x_1,\dots,N_k/x_k\rangle\right)_{|u} = N_i$

(δηλ. η εμφάνιση u της x_i έχει αντικατασταθεί από τον N_i)

$M\langle x_1/x_1,\dots,x_k/x_k\rangle = M$ και $M\langle y_1/x_1,\dots,y_k/x_k\rangle$ έχει το ίδιο μήκος με το M

Ισχύουν τα εξής λήμματα

Λήμμα 1 Έστωσαν $M, N_1,\dots,N_k, Q_1,\dots,Q_l$ λ-όροι και $x_1,\dots,x_k, y_1,\dots,y_l$ ξεχωριστές μεταβλητές. Αν $y_1,\dots,y_l \notin FV(M)$ τότε $M\langle N_1/x_1,\dots,N_k/x_k, Q_1/y_1,\dots,Q_l/y_l\rangle = M\langle N_1/x_1,\dots,N_k/x_k\rangle$.

(οι δεσμευμένες, δηλ. οι μη ελεύθερες μεταβλητές, δεν αντικαθίστανται).

Λήμμα 2 Έστωσαν $M, N_1,\dots,N_k, Q_1,\dots,Q_l$ λ-όροι και $x_1,\dots,x_k, y_1,\dots,y_l$ ξεχωριστές μεταβλητές. Εάν $y_1,\dots,y_l \notin FV(N_1)\cup\dots\cup FV(N_k)$ τότε:

$$M\langle N_1/x_1,\dots,N_k/x_k\rangle\langle Q_1/y_1,\dots,Q_l/y_l\rangle = M\langle N_1/x_1,\dots,N_k/x_k, Q_1/y_1,\dots,Q_l/y_l\rangle$$

(η εν σειρά αντικατάσταση μπορεί να γίνει και παράλληλα αν δεν δημιουργούνται καινούργιες θέσεις (των υπό αντικατάσταση) μεταβλητών)

Λήμμα 3 Έστωσαν $M, N_1,\dots,N_k$ λ-όροι και $\{x_1,\dots,x_k\}$, $\{y_1,\dots,y_k\}$ δύο σύνολα μεταβλητών ώστε καμμία μεταβλητή y_i δεν έχει εμφάνιση στον όρο M ούτε είναι μεταβλητή δέσμευσης στον M. Τότε

$$M\langle y_1/x_1,\dots,y_k/x_k\rangle\langle N_1/y_1,\dots,N_k/y_k\rangle = M\langle N_1/x_1,\dots,N_k/x_k\rangle.$$

(Μετονομασία των $x_1,\dots,x_k$ με νέες (φρέσκιες) μεταβλητές).

Θα λέμε «x δεν είναι δεσμευμένη στον M» αν x δεν έχει ούτε δεσμευμένη εμφάνιση ούτε ένα μεταβλητή δέσμευσης στον M.

Άσκηση 3 Να γίνουν οι αποδείξεις των λημμάτων χρησιμοποιώντας το βιβλίο του Krivine

Σχέσεις και συμφραστικότητες

Ξεκινάμε από μία σχέση $R \subseteq \Lambda^2$. Η τελική σχέση θα μπορούσε να είναι η β-αναγωγή, $(\lambda x.N)M \; R \; N[M/x]$, όπως και άλλες που θα ορίσουμε στη συνέχεια. Θα επιθυμούσαμε η σχέση αυτή να μπορεί να καλύπτει και τις περιπτώσεις όπου οι όροι που αρχικά ορίζουν τη σχέση αυτή «φωλιάζουν», δηλ. είναι υποόροι, σε ένα ευρύτερο όρο. Θα αναπτύξουμε το θέμα γενικότερα.

