ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΑ ΠΛΑΤΩΝΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ

ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΘΕΜΑ»

ΑΡΒΑΝΙΤΗ ΜΑΡΙΑ ΕΛΕΝΗ
ΚΡΥΣΤΑΛΛΙΔΗΣ ΠΕΡΙΚΛΗΣ

Επιβλέπουσα : Λαμπροπούλου Σοφία

Αθήνα, Ιανουάριος 2017

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

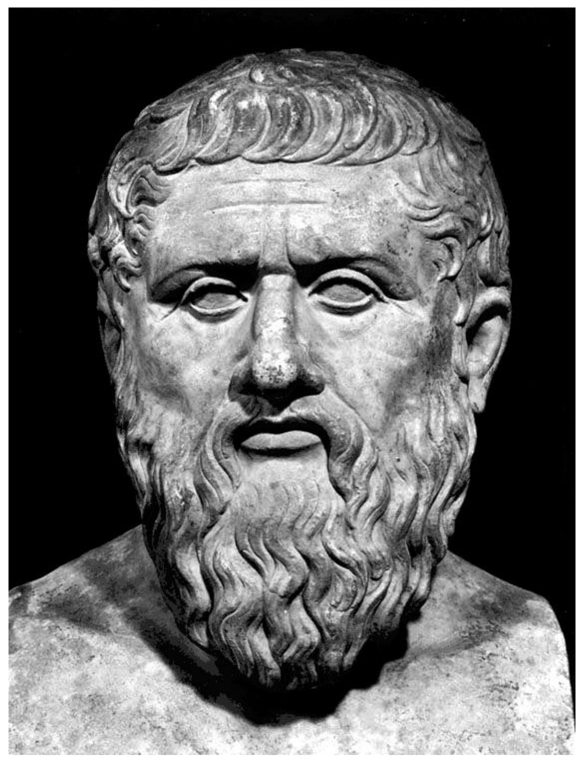
ΚΕΦΑΛΑΙΑ:

Κεφάλαιο 1:

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε τα Πλατωνικά στερεά. Συγκεκριμένα, θα αναλύσουμε τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητές τους, καθώς και τις συμμετρίες που παρουσιάζουν.

Πλατωνικό στερεό καλείται ένα κυρτό κανονικό πολύεδρο, του οποίου όλες οι έδρες είναι ίσα κανονικά πολύγωνα και όλες οι πολυεδρικές γωνίες του είναι ίσες. Επομένως, όλες οι ακμές του είναι ίσα ευθύγραμμα τμήματα, καθώς επίσης και όλες οι επίπεδες γωνίες των εδρών του. Υπάρχουν μόνο πέντε τέτοια πολύεδρα, όπως θα αποδειχθεί και στο Κεφάλαιο 9. Αυτά είναι: το τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο.



Πλάτων

Τα κανονικά πολύγωνα και πολύεδρα απασχόλησαν και συνεχίζουν να απασχολούν τους λαούς και ιδιαίτερα τους Έλληνες από την αρχαιότητα. Η πρώτη αναφορά των πολυγώνων και πολυέδρων αποδίδεται στους Πυθαγόρειους (6ος αι. π.Χ.), οι οποίοι χρησιμοποιούσαν τα πολύγωνα και για την αναπαράσταση των αριθμών. Από τα Πλατωνικά στερεά, ο κύβος, το τετράεδρο και το δωδεκάεδρο αποδίδονται στους Πυθαγορείους αν και ήταν γνωστά και σε προγενέστερους του Ελληνικού πολιτισμούς. Για παράδειγμα, οι Ετρούσκοι, που κατοίκησαν στην Ιταλία το 500 π.Χ., είχαν κοσμήματα σχήματος δωδεκαεδρικού. Το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο αποδίδονται στον Θεαίτητο (415-369 π.Χ.). Ο Θεαίτητος ήταν Έλληνας μαθηματικός της κλασικής αρχαιότητας, συνεργάτης του Πλάτωνα και επιφανές μέλος της Ακαδημίας του Πλάτωνα.

Συγκεκριμένα, ο Θεαίτητος θεωρείται ως ο πρώτος που μελέτησε το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο και πιστεύεται από την ολότητα των ιστορικών των μαθηματικών ότι το δέκατο τρίτο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη βασίζεται στις μελέτες του. Η μελέτη των Πλατωνικών Στερεών καθώς και η απόδειξη ότι υπάρχουν ακριβώς πέντε, περιλαμβάνονται στο 13ο βιβλίο των *Στοιχείων*.
Ένα κοινό χαρακτηριστικό των πλατωνικών στερεών, με το οποίο ασχολήθηκε ο Ευκλείδης στο παραπάνω βιβλίο του, είναι η εγγραψιμότητά τους σε σφαίρα.

Παρόλα αυτά, ο πρώτος που κάνει σαφή αναφορά στα κανονικά πολύεδρα ήταν ο Πλάτωνας (427-347π.Χ.), γι αυτό και ονομάστηκαν Πλατωνικά στερεά.

Όπως αναφέρεται στον διάλογό του "*Τίμαιος*" , σε αντίθεση με τα κανονικά πολύγωνα που είναι άπειρα σε αριθμό, τα κανονικά στερεά ή πολύεδρα είναι μόνο πέντε. Τα παρακάτω:

- Το κανονικό τετράεδρο με 4 κορυφές, 4 έδρες και 6 ακμές
- Ο κύβος με 8 κορυφές, 6 έδρες και 12 ακμές
- Το κανονικό οκτάεδρο επίσης με 6 κορυφές, 8 έδρες και 12 ακμές
- Το κανονικό δωδεκάεδρο με 20 κορυφές, 12 έδρες και 30 ακμές
- Το κανονικό εικοσάεδρο, με 12 κορυφές, 20 έδρες και 30 ακμές.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το σύνολο αριθμών για τα παραπάνω δυικά στερεά ταυτίζεται, καθώς και ο αριθμός των ακμών τους. Συγκεκριμένα, για τον κύβο και το οκτάεδρο το σύνολο αριθμών είναι {8,6,12}, ενώ για το κανονικό δωδεκάεδρο και το κανονικό εικοσάεδρο το σύνολο αριθμών είναι : {20,12,30}. Η παρατήρηση αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι τα παραπάνω ζευγάρια είναι δυικά (βλ. Κεφάλαιο 3).

Τα πέντε κανονικά πολύεδρα καλούνται επίσης *κοσμικά στερεά*, καθώς ο Πλάτωνας, σε καθένα από αυτά, αντιστοίχισε και κάποιο στοιχείο της φύσης (βλ. Σχήμα 1). Εν ολίγοις, ο Πλάτωνας φαντάστηκε τη δημιουργία του κόσμου ως αποτέλεσμα της μαθηματικής αλληλεπίδρασης και μετασχηματισμών των πέντε κανονικών στερεών.

Τα πολύεδρα τα μελετάμε βάσει των συμμετριών τους. Το καθένα έχει τη δική του ομάδα συμμετριών (βλ. Κεφάλαια 4-8). Ακόμη, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι τα πλατωνικά στερεά έχουν την ίδια χαρακτηριστική Euler (βλ. Κεφάλαιο 10).

Τέλος, θα υπενθυμίσουμε τις παρακάτω έννοιες, διότι είναι απαραίτητες για την μελέτη των συμμετριών των πολυέδρων:

- C_n - περιστροφή κατά γωνία $2\pi/n$
- S_n - περιστροφή κατά γωνία $2\pi/n$ και ανάκλαση ως προς επίπεδο κάθετο στον άξονα
- σ_h - οριζόντιο επίπεδο ανάκλασης
- σ_d - διαγώνιο επίπεδο ανάκλασης
- σ_υ - κατακόρυφο επίπεδο ανάκλασης

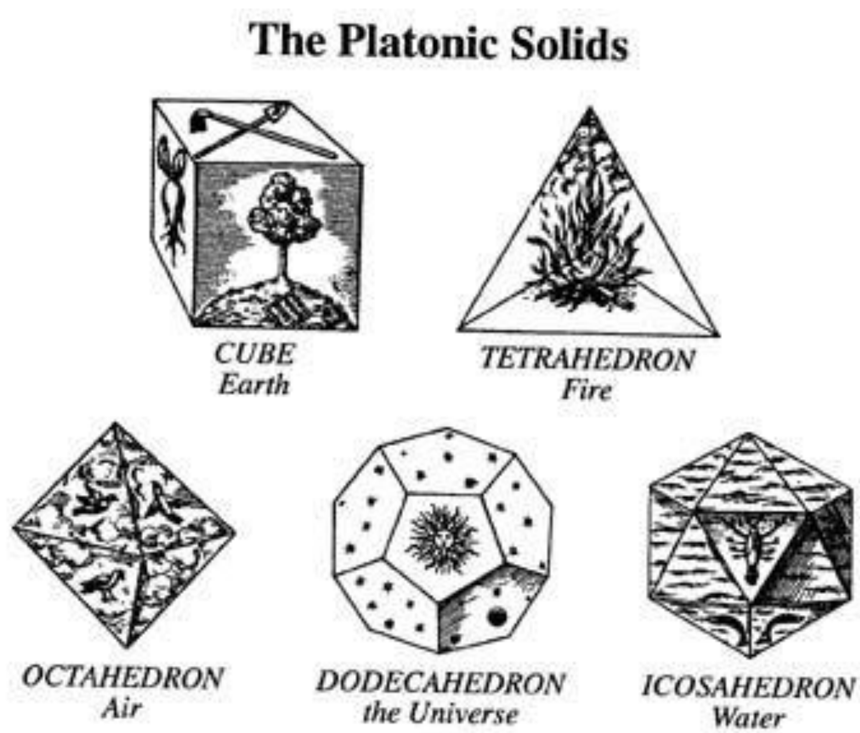
Εδώ αξίζει να δοθεί και ο ορισμός της συμμετρίας.

Συμμετρία ενός σώματος στο χώρο είναι οποιαδήποτε ισομετρία του χώρου τέτοια ώστε το συγκεκριμένο σώμα να καταλαμβάνει συνολοθεωρητικά (όχι σημειακά) την ίδια θέση στο χώρο.

