# Σύστημα D και ισχυρή κανονικοποίηση.

Οι ιδιότητες $\{t \mid$ η αναγωγή καθενός του $t$ τερματίζει$\}$, $\{t \mid t$ έχει κανονική μορφή$\}$ κ.α. είναι κορεσμένα σύνολα. Το σύνολο $SN = \{t \mid t$ είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμο$\}$ δεν είναι κορεσμένο. Διότι μπορεί να έχουμε $u[t/x] \in SN$ αλλά $(\lambda x u)t \notin SN$ εάν το $x$ δεν εμφανίζεται ελεύθερο στο $u$ και $t \notin SN$. [αν $u \in SN$].

Το σύνολο SN όμως έχει την εξής ιδιότητα.

$$\boxed{SN \text{ είναι } SN\text{-κορεσμένο.}}$$

Απόδειξη: Έστω $t \in SN$ και $(u[t/x])t_1 \cdots t_n \in SN$. Θέλουμε $(\lambda x u)t\, t_1 \cdots t_n \in SN$.

Έστω ότι υπάρχει άπειρη αναγωγή από το $(\lambda x u)t t_1 \cdots t_n$. Δεν είναι δυνατόν όλη η αναγωγή να αποτελείται από όρους μόνο της μορφής $(\lambda x u')t' t_1' \cdots t_n'$ όπου

$u \twoheadrightarrow_\beta u'$, $t \twoheadrightarrow_\beta t'$, $t_i \twoheadrightarrow t_i'$ διότι τότε σε ένα από τα $u, t, t_1, \ldots, t_n$ θα δημιουργούνταν μια άπειρη αναγωγή (όλα είναι SN — βγαίνει από την υπόθεση). Άρα τότε σε κάποιο βήμα της άπειρης αναγωγής θα έχουμε ένα όρο της μορφής

$u'[t'/x]\, t_1' \cdots t_n'$. Αλλά τότε $u[t/x]\, t_1 \cdots t_n \twoheadrightarrow_\beta u'[t'/x]\, t_1' \cdots t_n'$ και

το $u[t/x]\, t_1 \cdots t_n$ θα είχε μια άπειρη αναγωγή. #.

Για να αποτιμήσουμε το σχηματοποιημένο λήμμα της επάρκειας αναζητούμε $\mathbb{P}$-ερμηνεία ώστε για κάθε τύπο B του συνόλου D να έχουμε ότι $|B|_I \subseteq \mathbb{P}$. Επίσης θέλουμε $x \in |A_i|$ και $|A| \subseteq \mathbb{P}$. Οι ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιούνται από το $\mathbb{P}$ είναι:

<u>P1</u> $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{P} \Longrightarrow (x)\, t_1 \dots t_n \in \mathbb{P}$

<u>P2</u> $\mathbb{P}$ είναι $\mathbb{P}$-κορεσμένο

<u>P3</u> $(t)x \in \mathbb{P} \Longrightarrow t \in \mathbb{P}$

<u>Πρόταση</u> Για $\mathbb{P}$ με τις ως άνω ιδιότητες και ερμηνεία με $|X| = \mathbb{P}$ ισχύει:

1) Για κάθε $A$, $(x)\, t_1 \dots t_n \in |A|$ για κάθε $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{P}$

2) Για κάθε $A$, $|A| \subseteq \mathbb{P}$ και $|A|$ είναι $\mathbb{P}$-κορεσμένο.

<u>Απόδειξη</u> Επαγωγή στο $A$.

• $A \equiv X$ το 1) από P1 και 2) από P2.

• $A \equiv B \wedge C$ Το 1) έστω $(x)\, t_1 \dots t_n$ ~~.....~~ τότε (Ε.Υ.) $\left.\begin{array}{l}(x)\, t_1 \dots t_n \in |B| \\ (x)\, t_1 \dots t_n \in |C|\end{array}\right\} \Rightarrow \dots \in |B| \cap |C|$.

Το 2) επειδή $|B|, |C| \subseteq \mathbb{P}$ (Ε.Υ.)