Ορισμός 7 Έστω R διμελής σχέση στο Λ ($R \subseteq \Lambda^2$). Λέμε ότι R είναι **λ-συμβατή** (ή περνάει στα συμφραζόμενα) εάν ισχύουν τα κάτωθι:

- R είναι αυτοπαθής
- $M R M' \Rightarrow \lambda x.M \; R \; \lambda x M'$
- $M R M' \;\&\; N R N' \Rightarrow (MN) R (M'N')$

Λήμμα 4. Αν R λ-συμβατή & $N_1 R N_1', \dots, N_k R N_k'$, τότε

$$M\langle N_1/x_1, \dots, N_k/x_k\rangle \; R \; M\langle N_1'/x_1, \dots, N_k'/x_k\rangle .$$

- Εύκολη απόδειξη με επαγωγή στο M.

Πρόταση 1 Έστω $R \subseteq \Lambda^2$. Έστω ρ η μικρότερη λ-συμβατή διμελής σχέση που περιέχει την R. Τότε ισχύει:

$M \rho M' \Longleftrightarrow \exists$ όροι $T, N_1, \dots, N_k, N_1', \dots, N_k'$ και ξεχωριστές μεταβλητές $x_1, \dots, x_k$ έ.ω.:

$$\forall i,\ 1 \leq i \leq k \quad N_i R N_i' \quad \text{και} \quad M = T\langle N_1/x_1, \dots, N_k/x_k\rangle ,\ M' = T\langle N_1'/x_1, \dots, N_k'/x_k\rangle .$$

<u>Απόδειξη</u>. Το δεξιό μέρος της ισοδυναμίας ορίζει μια σχέση (μεταξύ του M και M'). Έστω η σχέση αυτή είναι η ρ'. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\rho = \rho'$.

1. Καταρχάς αποδεικνύουμε ότι $\rho' \subseteq \rho$. Διότι έστω $M \rho' M'$. Τότε

$$M = T\langle N_1/x_1, \dots \rangle \quad \text{και} \quad M' = T\langle N_1'/x_1, \dots \rangle \quad \text{και} \quad N_1 R N_1', \dots$$

Αλλά ρ περιέχει την R οπότε $N_1 \rho N_1', \dots, N_k \rho N_k'$. Επειδή ρ λ-συμβατή από λήμμα 4 έχουμε $M \rho M'$.

2. Για να αποδείξουμε ότι $\rho \subseteq \rho'$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\rho' \supset R$ (ισχύει αν πάρουμε $T = x_1$) και ότι ρ' είναι λ-συμβατή.

<u>Παρατήρηση</u>: Όταν θεωρούμε ότι ο ένας όρος έχει τη μορφή $T\langle N_1/x_1, \dots, N_k/x_k \rangle$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι μεταβλητές $x_1, \dots, x_k$ μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα, εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο. Διότι αν $y_1, \dots, y_k$ δεν έχουν εμφανίσεις στον T, ούτε είναι μεταβλητές δέσμευσης στον T τότε από λήμμα 3

$$T\langle y_1/x_1, \dots, y_k/x_k \rangle \langle N_1/y_1, \dots, N_k/y_k \rangle = T\langle N_1/x_1, \dots, N_k/x_k \rangle.$$

Άρα ο ίδιος όρος θα έχει τη μορφή $T'\langle N_1/y_1, \dots \rangle$ με $T' = T\langle y_1/x_1, \dots \rangle$.

• Έστω τώρα $M \rho' M'$ & $N \rho' N'$ $\Rightarrow$ $M = T\langle N_1/x_1, \dots, N_k/x_k \rangle$ $M' = T\langle N_1'/x_1, \dots, N_k'/x_k \rangle$
με $N_i R N_i'$

και $N = U\langle Q_1/y_1, \dots, Q_l/y_l \rangle$ $N' = U\langle Q_1'/y_1, \dots, Q_l'/y_l \rangle$
με $Q_j R Q_j'$.

Με βάση την ανωτέρω παρατήρηση οι μεταβλητές x_i και y_j δεν έχουν καμία σχέση με τα T και U (ούτε έχουν εμφανίσεις στα T, U ούτε είναι μεταβλητές δέσμευσης) οι $x_1,\dots,x_k$ δεν χρησιμοποιούνται καθόλου στον U και

οι $y_1,\dots,y_\ell$ " " " T.

