«Το θεώρημα του Keeler»

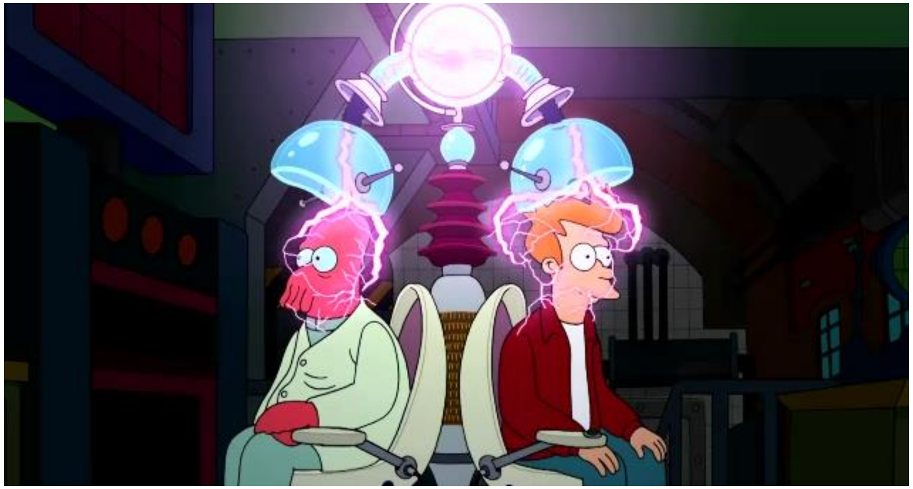
Μάντζος Γεώργιος

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών &
Φυσικών Επιστημών

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια
Κα Λαμπροπούλου Σοφία

Εισαγωγή

- Το ‘’***Prisoner of Benda***’’ είναι ένα καταξιωμένο επεισόδιο της σειράς κινουμένων σχεδίων *Futurama*, χαρακτηριστικό του οποίου είναι μια διθέσια μηχανή αλλαγής μυαλών. Κάθε ένα ζευγάρι μπορεί να εισέλθει και να χρησιμοποιήσει την μηχανή με έναν σοβαρό περιορισμό: Η μηχανή δεν μπορεί να λειτουργήσει πάνω από μια φορά για το ίδιο ζευγάρι.



Η κοινωνία της **Futurama**, έχοντας ενδώσει στην φρενίτιδα της μηχανής αλλαγής μυαλών, μας γεννάει ένα πολύ σημαντικό ερώτημα:

Το ερώτημα

- *Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μηχανή για την αποκατάσταση των μυαλών πίσω στα αρχικά σώματα;*

Η απάντηση

- Η απάντηση βρίσκεται σε αυτό που ξέρουμε ως ‘***’Το θεώρημα του Keeler”.*** Το θεώρημα αναπτύχθηκε από τον Ken Keeler, συγγραφέα του έργου, ο οποίος διαθέτει και phD στα μαθηματικά από το πανεπιστήμια του Harvard, πριν γίνει συγγραφέας-παραγωγός. Για το ‘’Prisoner of Benda” απονεμήθηκε στον Keeler το βραβείο WGA.

- Το πρόβλημα της αντιστροφής της αλλαγής μπορεί να περιγραφεί από όρους της ***Θεωρίας Ομάδων***. Τα σώματα που συμμετέχουν στην αλλαγή τα αναπαριστούμε ως { 1,2, … ,ν } .
- Η συμμετρική ομάδα S_{ν} περιέχει ν! μεταθέσεις των ν-σωμάτων.

- Μια 2-κυκλική ***(ab)*** ονομάζεται ***μεταφορά*** και αναπαριστά την μετάθεση η οποία αλλάζει τα μυαλά στα σώματα *a* και *b*.

- Μια e-κυκλική ($α_1$,…,$α_e$) είναι η μετάθεση η οποία στέλνει:

- *το μυαλό του $α_1$ στον $α_2$,*
- *το μυαλό του $α_2$ στον $α_3$,*
- …
- *το μυαλό του $α_e$ στον $α_1$.*

- Ακολουθώντας την σύμβαση υπολογίζουμε τα παράγωγα στην S_v από δεξιά στα αριστερά.