Κεφάλαιο 2:

ΤΑ ΠΛΑΤΩΝΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ & ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΗΣ

Τα τέσσερα στοιχεία της φύσης, σύμφωνα με τα οποία δομείται όλος ο κόσμος είναι : η Φωτιά, ο Αέρας, το Νερό, η Γη. Ο αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος Πλάτωνας, την περίοδο μεταξύ 428-347 π.Χ., πρόσθεσε και τον Αιθέρα στα τέσσερα αυτά στοιχεία και όρισε για καθένα από τα πέντε αυτά στοιχεία της φύσης, ένα γεωμετρικό στερεό, όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα. Έτσι, συνέδεσε τα Πλατωνικά στερεά με τα στοιχεία της φύσης.



Σχήμα 1: Τα Πλατωνικά στερεά και τα στοιχεία της φύσης.

ΓΗ – Κύβος

Ο κύβος συμβολίζει τη γη, γιατί στέκεται σταθερά στη βάση του. Έτσι, σύμφωνα με τον Πλάτωνα εκφράζει τη σταθερότητα, και την ανθεκτικότητα, ιδιότητες οι οποίες χαρακτηρίζουν τη γήινη ύλη.

ΦΩΤΙΑ - Τετράεδρο

Σύμφωνα με τον Πλάτωνα, το τετράεδρο, με τον ελάχιστο αριθμό εδρών, συμβολίζει τη φωτιά. Αυτό εξηγείται διότι το τετράεδρο είναι «ευκίνητο», κοφτερό, αιχμηρό και ελαφρύ όπως η φωτιά.

ΣΥΜΠΑΝ- Δωδεκάεδρο

Ο Πλάτωνας επινόησε την ύπαρξη ενός πέμπτου στοιχείου, του αιθέρα, το οποίο κυριαρχεί έξω από τη γη. Συμβολίζει το σύμπαν και αντιστοιχίζεται με το ζωδιακό κύκλο και το δωδεκάθεο. Επιπλέον, αποτελεί τον συνδυασμό των υπόλοιπων στοιχείων για την περιγραφή του Κόσμου, την Πεμπτουσία.

ΝΕΡΟ – Εικοσάεδρο

Το εικοσάεδρο συμβολίζει το νερό, λόγω του μεγάλου αριθμού των εδρών καθώς και διότι παρουσιάζει το μεγαλύτερο όγκο. Επίσης, αποτελεί το πιο στρογγυλό από τα σχήματα, δηλαδή αυτό που ρέει πιο εύκολα.

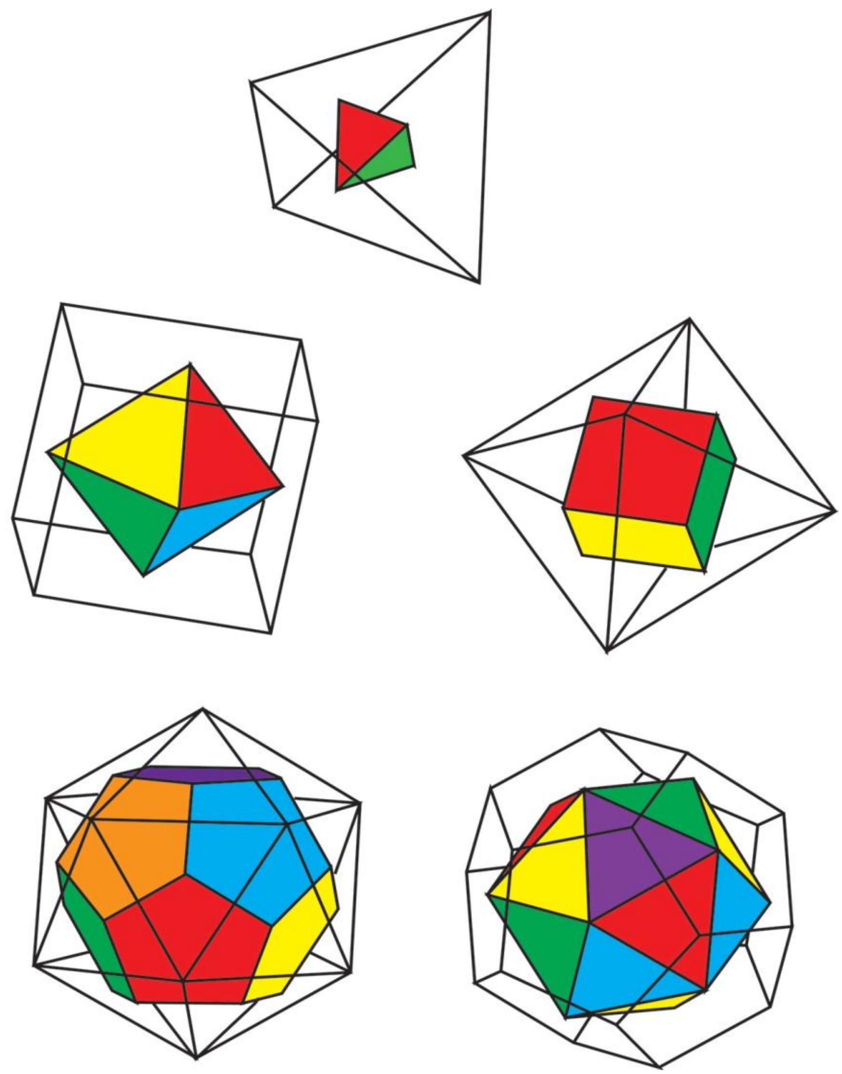
ΑΕΡΑΣ - Οκτάεδρο

Το οκτάεδρο αντιστοιχεί στον αέρα, διότι περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από νοητό άξονα που διέρχεται από δύο απέναντι κορυφές του, χαρακτηριστικό το οποίο του επιτρέπει να είναι «μαλακό» και «λεπτεπίλεπτο».

Κεφάλαιο 3:

Ο ΔΥΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΛΑΤΩΝΙΚΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

Δύο πολύεδρα καλούνται *δυϊκά* αν τα κέντρα των εδρών του ενός συμπίπτουν με τις κορυφές του άλλου και αντίστροφα. Το πλήθος επομένως των εδρών γίνεται πλήθος κορυφών και αντίστροφα για τα *δυϊκά στερεά*. Ακόμη, τα δυϊκά γεωμετρικά σχήματα είναι αλληλοπαραγόμενα. Ειδικότερα, ο κύβος είναι δυϊκό σχήμα του κανονικού οκταέδρου, δηλαδή μετασχηματίζεται με λογικό τρόπο σε οκτάεδρο και αντίστροφα. Το δυϊκό σχήμα του κανονικού τετραέδρου είναι ο εαυτός του. Είναι δηλαδή αυτοπαραγόμενο στερεό. Το δυϊκό του δωδεκαέδρου είναι το εικοσάεδρο, και αντιστρόφως. Οι ομάδες συμμετρίας των δυικών σωμάτων είναι οι ίδιες, δεδομένου ότι κάθε ισομετρία που αφήνει αναλλοίωτο ένα σχήμα, θα αφήνει αναλλοίωτο και το δυικό του.



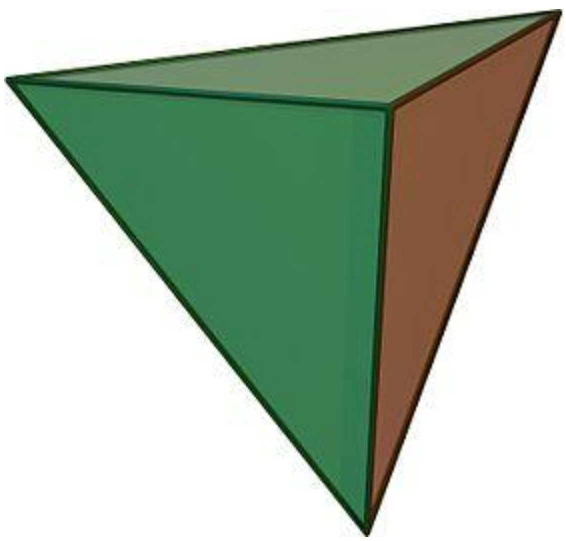
Σχήμα 2:

Δυικά Πλατωνικά στερεά

Κεφάλαιο 4:

ΤΟ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ

Το κανονικό τετράεδρο έχει έδρες 4 ισόπλευρα τρίγωνα, 3 ανά κορυφή. Επίσης, διαθέτει 4 κορυφές και 6 ακμές, 3 ανά κορυφή.



ΤΕΤΡΑΕΔΡΟ

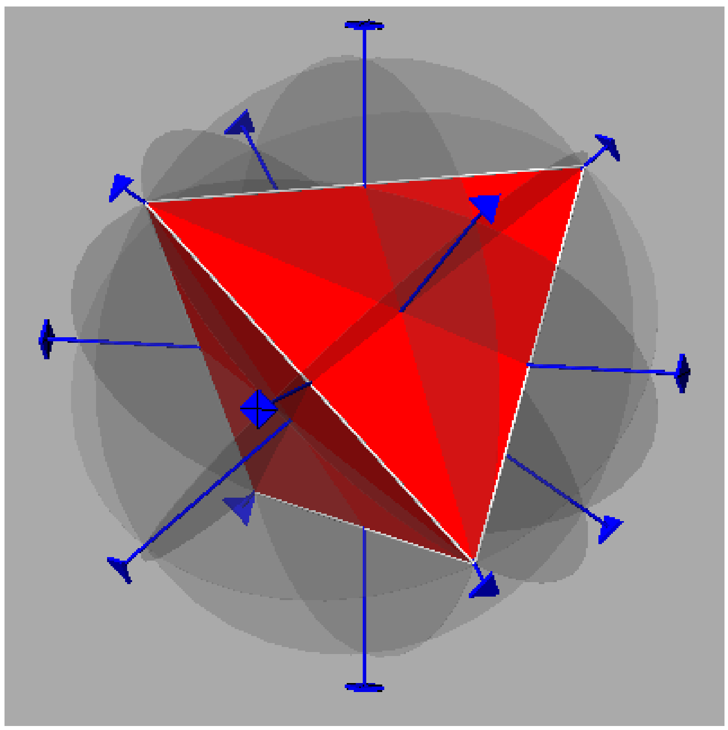
- 4 έδρες
- 4 κορυφές
- 6 ακμές

Σχήμα 3 : Το κανονικό τετράεδρο

Το τετράεδρο είναι αυτοπαραγόμενο. Επομένως, το δυϊκό σχήμα του κανονικού τετραέδρου είναι ο εαυτός του. Αυτό καθίσταται σαφές αν ενώσουμε τα κέντρα των εδρών του, όπου τότε προκύπτει πάλι τετράεδρο (βλ. Σχήμα 2).

ΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΥ

Το κανονικό τετράεδρο διαθέτει συνολικά 24 συμμετρίες. Η ομάδα των συμμετριών του, που καλείται «τετραεδρική», συμβολίζεται με Td και είναι ισόμορφη με την ομάδα S_4 (η ομάδα των μεταθέσεων των στοιχείων ενός συνόλου με 4 στοιχεία).



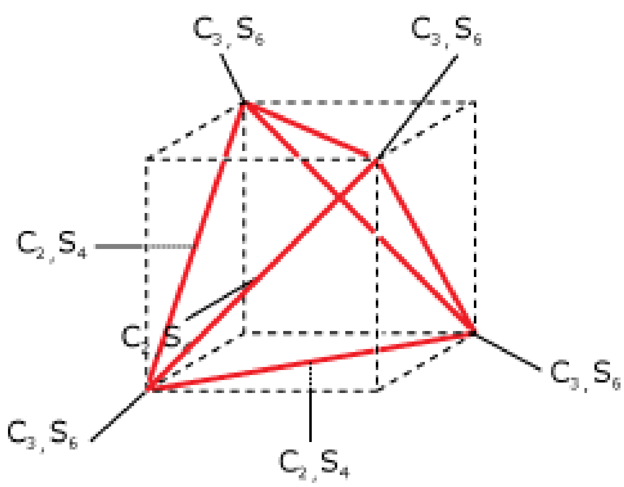
Σχήμα 4: Οι συμμετρίες του τετραέδρου

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε όλες τις συμμετρίες του κανονικού τετραέδρου.

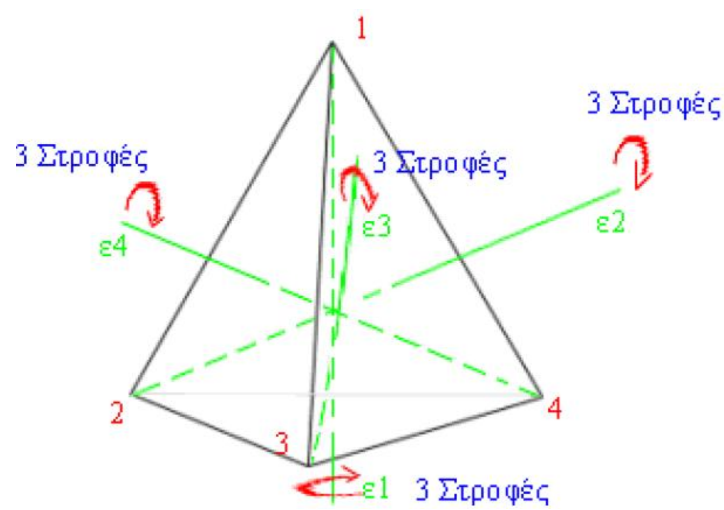
ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΥ

Η ομάδα περιστροφής του τετραέδρου είναι ισομορφική με την υποομάδα A_4, δηλαδή με την ομάδα των άρτιων μεταθέσεων της S_4, και δρα σαν μεταθέσεις των τεσσάρων κορυφών του. Στην επόμενη παράγραφο θα αναλυθούν όλες οι περιστροφικές συμμετρίες του κανονικού τετραέδρου.

Κάθε τετράεδρο έχει τέσσερις άξονες περιστροφής C_3 καθένας από τους οποίους διέρχεται από μία κορυφή και το κέντρο της απέναντι έδρας. Οι παραπάνω τέσσερις άξονες περιστροφικής συμμετρίας ε1, ε2, ε3, ε4 φαίνονται στα παρακάτω σχήματα. Έτσι, προκύπτουν 8 μη ταυτοτικά στοιχεία ομάδας, τάξης 3, τα οποία αντιστοιχούν σε 8 περιστροφές κατά 120 μοίρες.



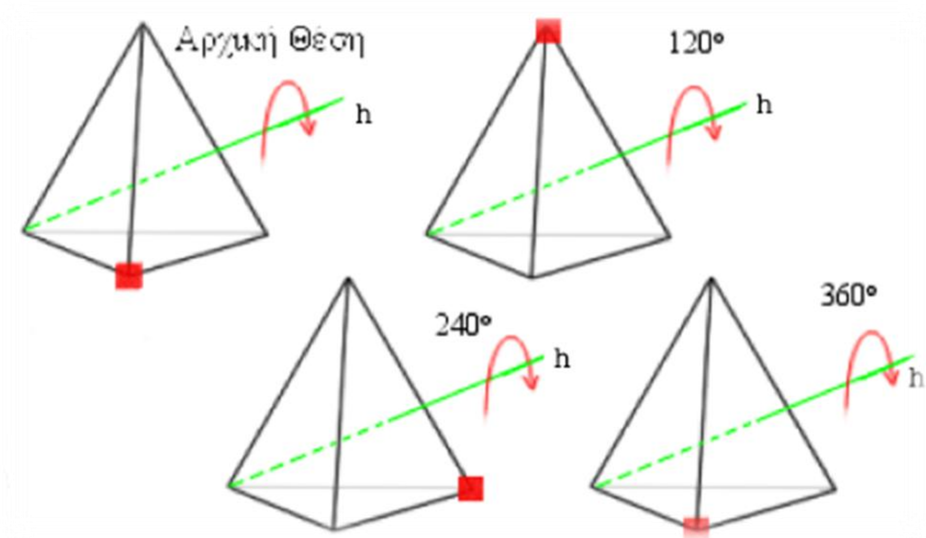
Σχήμα 6 : Τέσσερις άξονες περιστροφικής συμμετρίας τετραέδρου



Σχήμα 5 : Τέσσερις άξονες περιστροφικής συμμετρίας

Επιπλέον, διαθέτει τρείς κάθετους μεταξύ τους άξονες περιστροφής C_2, καθένας από τους οποίους συνδέει τα μέσα των απέναντι ακμών του τετραέδρου. Δηλαδή, 3 περιστροφές κατά 180 μοίρες. Με αυτόν τον τρόπο, προκύπτουν 3 μη ταυτοτικά στοιχεία ομάδας, τάξης 2. Τέλος, η ταυτοτική συμμετρία, η οποία αφήνει το τετράεδρο σταθερό και ισοδυναμεί με μία πλήρη στροφή γύρω από έναν από τους διαθέσιμους άξονες.

Επομένως, προκύπτουν 12 περιστροφικές συμμετρίες. Το παρακάτω σχήμα, δείχνει με απλό τρόπο ποιες είναι οι περιστροφικές συμμετρίες του τετραέδρου ως προς ευθεία (h).



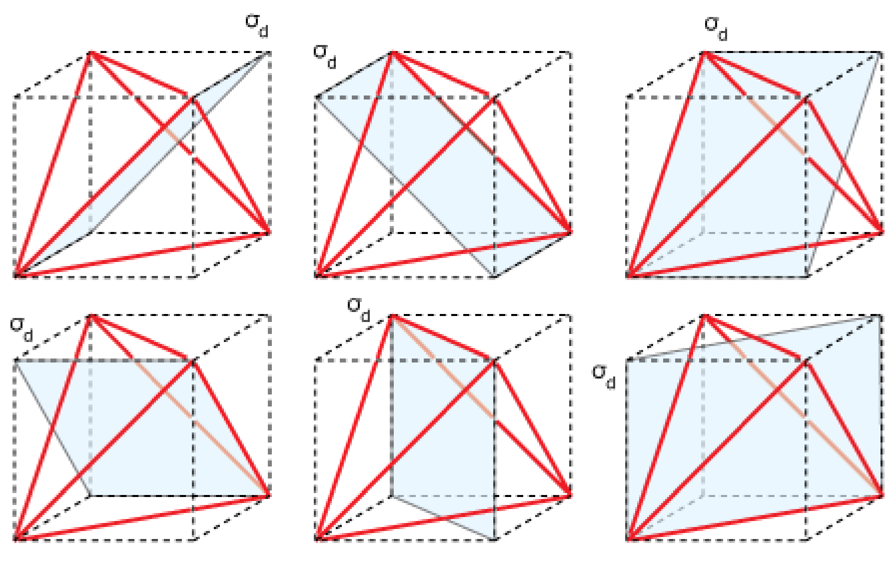
Σχήμα 7 : Οι περιστροφικές συμμετρίες του τετραέδρου ως προς ευθεία h

Δεδομένου ότι υπάρχουν τρεις ευθείες h για κάθε τετράεδρο, προκύπτουν έτσι δώδεκα περιστροφικές συμμετρίες (4 × 3 = 12).