Άρα $M = T\langle N_1/x_1,\dots, N_k/x_k, Q_1/y_1,\dots Q_\ell/y_\ell\rangle$ $\quad M' = T\langle N_1'/x_1,\dots, N_k'/x_k, Q_1'/y_1,\dots Q_\ell'/y_\ell\rangle$

και το ίδιο για τα N και N'

άρα $MN = TU\langle \bar{N}/\bar{x}, \bar{Q}/\bar{y}\rangle$ ρ' $M'N' = TU\langle \bar{N}'/\bar{x}, \bar{Q}'/\bar{y}\rangle$

Λεπτομέρειες στο βιβλίο του Krivine. (Άσκηση).

Ορισμός 8 Έστω $R \subset \Lambda^2$. Λέμε ότι R είναι λ-συμβατή σε μια θέση όταν η R ικανοποιεί

- $MRN \Rightarrow \lambda x.M \, R \, \lambda x N$
- $MRN \Rightarrow (MQ)R(NQ)$
- $MRN \Rightarrow (QM)R(QN)$.

Πρόταση 2. Έστω $R \subset \Lambda^2$. Αν η ρ είναι η μικρότερη σχέση που περιέχει το R και είναι λ-συμβατή σε μια θέση τότε ισχύει

$M\rho N \Leftrightarrow \exists\, T$ με ακριβώς μια εμφάνιση μιας μεταβλητής x και $\exists$ όρος φ

ώστε $M = T\langle \varphi/x\rangle$, $N = T\langle \varphi'/x\rangle$ και $\varphi R \varphi'$.

Απόδειξη. Έστω ρ' η σχέση που ορίζεται από το δεξιό σκέλος.

- $\rho' \subseteq \rho$. Διότι έστω $M\rho' N$ άρα $M = T\langle \varphi/x\rangle$ και $T\langle \varphi'/x\rangle = N$, $\varphi R \varphi'$.

Από $R \subseteq \rho \Rightarrow \varphi \rho \varphi'$ και από λήμμα 4 (με τις κατάλληλες τροποποιήσεις)*, $M\rho N$.

---

* Είναι το λήμμα 5: Αν R λ-συμβατή μιας θέσεως και NRN' και M έχει ακριβώς μία εμφάνιση της x, τότε $M\langle N/x\rangle R M\langle N'/x\rangle$

- $\rho \subseteq \rho'$. Έχουμε $R \subseteq \rho'$ (πάρε $T = x$). Αρκεί να αποδείξουμε ότι ρ' είναι λ-συμβατή σε μία θέση

έστω $M \rho' N \Rightarrow M = T\langle Q/x \rangle \quad T\langle Q'/x \rangle = N$ (η x μπορεί να θεωρηθεί φρέσκια μεταβλητή).

Άρα $\lambda y M = \lambda y. T\langle Q/x \rangle = (\lambda y. T)\langle Q/x \rangle$, επειδή x φρέσκια $\neq y$.

και $\lambda y N = \lambda y. T\langle Q'/x \rangle = (\lambda y T)\langle Q'/x \rangle$.

και x έχει ακριβώς μία εμφάνιση στον $\lambda y. T$.

Ομοίως οι άλλες περιπτώσεις

Άλφα ισοδυναμία & Αντικατάσταση

Όροι που διαφέρουν μόνον στα ονόματα των δεσμευμένων μεταβλητών θεωρούνται ότι ταυτίζονται. π.χ. $\lambda x.x$ και $\lambda y.y$. Λέμε ότι έχουμε α-ισοδυναμία ή $=_\alpha$.

<u>Ορισμός 9</u> (Krivine) Ορίζουμε τη σχέση $M \equiv_\alpha M'$ με επαγωγή στον M.

