λ-λογισμός και τύποι τομής

Γενικά: Υπάρχει μια μεγάλη παράδοση χρήσης της έννοιας του τύπου στη λογική και στις γλώσσες προγραμματισμού.

Θεωρία Τύπων (Russel)

Τύποι στην πληροφορική (Συναρτησιακές γλώσσες όπως ML, Haskel κ.λ.)

Ο βασικός τύπος είναι ο τύπος των συναρτήσεων $\sigma \to \tau$.

π.χ. αν Nat είναι ο (ατομικός) τύπος των φυσικών αριθμών τότε

Nat→Nat είναι ο τύπος των συναρτήσεων από τους φυσικούς στους φυσικούς.

Πώς μπορούμε να «αποδώσουμε» τύπους στα προγράμματα (ή λ-όρους)

Σύστημα απλών τύπων à la Curry

Τύποι: $T ::= V \mid (T \to T)$ (όπου V αριθμήσιμο σύνολο ατομικών τύπων).

Ορισμός του $\Gamma \vdash t : A$ όπου: $\begin{cases} A \in T \\ t \in \Lambda \\ \Gamma \text{ περιβάλλον.} \end{cases}$

<u>Ορισμός Περιβάλλον</u>: Είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \dots, x_n\}$ μεταβλητών του Λ και πεδίο τιμών το T. Δηλ. $\Gamma : \{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow T$

<u>Γράφουμε</u> $\Gamma = \{x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n\}$, όπου $A_i = \Gamma(x_i)$.
ή απλούστερα $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$. $\{x_1, \dots, x_n\} = \mathrm{dom}(\Gamma)$

<u>Σημείωση</u>: Οι $x_1, \dots, x_n$ είναι ξεχωριστές μεταβλητές και όταν γράφουμε $\Gamma, x : A$ εννοούμε το $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n, x : A$ με την προϋπόθεση ότι $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$.

Σύστημα Τυποποίησης

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A}\ (\text{Μετ}) \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x . t : A \to B}\ \lambda \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \to B \quad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash t u : B}\ @$$

Ό,τι προκύπτει από αυτό το σύστημα ορίζεται ως $\Gamma \vdash \underbrace{t}_{\text{υποκείμενο}} : \underbrace{A}_{\text{κατηγόρημα}}$

<u>Ορισμός</u> Ο όρος t είναι τυποποιήσιμος αν $\exists\ \Gamma, A$ ώστε $\Gamma \vdash t : A$

π.χ.
$$\frac{x:A \vdash x:A}{\vdash \lambda x.x : A \to A}$$

Άσκηση **1**. Έστω $\Gamma \vdash t : A$. Τότε:

(i) Αν t μεταβλητή x τότε $x \in dom(\Gamma)$

(ii) Αν $t \equiv \lambda x.u$ τότε $A \equiv B \to C$ και $\Gamma, x:B \vdash u:C$

[Η x μπορεί να επιλεγεί ώστε $x \notin dom(\Gamma)$]

(iii) Αν $t \equiv uv$ τότε $\Gamma \vdash u : B \to A$ (για κάποιο B) και $\Gamma \vdash v : B$.

Πόρισμα $\lambda x.xx$ δεν είναι τυποποιήσιμος.

Απόδειξη Χρήση της άσκησης 1 και του ακόλουθου λήμματος

Λήμμα Έστω $\Gamma \vdash t : A$, και $\{y_1, \dots, y_k\} = FV(t)$. Τότε

(i) $dom(\Gamma) \subseteq dom(\Gamma') \Rightarrow \Gamma' \vdash t : A$ (Εξασθένηση)

(ii) $FV(t) \subseteq dom(\Gamma)$

(iii) Αν $\Gamma' = \Gamma \upharpoonright FV(t)$ τότε $\Gamma' \vdash t : A$

[Άρα αν $\Gamma \vdash t : A$ και t κλειστός όρος τότε $\vdash t : A$].