Για παράδειγμα:

$$(123) = (12)(23) = (13)(12) = (23)(13)$$

Η επιτυχής εναλλαγή μυαλών κατά τη διάρκεια της φρενίτιδας μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα παράγωγο ***P***, από σαφείς μεταφορές στην S_v. Μπορούμε όμως να δούμε την P ως μια μετάθεση. Υποθέτουμε ότι η μετάθεση αυτή είναι σημαντική, αλλιώς δεν έχει νόημα να υπολογιστεί.

- Αν υποθέσουμε ότι ο *2* αλλάζει με τον *3* και ο *1* με τον *2* τότε έχουμε:

P*= (12)(23) δηλαδή* ***P****= (123).*

- Για να αποκατασταθούν όλα τα μυαλά τα αρχικά σώματα, πρέπει να βρεθεί ένα παράγωγο ***σ*** από σαφείς μεταφορές τέτοιο ώστε ***σ·P=I*** (μοναδιαίο) και έτσι οι παράγοντες της μεταφοράς στο σώμα **σ** είναι διακριτοί από εκείνους στο σώμα **P**. Τότε λέμε ότι η **σ** λύνει την **P**.

- Μετά το πέρας της φρενίτιδας των αλλαγών, η κοινότητα ίσως να μη θυμάται την ακολουθία που έλαβε μέρος. Τότε περιμένουμε να βρούμε ένα παράγωγο σ που μας εγγυάται ότι παράγει την μετάθεση $\underline{P \in S_\nu}$, παρά τις όσες ακολουθίες μεταφορών έχουν δράσει στην *P*.Το Θεώρημα του Keeler μας υποδεικνύει πως παράγεται ένα προϊόν $\underline{\sigma \in S_{\nu+2}}$, όπου κάθε παράγοντας περιέχει τουλάχιστον μια είσοδο στο σύνολο { x,y } όπου
- $x := n+1$, $y := n+2$

όπου στην σ έχουμε ξένες (κύκλους) μεταθέσεις που δρουν στην P.

Με άλλα λόγια….

- *Μπορούμε να δούμε τα **χ** και **y** ως δύο ανθρώπους που δεν έχουν λάβει μέρος στην διαδικασία και συμμετέχουν στην συνέχεια, πρόθυμοι να αλλάξουν μυαλά ώστε να αποκατασταθεί η αρχική τάξη…*

“Η μέθοδος του Keeler”

- Θα περιγράψουμε τη μέθοδο ώστε να κατασκευάσουμε ένα παράγωγο $\sigma \in S_{n+2}$ το οποίο λύνει την **P**= $C_1 \cdots C_r$.

- Ο C είναι κύκλος $(\alpha_1 \cdots \alpha_i)$ με $\alpha_i \in \{1,2,\ldots,\nu\}$.

- Μπορούμε να δούμε ότι $\sigma_1 C_1 = (xy)$, *όπου* σ_1 *είναι το παράγωγο από (κ+2) μεταφορές οι οποίες δίνονται ως εξής:*

$$\boldsymbol{\sigma_1 = (xa_1)(xa_2)\cdot\cdot\cdot(xa_{k-1})\cdot(ya_k)(xa_k)(ya_1). \quad \{1\}}$$

- Για κάθε κύκλο C_i έχουμε ανάλογα παράγωγα σι από (κ+2) μεταφορές για κάθε $\sigma_i C_i=(xy)$ $i=1,2,\ldots,r$

- Παρατηρούμε ότι κάθε μεταφορά σ_i έχει την μορφή (xu) ή (yu) για κάποια είσοδο u στην σ_i. Οι ξένοι κύκλοι επικοινωνούν με κάθε μεταφορά στο S_v, έτσι:

- $\tau = \sigma_r \cdots \sigma_2 \sigma_1$

είναι ένα προϊόν ξένων μεταφορών για τις οποίες

$\tau P=(xy)^r$.

- Παίρνοντας:

$$\sigma = \begin{cases} (\chi y)\tau\ ,\ r\ \mu o\nu o\varsigma & \textbf{\{2\}} \\ \tau\quad ,\ r\ \zeta\upsilon\gamma\acute{o}\varsigma & \end{cases}$$