- M είναι μεταβλητή. Τότε $M \equiv_\alpha M'$ ανν M' ταυτίζεται με τον M.
- $M = PQ$. Τότε $M \equiv_\alpha M'$ ανν $M' = P'Q'$ και $P \equiv_\alpha P'$ και $Q \equiv_\alpha Q'$
- $M = \lambda x N$. Τότε $M \equiv_\alpha M'$ ανν $M' = \lambda x' . N'$ και $N\langle y/x \rangle \equiv_\alpha N'\langle y/x' \rangle$ για όλες τις μεταβλητές y εκτός ενός πεπερασμένου αριθμού μεταβλητών.

Ισχύει: $M \equiv_\alpha M' \Rightarrow M$ και M' έχουν το ίδιο μήκος και έχουν τις ίδιες εμφανίσεις για τις ελεύθερες μεταβλητές. [επίσης τις ίδιες μεν εμφανίσεις και για τις δεσμευμένες με διαφορετικά όμως ονόματα]

Πρόταση 3 $\equiv_\alpha$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πρόταση 4 Έστωσαν $M, M', N_1,\dots,N_k$ όροι και $x_1,\dots,x_k$ μεταβλητές. Εάν $M \equiv_\alpha M'$ και εάν καμμία ελεύθερη μεταβλητή στους $N_1,\dots,N_k$ δεν είναι δεσμευμένη στους M, M', τότε:

$$M\langle N_1/x_1,\dots,N_k/x_k\rangle \equiv_\alpha M'\langle N_1/x_1,\dots,N_k/x_k\rangle.$$

Προκαταρκτική παρατήρηση: Επειδή $M\equiv_\alpha M'$, $FV(M)=FV(M')$. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1,\dots,x_k$ είναι ελεύθερα στους M και M' ($\{x_1,\dots,x_k\}\subseteq FV(M)=FV(M')$).

Απόδειξη (Krivine)

Πόρισμα Η σχέση $\equiv_\alpha$ είναι λ-συμβατή.

Πόρισμα Αν $N_1,\dots,N_k, N_1',\dots,N_k'$ όροι και $x_1,\dots,x_k$ μεταβλητές τότε

$$N_1\equiv_\alpha N_1',\dots,N_k\equiv_\alpha N_k' \Rightarrow M\langle N_1/x_1,\dots,N_k/x_k\rangle \equiv_\alpha M\langle N_1'/x_1,\dots,N_k'/x_k\rangle.$$

Απόδειξη Από προηγούμενο πόρισμα και ~~[illegible]~~ πρόταση 2.

Σημείωση: Δεν ισχύει $M\equiv_\alpha M' \Rightarrow M\langle N/x\rangle \equiv_\alpha M'\langle N/x\rangle$

Αντιπαράδειγμα $M = \lambda y.yx \equiv_\alpha \lambda w.wx = M'$ και $N=y$

Λήμμα 5. Αν y δεν εμφανίζεται καθόλου* στον όρο M τότε $\lambda x.M \equiv_\alpha \lambda y.M\langle y/x\rangle$ (μετονομασία δεσμευμ. μεταβλητής).

Λήμμα 6. Αν M όρος και $x_1,\dots,x_k$ μεταβλητές τότε υπάρχει όρος $M'\equiv_\alpha M$ ώστε καμμία από τις $x_1,\dots,x_k$ δεν είναι δεσμευμένη στον M'.

*Σημαίνει ότι δεν έχει ελεύθερη ή δεσμευμένη εμφάνιση, ούτε εμφάνιση ως μεταβλητή δέσμευσης

ΑΡΑ

οι όροι είναι ο κλάσεις ισοδυναμίας $\Lambda/\equiv_\alpha$. Η κλάση $\{x\}$ συμβολ. με x.

οι σχηματισμοί σύνθεσης όρων είναι συμβατοί με τη δομή $\Lambda/\equiv_\alpha$

δηλ. $M \equiv_\alpha M' \quad N \equiv_\alpha N' \Longrightarrow (MN) \equiv_\alpha M'N'$

$$M \equiv_\alpha M' \Longrightarrow \lambda x M \equiv_\alpha \lambda x M'$$

Επίσης $M \equiv_\alpha M' \Rightarrow FV(M) = FV(M')$, άρα ορίζεται η έννοια των ελεύθερων μεταβλητών της κλάσης.