Απόδειξη (Άσκηση **2**)

Οι τυποποιήσιμοι όροι στο σύστημα à la Curry έχουν αξιοσημείωτη ιδιότητα

* t τυποποιήσιμος $\Longrightarrow$ t ισχυρά κανονικοποιήσιμος [Tait]

~~~

Υπάρχουν όμως όροι (π.χ. $\lambda x.xx$) οι οποίοι είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμοι αλλά δεν τυποποιούνται στο σύστημα. Θα μπορούσαμε να τυποποιήσουμε και άλλους όρους αν επιτρέπαμε ένας όρος να έχει πάνω από ένα τύπο (περιορισμένος πολυμορφισμός). Αν π.χ. υπήρχε η δυνατότητα ένας όρος να έχει τους δύο τύπους $A\to A$ και A (ταυτόχρονα, και το σημειώνουμε $(A\to A)\wedge A$)

τότε

$$\dfrac{\dfrac{x:(A\to A)\wedge A \vdash x:A\to A\ (;) \qquad x:(A\to A)\wedge A \vdash x:A\ (;)}{x:(A\to A)\wedge A \vdash xx:A}}{\vdash \lambda x.xx:(A\to A)\wedge A \to A}$$

Διευρύνουμε λοιπόν τον ορισμό των τύπων και των κανόνων τυποποίησης

ΤΥΠΟΙ ΤΟΜΗΣ

Έστω Ω μια σταθερά τύπου

ΣΥΣΤΗΜΑ $D\Omega$

ΤΥΠΟΙ $T ::= \Omega \mid V \mid (T\to T) \mid (T\wedge T)$
~~~

Επιπλέον των κανόνων που έχουμε ήδη τους εξής:

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \wedge B}{\Gamma \vdash t : A}\ \wedge_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \wedge B}{\Gamma \vdash t : B}\ \wedge_2 \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \qquad \Gamma \vdash t : B}{\Gamma \vdash t : A \wedge B}\ \wedge$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t : \Omega}\ (\Omega \text{ κανόνας}), \text{ για όλα τα } \Gamma \text{ και } t.$$

Ορισμός Γράφουμε $\Gamma \vdash_{D\Omega} t : A$ όταν έχουμε απόδειξη στο σύστημα αυτό.

Αν τώρα από τους κανόνες παραγωγής των τύπων αφαιρέσουμε τη σταθερά Ω δηλ. αν οι τύποι ορίζονται $T ::= V \mid T \to T \mid T \wedge T$, και από τους κανόνες τυποποίησης αφαιρέσουμε τον κανόνα Ω τότε το σύστημα που προκύπτει λέγεται σύστημα D και γράφουμε $\Gamma \vdash_D t : A$ για τις τυποποιήσεις σ' αυτό το σύστημα.

Αν $\Gamma \vdash_{D\Omega} t : A$ λέμε ότι t τυποποιείται (ή είναι τυποποιήσιμος) στο σύστημα $D\Omega$

Αν $\Gamma \vdash_D t : A$ ———— " ———— " —— D.

Παράδειγμα $\lambda x.xx$ τυποποιήσιμος στο σύστημα D.

Παρατήρηση: Όλοι οι όροι t είναι τυποποιήσιμοι στο σύστημα $D\Omega$ με τον καθορισμένο τύπο Ω. δηλ $\vdash_{D\Omega} t : \Omega$.

<u>Πρόταση</u> 1) Για τα συστήματα D και DΩ ισχύει η εξασθένηση

δηλ. $\Gamma \vdash t:A \ \& \ \mathrm{dom}(\Gamma) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma') \Rightarrow \Gamma' \vdash t:A$

2) Για το σύστημα D όταν $\Gamma \vdash_D t:A$, όλες οι ελεύθερες μεταβλητές του t «δηλώνονται» στο Γ. $[FV(t) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma)]$.

καθώς και το ότι μπορούμε να περιοριστούμε στις ελεύθερες μεταβλητές του t $[\Gamma \restriction FV(t) \vdash t:A]$.

Όπως αναφέραμε οι όροι που τυποποιούνται στο σύστημα à la Curry των απλών τύπων είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμοι. Η μέθοδος με την οποία ~~που~~ αποδείχθηκε αυτό από τον Tait βασίζεται στην έννοια της αναγωγιμότητας (reducibility).

