ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΑΔΡΙΑΝΗ ΝΙΚΟΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

Ο ΧΡΙΣΤΟΣ ΠΑΠΑΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΚΑΙ ΤΟ ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ DEHN

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΣΟΦΙΑ ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΑΝ. ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ Ε.Μ.Π. (Επιβλέπουσα)

ΣΠΥΡΟΣ ΑΡΓΥΡΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΣΤΑΥΡΟΣ ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Κ.Π.Α.

ΙΟΥΛΙΟΣ 2010

"Ein Flächenkomplex C_2 möge ganz in Inneren einer homogenen Mannigfaltigkeit (n>2) liegen. Auf dem C_2 möge die Kurve k ein Elementarflächenstück E_2' begrenzen. Hat E_2' auf seinem Rande keine Singularitäten, dann begrenzt k in der M_n auch ein vollig singularitätenfreies Elementarflächenstück."

M. Dehn [1910]

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το λήμμα του Dehn αποτελεί ένα από τα κορυφαία μαθηματικά προβλήματα του εικοστού αιώνα που σημάδεψε την ανάπτυξη της νεότευκτης τοπολογίας και τη σύνδεσή της με την άλγεβρα. Διατυπωμένο το 1904 σε μία φαινομενικά απλή μορφή (που στην πραγματικότητα έκρυβε τεράστιες δυσκολίες), παρέμεινε αναπόδεικτο μέχρι το 1957, ενώ είχαν μεσολαβήσει αρκετές προσπάθειες που όμως αποδεικνύονταν ανεπιτυχείς. Η οριστική απόδειξη οφείλεται σε έναν έλληνα μαθηματικό, τον Χρίστο Παπακυριακόπουλο, που έκανε τα πρώτα φοιτητικά του βήματα στο ΕΜΠ, πριν αφιερωθεί εξ ολοκλήρου στα μαθηματικά.

Το έναυσμα για την παρούσα εργασία αποτέλεσε μια επιστολή του Χρίστου Παπακυριακόπουλου προς τον καθηγητή του (στο ΕΜΠ) Νίκο Κριτικό, το Δεκέμβριο του 1953, στην οποία του εκθέτει τις έως τότε ανεπιτυχείς προσπάθειές του να αποδείξει το λήμμα του Dehn. (βλ. Παράρτημα). Ως καταληκτήριο σχόλιο στην επιστολή του αναφέρει μάλιστα ότι “με αυτά τα 'big problems' δεν γνωρίζει κανείς πότε θα επιτύχει και πότε θα βουλιάξει”. Ο ίδιος πέτυχε μετά από τρία χρόνια και το έργο του αναγνωρίστηκε με πολλαπλές βραβεύσεις και εγκωμιαστικά σχόλια.

Η εμμονή του Παπακυριακόπουλου με τα 'big problems' τον οδήγησε στη συνέχεια να ασχοληθεί με την εικασία του Poincarè, η οποία αποδείχθηκε μόλις το 2006 προσφέροντας στον ιδιόρρυθμο Ρώσο Μαθηματικό Perelman το βραβείο Fields. Όμως ο Παπακυριακόπουλος, παρόλο που δεν πέτυχε (ή δεν πρόλαβε να πετύχει αφού πέθανε σε ηλικία 62 ετών), δεν βούλιαξε. Τα ενδιάμεσα πορίσματα της έρευνάς του τον κατέταξαν “στην πρώτη γραμμή των ερευνητών [στα Μαθηματικά], οι οποίοι με τη δύναμη της μεγαλοφυΐας τους πέτυχαν καταπληκτική επέκταση του συνόρου της επιστήμης αυτής”, όπως ανέφερε σε μια ειδική μετά θάνατον τελετή στο Πανεπιστήμιο του Πρίνστον ο εκπρόσωπος της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρίας.

Η εργασία αυτή επικεντρώνεται στην διατύπωση των τριών θεωρημάτων του Παπακυριακόπουλου και τη σκιαγράφηση της απόδειξης του λήμματος του Dehn. Για το σκοπό αυτό, στο πρώτο κεφάλαιο εισάγονται κάποιες τοπολογικές και αλγεβρικές έννοιες. Ένα από τα βασικά προβλήματα στην τοπολογία είναι να καθοριστεί πότε δύο δοθέντες τοπολογικοί χώροι είναι ομοιομορφικοί ή όχι. Στη συνέχεια λοιπόν, στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται η έννοια της θεμελιώδους ομάδας, έννοια κομβικής σημασίας στην τοπολογία καθώς αποτελεί τοπολογική αναλλοίωτη, δηλαδή αν δύο χώροι είναι ομοιομορφικοί, έχουν ισομορφικές θεμελιώδεις ομάδες. Στο τρίτο κεφάλαιο, ορίζονται οι χώροι επικάλυψης και δίνονται κάποιες από τις ιδιότητες τους. Η κατασκευή ενός πύργου από χώρους επικάλυψης αποτέλεσε ένα από τα βασικά εργαλεία της απόδειξης του λήμματος του Dehn και η μελέτη τους είναι απαραίτητη για την κατανόησή της. Στο τέταρτο κεφάλαιο εισάγονται οι ομάδες ομολογιών, οι οποίες κατέχουν μία πολύ σημαντική θέση στο σύνολο των τοπολογικών αναλλοίωτων. Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο διατυπώνονται τα τρία θεωρήματα του Παπακυριακόπουλου, δίνεται μια σκιαγράφηση της απόδειξης του λήμματος του Dehn και δίνεται μια ιδιαιτέρως σημαντική εφαρμογή του στη θεωρία κόμβων, το θεώρημα του τετριμμένου κόμβου, που αποφαίνεται πότε ένας κόμβος είναι ο τετριμμένος ή όχι.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την κυρία Σοφία Λαμπροπούλου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Ε.Μ.Π., για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε και τον ενθουσιασμό της για το αντικείμενο που συνέβαλλε καθοριστικά ως κινητήριος δύναμη να προσεγγίσω ένα πολύ όμορφο πεδίο γνώσης. Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω τον Κώστα Στασινόπουλο για το χρόνο που αφιέρωσε να με βοηθήσει στην εισαγωγή των εικόνων και τη μορφοποίηση του κειμένου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 Ν- ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Απεικονίσεις

Ορισμός: Έστω X και Y σύνολα. Μία απεικόνιση f είναι ένας κανόνας με τον οποίο αντιστοιχούμε ένα $y \in Y$ για κάθε $x \in X$. Γράφουμε:

$$f : X \to Y.$$

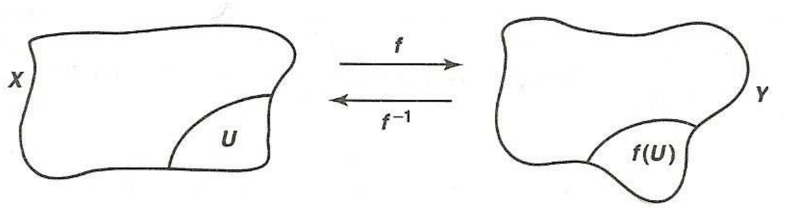
- Το υποσύνολο του X του οποίου τα στοιχεία αντιστοιχίζονται σε ένα $y \in Y$ υπό την f λέγεται αντίστροφη εικόνα του y και συμβολίζεται $f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}$.
- Το σύνολο X λέγεται πεδίο ορισμού της απεικόνισης και το Y λέγεται πεδίο τιμών της απεικόνισης.
- Η εικόνα της απεικόνισης είναι $f(X) = \{y \in Y | y = f(x) \ \textit{για κάποιο} \ x \in X\} \subset Y$ και συμβολίζεται επίσης με imf.
- Η απεικόνιση λέγεται 1-1 αν για κάθε $x_1 \neq x_2$ συνεπάγεται $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Η απεικόνιση λέγεται επί αν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$.
- Η απεικόνιση λέγεται αμφιμονοσήμαντη αν είναι 1-1 και επί.
- Η σταθερή απεικόνιση $c : X \to Y$ ορίζεται από $c(x) = y_0$ όπου y_0 είναι ένα σταθερό σημείο στο Y και x είναι ένα αυθαίρετο σημείο στο X .
- Δοθείσας μιας απεικόνισης $f : X \to Y$ έχουμε τον περιορισμό της σε ένα $A \subset X$ που συμβολίζεται $f|_A : A \to Y$.
- Δοθέντων δύο απεικονίσεων $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ η σύνθεση των f και g είναι μια απεικόνιση $g \circ f : X \to Y$ και συμβολίζεται $g \circ f(x) = g(f(x))$
- Ένα διάγραμμα απεικονίσεων λέγεται μεταθετικό αν οποιεσδήποτε συνθέσεις

απεικονίσεων μεταξύ ενός ζεύγους συνόλων δεν εξαρτώνται απο τον τρόπο που έχει γίνει η σύνθεση.

- Αν $A \subset X$ ο <u>εγκλεισμός</u> $i : A \to X$ ορίζεται από $i(a) = a, a \in A$.
- Η <u>ταυτοτική απεικόνιση</u> $id_x : X \to X$ είναι μια ειδική περίπτωση εγκλεισμού όπου $A = X$.
- Αν η απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη υπάρχει η <u>αντίστροφη απεικόνιση</u> $f^{-1} : Y \to X$ και είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη. Οι απεικονίσεις f και f^{-1} ικανοποιούν τις σχέσεις $f \circ f^{-1} = id_Y, f^{-1} \circ f = id_X$.

Ομοιομορφισμοί

<u>Ορισμός</u>: Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Μία απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι <u>ομοιομορφισμός</u> αν η f είναι 1-1, επί και οι f , f^{-1} είναι συνεχείς. Τότε, λέμε ότι οι X, Y είναι ομοιομορφικοί και γράφουμε $X \sim Y$.



<u>Ορισμός</u>: Μία απεικόνιση f είναι <u>εμφύτευση</u> αν η f είναι 1-1 και οι f , f^{-1} είναι συνεχείς.

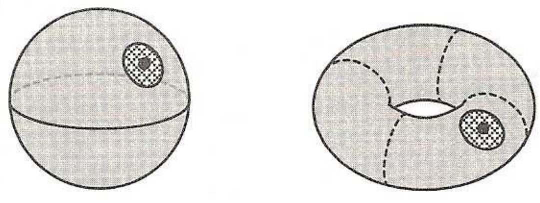
Συμβολισμοί:

- Ο Ευκλείδιος n-διάστατος χώρος συμβολίζεται με $\mathbb{R}^n$
- Ο συμπαγής n-δίσκος στον $\mathbb{R}^n$ με $|x| \leqslant 1$ συμβολίζεται με D^n
- Η μοναδιαία (n-1)-σφαίρα συμβολίζεται με S^{n-1} και ισχύει $S^{n-1} = \partial D^n$
- Ο ανοικτός n-διάστατος δίσκος $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

<u>Ορισμός</u>: Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Μία <u>n-πολλαπλότητα</u> είναι ένας χώρος Hausdorff τέτοιος ώστε κάθε σημείο έχει μια ανοικτή γειτονιά ομοιομορφική με τον U^n.

Σημείωση: Ένας τοπολογικός χώρος λέγεται Hausdorff αν για κάθε ζευγάρι x, y διαφορετικών σημείων του X , υπάρχουν ανοικτές γειτονιές U, V των x, y αντίστοιχα τέτοιες ώστε $U \cap V = \emptyset$.

Μία μονοδιάστατη πολλαπλότητα λέγεται συχνά καμπύλη και μία δισδιάστατη πολλαπλότητα λέγεται επιφάνεια. Σύμφωνα με τον ορισμό της n-διάστατης πολλαπλότητας η κοινή ιδιότητα των επιφανειών είναι πως σε κάθε σημείο της επιφάνειας υπάρχει μια μικρή περιοχή στην επιφάνεια η οποία περιβάλλει και περιέχει το σημείο και είναι ομοιομορφική με δίσκο.



Αντίστοιχα , η κοινή ιδιότητα που ικανοποιούν οι τρισδιάστατες πολλαπλότητες είναι πως γύρω από κάθε σημείο στην τρισδιάστατη πολλαπλότητα υπάρχει μία σφαίρα από σημεία που είναι κι αυτή στην τρισδιάστατη πολλαπλότητα.

Ο ευκλείδιος n-διάστατος χώρος

Το απλούστερο παράδειγμα τρισδιάστατης πολλαπλότητας είναι ο $\mathbb{R}^3$. Αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο στον $\mathbb{R}^3$ υπάρχει γύρω του μία σφαίρα με σημεία η οποία είναι επίσης στον $\mathbb{R}^3$. Αυτό ισχύει για όλους τους ευκλείδιους χώρους $\mathbb{R}^n$, δηλαδή ο $\mathbb{R}^n$ είναι n -διάστατη πολλαπλότητα.

Η μοναδιαία n-διάστατη σφαίρα

Αποδεικνύεται ότι η μοναδιαία n -διάστατη σφαίρα $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:|x|=1\}$ είναι n -διάστατη πολλαπλότητα. Είναι συνήθως αδύνατο να απεικονίσουμε τις τρισδιάστατες πολλαπλότητες στον $\mathbb{R}^3$. Όπως οι περισσότερες διδιάστατες πολλαπλότητες εμφυτεύονται σε χώρο τριών ή τεσσάρων διαστάσεων και όχι στο επίπεδο, έτσι και οι τρισδιάστατες πολλαπλότητες εμφυτεύονται σε χώρο τεσσάρων ή και παραπάνω διαστάσεων χώρο.

- Η μοναδιαία μονοδιάστατη σφαίρα (ο κύκλος) εμφυτεύεται στον $\mathbb{R}^2$ ορίζεται ως $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1\}$ και είναι ίση με ∂D^2. Επίσης προκύπτει ως η τοπολογική ένωση δυό μονοδιάστατων δίσκων.
- Αντίστοιχα η μοναδιαία δισδιάστατη σφαίρα εμφυτεύεται στον $\mathbb{R}^3$, ορίζεται ως $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=1\}$, είναι ίση με ∂D^3 και προκύπτει ως η

τοπολογική ένωση δύο δισδιάστατων δίσκων καμπυλωμένων και “κολλημένων” με ομοιομορφισμό κατα μήκος των συνόρων τους.

- Η τρισδιάστατη μοναδιαία σφαίρα εμφυτεύεται στον $\mathbb{R}^4$, ορίζεται ως $S^3=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 | x^2+y^2+z^2+w^2=1\}$. Σε αναλογία με τη μία και τις δύο διαστάσεις η τρισδιάστατη μοναδιαία σφαίρα προκύπτει ως η τοπολογική ένωση δύο τρισδιάστατων δίσκων με τα συνορά τους κολλημένα μέσω ομοιομορφισμού. Αυτό φυσικά δεν μπορεί να απεικονιστεί στον $\mathbb{R}^3$ μέσω εμφυτεύσεων.