Ορισμός ο όρος $M\left[{}^{N_1}/_{x_1}, \ldots, {}^{N_k}/_{x_k}\right]$ ορίζεται ως ο $M'\langle {}^{N_1}/_{x_1}, \ldots, {}^{N_k}/_{x_k}\rangle$

όπου $M' \equiv_\alpha M$ και καμμία δεσμευμένη μεταβλητή του M' δεν εμφανίζεται ελεύθερη στους $N_1, \ldots, N_k$. (πάντα δυνατό). Από πρόταση 4 ο ορισμός είναι καλός.

Επίσης $N_1 \equiv_\alpha N_1', \ldots, N_k \equiv_\alpha N_k' \Rightarrow M\left[{}^{N_1}/_{x_1} \ldots {}^{N_k}/_{x_k}\right] \equiv_\alpha M\left[{}^{N_1'}/_{x_1}, \ldots, {}^{N_k'}/_{x_k}\right]$

άρα η αντικατάσταση $M\left[{}^{N_1}/_{x_1}, \ldots, {}^{N_k}/_{x_k}\right]$ μπορεί να οριστεί (καλώς) πάνω στις κλάσεις ισοδυναμίας.

Ισχύουν λοιπόν τα λήμματα 1,2,3 και για την αντικατάσταση $[\cdot]$. (εδώ ως λήμματα 7,8,9). καθώς και το

Λήμμα 10. $M\left[{}^{N_1}/_{y_1}, \ldots, {}^{N_\ell}/_{y_\ell}\right]\left[{}^{Q_1}/_{x_1}, \ldots, {}^{Q_k}/_{x_k}\right] \equiv_\alpha M\left[{}^{Q_1}/_{x_1}, \ldots, {}^{Q_k}/_{x_k}, {}^{N_1'}/_{y_1}, \ldots, {}^{N_\ell'}/_{y_\ell}\right]$

με $N_i' \equiv_\alpha N_i\left[{}^{Q_1}/_{x_1}, \ldots, {}^{Q_k}/_{x_k}\right]$.

και εάν $y_1, \dots, y_\ell \notin$ ελεύθερες μεταβλητές των $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ τότε

$$M\left[\frac{N_1}{y_1}, \dots, \frac{N_\ell}{y_\ell}\right]\left[\frac{\varphi_1}{x_1}, \dots, \frac{\varphi_k}{x_k}\right] \equiv_\alpha M\left[\frac{\varphi_1}{x_1}, \dots, \frac{\varphi_k}{x_k}\right]\left[\frac{N_1}{y_1}, \dots, \frac{N_\ell}{y_\ell}\right]$$

β-αναγωγή

Πρόταση 5 Εάν $(\lambda x.M)N \equiv_\alpha (\lambda x'.M')N'$ τότε $M[N/x] \equiv_\alpha M'[N'/x']$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε καλώς την διμελή σχέση β στο $\Lambda \; (= \Lambda/\equiv_\alpha)$.

$$(\lambda x.M)N \;\beta\; M[N/x].$$

redex　　　　contractum.

Ορισμός $\rightarrow_\beta$ είναι η μικρότερη διμελής σχέση που περιλαμβάνει την β και είναι λ-συμβατή σε μία θέση.

Σύμφωνα με την πρόταση 2 έχουμε ότι $M \rightarrow_\beta N$ αν ένας υπόόρος του M που είναι redex έχει αντικατασταθεί με το contractum (οπότε προκύπτει ο N)

Ορισμός $\twoheadrightarrow_\beta$ είναι η ανακλαστική και μεταβατική κλειστότητα (ή κλείσιμο) της $\rightarrow_\beta$.