<u>Ιδέα</u>: Επειδή είναι δύσκολο (κατά κανόνα αδύνατο) να δώσουμε μια άμεση συνδυαστική απόδειξη της ιδιότητας της (ισχυρής) κανονικοποίησης, ορίζουμε μια κατάλληλη ιδιότητα την «αναγωγιμότητα» την οποία μπορούμε να την ορίσουμε με επαγωγή στους τύπους. Η ιδιότητα της αναγωγιμότητας συνεπάγεται την ιδιότητα της κανονικοποίησης. Κατόπιν αποδεικνύουμε ότι όλοι οι τυποποιήσιμοι όροι είναι αναγώγιμοι.

Η μέθοδος αυτή διευρύνθηκε για την περίπτωση της δευτεροβάθμιας τυποποίησης από τον Girard και την επεξεργάστηκαν περαιτέρω οι Mitchell κ.τ.λ.

Κάθε έννοια αναγωγιμότητας που ορίζεται θα προσδιορίζει για κάθε τύπο A ένα υποσύνολο (ιδιότητα) $|A| \subseteq \Lambda$. Αυτό θα γίνει επαγωγικά αρχίζοντας από τη τιμή $|X|$ όπου X ατομικός τύπος (μεταβλητή τύπου). Καί αυτό τον τρόπο θα ορίσουμε την έννοια της ερμηνείας.

Ορισμός Έστω $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ υποσύνολα του Λ. Ορίζουμε το $\mathcal{X} \to \mathcal{Y} \subseteq \Lambda$,

$$u \in (\mathcal{X} \to \mathcal{Y}) \Longleftrightarrow \forall t \in \mathcal{X},\ ut \in \mathcal{Y}$$

Ορισμός Ένα υποσύνολο $\mathcal{X}$ του Λ λέγεται κορεσμένο εάν για οποιουσδήποτε όρους $t, t_1, \dots, t_n, u$ έχουμε

$$(u[t/x])\, t_1 \cdots t_n \in \mathcal{X} \Longrightarrow (\lambda x u)\, t\, t_1 \cdots t_n \in \mathcal{X}$$

Πρόταση Εάν $\mathcal{Y} \subseteq \Lambda$ είναι κορεσμένο τότε $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ είναι κορεσμένο.

Απόδειξη. Έστω $u[t/x]\, t_1 \cdots t_n \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Παίρνουμε $t_0 \in \mathcal{X}$. Τότε

$u[t/x]\, t_1 \cdots t_n t_0 \in \mathcal{Y}$. Αλλά $\mathcal{Y}$ κορεσμένο. Άρα $(\lambda x u)\, t\, t_1 \cdots t_n t_0 \in \mathcal{Y}$

Αυτό σημαίνει ότι $(\lambda x u)\, t\, t_1 \cdots t_n \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

Ορισμός: Ερμηνεία I είναι μια απεικόνιση $I: A \longmapsto |A| \subseteq \Lambda$ για κάθε τύπο A έτσι ώστε

- $|X|$ είναι κορεσμένο σύνολο, αν X ατομικός τύπος (εκτός του Ω)
- $|\Omega| = \Lambda$
- $|A \to B| = |A| \to |B|$
- $|A \wedge B| = |A| \wedge |B|$

Γράφουμε $|A|_I$ για να πούμε ότι $|A|$ είναι η εικόνα μιας απεικόνισης I (αν θέλουμε να την ξεχωρίσουμε με μία άλλη J) η απλά $|A|$ όταν δεν υπάρχει τέτοιο θέμα. Σε μια απεικόνιση η τιμές $|A|$ προσδιορίζονται από τις τιμές $|X|$ στο ατομικές τύπων. Εύκολα βλέπουμε ότι $|A|$ είναι κορεσμένο, για κάθε τύπο A.

Λήμμα της Επάρκειας ή ορθότητας

Έστω I μια ερμηνεία, και έστω $x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k \vdash_{D\Omega} u : A$

Εάν $t_1 \in |A_1|, \dots, t_k \in |A_k|$ τότε $u[t_1/x_1, \dots, t_k/x_k] \in |A|$.

Απόδειξη: Με Επαγωγή στην κατασκευή $x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k \vdash u : A$.

- Κανόνας Μετ. Έχουμε $x_1 : A_1, \dots, x_i : A_i, \dots, x_k : A_k \vdash x_i : A_i$. Τότε $u[t_1/x_1 \dots t_k/x_k] = t_i$ οπότε $t_i \in |A| = |A_i|$ εξ' υποθέσεως.