• $A \equiv B \to C$. 1) Θέλω $(x)\, t_1 \dots t_n \in |B| \to |C|$ (για $t_1 \dots t_n \in \mathbb{P}$). Αν $w \in |B|$ τότε $|B| \subseteq \mathbb{P}$ (Ε.Υ.) άρα $(x)\, t_1 \dots t_n w \in |C|$ (Ε.Υ.).

2) Θέλω $|B| \to |C| \subseteq \mathbb{P}$. Έστω $t \in |B| \to |C|$. Είναι $x \in |B|$. Τότε $(t)x \in |C| \subseteq \mathbb{P}$ (Ε.Υ.) άρα (P3) $\Rightarrow t \in \mathbb{P}$ (επειδή $(t)x \in \mathbb{P}$).

<u>Σχετικοποιημένο Λήμμα Επάρκειας</u> Έστω $x_1:A_1,\dots,x_k:A_k \vdash_D t:A$. Έστω I P-ερμηνεία (ώστε $|A|$ P-κορεσμένο) και $\forall$ τύπο $B$, $|B| \subseteq P$. Τότε

$$t_i \in |A_i| \Longrightarrow t\left[t_1/x_1,\dots,t_k/x_k\right] \in |A|.$$

<u>Απόδειξη.</u> Όπως και στο Λήμμα Επάρκειας με μόνη διαφορά (κανόνας $\lambda$).

$$\frac{x_1:A_1,\dots,x_k:A_k,x:B \vdash_D u:C}{x_1:A_1,\dots,x_k:A_k \vdash_D \lambda x u:B\to C}$$

Θέλουμε $(\lambda x.u)\left[t_1/x_1,\dots t_k/x_k\right] \in |B|\to|C|$. Αρκεί για $w\in|B|$ (άρα $w \in P$ επειδή $|B|\subseteq P$).

$(\lambda x.u[t_1/x_1..t_k/x_k])w \in |C|$.

Από Ε.Υ. $u\left[t_1/x_1,\dots t_k/x_k, w/x\right] \in |C|$. Το αποτέλεσμα έπεται από το γεγονός ότι $|C|$ είναι P-κορεσμένο.

---

Άρα για ιδιότητα $\mathbb{P}$ που ικανοποιούν τα P1–P3 (σελ. 21) έχουμε ότι αν $t$ τυποποιήσιμο στο σύστημα $D$ τότε $t$ έχει την ιδιότητα $\mathbb{P}$.

<u>Πόρισμα</u> Αν $\mathbb{P}=SN$ τότε $\mathbb{P}$ ικανοποιεί τα P1–P3.

<u>Απόδειξη</u> Μένει να αποδείξουμε ότι $(t)x \in SN \Longrightarrow t\in SN$.

Αλλά έστω $t$ έχει άπειρη αναγωγή. Τότε άμεσα έχουμε ότι $(t)x$ έχει άπειρη αναγωγή.

# Τυποποίηση κανονικών όρων (στο $D\Omega$ και $D$)

## Πώς ενοποιούνται δύο περιβάλλοντα

**Λήμμα** Έστω $x_1:A_1, x_2:A_2, \dots, x_k:A_k \vdash t:A$. Τότε $x_1:A_1\wedge A_1', x_2:A_2, \dots, x_k:A_k \vdash t:A$ ($\vdash$ ενώ $\vdash_{D\Omega}$ ή $\vdash_D$)

**Απόδειξη** Με επαγωγή στην υποτύπωση του $x_1:A_1,\dots,x_k:A_k \vdash t:A$.

• Μετ. Έστω $x_1:A_1,\dots,x_k:A_k \vdash x_1:A_1$ ($t\equiv x_1$). Τότε

$$\frac{x_1:A_1\wedge A_1',\dots \vdash x_1:A_1\wedge A_1'}{x_1:A_1\wedge A_1',\dots \vdash x_1:A_1}\wedge_1$$

Έστω $x_1:A_1,\dots x_i:A_i,\dots x_k:A_k \vdash x_i:A_i$. Αλλά τότε

$$x_1:A_1\wedge A_1',\dots,x_i:A_i,\dots,x_k:A_k \vdash x_i:A_i$$

• Όλες οι άλλες περιπτώσεις προφανείς)

**Πρόταση:** Έστω $\Gamma'\vdash t:A$ και $\Gamma''\vdash u:B$. Τότε υπάρχει $\Gamma^*$ ώστε $\Gamma^*\vdash t:A$ και $\Gamma^*\vdash u:B$
[ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΕΝΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ ΤΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ].