ΟΙ ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΥ

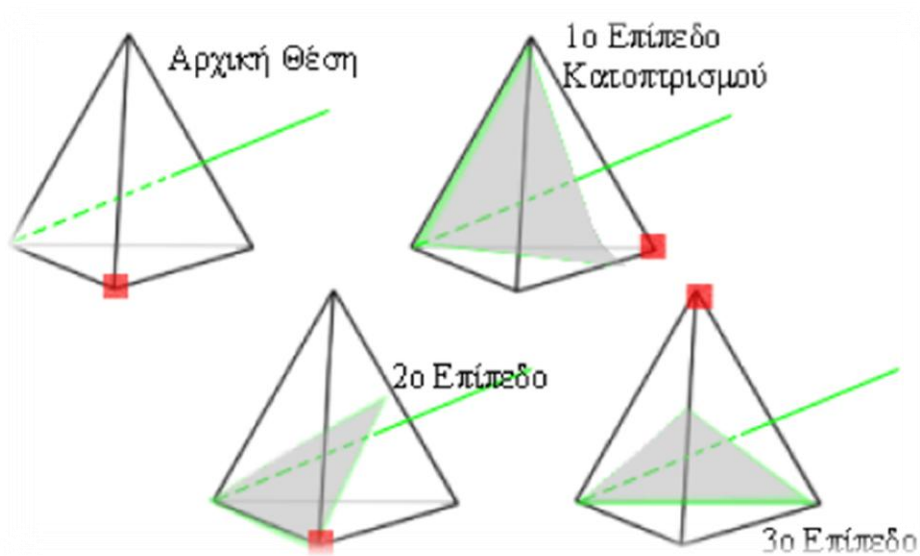
Αρχικά, το τετράεδρο διαθέτει τρεις κάθετους μεταξύ τους άξονες κατοπτρισμού S_4 , οι οποίοι ταυτίζονται με τους άξονες C_2. Έτσι, διαθέτει 6 περιστροφές/ανακλάσεις κατά 90° , κλάση ισόμορφη με την $6S_4$.

Επιπλέον, διαθέτουν έξι ανακλάσεις σε επίπεδο που διέρχεται από δύο άξονες περιστροφής, οι οποίοι προκύπτουν από τα ζεύγη των διαγωνίως απέναντι ακμών του. Η κλάση αυτή είναι ισόμορφη με την $6\sigma_d$ (σ_d - διαγώνιο επίπεδο ανάκλασης), ενώ τα 6 αυτά επίπεδα κατοπτρισμού φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 8 : Ανακλάσεις σε επίπεδο που διέρχεται από δύο άξονες περιστροφής

Στο επόμενο σχήμα αποτυπώνονται οι κατοπτρισμοί του τετραέδρου ως προς διάφορα επίπεδα:



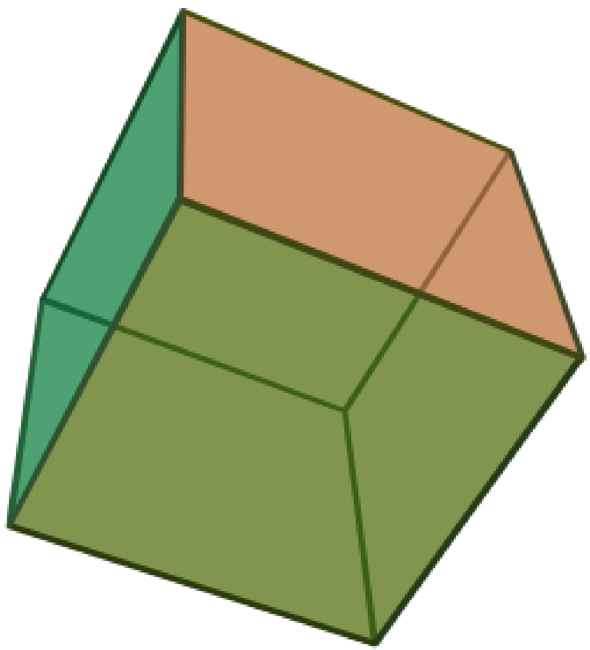
Σχήμα 9 : Οι κατοπτρισμοί του τετραέδρου ως προς διάφορα επίπεδα

Στο σχήμα καταγράφονται οι τρεις κατοπτρικές συμμετρίες που αντιστοιχούν σε κάθε άξονα συμμετρίας του τετράεδρου. Όμως, οι άξονες συμμετρίας είναι 4, κι επομένως συνολικά εμφανίζονται 12 κατοπτρικές συμμετρίες στο κανονικό τετράεδρο.

Κεφάλαιο 5:

Ο ΚΥΒΟΣ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ

Ο κύβος έχει έδρες 6 τετράγωνα, 3 ανά κορυφή. Επίσης, διαθέτει 8 κορυφές και 12 ακμές, 3 ανά κορυφή.



Σχήμα 10 : Ο κύβος

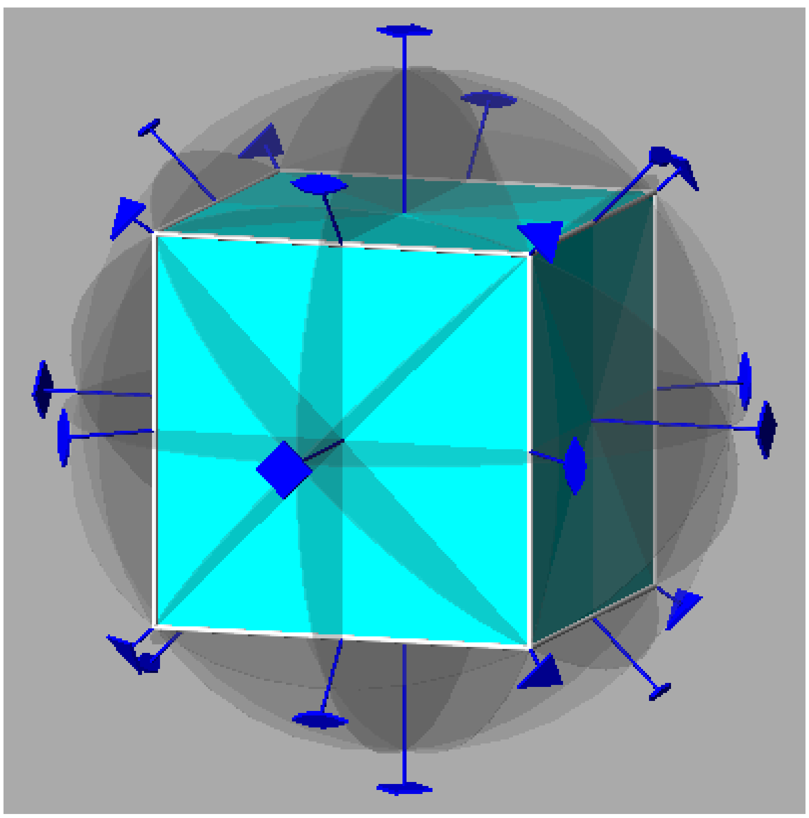
ΚΥΒΟΣ

- 6 έδρες
- 8 κορυφές
- 12 ακμές

Εν αντιθέσει με το τετράεδρο, ο κύβος δεν είναι αυτοπαραγόμενο. Πιο συγκεκριμένα, το δυικό του είναι το κανονικό οκτάεδρο(βλ. Κεφάλαιο 3). Πράγματι, αυτό μπορεί να διαπιστωθεί ενώνοντας τα κέντρα κάθε τετραγωνικής έδρας, αφού προκύπτει το κανονικό οκτάεδρο.

ΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ

Ο κύβος διαθέτει συνολικά 48 συμμετρίες, 24 περιστροφικές και 24 κατοπτρισμούς. Η ομάδα των συμμετριών του, που καλείται «οκταεδρική», συμβολίζεται με O_h και είναι ισόμορφη με την ομάδα $S_4 \times C_2$.

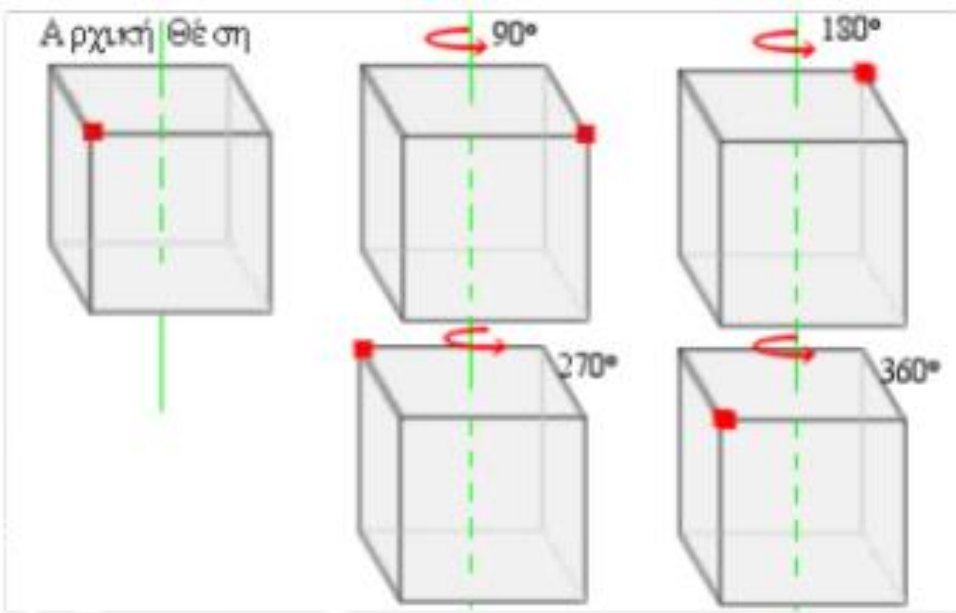


Σχήμα 11 : Οι συμμετρίες του κύβου

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε όλες τις συμμετρίες του κύβου.