- Κανόνας λ. Έχουμε $x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k \vdash \lambda x t : A \to B$

~~Απόδειξη~~. Θέλουμε $\lambda x. t\, [t_1/x_1, \dots, t_k/x_k] \in |A| \to |B|$

Έστω ~~α~~ $w \in |A|$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $((\lambda x.t)[{t_1}/{x_1},\dots,{t_k}/{x_k}])\, w \in |B|$ (+)

Από Ε.Υ. $t[{t_1}/{x_1},\dots,{t_k}/{x_k}, {w}/{x}] \in |B|$

Από τη σύμβαση των μεταβλητών το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στους

$t_1,\dots,t_k$. Άρα $t[{t_1}/{x_1},\dots,{t_k}/{x_k},{w}/{x}] = (t[{t_1}/{x_1},\dots,{t_k}/{x_k}])[{w}/{x}] \in |B|$

Αλλά επειδή $|B|$ κορεσμένο, $(\lambda x.\, t[{t_1}/{x_1},\dots,{t_k}/{x_k}])\, w \in |B|$ Δηλαδή

$$((\lambda x.t)[{t_1}/{x_1},\dots,{t_k}/{x_k}])\, w \in |B|$$, δηλαδή η (+).

- Κανόνας @. Θέλουμε $(tu)[{t_1}/{x_1},\dots,{t_k}/{x_k}] \in |B|$

Από Ε.Υ. $t[\cdot] \in |A| \to |B|$ και $t[\cdot] \in |A|$. Έπεται ότι

$$(tu)[\dots] = (t[\cdot])\, u[\cdot] \in |B|$$

- Κανόνας $\wedge_i$. Από Ε.Υ. $t[\cdot] \in |A| \cap |B|$. Άρα $t[\cdot] \in |A|$ $(i=1)$

$t[\cdot] \in |B|$ $(i=2)$

- Κανόνας $\wedge$. Από Ε.Υ. $t[\cdot] \in |A|$ και $t[\cdot] \in |B|$. Άρα $t[\cdot] \in |A| \cap |B| = |A \wedge B|$

- Κανόνας Ω. Προφανές επειδή $|\Omega| = \Lambda$.

Ορισμός Έστω $P \subseteq \Lambda$, και $\mathcal{X} \subseteq \Lambda$. Το $\mathcal{X}$ είναι **P-κορεσμένο** αν

για οποιαδήποτε $t_1, \dots, t_n, u$ και οποιοδήποτε $t \in P$

$$(u[t/x])\, t_1 \cdots t_n \in \mathcal{X} \Longrightarrow (\lambda x.u)\, t\, t_1 \cdots t_n \in \mathcal{X}$$

Πρόταση (Άσκηση) $\mathcal{Y}$ P-κορεσμένο $\Longrightarrow$ $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ P-κορεσμένο

Παρατήρηση: Το $\mathcal{X}$ είναι κορεσμένο αν είναι Λ-κορεσμένο.

Ορισμός Αν $P \subseteq \Lambda$ τότε **P-ερμηνεία** είναι μια ερμηνεία I ώστε

για κάθε μεταβλητή τύπου X, το $|X|$ είναι P-κορεσμένο.

Πρόταση (Λήμμα Επάρκειας) Έστω $x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k \vdash_D t : A$. Έστω I μια

P-ερμηνεία έτσι ώστε για κάθε τύπο B του συστήματος D έχουμε $|B|_I \subseteq P$.

Τότε εάν $t_1 \in |A_1|_I, \dots, t_k \in |A_k|_I$ έχουμε ότι $u[t_1/x_1, \dots, t_k/x_k] \in |A|_I$.

Απόδειξη (Άσκηση 3)

Έστω $\mathbb{P}$ σύνολο λ-όρων, δηλ. $\mathbb{P} \subseteq \Lambda$. Το $\mathbb{P}$ μπορεί να νοηθεί ως μια ιδιότητα των λ-όρων. π.χ. αν $\mathbb{P} = \{x \in \Lambda \mid x$ είναι κανονικοποιήσιμος$\}$ τότε το $\mathbb{P}$ αντιπροσωπεύει την ιδιότητα της κανονικοποίησης.

Πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένας τυποποιήσιμος όρος έχει την ιδιότητα $\mathbb{P}$; Έστω $x_1 : A_1, \dots, x_k : A_k \vdash t : A$. Θα μπορούσαμε να επιτεύχουμε ότι $t \in \mathbb{P}$ (έχει την ιδιότητα $\mathbb{P}$) αν ικανοποιούνται οι συνθήκες: [I ερμηνεία]

1. $x_i \in |A_i| \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$

2. $|A| \subseteq \mathbb{P}$.

Διότι τότε από Λήμμα Επάρκειας θα έχουμε ότι

$$t = t[x_1/x_1, \dots, x_k/x_k] \in |A| \quad (\text{από } 1)$$

$$\text{οπότε} \quad t \in \mathbb{P} \quad (\text{από } 2)$$

Άρα αρκεί να ~~προσαρμόσουμε~~ ορίσουμε την ερμηνεία I κατά τρόπο ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες 1 και 2.

Από ανάλυση των ελάχιστων ιδιοτήτων της τυποποίησης και της ιδιότητας $\mathbb{P}$ [βλέπε: K, S : Reducibility proofs for various properties of λ-calculus] καταλήγουμε στο εξής:

<u>Ορισμός</u> Οι <u>περιορισμένοι</u> τύποι του ΔΩ ορίζονται επαγωγικά:

1) Ω είναι περιορισμένος

2) αν A περιορισμένος τότε για κάθε B, $B \to A$ είναι περιορισμένος

3) Αν A και B περιορισμένοι τότε $A \wedge B$ είναι περιορισμένος

Πώς χαρακτηρίζονται οι τετριμμένοι τύποι;

<u>Ορισμός</u> Οι <u>τελικές εμφανίσεις</u> μιας μεταβλητής τύπου X σε ένα τύπο A ορίζονται επαγωγικά ως εξής:

- Αν A είναι μεταβλητή ή Ω τότε η (ενδεχόμενη) εμφάνιση της X στον A είναι τελική.
- Αν $A = B \wedge C$ τότε οι τελικές εμφ. της X στον A είναι ~~...~~ οι τελικές εμφ. της X στον B και οι τελικές εμφ. της X στον C.
- Αν $A = B \to C$ τότε οι τελικές εμφανίσεις της X στον A είναι οι τελ. εμφ. της X στον C.

(Άσκηση 4) Ένας τύπος A είναι τετριμμένος εάν καμμία μεταβλητή X δεν έχει τελική εμφάνιση στον A.

<u>Πρόταση</u> Έστω $\mathbb{P}$ μια ιδιότητα που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

P1. $(x)t_1 \cdots t_n \in \mathbb{P}$ για όλα τα $x, t_1, \ldots, t_n$ $(n \geq 0)$

P2. $\mathbb{P}$ είναι κορεσμένο

P3. $(t)x \in \mathbb{P} \Rightarrow t \in \mathbb{P}$.

Τότε για τις ερμηνείες I για τις οποίες $|X|_I = \mathbb{P}$, έχουμε ότι
1) Για κάθε A, $(x)t_1 \cdots t_n \in |A|$ (για όλα τα $x, t_1 \cdots t_n$ $(n \geq 0)$)
2) Για κάθε μη τετριμμένο τύπο A, $|A| \subseteq \mathbb{P}$.

<u>Απόδειξη</u> Επαγωγή στον τύπο A. (Το 1. εύκολο)

$\boxed{\text{Το 2}}$

- $A = X$. Έχουμε $|A| = |X| \subseteq \mathbb{P}$
- $A = B \wedge C$. Τότε το B ή το C (έστω το B) είναι μη τετριμμένο). Από επ. υπ. $|B| \subseteq \mathbb{P}$

  Άρα $|A| = |B| \cap |C| \subseteq |B| \subseteq \mathbb{P}$

• $A = B \to C$. Τότε C μη τετριμμένος. Άρα (Ε.Υ.) $|C| \subseteq \mathbb{P}$

Έστω $t \in |A| = |B| \to |C|$. (Επειδή, από 1, $x \in |B|$ $(t)x \in |C|$, άρα $(t)x \in \mathbb{P}$

δηλ. και από P3 $t \in \mathbb{P}$. Άρα $|A| \subseteq \mathbb{P}$

Πρόταση Έστω $\mathbb{P} = \{ t \mid$ Η αναγωγή κεφαλής του t τερματίζεται $\}$. Τότε

$\mathbb{P}$ ικανοποιεί ~~...~~ τις P1 – P3.