**Απόδειξη** Έστω $\Gamma'=\{y_1:A_1',\dots,y_n:A_n'\}$ και $\Gamma''=\{z_1:B_1',\dots,z_m:B_m'\}$. Επεκτείνοντας αντίστοιχα τα $\Gamma'$ και $\Gamma''$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι (οι επεκτάσεις τους)

$$\Gamma'=\{x_1:A_1,\dots,x_k:A_k\} \text{ και } \Gamma'=\{x_1:B_1,\dots,x_k:B_k\}$$

Παίρνουμε $\Gamma^*=\{x_1:A_1\wedge B_1, x_2:A_2\wedge B_2,\dots,x_k:A_k\wedge B_k\}$ και εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα έχουμε $\Gamma^*\vdash t:A$ και $\Gamma^*\vdash u:B$

**Πρόταση** Έστω $t$ κανονική μορφή κλειστή. Τότε $t$ τυποποιείται στο $D\Omega$ με τύπο της μορφής $U_1,\dots,U_n \to X$ ($X$ μεταβλητή τύπου, $n \geq 0$).

**Απόδειξη** Έχουμε $t \equiv \lambda x_1 \cdots \lambda x_n\,(y)u_1 \cdots u_k$. Έχουμε:

$$\dfrac{\dfrac{y:\overbrace{\Omega,\Omega,\dots,\Omega}^{k \text{ φορές}} \to X \vdash_{ax} y:\Omega,\dots,\Omega \to X \qquad y:\Omega,\dots,\Omega\to X \vdash u_1:\Omega}{y:\Omega,\dots,\Omega \to X \vdash (y)u_1 : \underbrace{\Omega,\dots,\Omega}_{k-1 \text{ φορές}} \to X}\,@ \qquad y:\Omega,\dots,\Omega\to X \vdash u_2:\Omega}{\vdots}$$

$$\dfrac{\vdots}{y:\Omega,\Omega,\dots,\Omega \to X \vdash (y)u_1 \cdots u_k : X}$$

Άρα ① περίπτ. Αν $y \neq x_1,\dots,x_n$

$$\dfrac{x_1:U_1,\dots,x_n:U_n,\ y:\Omega,\dots,\Omega\to X \vdash (y)u_1\cdots u_k : X}{y:\Omega,\dots,\Omega\to X \vdash \lambda x_1 \cdots \lambda x_n.(y)u_1\cdots u_k : U_1,\dots,U_n \to X}\ (\text{κανόνας } \lambda) \qquad (U_1,\dots,U_n \text{ αυθαίρετα}).$$

περίπτ. ② $y \equiv x_i$. Παίρνουμε $U_i = \Omega,\Omega,\dots,\Omega \to X$, οπότε έχουμε την

τυποποίηση σε κενό περιβάλλον.

Πρόταση: Έστω $t$ κανονικός. Τότε υπάρχει $\Gamma$ και $A$ ώστε $\Gamma \vdash_D t:A$. Επιπλέον εάν $t$ δεν αρχίζει από $\lambda$, τότε για κάθε τύπο $A$ υπάρχει $\Gamma$ ώστε $\Gamma \vdash_D t:A$

Απόδειξη: Οι κανονικές μορφές δίνονται από τον ακόλουθο επαγωγικό ορισμό:

- Κάθε μεταβλητή $x$ είναι κανονικός όρος
- Αν $t$ κανονικός και $x$ μεταβλ. τότε $\lambda x.t$ κανονικός
- Αν $t, u$ κανονικοί και $u$ δεν αρχίζει από $\lambda$ τότε $(u)t$ κανονικός