1.2 ΤΡΙΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ-ΣΥΜΠΑΓΟΠΟΙΗΣΗ

Στις επιφάνειες:

Η τριγωνοποίηση μιας επιφάνειας S συνίσταται από μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων $\{T_1, T_2, \ldots\}$ που καλύπτουν την S και μία οικογένεια ομοιομορφισμών $\phi_i : T_{i'} \to T_i, i=1,2,\ldots$ όπου κάθε $T_{i'}$ είναι ένα τρίγωνο στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$, δηλαδή ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με σύνορο τρία ευθύγραμμα τμήματα. Τα υποσύνολα T_i ονομάζονται τρίγωνα. Τα υποσύνολα των T_i που είναι εικόνες των γωνιών και των πλευρών των $T_{i'}$ υπό την ϕ_i επίσης καλούνται γωνίες και πλευρές αντίστοιχα. Είναι αναγκαίο δύο διαφορετικά μεταξύ τους τρίγωνα, T_i και T_j ή να είναι ξένα, ή να έχουν μία κορυφή κοινή, ή να έχουν μια πλευρά κοινή.

Έχει αποδειχθεί ότι κάθε επιφάνεια που έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία της μπορεί να τριγωνοποιηθεί, είτε με πεπερασμένο είτε με άπειρο αριθμό τριγώνων. Επιφάνειες που δεν έχουν αριθμήσιμη βάση από ανοιχτά σύνολα συνήθως θεωρούνται παθολογικές.

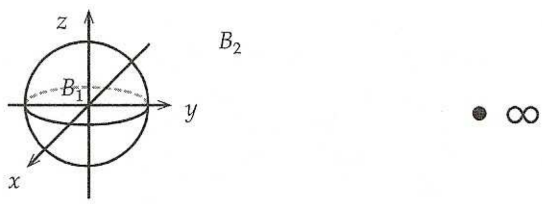
Μια επιφάνεια που μπορεί να τριγωνοποιηθεί με πεπερασμένο αριθμό τριγώνων λέγεται συμπαγής. Το απλούστερο παράδειγμα μιας συμπαγούς επιφάνειας είναι η S^2. Ένα άλλο σημαντικό παράδειγμα είναι ο τόρος. Ο τόρος μπορεί να περιγραφεί ως οποιαδήποτε επιφάνεια ομοιομορφική με την επιφάνεια ενός ντόνατ ή ενός συμπαγούς δαχτυλιδιού και ορίζεται σαν οποιοσδήποτε τοπολογικός χώρος ομοιομορφικός με το γινόμενο δύο κύκλων $S^1 \times S^1$.

Παράδειγμα μη συμπαγούς επιφάνειας είναι το επίπεδο, το οποίο προφανώς δεν μπορεί να τριγωνοποιηθεί με πεπερασμένο αριθμό τριγώνων. Ένα άλλο παράδειγμα είναι ο τόρος αφαιρώντας του έναν κλειστό δίσκο (αυτό που απομένει ικανοποιεί τον ορισμό της επιφάνειας). Πράγματι, για να τριγωνοποιηθεί αυτή η επιφάνεια θα έπρεπε να χρησιμοποιηθούν άπειρα τρίγωνα όλο και μικρότερα που να προσεγγίζουν το σύνορο του δίσκου ο οποίος έχει αφαιρεθεί.

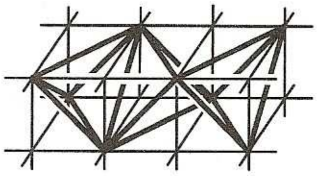
Στις τρισδιάστατες πολλαπλότητες:

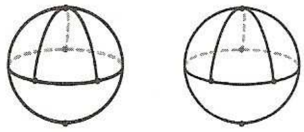
Η τριγωνοποίηση μιας τρισδιάστατης πολλαπλότητας M ορίζεται με ανάλογο τρόπο με τις επιφάνειες. Συνίσταται δηλαδή σε μια οικογένεια κλειστών συνόλων $\{K_1, K_2, \ldots\}$ που καλύπτουν την M και μια οικογένεια ομοιομορφισμών $h_i : K_{i'} \rightarrow K_i, i=1,2,\ldots$ όπου κάθε $K_{i'}$ είναι ένα τετράεδρο στον $\mathbb{R}^3$. Τα υποσύνολα $\{K_1, K_2, \ldots\}$ λέγονται τετράεδρα και δύο διαφορετικά τετράεδρα πρέπει ή να μην έχουν κανένα κοινό σημείο ή να έχουν μια γωνία κοινή, ή να έχουν μια πλευρά κοινή, ή να έχουν μια έδρα κοινή. Μία τρισδιάστατη πολλαπλότητα λέγεται συμπαγής αν μπορεί να τριγωνοποιηθεί με πεπερασμένο αριθμό τετραέδρων.

Ένας άλλος τρόπος να περιγραφούν οι n-διάστατες σφαίρες είναι αν πάρουμε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^n$ ένωση ένα ακόμα σημείο που δεν ανήκει στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο συμβολίζουμε με το σύμβολο του απείρου, ∞. Στην περίπτωση της τρισδιάστατης μοναδιαίας σφαίρας έχουμε: $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$. Η περιγραφή αυτή ανάγεται στην πρώτη ως εξής: Η τρισδιάστατη μοναδιαία σφαίρα προκύπτει ως η τοπολογική ένωση δύο τρισδιάστατων δίσκων με τα συνορά τους κολλημένα. Ο πρώτος τρισδιάστατος δίσκος, B_1, αποτελείται από όλα τα σημεία με απόσταση μικρότερη ή ίση του 1 από την αρχή των αξόνων στον $\mathbb{R}^3$ και ο δεύτερος, B_2, αποτελείται από τα σημεία με απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του 1 μαζί με το ∞ το οποίο είναι το κέντρο του. Η απόσταση ενός σημείου στον B_1 από την αρχή των αξόνων μετριέται με το συνήθη τρόπο ενώ έξω από αυτόν ορίζεται να είναι $1/d$ από το ∞ όπου d η συνήθης απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων.



Σύμφωνα με αυτήν την περιγραφή η S^3 και ο $\mathbb{R}^3$ είναι παρεμφερείς χώροι, όμως ο $\mathbb{R}^3$ μειονεκτεί στο ότι δεν είναι συμπαγής ενώ η σφαίρα S^3 είναι.





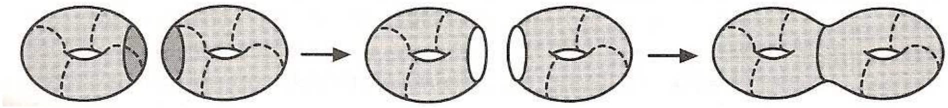
S^3

1.3 ΤΟ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ

Έστω $M_i (i=1,2)$ συνεκτικές τρισδιάστατες πολλαπλότητες. Για κάθε i παίρνουμε έναν 3-δίσκο $B_i \in int M_i$. Ακολούθως θεωρούμε τα σύνορα των δύο 3-δίσκων $S_i = \partial B_i$ και έναν ομοιομορφισμό $f: S_1 \to S_2$. Μέσω αυτού του ομοιομορφισμού ταυτίζουμε τις δύο μπάλες S_1, S_2 και κατασκευάζουμε μια νέα τρισδιάστατη πολλαπλότητα από τα $M_1 \backslash int B_1, M_2 \backslash int B_2$. Η νέα αυτή πολλαπλότητα λέγεται συνεκτικό άθροισμα των M_1, M_2 και συμβολίζεται με $M_1 \# M_2$. Μία τρισδιάστατη πολλαπλότητα M λέγεται πρώτη αν η M είναι συνεκτική και αν η M είναι ομοιομορφική με ένα συνεκτικό άθροισμα $M_1 \# M_2$ αυτό να συνεπάγεται πως μία από τις M_1, M_2 είναι ομοιομορφική με την S^3.