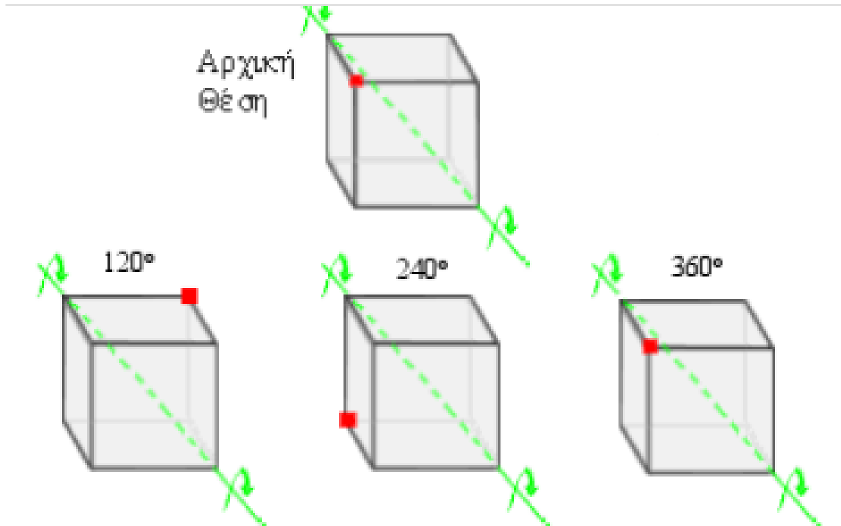
ΟΙ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ

Κάθε κύβος έχει 3 ευθείες – άξονες C_4 που περνάνε από τα κέντρα κάθε ζεύγους απέναντι εδρών του. Πραγματοποιούμε τις περιστροφές του κύβου ως προς αυτούς τους άξονες κατά 90^0, 180^0 , 270^0 και κατά συνέπεια έχουμε 9 περιστροφικές συμμετρίες. Τα παρακάτω σχήματα δείχνουν τις περιστροφές του ως προς έναν από τους C_4 άξονες.



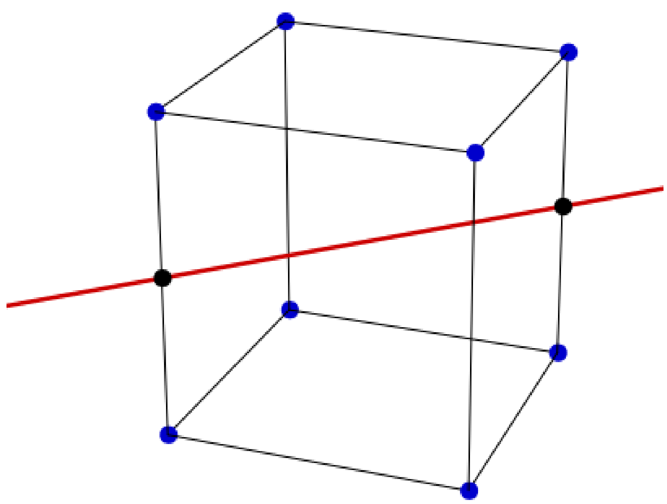
Σχήμα 12: Περιστροφές κύβου ως προς έναν από τους C_4 άξονες

Επιπλέον, ο κύβος έχει 4 ευθείες C_3 μεταξύ ζευγών απέναντι κορυφών, τις οποίες καλούμε διαγώνιες ευθείες ως προς τις οποίες μπορούμε να περιστρέψουμε τον κύβο κατά 120^0 (δηλαδή 120^0, και 240^0). Με άλλα λόγια έχουμε 8 περιστροφικές συμμετρίες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 13 : Περιστροφές κύβου ως προς έναν από τους C_3 άξονες

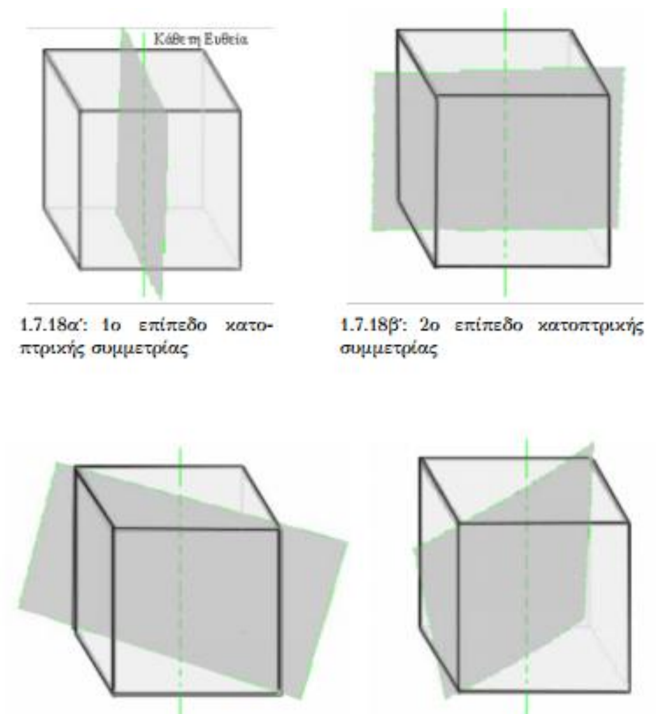
Επιπλέον ο κύβος διαθέτει έξι άξονες περιστροφής C_2 οι οποίοι μας δίνουν 6 περιστροφικές συμμετρίες οι οποίες φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Συνυπολογίζοντας και την ταυτοτική συμμετρία συμεραίνουμε ότι ο κύβος διαθέτει συνολικά 24 περιστροφικές συμμετρίες.

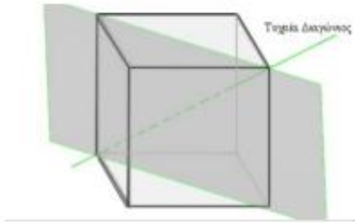
ΟΙ ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ

Καθένας από τους 3 άξονες συμμετρίας που περνά από τα κέντρα των απέναντι εδρών ορίζει 4 διαφορετικά επίπεδα κάθετα ανά 2. Για κάθε άξονα μπορούμε να πάρουμε 4 κατοπτρισμούς. Επομένως έχουμε 3×4=12 κατοπτρισμούς που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

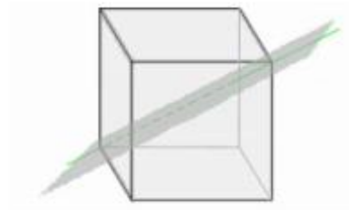


Σχήμα 14 : Επίπεδα κατοπτρικής συμμετρίας

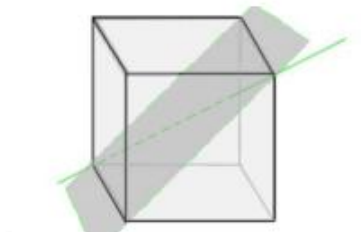
Επιπλέον, αν θεωρήσουμε τις 4 διαγωνίους του κύβου, τότε ορίζονται 3 επίπεδα ανάκλασης, επομένως έχουμε 4×3=12 κατοπτρισμούς.



1.7.19α΄: 1ο διαγώνιο επίπεδο



1.7.19β΄: 2ο διαγώνιο επίπεδο



1.7.19γ΄: 3ο διαγώνιο επίπεδο

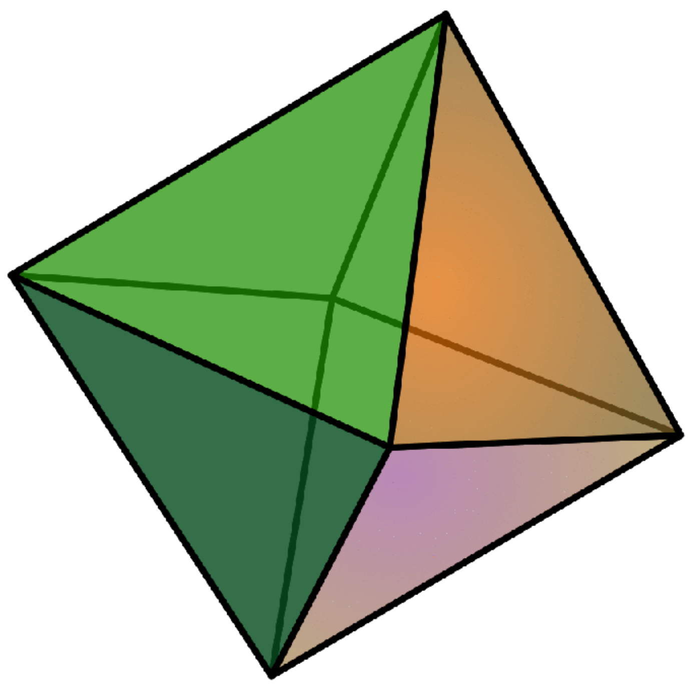
Σχήμα 15 : Επίπεδα ανάκλασης που ορίζονται από τις διαγωνίους

Συμπερασματικά, έχουμε 24 κατοπτρισμούς. Λαμβάνοντας υπ’ όψιν και τις περιστροφικές συμμετρίες, καταλήγουμε ότι ο κύβος έχει 48 συμμετρίες.

Κεφάλαιο 6:

ΤΟ ΟΚΤΑΕΔΡΟ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ

Το κανονικό οκτάεδρο έχει έδρες 8 ισόπλευρα τρίγωνα, 4 ανά κορυφή. Επίσης, διαθέτει 6 κορυφές και 12 ακμές, 4 ανά κορυφή.



Σχήμα 16 :Το κανονικό οκτάεδρο

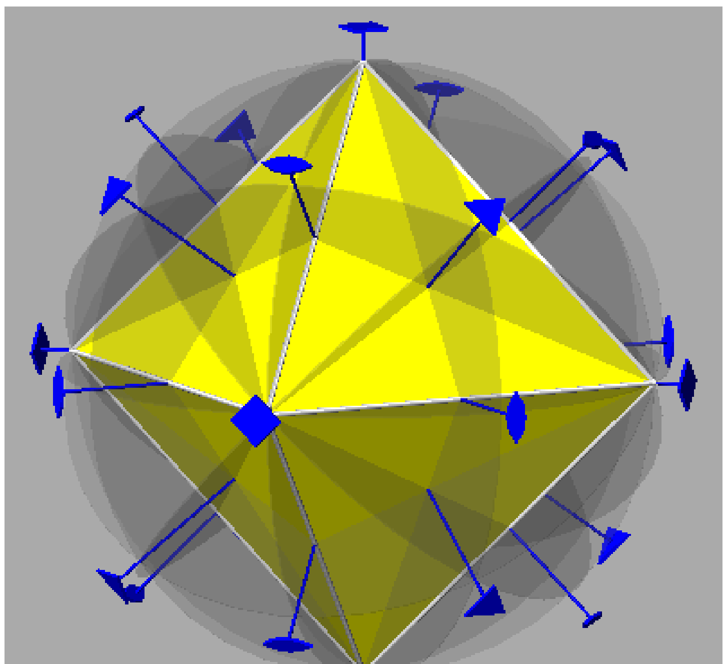
ΟΧΤΑΕΔΡΟ

- 8 έδρες
- 6 κορυφές
- 12 ακμές

Το δυικό του κανονικού οκταέδρου είναι ο κύβος κάτι που μπορεί να διαπιστωθεί αν ενώσουμε τα κεντροειδή των εδρών του (ισόπλευρα τρίγωνα), θα πάρουμε τον κύβο. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε όλες τις συμμετρίες του οκταέδρου.

ΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ ΟΚΤΑΕΔΡΟΥ

Το οκτάεδρο έχει συνολικά 48 συμμετρίες, 24 περιστροφικές και 24 κατοπτρισμούς. Η ομάδα των συμμετριών του είναι όπως και του κύβου η «οκταεδρική», O_h και είναι ισόμορφη με την ομάδα $S_4 \times C_2$.



Σχήμα 17 : Οι συμμετρίες του οκταέδρου

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε όλες τις συμμετρίες του οκταέδρου.

ΟΙ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ ΟΚΤΑΕΔΡΟΥ

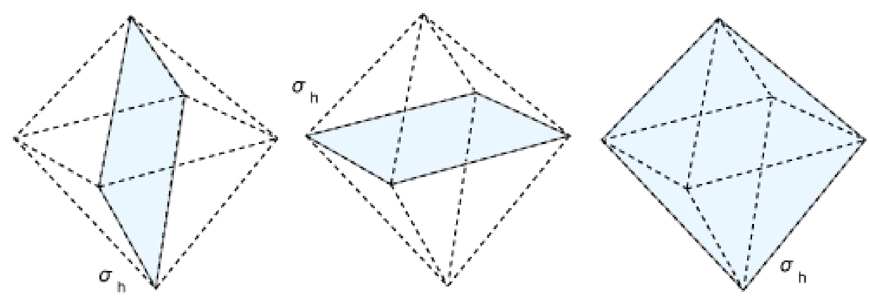
Κάθε κανονικό οκτάεδρο έχει 3 ευθείες – άξονες C_4 που περνάνε από τα κέντρα κάθε ζεύγους απέναντι εδρών του. Πραγματοποιούμε τις περιστροφές του κύβου ως προς αυτούς τους άξονες κατά 90^0, 180^0, 270^0 και 360^0 (4 δηλαδή)και κατά συνέπεια έχουμε 3×4=12 περιστροφικές συμμετρίες.

Επιπλέον, έχει 4 ευθείες C_3 μεταξύ ζευγών απέναντι κορυφών, τις οποίες καλούμε διαγώνιες ευθείες ως προς τις οποίες μπορούμε να περιστρέψουμε τον κανονικό οκτάεδρο κατά 120^0 (δηλαδή 120^0, 240^0 και 360^0). Με άλλα λόγια έχουμε 4×3=12 περιστροφικές συμμετρίες αυτού του τύπου.

Συνολικά το οκτάεδρο έχει 24 περιστροφικές συμμετρίες.

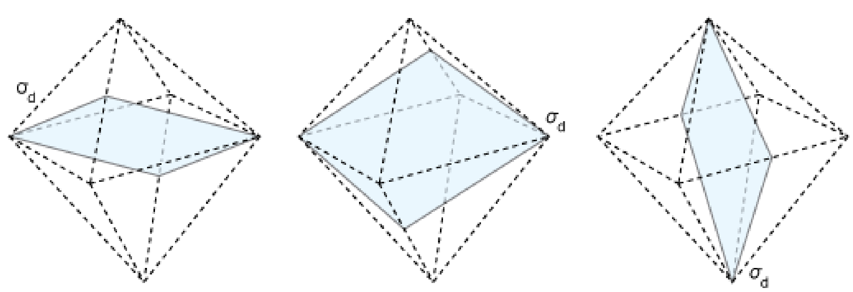
ΟΙ ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΟΚΤΑΕΔΡΟΥ

Καθένας από τους 3 άξονες συμμετρίας που διέρχεται από τα κέντρα των απέναντι εδρών ορίζει 4 διαφορετικά επίπεδα κάθετα ανά 2. Για κάθε άξονα μπορούμε να πάρουμε 4 κατοπτρισμούς. Επομένως έχουμε 3×4=12 κατοπτρισμούς που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 18 : Κατοπτρισμοί από τους άξονες που διέρχονται από τα κέντρα των απέναντι πλευρών του οκταέδρου

Ακόμη, αν ορίσουμε τις διαγώνιες ευθείες του κανονικού οκταέδρου, ορίζονται 3 επίπεδα ανάκλασης, τα οποία φαίνονται στο επόμενο σχήμα. Άρα έχουμε 4×3=12 κατοπτρισμούς



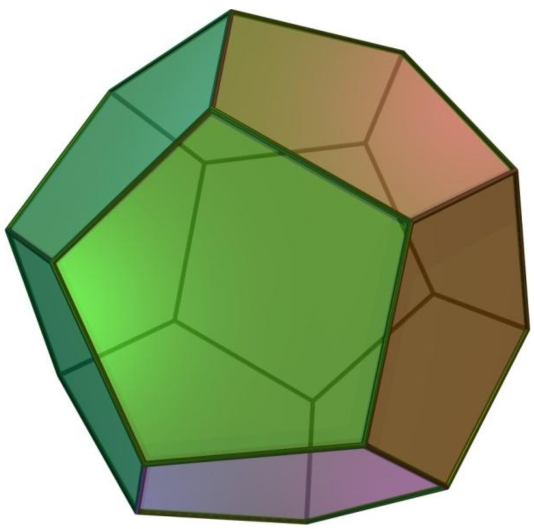
Σχήμα 19: Κατοπτρισμοί από τις διαγώνιες ευθείες του οκταέδρου

Τελικά, το κανονικό οκτάεδρο διαθέτει 24 κατοπτρισμούς και κατ' επέκταση 48 συμμετρίες.

Κεφάλαιο 7:

ΤΟ ΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ

Το κανονικό δωδεκάεδρο αποτελείται από 20 κορυφές, ενώ έχει 30 ακμές, 3 ανά κορυφή. Επίσης, διαθέτει ως έδρες 12 κανονικά πεντάγωνα, τα οποία ενώνονται ανά τρία σε κάθε κορυφή του.

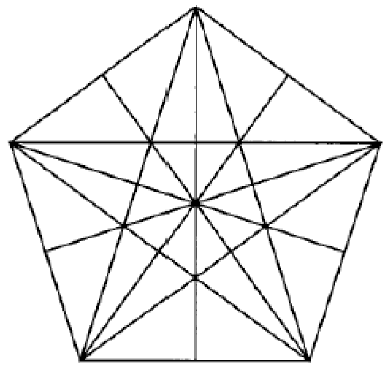


Σχήμα 20 : Το κανονικό δωδεκάεδρο

ΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟ

- 12 έδρες
- 20 κορυφές
- 30 ακμές

Αξίζει να σημειωθεί ότι, οι δώδεκα πενταγωνικές έδρες του δωδεκαέδρου συνδέθηκαν με τους δώδεκα οίκους του ζωδιακού, καθώς και με τους δώδεκα μήνες του έτους. Συγκεκριμένα, κάθε πενταγωνική έδρα αποτελείται από 30 τρίγωνα που αντιστοιχούν στους 30 βαθμούς κάθε οίκου, καθώς και στις 30 ημέρες κάθε μήνα. Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται μία πενταγωνική έδρα του κανονικού δωδεκαέδρου που αποτελείται από 30 ορθογώνια τρίγωνα:



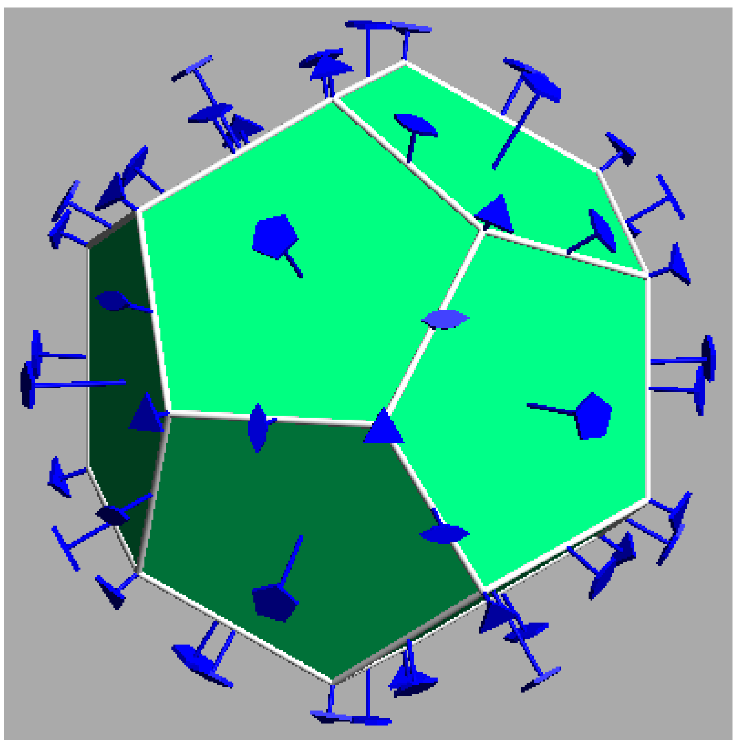
Σχήμα 21 :Πενταγωνική έδρα του κανονικού δωδεκαέδρου

Ακόμη, στο κανονικό δωδεκάεδρο εγγράφονται πέντε κύβοι , οι κορυφές των οποίων ταυτίζονται με οκτώ από τις κορυφές του δωδεκαέδρου. Επιπλέον, το δυϊκό πολύεδρο του δωδεκαέδρου είναι το εικοσάεδρο. Υπενθυμίζουμε ότι δύο πολύεδρα ονομάζονται δυικά, αν τα κέντρα των εδρών του ενός συμπίπτουν με τις κορυφές του άλλου, και αντίστροφα. Δηλαδή, εν προκειμένω, τα κέντρα των πενταγωνικών εδρών του δωδεκαέδρου αποτελούν κορυφές εικοσαέδρου, και το αντίστροφο. Οι ομάδες συμμετρίας των δυικών σωμάτων είναι οι ίδιες, δεδομένου ότι κάθε ισομετρία που αφήνει αναλλοίωτο ένα σχήμα, θα αφήνει αναλλοίωτο και το δυικό του. Στη συνέχεια θα αναλυθούν οι συμμετρίες του δωδεκαέδρου.

ΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ ΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟΥ

Η εικοσαεδρική ομάδα I_h είναι η ομάδα συμμετριών του κανονικού δωδεκαέδρου, αλλά και του εικοσαέδρου, με τάξη 120. Η εικοσαεδρική ομάδα είναι ισόμορφη με την ομάδα $A_5 \times C_2$, όπου A_5 η υποομάδα άρτιων μεταθέσεων της S_5). Θα χωρίσουμε τις συμμετρίες σε περιστροφικές συμμετρίες και κατοπτρισμούς.

Στην παρακάτω εικόνα φαίνονται, συνολικά, οι συμμετρίες του κανονικού δωδεκαέδρου.

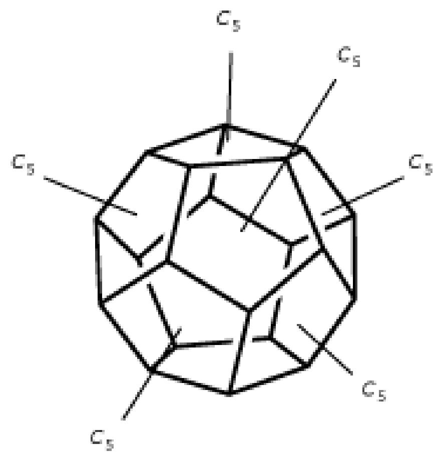


Σχήμα 22 :Οι συμμετρίες του κανονικού δωδεκαέδρου

ΟΙ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ ΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟΥ

Το δωδεκάεδρο διαθέτει τις παρακάτω περιστροφικές συμμετρίες:

Αρχικά, διαθέτει έξι άξονες περιστροφής C_5 που διέρχονται δια μέσου των κέντρων απέναντι εδρών και αντιστοιχούν στις διεργασίες $6\boldsymbol{C}_5$, $6\boldsymbol{C}_5^2$, $6\boldsymbol{C}_5^3$ και $6\boldsymbol{C}_5^4$ του παρακάτω σχήματος. Έτσι προκύπτουν 12 περιστροφές κατά 72 μοίρες, τάξης 5 και 12 περιστροφές κατά 144 μοίρες, τάξης 5.



Σχήμα 23 :Άξονες περιστροφής C_5 του δωδεκαέδρου

Επιπλέον, διαθέτει δέκα άξονες περιστροφής C_3 που διέρχονται από τα μέσα απέναντι κορυφών και αντιστοιχούν στις διεργασίες $10\boldsymbol{C}_3$ και $10\boldsymbol{C}_3^2$. Στην ουσία αποτελούν 20 περιστροφές κατά 120 μοίρες. Έτσι, προκύπτουν 20 στοιχεία τάξης τρία.

Ακόμη, το κανονικό δωδεκάεδρο έχει δεκαπέντε άξονες περιστροφής C_2 που διέρχονται δια μέσου των κέντρων απέναντι ακμών (διχοτομούν) και αντιστοιχούν στις διεργασίες $15\boldsymbol{C}_2$. Στην ουσία αποτελούν 15 περιστροφές κατά 180 μοίρες. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν 15 στοιχεία τάξης δύο.

Τέλος, η ταυτότητα αποτελεί την τελευταία από τις περιστροφικές συμμετρίες του δωδεκαέδρου. Συνεπώς, το κανονικό δωδεκάεδρο διαθέτει συνολικά 60 περιστροφικές συμμετρίες.

ΟΙ ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟΥ

Το δωδεκάεδρο διαθέτει τους παρακάτω κατοπτρισμούς:

Αρχικά, διαθέτει 12 περιστροφές-ανακλάσεις κατά 180 μοίρες, τάξης 10, οι οποίες αντιστοιχούν στις διεργασίες 12 $\boldsymbol{S}_{10}$ (ισόμορφη με την 12 $\boldsymbol{S}_{10}$).

Επιπλέον, διαθέτει 20 κατοπτρισμούς κατά 60 μοίρες, τάξης 6, οι οποίες αντιστοιχούν στις διεργασίες 20 $\boldsymbol{S}_{6}$.

Επίσης, διαθέτει 12 περιστροφές-ανακλάσεις κατά 36 μοίρες, τάξης 10, κλάση ισόμορφη με την 12 $\boldsymbol{S}_{10}^{3}$.

Ακόμη, διαθέτει 15 επίπεδα κατοπτρισμού (ανακλάσεις) τάξης 2, τα οποία αντιστοιχούν στις διεργασίες 15$\boldsymbol{\sigma}$, με σ: η ανάκλαση τάξης 2.

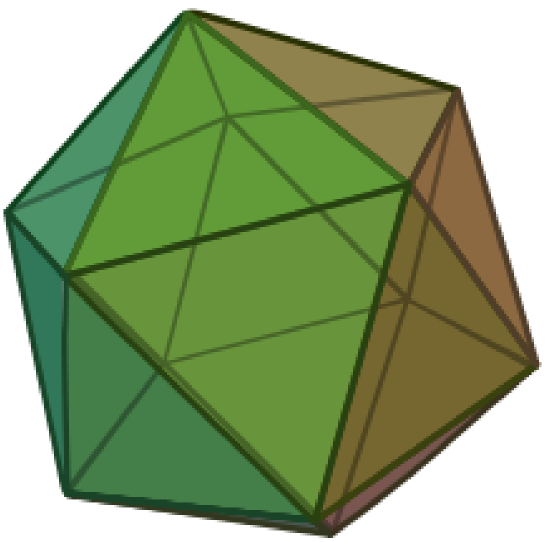
Ο τελευταίος κατοπτρισμός που παρατηρείται στο κανονικό δωδεκάεδρο είναι το κέντρο συμμετρίας (i). Το κέντρο συμμετρίας ταυτίζεται με το κέντρο μάζας του δωδεκαέδρου και αποτελεί το σημείο τομής όλων των στοιχείων συμμετρίας που έχουμε ήδη αναφέρει και αντιστοιχεί στη διεργασία ***i***. Στην ουσία αποτελεί μία αντιστροφή.

Συνεπώς, προκύπτουν 60 κατοπτρισμοί του κανονικού δωδεκαέδρου.

Κεφάλαιο 8:

ΤΟ ΕΙΚΟΣΑΕΔΡΟ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ

Το εικοσάεδρο αποτελείται από 12 κορυφές, 30 ακμές, και συγκεκριμένα 5 ακμές ανά κορυφή. Επίσης, διαθέτει ως έδρες 20 ισόπλευρα τρίγωνα, 5 ανά κορυφή.



Σχήμα 24 : Το κανονικό εικοσάεδρο

ΕΙΚΟΣΑΕΔΡΟ

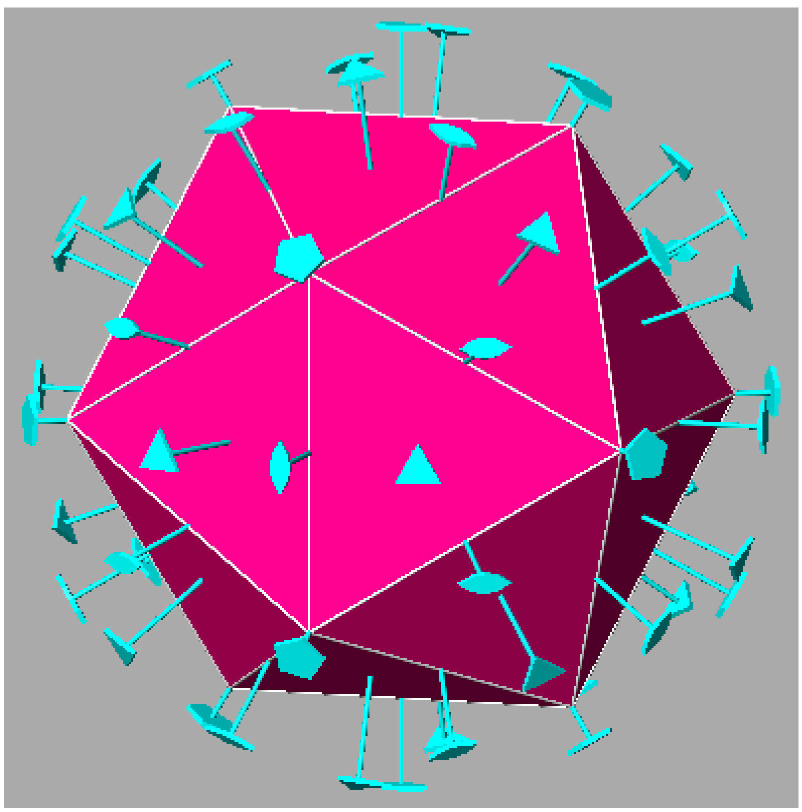
- 20 έδρες
- 12 κορυφές
- 30 ακμές

Το εικοσάεδρο, αποτελεί όπως έχουμε ήδη αναφέρει δυϊκό πολύεδρο του δωδεκαέδρου. Παρακάτω θα αναλύσουμε τις συμμετρίες του κανονικού εικοσαέδρου, οι οποίες ταυτίζονται με αυτές του δωδεκαέδρου.

ΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ ΕΙΚΟΣΑΕΔΡΟΥ

Η εικοσαεδρική ομάδα I_h , όπως προαναφέρθηκε, είναι η ομάδα συμμετριών του κανονικού δωδεκαέδρου, αλλά και του εικοσαέδρου, με τάξη 120. Η εικοσαεδρική ομάδα είναι ισόμορφη με την ομάδα $A_5 \times C_2$, όπου A_5 η υποομάδα άρτιων μεταθέσεων της S_5). Θα χωρίσουμε τις συμμετρίες σε περιστροφικές συμμετρίες και κατοπτρισμούς.