Θα αποδείξω την πρόταση ακολουθώντας τον επαγωγικό ορισμό

- Αν $t$ μεταβλητή τότε η πρόταση ισχύει προφανώς.
- Έστω $t$ κανονικός. Τότε $\Gamma, x:A \vdash t:B$ (Διότι ισχύει από Ε.Υ. ότι $\Gamma \vdash t:B$, άρα ή $x \in dom(\Gamma)$ ή τον προσθέτω) Άρα τότε $\Gamma \vdash \lambda x.t : A \to B$.
- Έστω $t, u$ κανονικοί και $u$ δεν αρχίζει από $\lambda$. Έστω $A$ τυχαίος τύπος. Τότε (Ε.Υ.) $\Gamma' \vdash t:B$ και (Ε.Υ.) $\Gamma'' \vdash u: B \to A$. Άρα (ενοποίηση)

$\Gamma \vdash t:B$, $\Gamma \vdash u:B \to A$ άρα $\Gamma \vdash (u)t:A$ (και $A$ οποιοσδήποτε)

$\vdash \; = \; \vdash_{\lambda\Omega}$ ή $\vdash_{D}$.

**Πρόταση** Έστω $\Gamma, x_1:A_1,\dots,x_k:A_k \vdash u:B$ και $\Gamma \vdash t_i:A_i$ $(1\leq i\leq k)$, για όλα τα $i$ για τα οποία $x_i$ εμφανίζεται ελεύθερη στο $u$. Τότε

$$\Gamma \vdash u[t_1/x_1,\dots,t_k/x_k]:B.$$

**Πόρισμα** Αν $\Gamma, x_1:A_1,\dots,x_k:A_k \vdash u:B$ & $\forall i,\ x_i \notin FV(u)$ τότε $\Gamma \vdash u:B$.

**Απόδειξη:** Με επαγωγή στο $\Gamma, x_1:A_1,\dots,x_k:A_k \vdash u:B$.

• Ενδεικτ. Περιπτώσεις:

1. $\Gamma, x_1:A_1,\dots,x_i:A_i,\dots,x_k:A_k \vdash x_i:B$ $(A_i \equiv B)$ και $\Gamma \vdash t_i:A_i\ (=B)$

   Άρα $u[\dots] \equiv t_i$ άρα $\Gamma \vdash u[\dots]:B$.

2. $u = x$ και $x \in dom(\Gamma)$, $x \neq x_1,\dots,x_k$ άρα $u[\dots] = x[\dots] = x$

   Άρα $\Gamma \vdash x:B$

• λ.
$$\frac{\Gamma, x_1:A_1,\dots,x_k:A_k, x:C \vdash w:D}{\Gamma, x_1:A_1,\dots,x_k:A_k \vdash \lambda x.w : C\to D} \quad (B \equiv C\to D)$$

Θέλω: $\Gamma \vdash u[\dots]:C\to D$ δηλ. $\Gamma \vdash \lambda x.w[\dots]:C\to D$

Αρκεί $\Gamma, x:C \vdash w[\dots]:D$ [Ισχύει από Ε.Υ.].

• @
$$\frac{\Gamma, x_1:A_1,\dots,x_k:A_k \vdash u:C\to B \qquad \Gamma, x_1:A_1,\dots,x_k:A_k \vdash v:C}{\Gamma, x_1:A_1,\dots,x_k:A_k \vdash (u)v:B}\ @ \quad (\text{από Ε.Υ.})$$

Ορισμός: Ένας τύπος λέγεται πρώτος αν είναι $\neq \Omega$ και δεν είναι σύζευξη.
δηλ. δεν είναι μεταβλητή ή βέλος.

Κάθε τύπος ~~σε~~ γράφεται μοναδικά ως σύζευξη πρώτων τύπων (οι πρώτοι παράγοντες) (και $\Omega$).

Παρατήρηση: Αν $A$ είναι πρώτος παράγοντας του $B \wedge C$ τότε είναι πρωτ. παράγων του $B$ ή του $C$.
[Γράφουμε $A' \ldots A$ είναι πρώτος παράγων του $A'$]

Λήμμα (Αντιστροφής): Έστω $\Gamma \vdash t : A$ και $A$ πρώτος. Τότε

(i) Αν $t$ μεταβλητή τότε δηλώνεται στο $\Gamma$ με τύπο $A'$.

(ii) Αν $t \equiv \lambda x. u$ τότε $\Gamma, x : B \vdash u : C$ και $A = B \to C$.