Για παράδειγμα, αν πάρουμε το συνεκτικό άθροισμα δύο τόρων παίρνουμε

$T^2 \# T^2 = \Sigma_2$:



Ομοίως αν πάρουμε το συνεκτικό άθροισμα g τόρων παίρνουμε $\underbrace{T^2 \# T^2 \ldots \# T^2}_{g} = \Sigma_g$

Μία επιφάνεια Σ_g που είναι το συνεκτικό άθροισμα n τόρων λέγεται ότι έχει <u>γένος</u> n.

1.4 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ EULER ΜΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

<u>Ορισμός</u>:Έστω M μία συμπαγής επιφάνεια με τριγωνοποίηση $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$. Θέτουμε:

v =αριθμός κορυφών της M

e =αριθμός ακμών της M

f =αριθμός εδρών της M

Η χαρακτηριστική Euler της M ορίζεται ως $\chi(M) = v - e + f$.

Η χαρακτηριστική Euler εξαρτάται μόνο από την επιφάνεια και όχι από την εκάστοτε τριγωνοποίηση της επιφάνειας.

<u>Παραδείγματα:</u>

- Η χαρακτηριστική Euler ενός σημείου είναι εξ' ορισμού $\chi(\cdot) = 1$
- Η χαρακτηριστική Euler μιας γραμμής είναι $\chi(\text{-}) = 2 - 1 = 1$ εφόσον η γραμμή έχει δύο κορυφές και μία πλευρά.
- Η χαρακτηριστική Euler ενός τριγώνου είναι $\chi(\textit{τριγώνου}) = 3 - 3 + 1 = 1$
- Για να υπολογίσουμε τη χαρακτηριστική Euler της S^1 θεωρούμε το απλούστερο πολύεδρο που είναι ομοιομορφικό με αυτήν, δηλαδή ένα τρίγωνο. Συνεπώς

$$\chi(S^1) = 3 - 3 = 0$$

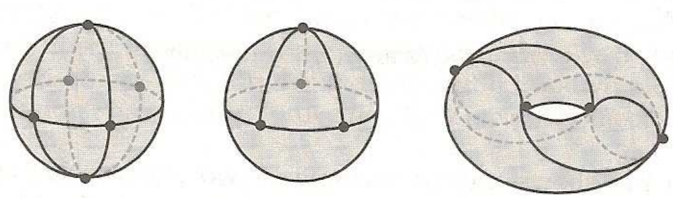
- Ομοίως για να υπολογίσουμε τη χαρακτηριστική Euler της S^2 θεωρούμε το ομοιομορφικό με αυτήν τετράεδρο κι έτσι έχουμε

$$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$$

  Θα μπορούσαμε ακόμα να θεωρήσουμε τον ομοιομορφικό με αυτήν κύβο και θα παίρναμε $\chi(S^2) = 8 - 12 + 6 = 2$, που συμφωνεί με το γεγονός ότι η χαρακτηριστική Euler είναι ανεξάρτητη από την τριγωνοποίηση, δηλαδή από το ομοιομορφικό με την επιφάνεια πολύεδρο που θα επιλέξουμε.

- Για τον τόρο, παίρνουμε ένα πολύεδρο ομοιομορφικό με τον τόρο κι από αυτό υπολογίζουμε

$$\chi(T^2) = 16 - 32 + 16 = 0$$

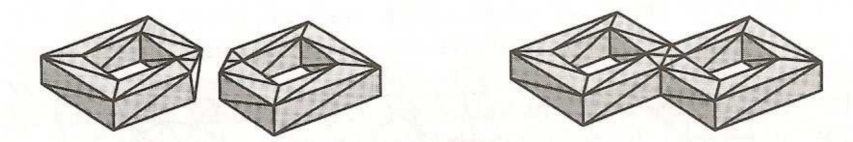


Το συνεκτικό άθροισμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε τη χαρακτηριστική Euler πιο περίπλοκων επιφανειών από ήδη γνωστές.

Θεώρημα 1.1: Έστω S_1, S_2 συμπαγείς επιφάνειες. Η χαρακτηριστική Euler του συνεκτικού τους αθροίσματος δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$$

Απόδειξη: Έστω οι τριγωνοποιήσεις των S_1, S_2. Θεωρούμε το συνεκτικό τους άθροισμα αφαιρώντας το εσωτερικό ενός τριγώνου από την καθεμία επιφάνεια και στη συνέχεια τις ενώνουμε στα συνορά τους από όπου έχουμε αφαιρέσει τα τρίγωνα. Μετρώντας γωνίες, πλευρές και έδρες προκύπτει η παραπάνω σχέση. Έτσι, η χαρακτηριστική Euler του συνεκτικού αθροίσματος n τόρων είναι $2-2$n. ■



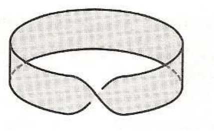
1.5 ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Οι συνεκτικές n -διάστατες πολλαπλότητες για $n>1$ χωρίζονται σε δύο είδη: προσανατολίσιμες και μη-προσανατολίσιμες.

Στις επιφάνειες:

Για κάθε σημείο στην επιφάνεια παίρνουμε γύρω του μια γειτονιά ομοιομορφική με έναν δίσκο. (Αυτό μπορεί να γίνει σε κάθε επιφάνεια από τον ορισμό της πολλαπλότητας.) Ορίζουμε σε αυτή τη γειτονιά το συνήθη προσανατολισμό. Έστω τώρα ότι ο δίσκος κυλάει στην επιφάνεια και γυρίζει στο ίδιο σημείο, διανύει δηλαδή ένα κλειστό μονοπάτι. Αν γυρίσει πίσω με αντίθετο προσανατολισμό, λέμε ότι το μονοπάτι αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι το μονοπάτι διατηρεί τον προσανατολισμό. Μια συνεκτική επιφάνεια λέγεται προσανατολίσιμη αν κάθε μονοπάτι διατηρεί τον προσανατολισμό, και μη-προσανατολίσιμη αν υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Το απλούστερο παράδειγμα μη προσανατολίσιμης επιφάνειας με σύνορο είναι η ταινία Möbius. Αν τυπώσουμε ένα βέλος < σε ένα σημείο της επιφάνειας και το σύρουμε μέχρι να ξαναφτάσει στο ίδιο σημείο θα δούμε ένα βέλος >. Μία επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη αν δεν περιέχει μία ταινία Möbius.



Στις τρισδιάστατες πολλαπλότητες:

Για κάθε σημείο στην τρισδάστατη πολλαπλότητα παίρνουμε γύρω του μια γειτονιά U ομοιομορφική με τον 3-δίσκο. Ορίζουμε στην U το συνήθη προσανατολισμό του δεξιόστροφου κοχλία. 'Ενα κλειστό μονοπάτι στην τρισδιάστατη πολλαπλότητα λέγεται ότι διατηρεί τον προσανατολισμό αν, μετακινώντας την U κατά μήκος του μονοπατιού, γυρίζει στο αρχικό σημείο με την ίδια επιλογή προσανατολισμού. Διαφορετικά, λέγεται ότι αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Κατά αναλογία με τις επιφάνειες, μία συνεκτική τρισδιάστατη πολλαπλότητα λέγεται προσανατολίσιμη αν κάθε μονοπάτι διατηρεί τον προσανατολισμό και μη-προσανατολίσιμη αν υπάρχει τουλαχιστον ένα μονοπάτι που αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Μία 3-πολλαπλότητα είναι προσανατολίσιμη αν δεν περιέχει το καρτεσιανό γινόμενο μιας τανίας Möbius με ένα διάστημα.