Απόδειξη. P1. Προφανές διότι $(x)t_1 \dots t_k$ είναι σε κανονική μορφή κεφαλής

P2. Αν $u[t/x]t_1 \dots t_n \in \mathbb{P}$ τότε η αναγωγή κεφαλής του $(\lambda x u)t\, t_1 \dots t_n$

«περνάει» από το $u[t/x]t_1 \dots t_n$ άρα τερματίζει.

P3. Έστω η αναγωγή κεφαλής του $(t)x$ είναι πεπερασμένη.

Τότε η αναγωγή κεφαλής του t δεν μπορεί να είναι άπειρη διότι

θα υπήρχε άπειρη αναγωγή $t \to_h t_1 \to_h t_2 \to \dots$ τότε έστω n το

ελάχιστο για το οποίο το $t_n \equiv \lambda y u$ [Αν δεν υπήρχε τότε η αναγωγή

$tx \to_h t_1 x \to t_2 x \dots$ είναι μια άπειρη αναγωγή από το tx. (Άτοπο)] (*)

Έχουμε $tx \to_h t_1^x \to_h t_2^x \to \dots \to (\lambda y u)x \to_h u[x/y] \xrightarrow[h]{\text{άπειρη αναγωγή του } u} \dots$

(Άτοπο)

(*) Από εκεί και πέρα η άπειρη αναγωγή αντιστοιχεί σε μία άπειρη αναγωγή από το u.

Είδαμε ότι οι συνθήκες της σελ. 12 υπαγορεύονται από την απαίτηση να έχουμε σωστή τυποποίηση $x_1:A_1,\dots,x_k:A_k \vdash t:A$, $|A|\neq\Lambda$ (άρα A που τερματίζει) και επίσης από το ότι $x\in|A_i|$ όπως και $(x)t_1\cdots t_n\in|A_i|$.

Τώρα θέλουμε να δούμε για ποιές ιδιότητα το A μπορούμε να χαλαρώσουμε την απαίτηση « A μη τετριμμένος » και συνεχεια να μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα της ορθότητας.

Πώς μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι ο τύπος A δεν είναι τετριμμένος; Αρκεί να πούμε ότι δεν θα έχουμε καμμία θετική εμφάνιση του Ω. (διότι όλες οι τελικές εμφανίσεις είναι θετικές).

Ορισμός Θετικές – Αρνητικές εμφανίσεις μεταβλητής Ω στο τύπο A [Επαγωγή].

- A μεταβλητή Ω τότε η μόνη εμφάνιση της X ή Ω στο A είναι θετική
- $A\equiv B\wedge C$ τότε η θετική (αρνητική) στο B ή C είναι θετική (αρνητική) εμφάνιση στο A.
- $A\equiv B\to C$ τότε οι θετικές (αρνητικές) εμφανίσεις στο A είναι οι θετικές (αρνητικές) στο C και οι αρνητικές (θετικές) στο B.

Συνέχεια των πριν του ορισμού παρατηρήσεων: Αν όμως πούμε ότι ο A έχει μόνο αρνητικές εμφανίσεις του Ω (συμβ. $-A$) τότε τα A_i πρέπει να έχουν μόνο θετικές εμφανίσεις του Ω (συμβ: $+A$) [Γιατί;]

Επίσης, για να αποδείξουμε ότι $x \in |A_i)$ οδηγούμαστε π.χ. στο $x \in |B \to C|$ όπου $+(B \to C)$ άρα $-B$ και $+C$. Από Ε.Υ. (θα πρέπει) $|B| \subseteq \mathbb{P}$, άρα για να έχουμε για $t \in \mathbb{P}$ xt (άρα και $xt_1 \cdots t_n$) $\in \mathbb{P}$.