(iii) Αν $t \equiv (u)v$ τότε $\exists B$ ώστε $\Gamma \vdash u : B \to A'$ και $\Gamma \vdash B$

Απόδειξη. Στην παραγωγή του $\Gamma \vdash t : A$ παίρνουμε το ακολουθο
$\Gamma \vdash t : A'$ ώστε $A$ είναι πρώτος παράγων του $A'$. [Δηλαδή πάνω από
αυτό κανόνας $\Gamma \vdash t : A'$ δεν υπάρχει άλλος κανόνας της μορφής $\Gamma \vdash t : A'$].

Τότε

$$\frac{\qquad}{\Gamma \vdash t : A'}\,(j)$$

Ο κανόνας δεν μπορεί να είναι $\wedge$ ή $\wedge_i$ $(i=1,2)$.

Διότι: π.χ.
$$\frac{\Gamma \vdash t : A'' \wedge A'}{\Gamma \vdash t : A'}\,\wedge_2 \quad \text{ή} \quad \frac{\Gamma \vdash t : A_1' \qquad \Gamma \vdash t : A_2'}{\Gamma \vdash t : (A_1' \wedge A_2')\ [\equiv A']}\,\wedge$$
{Παραβίαση

η επιλογή του κανόνα}.

Πρόταση [Αναγωγή υποκειμένου]

$\Gamma \vdash t : A$ και $t \twoheadrightarrow_\beta t'$ τότε $\Gamma \vdash t' : A$.

Απόδειξη: Αρκεί $t \to_\beta t' \Rightarrow \Gamma \vdash t' : A$.

Με επαγωγή στην παραγωγή του $\Gamma \vdash t : A$

- Δεν μπορεί η αξ μετ.

- $(\wedge)$ $\dfrac{\Gamma \vdash t : A_1 \quad \Gamma \vdash t : A_2}{\Gamma \vdash t : A_1 \wedge A_2 \ (\equiv A)}$ Από Ε.Υ. [Το ίδιο για τα $\wedge_i$]

- $(\lambda)$ $\dfrac{\Gamma, x : B \vdash u : C}{\Gamma \vdash \lambda x u : B \to C}\lambda$ Είναι $\lambda x u \to_\beta t' \Rightarrow t' \equiv \lambda x u'$ (Ε.Υ.)

- $(@)$ $\dfrac{\Gamma \vdash u : B \to A \quad \Gamma \vdash v : B}{\Gamma \vdash (u)v : A}@$

Περιπτώσεις

$(u)v \to_\beta (u')v$ (Ε.Υ.)

$(u)v \to (u)v'$ (Ε.Υ.)

$u \equiv \lambda x.w$, οπότε $(u)v \to_\beta w[v/x]$. Έχουμε $\Gamma \vdash \lambda x.w : B \to A$

Άρα $\Gamma, x : B \vdash w : A$ και $\Gamma \vdash v : B$ (Από προηγ. Πρόταση)

$\Gamma \vdash w[v/x] : A$ ο.ε.δ.

<u>Πρόταση</u> Έστω $x_1,\dots,x_k \notin dom(\Gamma)$, και $\Gamma \vdash u[t_1/x_1,\dots,t_k/x_k] : B$ και $t_1,\dots,t_k$ ικανοποιούν στο περιβάλλον $\Gamma$. Τότε $\exists$ τύποι $A_1,\dots,A_k$ ώστε $\Gamma, x_1:A_1,\dots x_k:A_k \vdash u:B$ και $\Gamma \vdash t_i : A_i$ $(1 \leq i \leq k)$.

<u>Παρατήρηση</u>. Στο $D\Omega$ πάντα οι $t_1,\dots,t_k$ ικανοποιούνται στο περιβάλλον $\Gamma$.

<u>Απόδειξη</u> Απόδειξη με επαγωγή στο μήκος του $u$ και για $u$ δοσμένο στο μήκος του $B$

## Γενική περίπτωση

- $B = \Omega$ ✓
- $B = B' \wedge B''$ $\Rightarrow$ $\Gamma \vdash u[\dots] : B'$ και $B''$ [~~...~~ Ε.Υ.]