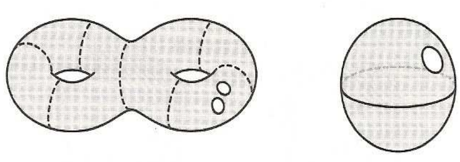
1.6 ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΣΥΝΟΡΟ

Ο ορισμός μιας πολλαπλότητας με σύνορο είναι μια γενίκευση του ορισμού της πολλαπλότητας.

Ορισμός: Μία n-διάστατη πολλαπλότητα με σύνορο είναι ένας χώρος Hausdorff τέτοιος ώστε κάθε σημείο έχει μια ανοικτή γειτονιά ομοιομορφική είτε με τον ανοικτό δίσκο U^n είτε με το χώρο $\{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in U^n : x_1 \geqslant 0\}$

- Το σύνορο μιας n -διάστατης πολλαπλότητας M συμβολίζεται με θM και είναι το σύνολο από σημεία που έχουν μια ανοικτή γειτονιά ομοιομορφική με τον $\{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in U^n : x_1 \geqslant 0\}$.
- Το εσωτερικό μιας n -διάστατης πολλαπλότητας συμβολίζεται με $IntM$ και είναι το $M \setminus \theta M$, δηλαδή το σύνολο από σημεία που έχουν μια ανοικτή γειτονιά ομοιομορφική με τον U^n.

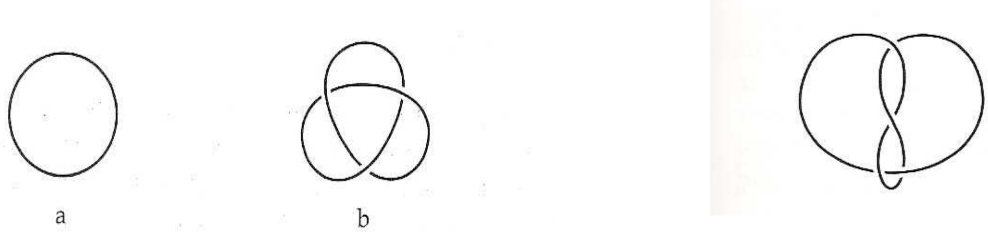
Ο κλειστός δίσκος $D^n = \{x \in R^n : |x| \leqslant 1\}$ είναι μια n -διάστατη πολλαπλότητα με σύνορο. Η σφαίρα S^{n-1} είναι το σύνορο του και ο ανοικτός δίσκος U^n είναι το εσωτερικό του. Αν από μία επιφάνεια χωρίς σύνορο αφαιρέσουμε το εσωτερικό μιας συλλογής δίσκων αφήνοντας τα σύνορα τους στην επιφάνεια, παίρνουμε μία επιφάνεια με σύνορο. Τα σύνορα των δίσκων αποτελούν τα σύνορα της επιφάνειας, λέγονται συνιστώσες συνόρου και είναι πάντα συμπαγείς, συνεκτικές μονοδιάστατές πολλαπλότητες, δηλαδή κύκλοι.



1.7 ΚΟΜΒΟΙ ΚΑΙ ΚΡΙΚΟΙ

Ορισμός: Ένα υποσύνολο K ενός χώρου τοπολογικού χώρου X λέγεται κόμβος αν είναι ομοιομορφικό με μια σφαίρα S^p. Το K λέγεται κρίκος αν είναι ομοιομορφικό με μια ένωση δύο ή παραπάνω σφαιρών $S^p \cup \ldots \cup S^p$ ξένων μεταξύ τους.

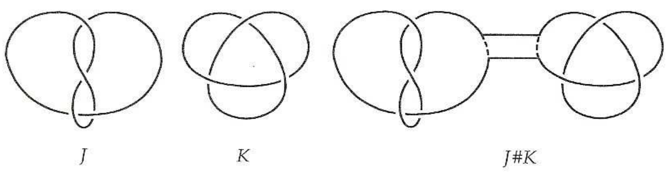
- Δύο κόμβοι ή κρίκοι K, K' λέγονται ισοτοπικοί αν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : X \to X$ τέτοιος ώστε $h(K) = K'$. Συμβολικά γράφουμε $K \sim K'$. Συνήθως παίρνουμε το χώρο X να είναι ο $\mathbb{R}^n$ ή ο S^n. Για κόμβους και κρίκους συνδιάστασης 2 εμφυτεύεται μια S^1 ή μια ένωση $S^1 \cup \ldots \cup S^1$, αντίστοιχα, στον $\mathbb{R}^3$ ή στον S^3.
- Το απλούστερο παράδειγμα κόμβου είναι ο κύκλος και ονομάζεται τετριμμένος κόμβος. Άλλα απλά παραδείγματα κόμβων είναι ο κόμβος trefoil και ο κόμβος figure-8. Το απλό ερώτημα αν ένας δοθείς κόμβος είναι ή όχι ο τετριμμένος, παραμένει ακόμα αναπάντητο.



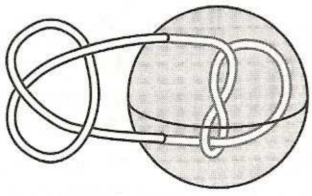
a b

- Μία συνάρτηση $I : \{κόμβοι\ και\ κρίκοι\} \to L$, όπου το σύνολο L μπορεί να αποτελείται από σύμβολα, αριθμούς πολυώνυμα κλπ, λέγεται αναλλοίωτη κόμβων αν ισχύει: $K_1 \sim K_2 \Rightarrow I(K_1) = I(K_2)$. Το πρόβλημα της ταξινόμησης κόμβων θα λυνόταν με την εύρεση μιας πλήρους αναλλοίωτης, δηλαδή αν για μία I ισχύει $I(K_1) = I(K_2) \Rightarrow K_1 \sim K_2$.

- Ο χώρος $\overline{X \setminus N(K)}$ είναι το συμπλήρωμα του κόμβου όπου $N(K)$ μια γειτονιά του κόμβου K. Συνήθως το συμβολίζουμε με $X \setminus K$. Το συμπλήρωμα ενός κόμβου είναι ένα παράδειγμα τρισδιάστατης πολλαπλότητας με σύνορο. Επίσης, εξ' ορισμού της ισοτοπίας, είναι μια αναλλοίωτη κόμβων. Το αντίστροφο δεν είναι προφανές, αλλά ισχύει για κόμβους (Gordon και Luecke, 1989) και όχι για κρίκους.
- Δοθέντων δύο κόμβων J, K ορίζουμε έναν καινούριο κόμβο αφαιρώντας ένα μικρό τόξο από τον καθένα και ενώνοντας τα τέσσερα άκρα. Ονομάζουμε τον καινούριο κόμβο σύνθεση των δύο κόμβων και τον συμβολίζουμε J#K.