Συνοψίζοντας. (Πρόταση)

Έστω $\mathbb{P}$ ιδιότητα που ικανοποιεί τα παρακάτω:

P1. $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{P} \Rightarrow (x)t_1 \cdots t_n \in \mathbb{P}$

P2. $\mathbb{P}$ είναι κορεσμένο

P2. $(t)x \in \mathbb{P} \Rightarrow t \in \mathbb{P}$ τότε

για ερμηνεία I για τις οποίες $|X|_I = \mathbb{P}$ ισχύει τα παρακάτω.

$$+A \Rightarrow (x)t_1 \cdots t_n \in |A| \text{ για όλες τις } t_1 \cdots t_n \in \mathbb{P} \quad (n \geq 0)$$

$$-A \Rightarrow |A| \subseteq \mathbb{P}$$

Απόδειξη: Με επαγωγή:

$A \equiv X$ ... ισχύει από P1.

$A \equiv \Omega$ ισχύει από P1

$A \equiv B \wedge C$ $\begin{cases} +A \Rightarrow +B \text{ και } +C \quad (\text{από Ε.Υ.}) \\ -A \Rightarrow -B \text{ ή } -C. \text{ Έστω } -B. \text{ Τότε (Ε.Υ.) } |B| \subseteq \mathbb{P} \text{ άρα και } |B| \cap |C| \subseteq |B| \subseteq \mathbb{P}. \end{cases}$

$A \equiv B \to C$ $\begin{cases} +A \Rightarrow -B \text{ και } +C \Rightarrow |B| \subseteq \mathbb{P} \text{ (Ε.Υ.). Άρα αν } (x)t_1 \cdots t_n \text{ και } t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{P} \text{ παίρνουμε } t \in |B| \text{ έ} \\ \text{και } (x)t_1 \cdots t_n t \in |C|. \text{ Επειδή } +C \text{ το Ε.Υ. αυτό ισχύει } (t \in \mathbb{P}). \\ -A \Rightarrow +B \text{ και } -C. \text{ Έστω } t \in |A| \text{ (θέλουμε } t \in \mathbb{P}). \text{ Έχουμε } x \in |B| \text{ (από Ε.Υ.)} \\ \text{άρα } (t)x \in C. \text{ Από Ε.Υ. } |C| \subseteq \mathbb{P} \text{ άρα } (t)x \in \mathbb{P} \text{ άρα (από P2) } t \in \mathbb{P}. \end{cases}$

<u>Πρόταση</u> Έστω $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash t : A$. Αν $\vdash A$ και $\forall i \, (1 \leq i \leq k) \vdash A_k$

τότε ~~[illegible]~~, για κάθε I με $|X|_I = \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}$ όπως πιο πάνω) έχουμε

ότι $t \in \mathbb{P}$ (δηλ. t ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathbb{P}$).

<u>Απόδειξη</u> Όπως πιο πάνω, στο θεώρημα ορθότητας.

<u>Πρόταση.</u> ① Έστω $\mathbb{P} = \{ t \mid t \text{ έχει κανονική μορφή} \}$

② Έστω $\mathbb{P} = \{ t \mid \text{Η αριστερή αναγωγή τερματίζει} \}$.

Τότε $\mathbb{P}$ (και στις δύο περιπτώσεις) ικανοποιεί τις ιδιότητες

<u>Απόδειξη του 2:</u>

<u>P1:</u> Έστω ότι οι αριστερές αναγωγές των $t_1, \ldots, t_n$ τερματίζουν. Τότε η αριστερή αναγωγή θα αρχίσει από τον ~~A~~ αριστερή αναγωγή του t_1 η οποία θα τερματίσει κ.ο.κ.

<u>P2:</u> Έστω ότι $u\left[\frac{t}{x}\right] t_1 \cdots t_n$ η αριστερή αναγωγή τερματίζει. Αλλά τότε

$$(\lambda x u) t \, t_1 \cdots t_n \xrightarrow[\ell]{} u\left[\frac{t}{x}\right] t_1 \cdots t_n \xrightarrow{\text{τερματίζει}} \cdots \qquad (\rightarrow_\ell \text{ βήμα αριστερής αναγωγής})$$

P3: Έστω η αριστερή αναγωγή του $(t)x$ άπειρη. Και έστω

$$t \to_\ell t_1 \to_\ell t_2 \to \cdots$$ άπειρη αριστερή αναγωγή που ξεκινά από τον t.