Στην παρακάτω εικόνα φαίνονται, συνολικά, οι συμμετρίες του εικοσαέδρου, οι οποίες θα περιγραφούν αναλυτικά στη συνέχεια.

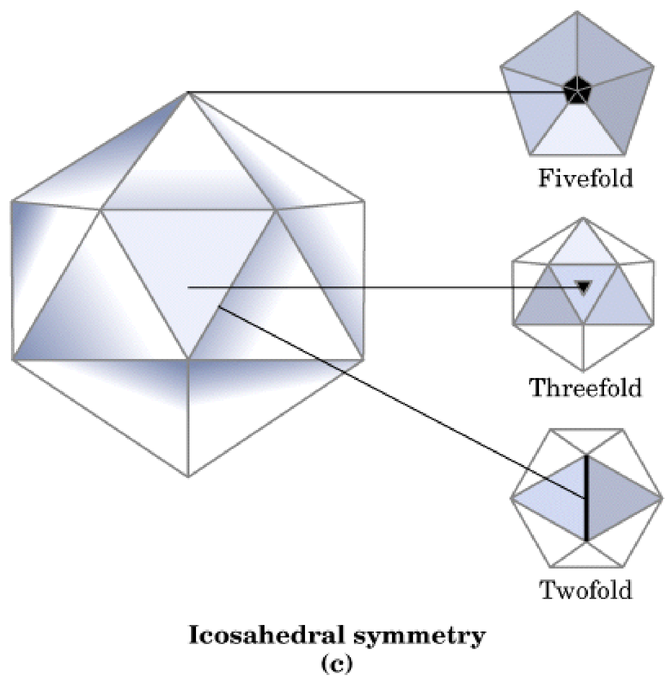


Σχήμα 25 Οι συμμετρίες του εικοσαέδρου

ΟΙ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ ΕΙΚΟΣΑΕΔΡΟΥ

Το εικοσάεδρο διαθέτει τις παρακάτω περιστροφικές συμμετρίες:

Αρχικά, διαθέτει έξι άξονες περιστροφής C_5 που διέρχονται δια μέσου των κέντρων απέναντι κορυφών του εικοσαέδρου και αντιστοιχούν στις διεργασίες $6\boldsymbol{C}_5$, $6\boldsymbol{C}_5^2$, $6\boldsymbol{C}_5^3$ και $6\boldsymbol{C}_5^4$. Έτσι προκύπτουν 12 περιστροφές κατά 72 μοίρες, τάξης 5 και 12 περιστροφές κατά 144 μοίρες, τάξης 5.



Σχήμα 26: Οι περιστροφικές συμμετρίες του εικοσαέδρου

Επιπλέον, διαθέτει δέκα άξονες περιστροφής C_3 που διέρχονται από τα μέσα απέναντι εδρών και αντιστοιχούν στις διεργασίες $10\boldsymbol{C}_3$ και $10\boldsymbol{C}_3^2$. Στην ουσία αποτελούν 20 περιστροφές κατά 120 μοίρες. Έτσι, προκύπτουν 20 στοιχεία τάξης τρία.

Ακόμη, το εικοσάεδρο έχει δεκαπέντε άξονες περιστροφής C_2 που διέρχονται δια μέσου των κέντρων απέναντι ακμών (διχοτομούν) και αντιστοιχούν στις διεργασίες $15\boldsymbol{C}_2$. Στην ουσία αποτελούν 15 περιστροφές κατά 180 μοίρες. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν 15 στοιχεία τάξης δύο.

Τέλος, η ταυτότητα αποτελεί την τελευταία από τις περιστροφικές συμμετρίες του εικοσαέδρου. Συνεπώς, το εικοσάεδρο διαθέτει συνολικά 60 περιστροφικές συμμετρίες.

ΟΙ ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΕΙΚΟΣΑΕΔΡΟΥ

Το εικοσάεδρο διαθέτει τους παρακάτω κατοπτρισμούς:

Αρχικά, διαθέτει 12 περιστροφές-ανακλάσεις κατά 180 μοίρες, τάξης 10, οι οποίες αντιστοιχούν στις διεργασίες 12 $\boldsymbol{S}_{10}$ (ισόμορφη με την 12 $\boldsymbol{S}_{10}$).

Επιπλέον, διαθέτει 20 κατοπτρισμούς κατά 60 μοίρες, τάξης 6, οι οποίες αντιστοιχούν στις διεργασίες 20 $\boldsymbol{S}_{6}$.

Επίσης, διαθέτει 12 περιστροφές-ανακλάσεις κατά 36 μοίρες, τάξης 10, κλάση ισόμορφη με την 12 $\boldsymbol{S}_{10}^{3}$.

Ακόμη, διαθέτει 15 επίπεδα κατοπτρισμού (ανακλάσεις) τάξης 2, τα οποία αντιστοιχούν στις διεργασίες 15$\boldsymbol{\sigma}$, με σ: η ανάκλαση τάξης 2.

Ο τελευταίος κατοπτρισμός που παρατηρείται εικοσάεδρο είναι το κέντρο συμμετρίας (i). Το κέντρο συμμετρίας ταυτίζεται με το κέντρο μάζας του εικοσαέδρου και αποτελεί το σημείο τομής όλων των στοιχείων συμμετρίας που έχουμε ήδη αναφέρει και αντιστοιχεί στη διεργασία ***i***. Στην ουσία αποτελεί μία αντιστροφή.

Συνεπώς, προκύπτουν 60 κατοπτρισμοί του εικοσαέδρου.

Κεφάλαιο 9:

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΠΛΑΤΩΝΙΚΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

Όλες οι έδρες ενός πλατωνικού στερεού αποτελούν ίσα κανονικά $n - γωνα$ για ένα κατάλληλο n, και όλες οι κορυφές ανήκουν σε ίδιο πλήθος j από $n - γωνα$.

Όμως, το άθροισμα των επίπεδων γωνιών σε μια κορυφή κυρτού πολύεδρου είναι μικρότερο από 2π και επειδή κάθε γωνία κανονικού $n - γώνου$ είναι ίση με $\frac{(n-2)\pi}{n}$ συνεπάγεται ότι $j\frac{(n-2)\pi}{n} < 2\pi$. Ισοδύναμα, $(j-2)(n-2) < 4$.

Επομένως, οι μόνες δυνατότητες του ζεύγους (j, n) είναι οι εξής: $(3,3), (3,4), (3,5), (4,3)$ και $(5,3)$.

Καθένα από τα παραπάνω ζεύγη αντιστοιχεί σε ένα Πλατωνικό στερεό, και συγκεκριμένα στο τετράεδρο, στον κύβο, στο δωδεκάεδρο, στο οκτάεδρο και στο εικοσάεδρο, αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 10:

Ο ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER

Έστω S μία προσανατολίσιμη, συνεκτική και τριγωνοποιήσιμη επιφάνεια χωρίς σύνορο. Ο τύπος του Euler της $X(S)$ (χαρακτηριστική του Euler), όπως ορίστηκε από τον Leonard Euler το 1752 είναι

$$\boldsymbol{X(S) = K + E - A}$$

Σχήμα 27 : Leonard Euler

όπου,

K= το πλήθος των κορυφών

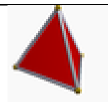
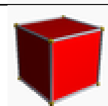
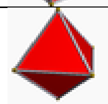
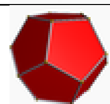
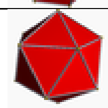
Ε= το πλήθος των εδρών

Α= το πλήθος των ακμών ενός κυρτού πολυέδρου.

Για τα κυρτά πολύεδρα είναι :

$$\boldsymbol{K + E - A = 2},$$

Το ότι όλα τα κυρτά πολύεδρα, στα οποία συμπεριλαμβάνονται και τα Πλατωνικά στερεά έχουν την ίδια χαρακτηριστική Euler, ίση με 2, όσο δηλαδή και της σφαίρας, εξηγείται από το γεγονός ότι η χαρακτηριστική Euler είναι τοπολογικός δείκτης και το κάθε πολύεδρο είναι τοπολογικά ισοδύναμο με τη σφαίρα, δηλαδή μπορεί να μετασχηματιστεί στη σφαίρα μέσω συνεχών, ελαστικών παραμορφώσεων. Παρακάτω παρουσιάζεται η χαρακτηριστική Euler για καθένα από τα πλατωνικά στερεά.

ΟΝΟΜΑ	*ΕΙΚΟΝΑ*	*ΚΟΡΥΦΕΣ*	*ΑΚΜΕΣ*	*ΕΔΡΕΣ*	*ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ EULER*
ΤΕΤΡΑΕΔΡΟ		4	6	4	2
ΚΥΒΟΣ		8	12	6	2
ΟΚΤΑΕΔΡΟ		6	12	8	2
ΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟ		20	30	12	2
ΕΙΚΟΣΑΕΔΡΟ		12	30	20	2

Κεφάλαιο 11:

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Armstrong, M.A. 1988. Groups and symmetry/ M.A. Armstrong. New York, NY.: Springer, c1988.

Goodman, Frederick M. 1998. Algebra: abstract and concrete/ Frederick M. Goodman**.** Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, c1998.

Neumann, Peter M & Stoy, Gabrielle A & Edward C. Thompson Edward C. 1994. Groups and geometry / Peter M. Neumann, Gabrielle A. Stoy and Edward C. Thompson. Oxford: Oxford University Press, 1995, c1994.

Toth, Gabor. 1988. Glimpses of algebra and geometry/ Gabor Toth. New York: Springer, c1998.

http://www.chem.auth.gr/symmetry/chapt04/point_group_04_03_04.html

https://en.wikipedia.org/wiki/Polyhedron

https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~john/geometry/Lectures/L10.html

http://www.mathpages.com/home/kmath096/kmath096.htm