- Ένας κόμβος λέγεται σύνθετος αν μπορεί να εκφραστεί σαν σύνθεση δύο κόμβων όπου κανένας από τους δύο να μην είναι ο τετριμμένος. Από τους σύνθετους κόμβους προκύπτει ένα παράδειγμα επιφάνειας με σύνορο. Αν έχουμε έναν σύνθετο κόμβο υπάρχει μία σφαίρα με δύο συνιστώσες συνόρου έξω από τον κόμβο. Αυτή η επιφάνεια λέγεται κυκλικός δακτύλιος. Ένας κυκλικός δακτύλιος προκύπτει δηλαδή από την S^2 αφαιρώντας δύο δίσκους.



1.8 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Ομομορφισμοί

Έστω G, G' δύο ομάδες. Μία απεικόνιση φ μιας ομάδας G σε μια ομάδα G' λέγεται <u>ομομορφισμός</u> αν $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)\ \forall a, b\in G.$ Αυτόματα ικανοποιούνται οι σχέσεις $\varphi(e)=e', \varphi(a^{-1})=\varphi(a)^{-1}$ όπου e, e' είναι τα ταυτοτικά στοιχεία των G, G' αντίστοιχα.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\varphi: G\rightarrow G'$ ένας ομομορφισμός ομάδων. Η υποομάδα $\varphi^{-1}(\{e'\})$ που αποτελείται από όλα τα στοιχεία της G που απεικονίζονται μέσω της φ στο ταυτοτικό στοιχείο e' της G' λέγεται <u>πυρήνας</u> της $\varphi,$ και συμβολίζεται $Ker(\varphi).$

- Ένας ομομορφισμός $\varphi: G\rightarrow G'$ που είναι 1-1 λέγεται <u>μονομορφισμός</u> και ισχύει αν και μόνο αν $Ker(\varphi)=\{e\}.$
- Ένας ομομορφισμός $\varphi: G\rightarrow G'$ με τον οποίο απεικονίζεται η G επί της G' λέγεται <u>επιμορφισμός</u>.
- Ένας ομομορφισμός $\varphi: G\rightarrow G'$ που είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός λέγεται <u>ισομορφισμός</u>. Συμβολίζεται $G\simeq G'.$

Σύμπλοκα

<u>Ορισμός</u>: Έστω H μια υποομάδα μιας ομάδας $G.$ Το υποσύνολο $aH=\{ah|h\in H\}$ της G λέγεται το <u>αριστερό σύμπλοκο</u> της H που περιέχει το $a,$ ενώ το $Ha=\{ha|h\in H\}$ της G λέγεται το <u>δεξιό σύμπλοκο</u> της H που περιέχει το $a.$

Η υποομάδα H λέγεται <u>κανονική υποομάδα</u> της G αν $x\cdot h\cdot x^{-1}\in H, \forall x\in G\ \text{και}\ \forall h\in H.$ Ισοδύναμα, έχουμε $xH=Hx, \forall x\in G$ _ δηλαδή τα αριστερά και τα δεξιά της σύμπλοκα συμπίπτουν.

<u>Θεώρημα 1.2</u>: Έστω $\varphi: G\rightarrow G'$ ένας ομομορφισμός ομάδων με πυρήνα $H.$ Τότε τα σύμπλοκα της H αποτελούν μια ομάδα, την $G/H,$ που λέγεται ομάδα-πηλίκο της G ως προς $H.$ Η διμελής πράξη της G/H ορίζει το γινόμενο $(aH)(bH)$ δύο συμπλόκων με επιλογή στοιχείων a και b από τα σύμπλοκα, και την ισότητα $(aH)(bH)=(ab)H.$ Η απεικόνιση $\mu: G/H\rightarrow\varphi(G)$ που ορίζεται από την $\mu(aH)=\varphi(a)$ είναι ισομορφισμός, δηλαδή $G_1/kerf\simeq imf.$ Έστω, αντιστρόφως, H μια κανονική υποομάδα της G. Τότε η $\gamma: G\rightarrow G/H$ που ορίζεται από την $\gamma(x)=xH,$

είναι ένας ομομορφισμός με πυρήνα την H.

Κυκλικές ομάδες

Αν μία ομάδα G έχει έναν γεννήτορα, x, τότε η G λέγεται <u>κυκλική ομάδα</u>. Αν $nx \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, η G είναι άπειρη κυκλική ομάδα, ισομορφική με την $\mathbb{Z}$, ενώ αν $nx = 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, η G είναι πεπερασμένη κυκλική ομάδα, ισομορφική με την $\mathbb{Z}_n$.

Ελεύθερες αβελιανές ομάδες

<u>Ορισμός</u>: Μια αβελιανή ομάδα G με ένα μη κενό σύνολο γεννητόρων X λέγεται <u>ελεύθερη αβελιανή ομάδα</u> και το X λέγεται <u>βάση</u> της ομάδας αν ικανοποιεί τις παρακάτω ισότιμες συνθήκες:

- Κάθε μη μηδενικό στοιχείο a της G γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $a = n_1 x_1 + n_2 x_2 \ldots n_r x_r$ όπου n_i μη μηδενικός ακέραιος και τα x_i ανά δύο διαφορετικά στοιχεία του X.
- Το X παράγει την G και ισχύει $n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_r x_r = 0$ όπου $n_i \in \mathbb{Z}$ και τα x_i ανά δύο διαφορετικά στοιχεία του X, αν και μόνο αν $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 0$.

<u>Παραδείγματα</u>:

- Η ομάδα $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ είναι ελεύθερη αβελιανή και το $\{(1,0),(0,1)\}$ είναι μια βάση της. Όμοια, μια βάση της ελεύθερης αβελιανής ομάδας $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ είναι το $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Γενικά τα πεπερασμένα ελεύθερα γινόμενα της ομάδας $\mathbb{Z}$ με τον εαυτό της είναι ελεύθερες αβελιανές ομάδες.
- Η ομάδα $\mathbb{Z}_n$ δεν είναι ελεύθερη αβελιανή, αφού $nx = 0, \forall x \in \mathbb{Z}_n$ *και* $n \neq 0$.

Ελεύθερες ομάδες

Έστω A οποιοδήποτε σύνολο με στοιχεία $a_i, i \in I$. Το A ονομάζεται <u>αλφάβητο</u> και τα a_i <u>γράμματα</u>. Κάθε σύμβολο της μορφής $a_i^n, n \in \mathbb{Z}$ λέγεται <u>συλλαβή</u> και μία πεπερασμένη ακολουθία συλλαβών ονομάζεται <u>λέξη</u>. Σε μια λέξη οι συλλαβές γράφονται η μία δίπλα στην άλλη στη μορφή του κλασικού γινομένου. Κάθε συλλαβή είναι από μόνη της λέξη, μια λέξη με μία συλλαβή. Μια συλλαβή μπορεί να επαναληφθεί ή και να ακολουθείται από μια συλλαβή από το ίδιο γράμμα. Ορίζουμε την μοναδική λέξη χωρίς συλλαβές, την <u>κενή λέξη</u> και τη συμβολίζουμε με 1. Δεχόμαστε ότι το a_i είναι το ίδιο με το a_i^1. Ένα παράδειγμα λέξης είναι η $a_2^{-5} a_4^2 a_4^{-1} a_1^3$.

Στο σύνολο $W(A)$ όλων των λέξεων που σχηματίζονται από το αλφάβητο A ορίζεται με φυσιολογικό τρόπο το γινόμενο δύο λέξεων απλά παραθέτοντας τις δύο λέξεις τη μία δίπλα στην άλλη.