Δυο περιπτώσεις: 1η. Κανένας t_k δεν έχει την μορφή $(\lambda y u)$. Τότε

η $(t)x \to_\ell (t_1)x \to_\ell \cdots$ είναι άπειρη αριστερή αναγωγή από το $(t)x$ (άτοπο).

2η. Έστω τώρα k είναι ο πρώτος δείκτης για τον οποίο

$t_k = (\lambda x u)$. Τότε

$$t \to_\ell t_1 \to_\ell \cdots \to_\ell \underset{\underset{t_k}{\equiv}}{(\lambda y u)} \to_\ell \lambda y. u' \to$$

(όπου $u \to_\ell u' \to_\ell \cdots$ είναι άπειρη αριστερή αναγωγή

Αλλά τότε $$(t)x \to_\ell (t_1)x \to \cdots \to_\ell (\lambda y u)x \to \underbrace{u[x/y] \to_\ell u'[x/y] \to_\ell \cdots}_{\text{άπειρη αναγωγή του } u \to_\ell u' \cdots}$$

Είναι άπειρη αναγωγή του $(t)x$ (άτοπο).

<u>Μερική αριστερή αναγωγή</u> Μια αναγωγή $t \to_\beta t_1 \to_\beta t_2 \to_\beta \cdots \to_\beta t_k \to_\beta \cdots$ λέγεται έτσι όταν $\forall k \exists n, n \geq k$ και $t_n \to_\beta t_{n+1}$ είναι αναγωγή ενός αριστερού redex.

<u>Πρόταση</u> Έστω $\mathbb{P} = \{ t \mid$ κάθε μερική αριστερή αναγωγή από το t τερματίζει $\}$. Τότε το $\mathbb{P}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες.

<u>Απόδειξη</u> <u>P1:</u> Έστω υπάρχει άπειρη μερική αριστ. αναγ. (Α.Μ.Α.Α) από το $(x)t_1 \cdots t_n$. Θα αποδείξουμε με επαγωγή στο n ότι τότε θα υπάρχει $k \leq n$ ώστε στο t_k θα υπάρχει Α.Μ.Α.Α.

Για $n=1$ προφανές. Έστω ότι ισχύει για n. Αν έστω $(x)t_1 \cdots t_n t_{n+1}$ έχει Α.Μ.Α.Α. Τότε αυτή θα χρησιμοποιήσει άπειρα αριστερά redex του t_{n+1} είτε θα δημιουργήσει ένα Α.Μ.Α.Α. για το $(x)t_1 \cdots t_n$.

<u>P2:</u> Έστω $u[t/x]t_1 \cdots t_n \in \mathbb{P}$. Τότε κάθε Α.Μ.Α.Α. από το $(\lambda x u)t t_1 \cdots t_n$ θα καταλήξει στο $u'[t'/x]t_1' \cdots t_n'$ διότι όλα τα προϊόντα της αναγωγής θα έχουν τη μορφή $(\lambda x u')t' t_1' \cdots t_n'$ αλλά κάποια στιγμή θα πρέπει να αναχθεί ένα αριστερό redex. Αλλά τότε θα είχαμε Α.Μ.Α.Α. για το $u'[t'/x]t_1' \cdots t_n'$ πράγμα που θα δημιουργούσε Α.Μ.Α.Α. για το $u[t/x]t_1 \cdots t_n$ $(\to_\beta u'[t'/x]t_1' \cdots t_n')$.

P3. Έστω $(t)x \in \Lambda$. Τότε δεν υπάρχει Α.Μ.Α.Α. από τον t δηλ.

είχαμε $t \to t_1 \to t_2 \cdots t_n \to \cdots$ (Α.Μ.Α.Α.).

Αν κανένα t_n δεν είχε τη μορφή $\lambda y u$. όπως και πριν. Άλλως.

$$t \to t_1 \to \cdots \to \lambda y u \to \lambda y u' \to \cdots \quad \text{Άρα Α.Μ.Α.Α. από το } u.$$

$$\underset{(n \text{ το ελάχιστο})}{\underset{t_n}{\shortparallel}}$$

Αλλά τότε $(t)x \to (t_1)x \to \cdots (\lambda y u)x \xrightarrow[\beta]{} \underbrace{u[x/y] \to \cdots}$

χαρακτηρίζουμε μια Α.Μ.Α.Α. για το u. (άτοπο)