Οπότε $M \twoheadrightarrow_\beta N \iff M \equiv M_0 \rightarrow_\beta M_1 \rightarrow_\beta \cdots \rightarrow_\beta M_n \equiv N$, $n \geq 0$ (για $n=0$, $M \equiv N$)

- Η $\twoheadrightarrow_\beta$ είναι η μικρότερη σχέση που περιέχει την $\rightarrow_\beta$ και είναι ανακλαστική και μεταβατική. Ονομάζεται β-αναγωγή.

• Μπορούμε να δούμε ότι η $\twoheadrightarrow_\beta$ είναι η μικρότερη λ-συμβατή σχέση που περιέχει τη β και είναι αυτοπαθής και μεταβατική.

<u>Λήμμα</u> $M \twoheadrightarrow_\beta M' \Rightarrow FV(M') \subseteq FV(M)$.

<u>Απόδειξη</u> Με επαγωγή στο M.

<u>Πρόταση 6</u> $M \twoheadrightarrow_\beta M'$ & $N \twoheadrightarrow_\beta N' \Rightarrow M[N/x] \twoheadrightarrow_\beta M'[N'/x]$.

<u>Απόδειξη</u> Αποδεικνύουμε με επαγωγή στο M τα εξής:

- $M \to_\beta M' \Rightarrow M[N/x] \twoheadrightarrow_\beta M'[N/x]$ (χρησιμοποιούμε το λήμμα 10)
- $N \to_\beta N' \Rightarrow M[N/x] \twoheadrightarrow_\beta M[N'/x]$

Γενικότερα αν $R \subset \Lambda^2$ τότε $\to_R$ είναι η μικρότερη λ-συμβατή μίας θέσης σχέση που περιέχει την R και $\twoheadrightarrow_R$ η αυτοπαθής και μεταβατική κλειστότητα της $\to_R$. Ισχύουν αυτά που γενικά αναφέραμε για την β.

<u>Ορισμοί</u>

- M είναι κανονικός ή σε κανονική μορφή εάν δεν περιέχει redex
- M κανονικός $\Leftrightarrow \nexists N,\ M \to_\beta N$.
- M κανονικός & $M \twoheadrightarrow_\beta N \Rightarrow M \equiv_\alpha N$ (Το αντίστροφο δεν ισχύει).

Ταξινομία των λ-όρων

Κάθε λ-όρος γράφεται με μοναδικό τρόπο σε μία από τις ακόλουθες μορφές

- Μεταβλητή x
- $x M_1 \cdots M_k \quad , k>0$
- $(\lambda x P) Q M_1 \cdots M_k \quad , k \geqslant 0$
- $\lambda x . M$

Άρα κάθε όρος γράφεται με μοναδικό τρόπο σε μία από τις παρακάτω δύο μορφές

- $\lambda x_1 x_2 \cdots x_n . x N_1 \cdots N_k \quad , n \geqslant 0, k \geqslant 0$ [κανονική μορφή κεφαλής]
- $\lambda x_1 x_2 \cdots \lambda x_n . (\lambda x P) Q N_1 \cdots N_k \quad , n \geqslant 0, k \geqslant 0$ [το redex $(\lambda x P) Q$ λέγεται redex κεφαλής].

M είναι <u>κανονικοποιήσιμος</u> αν $\exists N$, κανονικός και $M \twoheadrightarrow_\beta N$

M είναι <u>ισχυρά κανονικοποιήσιμο</u> αν $\nexists$ άπειρη ακολουθία

$$M \to_\beta M_1 \to_\beta M_2 \to_\beta \cdots\cdots$$

<u>π.χ.</u> $\lambda x.y$ κανονική μορφή

$(\lambda x.x)((\lambda y.y)z)$ ισχυρά κανονικοποιήσιμος

$\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ όχι κανονικοποιήσιμος $(\omega = \lambda x.xx)$.

$(\lambda x.z)\Omega$ κανονικοποιήσιμος αλλά όχι ισχυρά κανονικοποιήσιμος.