Θεωρούμε το σύνολο $A \cup A^{-1} = \{a_i^{\pm 1} | a_i \in A\}$. Υπάρχουν δύο τρόποι τροποποίησης των λέξεων, που ονομάζονται <u>στοιχειώδεις συστολές</u> (αντίστοιχα διαστολές). Σύμφωνα με τον πρώτο αντικαθιστούμε $a_i^m a_i^n = a_i^{m+n}$ και σύμφωνα με το δεύτερο αντικαθιστούμε $a_i^0 = 1$.

- Αν μια λέξη u είναι της μορφής $w_1 a_i^0 w_2$ όπου w_1, w_2 λέξεις, λέμε ότι η λέξη $v = w_1 w_2$ προκύπτει από τη u από μια στοιχειώδη συστολή τύπου 1.
- Αν μια λέξη u είναι της μορφής $w_1 a_i^p a_i^q w_2$ όπου w_1, w_2 λέξεις, λέμε ότι η λέξη $w_1 a_i^{p+q} w_2$ προκύπτει από τη u από μια στοιχειώδη συστολή τύπου 2.

Με εφαρμογή πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών συστολών κάθε λέξη τροποποιείται σε μια <u>ανηγμένη λέξη</u>, δηλαδή σε μια λέξη που δεν μπορεί να υποβληθεί σε περαιτέρω στοιχειώδεις συστολές.

Οι λέξεις u και v λέγονται <u>ισοδύναμες</u>, συμβολικά $u \sim v$ αν η μία μπορεί να προκύψει από την άλλη μετά από εφαρμογή πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών συστολών και διαστολών. Συμβολίζουμε με $[u]$ την κλάση ισοδυναμίας που αντιπροσωπεί η λέξη u. Συμβολίζουμε με $F(A)$ το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας των λέξεων.

<u>Σημείωση</u>: Δοθέντος ενός μη κενού συνόλου S μία σχέση ~ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

- (Ανακλαστική) $a \sim a$
- (Συμμετρική) $a \sim b$ τότε $b \sim a$
- (Μεταβατική) Αν $a \sim b$ και $b \sim c$ τότε $a \sim c$

λέγεται <u>σχέση ισοδυναμίας</u> στο S. Η ~ ορίζει μία διαμέριση του S σε υποσύνολα $[\alpha]$ που αποτελούνται από όλα τα στοιχεία $x \in S$ τέτοια ώστε $x \sim a$. Κάθε τέτοιο υποσύνολο

$$[a]=\{x\in S | x\sim a\}$$

ονομάζεται κλάση ισοδυναμίας.

Αποδεικνύεται ότι το $F(A)$ είναι ομάδα με την πράξη που επάγεται από το $W(A)$ και ορίζεται $[u][v]=[uv]$. Η ομάδα $F(A)$ λέγεται ελεύθερη ομάδα του αλφαβήτου A. Επιτρέπουμε το αλφάβητο να είναι κενό και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε την τετριμμένη ελεύθερη ομάδα. Η ελεύθερη ομάδα σε ένα αλφάβητο με ένα μόνο γράμμα είναι μια άπειρη κυκλική ομάδα.

Έστω G μια ομάδα και $A=\{a_i | i\in I\}$ ένα σύνολο γεννητόρων. Αν η G είναι ισόμορφη με την $F(A)$ μέσω μιας $\varphi: G\rightarrow F(A), \varphi(a_i)=a_i$ τότε η G λέγεται ελεύθερη ως προς A και τα a_i λέγονται ελεύθεροι γεννήτορες της G. Μια ομάδα G λέγεται ελεύθερη αν είναι ελεύθερη ως προς ένα μη κενό σύνολο A.

Παράσταση ομάδας

Η παράσταση μιας ομάδας G είναι ένα ζεύγος $(S,\{r_j\})$ αποτελούμενο από ένα σύνολο γεννητόρων της G και ένα σύνολο σχέσεων μεταξύ αυτών των γεννητόρων. Η παράσταση λέγεται πεπερασμένη στην περίπτωση που τόσο το S όσο και το $\{r_j\}$ είναι πεπερασμένα σύνολα και η ομάδα G λέγεται πεπερασμένα παραστώμενη στην περίπτωση που έχει τουλάχιστον μία πεπερασμένη παράσταση.

Παράδειγμα: Η κυκλική ομάδα τάξης n έχει παράσταση μέ έναν γεννήτορα x και μία σχέση $x^n=1$.

Θεώρημα 1.3 (Θεώρημα των πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων): Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα είναι ισόμορφη με ένα ευθύ γινόμενο κυκλικών ομάδων της μορφής

$$\mathbb{Z}_{p_1^{r_1}}\times\mathbb{Z}_{p_2^{r_2}}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{p_n^{r_n}}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z},$$

όπου p_i είναι πρώτοι, όχι αναγκαστικά διαφορετικοί ανά δύο. Το ευθύ γινόμενο είναι μοναδικό, αν εξαιρέσουμε πιθανές αναδιατάξεις των παραγόντων. Το πλήθος των παραγόντων $\mathbb{Z}$ ορίζεται μονοσήμαντα και λεγεται βαθμός της ομάδας ή αριθμός Betti, και οι δυνάμεις των πρώτων $(p_i)^{r_i}$ είναι μοναδικές.

2. Η ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΟΜΑΔΑ

2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΟΜΑΔΑΣ

Ορισμός: Δοθέντων δύο σημείων x, y σε ένα χώρο X, ένα μονοπάτι από το x στο y είναι μία συνεχής απεικόνιση $f:[a,b]\to X$ ενός κλειστού διαστήματος του $\mathbb{R}$ στον X, τέτοια ώστε $f(a)=x$ και $f(b)=y$.

Οι εικόνες x, y των άκρων του διαστήματος a, b λέγονται άκρα του μονοπατιού και το μονοπάτι λέγεται ότι ενώνει τα άκρα. Το σημείο x λέγεται αρχικό σημείο και το σημείο y λέγεται τελικό σημείο. Θεωρούμε για ευκολία το διάστημα $[a,b]$ να είναι το $I=[0,1]$. Ένας χώρος X λέγεται κατά δρόμους συνεκτικός αν για κάθε $x, y\in X$ υπάρχει μονοπάτι στον X που να τα συνδέει.

Σημείωση: Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται συνεκτικός αν δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση $X=A\cup B$ όπου A, B ανοικτά μη κενά ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X.

Πρόταση 2.1: Έστω X συνεκτικός χώρος και Y τοπολογικός χώρος και έστω $f:X\to Y$ συνεχής. Τότε η εικόνα του X μέσω της f, $f[X]\subset Y$ είναι συνεκτική.

Απόδειξη: Έστω ότι $f[X]\subset Y$ δεν είναι συνεκτικό τότε $\exists U, V\subset Y$ ανοιχτά τέτοια ώστε $U'=U\cap f[X]\neq\emptyset$, $V'=V\cap f[X]\neq\emptyset$ και $f[X]=U'\cup V'$, f συνεχής και $f^{-1}(U'), f^{-1}(V')\subset X$ ανοιχτά. Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(U')=f^{-1}(U\cap f[X])=f^{-1}(U)\cap X=f^{-1}(U)$. Ομοίως $f^{-1}(V')=f^{-1}(V)$. Όμως $f[X]=U'\cup V'\Rightarrow X=f^{-1}(U')\cup f^{-1}(V')=f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)$ όπου $f^{-1}(U), f^{-1}(V)\neq\emptyset$ και $f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=f^{-1}(U')\cap f^{-1}(V')=\emptyset$ που συνεπάγεται ότι ο X δεν είναι συνεκτικός, άτοπο. ■

Πρόταση 2.2 (Χαρακτηρισμός συνεκτικότητας): Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Ο X είναι συνεκτικός
2. Τα μοναδικά ανοικτά-κλειστά σύνολα του X είναι τα $\emptyset, X$.