$\Rightarrow$ $\Gamma, x_1:A_1', \dots \vdash u:B'$ και $\Gamma \vdash t_i : A_i'$

$\Gamma, x_1:A_1'' \dots \vdash u:B''$ , $\Gamma \vdash t_i : A_i''$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma, x_1 : A_1' \wedge A_1'', \dots \vdash u : B', B''}{\Gamma, x_1 : A_1' \wedge A_1'', \dots \vdash u : B' \wedge B''}$$ και $\Gamma \vdash t_i : A_i' \wedge A_i''$

Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι σχήμα $B$ πρώτος τύπος

$u$ ιδιότητα

1. $\boxed{u = x_i}$ Έχουμε $\Gamma \vdash t_i : B_i$

θέλω $\Gamma, x_i : B_i \vdash x_i : B_i$

$u = x_0 \notin \{x_1 \ldots x_k\}$ Τότε $\Gamma \vdash x : B$

θέλουμε $\Gamma, x_1 : A_1 \ldots x_k : A_k \vdash x : B$

2. $u = \lambda y V$. Έχω: $\Gamma \vdash \lambda y V[\ldots] : B$

~~θέλω~~ Γιατί: $D$ τέτοιο $B = C \to D$

$$\frac{\Gamma, y : C \vdash V[\ldots] : D}{\Gamma \vdash \lambda y V[\ldots] : C \to D}$$

Ε.Υ. $\Gamma, y : C, x_1 : A_1 \ldots x_k : A_k \vdash V : D \Rightarrow \Gamma, x_1 \ldots \vdash \lambda y V : C \to D$.

3. $u = (w)V$. Όμοια ~~όπως~~ εφαρμόζοντας τα περί ορισμού

<u>Πόρισμα</u> Εάν $\Gamma \vdash u[t/x] : B$ και $t$ τυποποιήσιμο στο περιβάλλον $\Gamma$

τότε $\Gamma \vdash (\lambda x u) t : B$.

<u>Απόδειξη</u> Από προηγούμενη πρόταση $\Gamma, x : A \vdash u : B$ και $\Gamma \vdash t : A$

Άρα $\Gamma \vdash \lambda x u : A \to B$ άρα $\Gamma \vdash (\lambda x u) t : B$.

---

<u>Θεώρημα</u> (Subject expansion με το DΩ).

Έστω $\Gamma \vdash_{D\Omega} t' : A$ και $t \to_\beta t'$. Τότε $\Gamma \vdash_{D\Omega} t : A$

<u>Απόδειξη</u> Αρκεί για $t'$ με $t \to_\beta t'$. Η απόδειξη με επαγωγή στο $t$

και για δεδομένο $t$ με επαγωγή στο $A$

• Για $A = \Omega$ ή $A$ σύνθετο τότε προφανές (από ∧.γ.)

Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A$ είναι πρώτος τύπος

$t = x \mid \lambda x u \mid (v) u$

Περίπτωση $(v)u$. [Ενδιαφέρουσα περίπτωση $v = \lambda x w$]

Τότε $\Gamma \vdash w[v/x] : A$ Αλλά $v$ τυποποιήσιμο στο DΩ

τότε $\Gamma \vdash (\lambda x w) v : A$

**Λήμμα** Εάν $\lambda x\, t\ ((t)u)$ κανονικοποιείται στο ΔΛ με τύπο μη περιορισμένο τότε το ίδιο ισχύει και για το $t$.

**Απόδειξη** Με επαγωγή στη κανονικοποίηση του $\lambda x\, t$ (ή του $(t)u$)

- $$\frac{\Gamma, x:A \vdash t:B}{\Gamma \vdash \lambda x\, t : A \to B}$$

- $$\frac{\Gamma \vdash t : B \to A \quad \Gamma \vdash u : B}{\Gamma \vdash (t)u : A}$$

- $$\frac{\Gamma \vdash t : A \wedge B}{\Gamma \vdash t : A}$$

- $$\frac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \vdash t : B}{\Gamma \vdash t : A \wedge B}$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ**: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1. $t$ είναι επιλύσιμος
2. $t$ είναι β-ισοδύναμος με κανονική μορφή κεφαλής
3. Η αναγωγή κεφαλής του $t$ τερματίζει
4. $t$ κανονικοποιείται στο ΔΛ με τύπο μη περιορισμένο

(1)⇒(4) Έστω $u$ η επίλυση του $t$. $u \equiv \lambda x_1 \dots \lambda x_k\, t$. Τότε $(u)V_1 \dots V_n =_\beta x$. Άρα $(u)V_1 \dots V_n$ κανονικοποιείται στο ΔΛ με μη περιορισμένο τύπο άρα και το $u$ και άρα και το $t$.