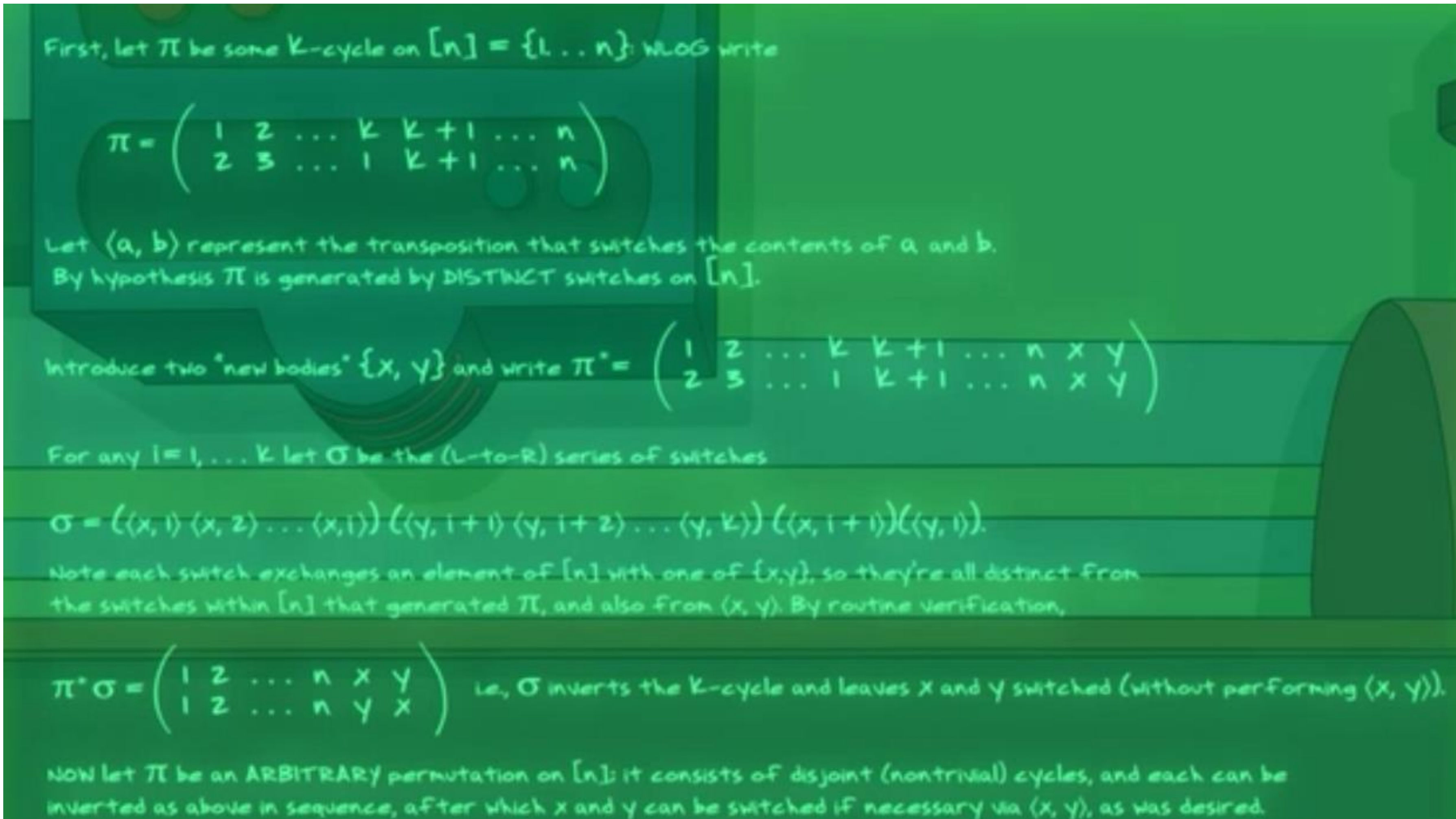
- Βρίσκουμε ότι η **σ** λύνει την **P** και η σ είναι παράγωγο ξένων μεταφορών στην $P \in S_v$ η οποία περιέχει μία τουλάχιστον από τα χ και y.

- Παρατηρώντας τις **{1}** και **{2}** βλέπουμε ότι ο αριθμός των παραγόντων στην σ της μεθόδου Keeler είναι είτε ***(n+2r+1) είτε (n+2r)*** αναλόγως αν το r είναι μονός ή ζυγός αντίστοιχα.

- Παράδειγμα: Για **r=3** έχουμε ***P=(12)(34)(56)*** και επιλύεται από τη μέθοδο του Keeler με μια μετάθεση αποτελούμενη από 13 παράγοντες μεταφοράς:

$$\sigma = (xy)(5x)(6y)(6x)(5y)(3x)(4y)(4x)(3y)(1x)(2y)(2x)(1y)$$

Η απόδειξη του θεωρήματος Keeler



THE END!