

ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ ΠΟΥΛΟΠΟΥΛΟΥ

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ SUDOKU

ΔΟΜΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ

- ▶ Ιστορική αναδρομή του Sudoku
- ▶ Μαθηματικό περιεχόμενο
- ▶ Συμμετρίες της λύσης
- ▶ Ενδιαφέροντα δεδομένα

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

- ▶ Αρχικό όνομα Number Place
- ▶ Πίνακας 9x9, υποπεριοχές 3x3, ψηφία από το 1 έως το 9
- ▶ Λατινικό τετράγωνο με έναν επιπλέον περιορισμό
- ▶ 1986, Ιαπωνική εταιρία παζλ Nikoli
- ▶ Sudoku = Single number

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

- ▶ Τέλη 19ου αιώνα
- ▶ Μαγικά τετράγωνα
- ▶ Απαιτούσαν αριθμητική αντί για λογική
- ▶ Εξαφανίστηκαν στην αρχή του Πρώτου Παγκόσμιου Πολέμου

A 3x3 magic square grid is shown with the following numbers:

2	7	6	→15
9	5	1	→15
4	3	8	→15

Below the grid, the number 15 is written five times, with arrows pointing to the sum of each row and column:

15 15 15 15 15

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

- ▶ Σχεδιάστηκε από τον Howard Garns
- ▶ 1979, Dell Magazines
- ▶ 1984, Monthly Nikolist
- ▶ 1986, ο αριθμός των δοθέντων ήταν αυστηρά κάτω των 32
- ▶ 1986, τα παζλ έγιναν συμμετρικά

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ

- ▶ Sudoku pentomino

6	0		7				3		
3		2		1		8			
	7	9			4				3
2			4			7		0	
	3			8			2		6
		8				1		4	
	4		8		2		9		
0				4		3	1		
			3		1			7	9
		3		7				1	

ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ

- ▶ Mini Sudoku

				2	
	5				6
2					
		6			4
3			6		
	6	1			

ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ

- ▶ Killer Sudoku

A 9x9 Killer Sudoku grid with various colored cages and numbers. The grid is divided into 9 rows and 9 columns. The numbers in the grid are as follows:

1		15			22	4	16	15
25		17						
		9			8	20		
6	24			17			17	
	13		20					12
17		6			20	6		
				10			14	
	8	14			15			
				13			17	

ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ

- ▶ Alphabetical Sudoku

	P		K		R	I		D
D			B					R
	B		E			P	A	
P				K	W	A		B
						R	K	
	A	D						
B				E				P
A						E		
E	R		P		K	B		

ABDEIKPRW

ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ

- ▶ Hypersudoku

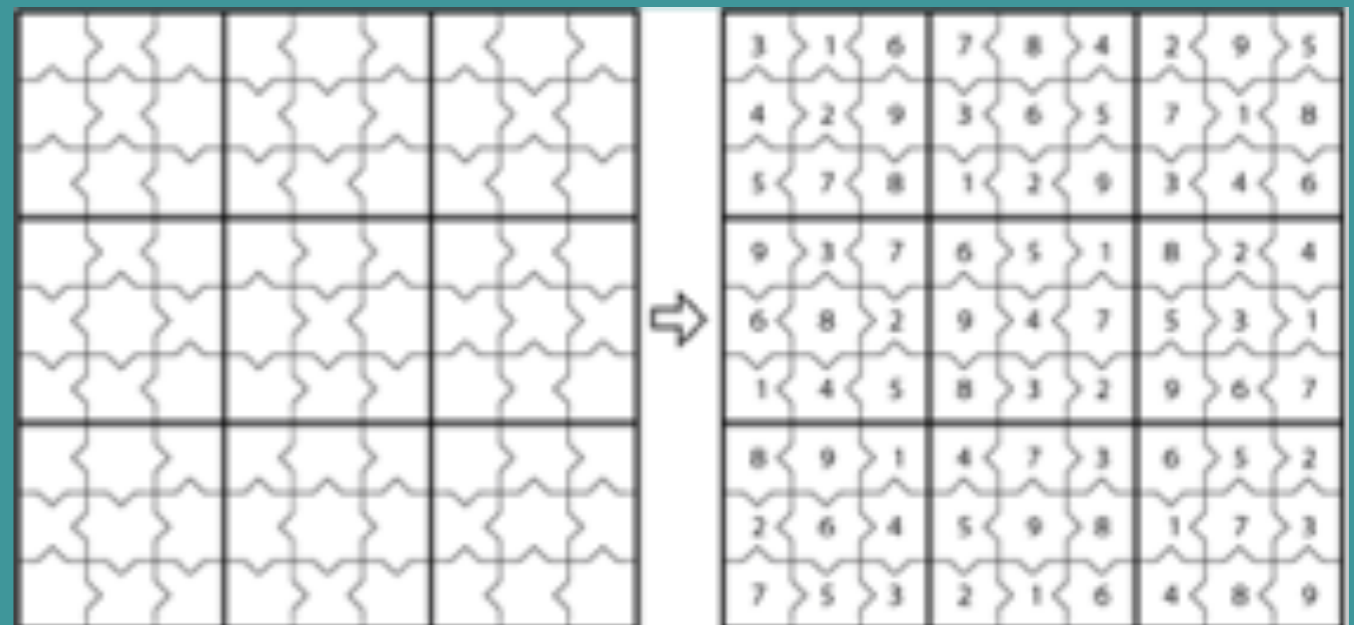
							1	
		2					3	4
				5	1			
					6	5		
	7		3				8	
		3						
				8				
5	8					9		
6	9							

ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ

- ▶ Str8ts



ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ



3	1	6	7	8	4	2	9	5
4	2	9	3	6	5	7	1	8
5	7	8	1	2	9	3	4	6
9	3	7	6	5	1	8	2	4
6	8	2	9	4	7	5	3	1
1	4	5	8	3	2	9	6	7
8	9	1	4	7	3	6	5	2
2	6	4	5	9	8	1	7	3
7	5	3	2	1	6	4	8	9

- ▶ Greater than Sudoku

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

- ▶ Ανάλυση πινάκων: απαρίθμηση πιθανών λύσεων στις διάφορες παραλλαγές.
- ▶ Ανάλυση παζλ: επικεντρώνεται στα αρχικά δοθέντα ψηφία.
- ▶ Μαθηματική λογική: πραγματοποιείται την ανάλυση των παζλ από την οπτική του παίκτη.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

- ▶ Πρόβλημα επίλυσης $n^2 \times n^2$ πινάκων.
- ▶ Για $n=3$ έχουμε το κλασικό Sudoku.
- ▶ Μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν πρόβλημα χρωματισμού γράφων, με τον ζητούμενο γράφο να έχει 81 κορυφές, μία για κάθε κελί του πίνακα.
- ▶ Ζητείται ο κατάλληλος 9-χρωματισμός ώστε οι κορυφές που ενώνονται με την ίδια ακμή να μην έχουν το ίδιο χρώμα.

- ▶ Έστω (x,y) ένα διατεταγμένο ζεύγος, όπου x και y να είναι ακέραιοι μεταξύ του 1 και του 9.
- ▶ Δύο ξεχωριστές κορυφές (x,y) και (x',y') ενώνονται με μία ακμή αν, και μόνο αν:
 - $x = x'$ (ίδια στήλη)
 - $y = y'$ (ίδια γραμμή)
 - $\lceil x/3 \rceil = \lceil x'/3 \rceil$ και $\lceil y/3 \rceil = \lceil y'/3 \rceil$ (ίδια 3×3 υποπεριοχή)
- ▶ Το παζλ συμπληρώνεται θέτοντας έναν ακέραιο από το 1 έως το 9 με τρόπο τέτοιο, ώστε οι κορυφές που ενώνονται με την ίδια ακμή να μην έχουν τον ίδιο ακέραιο.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ

- ▶ Ο αριθμός των έγκυρων λύσεων Sudoku για τον κλασικό 9x9 πίνακα είναι της τάξης των 6.670.903.752.021.072.936.960.
- ▶ Αν ληφθούν υπόψη οι συμμετρίες του πίνακα Sudoku υπάρχουν μόλις 5.472.730.538 λύσεις.
- ▶ Ο ελάχιστος αριθμός δοθέντων ψηφίων για να καθίσταται μοναδική η λύση ενός παζλ Sudoku είναι 17 ψηφία.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ

- ▶ Συμμετρία ενός αντικειμένου είναι μία πράξη η οποία διατηρεί μία συγκεκριμένη ιδιότητα του συγκεκριμένου αντικειμένου.
- ▶ Στην δική μας περίπτωση, συμμετρίες ενός πίνακα Sudoku είναι όλοι οι μετασχηματισμοί που μπορούν να εκτελεστούν σ'αυτόν, ώστε να διατηρείται η ιδιότητα της εγκυρότητας.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ

Ορισμός: Μία διμελής πράξη $*$ σε ένα σύνολο S είναι ένας κανόνας, με τον οποίο σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (a,b) στοιχείων του S αντιστοιχίζεται κάποιο στοιχείο του S .

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ

Για να οριστεί μία διμελής πράξη $*$ σε ένα σύνολο S , λοιπόν, θα πρέπει να ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Ακρίβως ένα στοιχείο αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε διατεταγμένο ζεύγος στοιχείων του S .
2. Για κάθε διατεταγμένο ζεύγος στοιχείων του S , το στοιχείο που αντιστοιχεί σε αυτό ανήκει πάλι στο S (συνθήκη κλειστότητας).

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ

Ορισμός: Μία διμελής πράξη σε ένα σύνολο S λέγεται προσεταιριστική αν:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

για κάθε a, b, c στο S .

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ

Ορισμός: Ομάδα $\langle G, * \rangle$ είναι ένα σύνολο G , μαζί με μία διμελή πράξη $'*'$ στο G τέτοια, ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

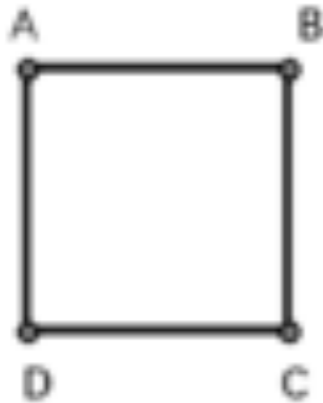
1. Το G είναι κλειστό ως προς την πράξη $'*'$, δηλαδή $(a*b) \in G$, για κάθε $a, b \in G$.
2. Η διμελής πράξη $'*'$ είναι προσεταιριστική.
3. Υπάρχει στοιχείο $e \in G$ τέτοιο, ώστε $e * x = x * e = x$, για κάθε $x \in G$ (ταυτότικό στοιχείο).
4. Για κάθε $a \in G$, υπάρχει ένα στοιχείο $a' \in G$ με την ιδιότητα $a' * a = a * a' = e$ (αντίστροφο στοιχείο).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΤΗΝ ΟΜΑΔΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΩΝ

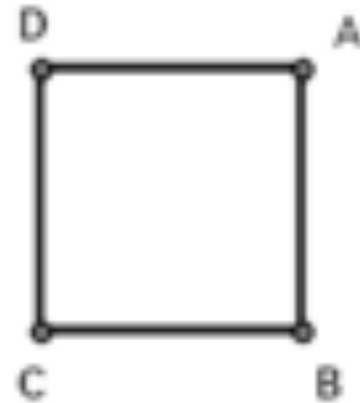
Θεωρούμε ένα τετράγωνο με ονοματισμένες τις κορυφές του. Αυτό το γεωμετρικό αντικείμενο έχει οκτώ μετασχηματισμούς, οι οποίοι διατηρούν το γεγονός ότι είναι τετράγωνο. Με άλλα λόγια το τετράγωνο έχει οκτώ συμμετρίες, όπου πρόκειται για μία σύνθεση μετασχηματισμών που ικανοποιούν τις ιδιότητες της ομάδας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΤΗΝ ΟΜΑΔΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΩΝ

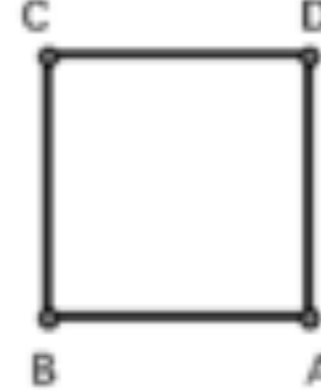
E = identity
(do nothing)



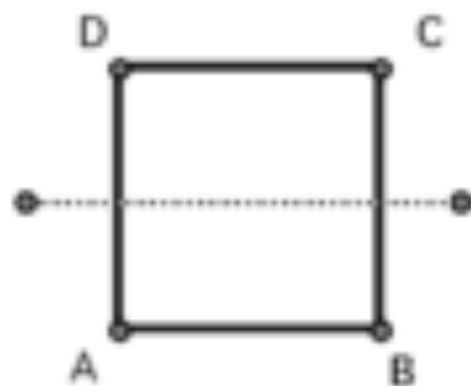
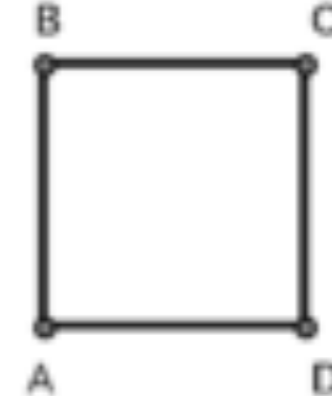
rotate 90
degrees