(4)⇒(3)⇒(2)

(2)⇒(1) Έστω $t \simeq_\beta \lambda x_1 \dots \lambda x_k (x)\, t_1 \dots t_n$. Άρα η κλειστότητα του $t$, $t'$, είναι ισοδύναμη με κανονική μορφή κεφαλής. ~~Άρα t κανονικοποιείται στο~~ $t' \simeq_\beta \lambda x_1 \dots \lambda x_k (x_i)\, t_1 \dots t_n$

Παίρνω $V_i$ αυθαίρετο έτσι $V_i \equiv \lambda y_1 \dots \lambda y_n . x$. Τότε $t' V_1 \dots V_k =_\beta x$.

Σελίδα 63 — Theorem 4



$$\begin{tikzcd} (ii) \arrow[r, Rightarrow] & (i) \arrow[dl, squiggly] \\ (iii) \arrow[r, Rightarrow] & (iv) \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

(i) $\Rightarrow$ (iii)

έστω $t$ κανονικοποιήσιμος $\Rightarrow$ $t \to_\beta t'$ κανονικός

άρα $t'$ τυποποιείται στο $D$ άρα στο $D\Omega$ χωρίς $\Omega$

δηλ. $\Gamma \vdash_{D\Omega} t' : A$ και $\Omega \notin (\Gamma)$ & $\Omega \notin A$

άρα $\Gamma \vdash_{D\Omega} t : A$ (subject expansion για το $D\Omega$).

Πρόταση   $t$ κανονικοποιήσιμο $\iff$ δεν έχει ΑΜΑΑ

$\Leftarrow$: ✓

$\Rightarrow$ έστω $t$ κανονικοποιήσιμο

$\Rightarrow$ νορμαλισμένος χώρος $\Omega$

$\Rightarrow$ άρα δεν έχει ΑΜΑΑ

---

Τι σημαίνει κανονικοποίηση

Πρόταση   Αν $\Gamma \vdash u[t/x]\, t_1 \ldots t_n : B$ (κλπ) νορμαλισμένη σε περιβάλλον $\Gamma$, τότε αν $t$ νορμαλισμένο σε $\Gamma$ τότε

$$\Gamma \vdash (\lambda x u)\, t\, t_1 \ldots t_n : B.$$

Απόδειξη με επαγωγή στο $u$, στο (είδος έχει απόδειξη)

και με επαγωγή στο μήκος του τύπου

αν ο τύπος από intersection τότε ... Θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι από αρχή αλλά

**Πρόταση** Αν $\Theta^{\tau}$ ισχυρά κανονικοποιήσιμη $\Rightarrow$ $t$ κανονικοποιείται ως D.

**Απόδειξη** με (διπλή επαγωγή) ως $N(\tau)$ = η ιδιότητα ότι το μήκος όλων των δυνατών κανονικοποιήσεων που ξεκινούν από το $\tau$

$$\tau = \lambda x_1 \ldots \lambda x_m \, V t_1 \ldots t_n \quad \text{όπου } V \text{ είναι}$$

- $V$ μεταβλητή
- $V$ redex $V \equiv (\lambda x u) t$, οπότε $\tau = \lambda x_1 \ldots \lambda x_n (\lambda x u) t\, t_1 \ldots t_n$

και $\tau' = \lambda x_1 \ldots \lambda x_n \, u[t/x]\, t_1 \ldots t_n$.

## η-αναγωγή

Σελ. 15 –

η-redex $\boxed{\lambda x. tx \ \eta \ t \quad x \notin FV(t)}$

βη-redex

βη-normal

Church Rosser

βη-ισοδύναμα $=_{\beta\eta}$

Ισχύει

$$t =_{\beta\eta} t' \iff \begin{tikzcd} t \arrow[dr, "\beta\eta"'] & & t' \arrow[dl, "\beta\eta"] \\ & u & \end{tikzcd}$$

« Έκτασης λήμμα»

αν (για κάθε $u$, $tu =_{\beta\eta} t'u$) τότε $t =_{\beta\eta} t'$

θέτω $u = x$ νέα μεταβλητή

άρα $tx =_{\beta\eta} t'x \Rightarrow \lambda x.tx =_{\beta\eta} \lambda x.t'x \Rightarrow t =_{\beta\eta} t'$

**Πρόταση** (*) $\vdash \,=\, \vdash_0$ ή $\vdash_{D\Omega}$

$$\Gamma \vdash t : A \Rightarrow \Gamma[U_1/x_1, \ldots, U_k/x_k] \vdash t : A[U_1/x_1, \ldots, U_k/x_k]$$

---

**Πρόταση** Έστω $t \to_\eta t'$ και $\Gamma \vdash t' : A$ τότε αν όλοι οι τύποι $U_1, \ldots, U_k$ έχουν τη μορφή $V \to W$ τότε

$$\Gamma[U_1/x_1, \ldots, U_k/x_k] \vdash t : A[U_1/x_1, \ldots, U_k/x_k].$$

---

Απόδειξη με επαγωγή στο $t$ και στο μήκος του $A$

---

**Θεώρημα** $t$ είναι βη κανονικοποιήσιμο $\Longleftrightarrow$ $t$ β κανονικοποιήσιμο

$\Rightarrow$) Έστω $t$ βη κανονικοποιήσιμο. Κάνουμε επαγωγή στο μήκος της βη κανονικοποίησης

$$t \to t' \to \cdots \to \underset{\uparrow \text{ βη κανονικό}}{\bigcirc}$$

αν $t \to_\beta t'$ ✓ (ε.υ.)

αν $t \to_\eta t'$ τότε $t'$ κανονικοποιήσιμο άρα $\Gamma \vdash_{D\Omega} t' : A$

όπου $\Omega \notin A$. Από πρόταση (*) υπάρχει $A'$, $\Gamma'$ ώστε

$\Gamma'_0 \vdash_{D\Omega} t : A'$ και $\Omega \notin \Gamma', A'$. Άρα $t$ κανονικοποιήσιμο

$\Leftarrow$ Αν $t$ $\beta$ κανονικοποιείται τότε $t \twoheadrightarrow_\beta t'$ κανονική

άρα $t' \twoheadrightarrow_\eta \Omega$ (τελικά δεν μπορεί ο ...).

βη-κανονική

---

Θεώρημα $t =_{\beta\eta}$ (κανονικής μορφής κεφαλής) $\Leftrightarrow$ $t =_\beta$ (κανονική μορφή κεφ.)

$\Leftarrow$ ~~...~~ προφανές

$\Rightarrow$ έστω $t =_{\beta\eta} \overbrace{\lambda x_1 \ldots \lambda x_k\, y\, u_1 \ldots u_m}^{u}$.

· έστω $u = y\, u_1 \ldots u_m$ τότε

$$t \to_{\beta\eta} V \leftarrow_{\beta\eta} y\, u_1 \ldots u_m$$

κανονική κεφαλής

άρα $\underbrace{t \to t_1 \to \cdots \to V}_{\beta\eta \text{ αναγωγές αριθμός } n}$

Δείχνουμε ότι $t$ επιλύσιμος ~~επαγωγή στο n~~ ($t_1$ επιλύσιμο ε.υ.)

case 1 $t \to_\beta t_1 \Rightarrow t$ επιλύσιμη

case 2 $t \to_\eta t_1$. επειδή $t_1$ επιλύσιμο $\Rightarrow \Gamma \vdash_{D\Omega} t_1 : A$ μη τετριμμένος

άρα $\Gamma' \vdash_{D\Omega} t : A'$ ($A'$ μη τετριμ.), άρα (*) άρα $t$ επιλύσιμη

(4)

αν ισχύει $t =_{\beta\eta} \lambda x_1 \ldots \lambda x_k \, y \, u_1 \ldots u_m$

τότε $t \, x_1 \ldots x_k =_{\beta\eta} y \, u_1 \ldots u_n$ άρα

$t \, x_1 \ldots x_k$ επιλύσιμο άρα $t$ επιλύσιμο