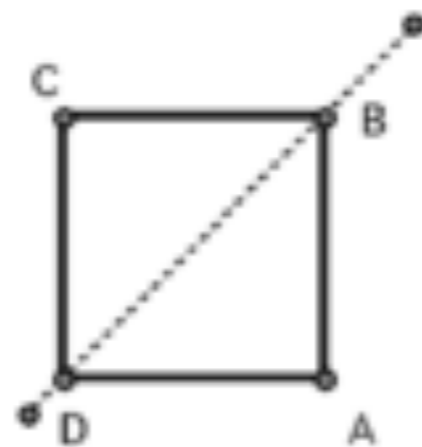
rotate 180
degrees



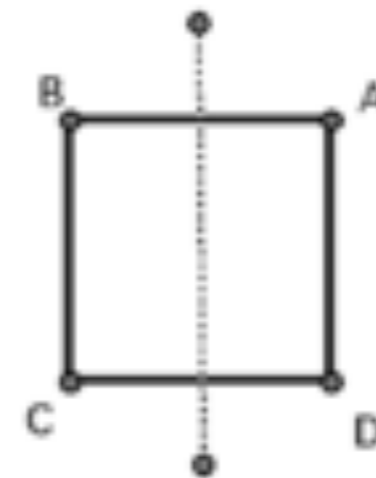
rotate 270
degrees



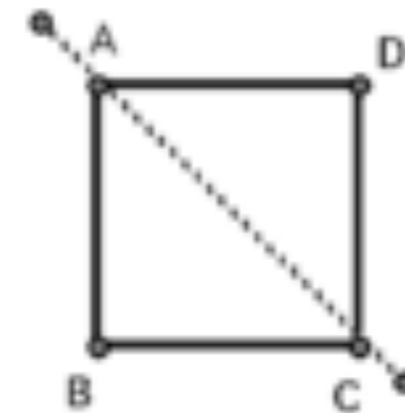
M1 reflection



M2 reflection



M3 reflection



M4 reflection

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ

Η ομάδα G των συμμετριών ενός έγκυρου πίνακα Sudoku αποτελείται από τους παραπάνω Ευκλείδειους μετασχηματισμούς του τετραγώνου καθώς και από κάποιους άλλους μετασχηματισμούς συμπεριλαμβανομένων των ανταλλαγών θέσεων σε υποπίνακες, γραμμές, στήλες και το συνδυασμό αυτών.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Η σχέση των ισοδύναμων πινάκων είναι μία σχέση ισοδυναμίας με την αυστηρή μαθηματική έννοια, επειδή πληροί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

1. (Ανακλαστική) Ο πίνακας A είναι ισοδύναμος με τον εαυτό του, $A \sim A$.
2. (Συμμετρική) Εάν ο πίνακας A είναι ισοδύναμος με τον πίνακα B , τότε ο B είναι ισοδύναμος με τον A , $A \sim B$ τότε $B \sim A$.
3. (Μεταβατική) Εάν ο πίνακας A είναι ισοδύναμος με τον πίνακα B και ο B είναι ισοδύναμος με τον C , τότε ο A είναι ισοδύναμος με τον C , $A \sim B$ και $B \sim C$, τότε $A \sim C$.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Με την ομαδοποίηση των πινάκων που είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους, μπορεί να διαμεριστεί το σύνολο των πινάκων. Δηλαδή, το σύνολο X μπορεί να "σπάσει" σε υποσύνολα, κανένα εκ των οποίων δε θα έχει κοινά στοιχεία. Η ' \sim ' ορίζει με φυσιολογικό τρόπο, μία διαμέριση του S , όπου:

$$[a] = \{x \in S \mid x \sim a\}$$

που ονομάζεται κλάση ισοδυναμίας.

Οποιαδήποτε δύο στοιχεία σε μία κλάση ισοδυναμίας είναι ισοδύναμα μεταξύ τους μέσω μίας συμμετρίας της ομάδας G . Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας συμβολίζεται με X/G .

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

- ▶ Ερώτηση: Πόσοι είναι οι ουσιαστικά διαφορετικοί πίνακες Sudoku;
- ▶ Απάντηση: Με βάση την προηγούμενη συζήτηση, ο συνολικός αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας των πινάκων, ή ο αριθμός των στοιχείων του X/G , είναι ακριβώς ο αριθμός των ουσιαστικά διαφορετικών πινάκων Sudoku.
- ▶ Με χρήση υπολογιστή βρέθηκε ότι υπάρχουν 5.472.730.538 ουσιαστικά διαφορετικοί πίνακες Sudoku.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Θεώρημα: (Burnside's Lemma) Έστω G μία πεπερασμένη ομάδα η οποία δρα σε ένα σύνολο X . Για κάθε $g \in G$, έστω X^g το σύνολο των στοιχείων του X που είναι μετασχηματισμένα από το g . Τότε ο αριθμός των στοιχείων του X/G είναι:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

- ▶ Για να υπάρχει μοναδική λύση σε έναν πίνακα Sudoku βαθμού- n , χρειάζονται τουλάχιστον n^2-1 διακριτά σύμβολα που πρέπει να χρησιμοποιηθούν. Σε κάθε άλλη περίπτωση, το παζλ θα έχει παραπάνω από μία λύσεις.
- ▶ Το παιχνίδι επίλυσης ενός παζλ Sudoku βαθμού- n , τοποθετείται στην κλάση προβλημάτων που ανήκουν στα NP-πλήρη προβλήματα.

SUDOKU

1	8	3	2	5	9	4	6	7
7	9	6	1	4	3	5	2	8
5	4	2	7	8	6	1	9	3
4	7	8	6	9	4	9	2	5

ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ ΠΟΛΥ

ΠΟΥΛΟΠΟΥΛΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