Απόδειξη: $1\Rightarrow 2$: Έστω ότι ο X είναι συνεκτικός και ένα σύνολο U ανοικτό-κλειστό τέτοιο ώστε $\emptyset\neq U\subsetneq X$. Τότε θα έχουμε για το συμπλήρωμα του V,

$\varnothing \neq V = X \setminus U \not\subseteq X$, ανοικτό ως συμλήρωμα κλειστού και ισχύει $X = U \cup (X \setminus U) = U \cup V$ άτοπο αφού ο X είναι συνεκτικός.

$2 \Rightarrow 1$: Έστω ότι ο X δεν είναι συνεκτικός. Τότε υπάρχουν U, V ανοικτά τέτοια ώστε $X = U \cup V$. Τότε το U είναι διάφορο του κενού και του X και επιπλέον είναι ανοιχτό και κλειστό (ως συμπλήρωμα του ανοικτού V) στο X, άτοπο από υπόθεση.

■

Ένας κατά δρόμους συνεκτικός χώρος είναι συνεκτικός αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Πράγματι, έστω ένας χώρος X ο οποίος είναι κατά δρόμους συνεκτικός και δεν είναι συνεκτικός. Έστω $X = A \cup B$ και $f : [a, b] \rightarrow X$ ένα μονοπάτι στον X. Το σύνολο $f([a, b])$ είναι συνεκτικό ως συνεχής εικόνα συνεκτικού επομένως είναι υποσυνολο είτε του A είτε του B. Άρα δεν υπάρχει μονοπάτι που να συνδέει ένα σημείο του A με ένα σημείο του B, που αντιβαίνει στην υπόθεση ότι ο X είναι κατά δρόμους συνεκτικός.

<u>Ορισμός</u>: Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και f, f' συνεχείς απεικονίσεις από τον X στον Y. Λέμε ότι οι f, f' είναι ομοτοπικές αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $F : X \times I \rightarrow Y$ τέτοια ώστε

$$F(x, 0) = f(x) \, \textit{και} \, F(x, 1) = f'(x)$$

Τότε λέμε ότι η F είναι μία <u>ομοτοπία</u> που συνδέει τις f, f' και γράφουμε $f \simeq f'$.

Η ομοτοπία είναι μία οικογένεια απεικονίσεων μίας παραμέτρου από το χώρο X στο χώρο Y και αναπαριστά μία σταδιακή παραμόρφωση της απεικόνισης f στην απεικόνιση f' όσο το t πηγαίνει απ' το 0 στο 1 (θεωρούμε το t να αναπαριστά το χρόνο).

<u>Ορισμός</u>: Δύο μονοπάτια $f : [0,1] \rightarrow X$ και $f' : [0,1] \rightarrow X$ λέγονται <u>κατά δρόμους ομοτοπικά</u> αν έχουν το ίδιο αρχικό σημείο x και το ίδιο τελικό σημείο y και αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $F : I \times I \rightarrow X$ τέτοια ώστε

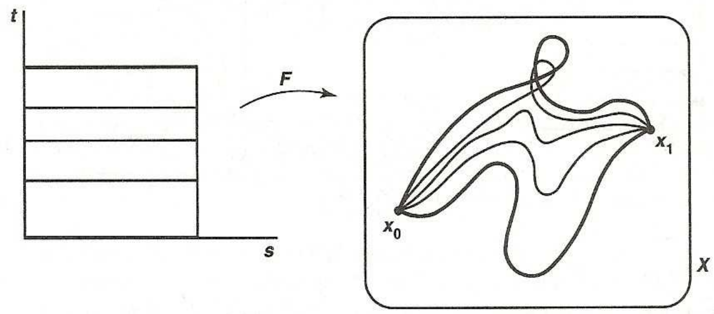
$$F(s, 0) = f(s) \quad \text{και} \quad F(s, 1) = f'(s)$$

$$F(0, t) = x \quad \text{και} \quad F(1, t) = y$$

για κάθε $s \in I$ και για κάθε $t \in I$. Τότε, λέμε την F <u>κατά δρόμους ομοτοπία</u> μεταξύ των f και f'.

Οι δύο πρώτες συνθήκες λένε ότι η F είναι μια ομοτοπία μεταξύ των μονοπατιών f και f' δηλαδή ότι η F μας δίνει ένα συνεχή τρόπο να μετατραπεί σταδιακά το

f σε f' καθώς το t πηγαίνει από το 0 στο 1. Οι δύο δεύτερες συνθήκες λένε ότι κατά την μετατροπή του μονοπατιού f σε f' τα άκρα παραμένουν σταθερά.



<u>Πρόταση 2.3</u>: Η σχέση της ομοτοπίας και η σχέση της κατά δρόμους ομοτοπίας σε ένα χώρο είναι σχέσεις ισοδυναμίας. Η κλάση ισοδυναμίας του μονοπατιού f με τη σχέση ισοδυναμίας της κατά δρόμους ομοτοπίας συμβολίζεται με $[f]$ και λέγεται κλάση κατά δρόμους ομοτοπίας του f.

<u>Ορισμός</u>: Έστω f ένα μονοπάτι από το x στο y, και g ένα μονοπάτι από το y στο z. Τότε ορίζουμε το <u>γινόμενο</u> h των δύο μονοπατιών ως εξής:

$$h(s)=f(2s) \ \text{για} \ s\in[0,1/2]$$

$$h(s)=g(2s-1) \ \text{για} \ s\in[1/2,1]$$

και το συμβολίζουμε με $f*g$. Η συνάρτηση h είναι ένα μονοπάτι από το x στο z και το πρώτο του μισό είναι το μονοπάτι f, ενώ το δεύτερο μισό είναι το μονοπάτι g.

Η πράξη του γινομένου μονοπατιών εισάγει μια καλά ορισμένη πράξη στις κατά δρόμους κλάσεις ομοτοπίας που ορίζεται από την ισότητα $[f]*[g]=[f*g]$. Η πράξη του γινομένου μονοπατιών στις κατά δρόμους κλάσεις ομοτοπίας ικανοποιεί τη μεταβατική ιδιότητα, έχει αριστερό και δεξιό ουδέτερο στοιχείο και αντίστροφο. Παρ' όλα αυτά το σύνολο των κατά δρόμους κλάσεων ομοτοπίας με την παραπάνω πράξη δεν αποτελεί ομάδα γιατί το $[f]*[g]$ δεν ορίζεται για οποιοδήποτε ζεύγος κλάσεων αλλά μόνο για αυτά για τα οποία $f(1)=g(0)$. Έστω όμως ότι επιλέγουμε ένα σημείο x_0 και περιοριζόμαστε στα κλειστά μονοπάτια $f:I\to X$ με $f(0)=f(1)=x_0$. Τότε το σύνολο αυτών των κατά δρόμους κλάσεων ομοτοπίας με την πράξη του γινομένου μονοπατιών αποτελεί ομάδα.

<u>Ορισμός</u>: Έστω ένας τοπολογικός χώρος X και ένα σημείο $x_0\in X$. Ένα μονοπάτι που

το αρχικό και το τελικό σημείο ταυτίζονται και είναι το x_0 λέγεται <u>βρόγχος</u> και το x_0 λέγεται <u>σημείο στήριξης</u> ή <u>βάση</u>.

<u>Ορισμός</u>: Έστω ένας χώρος X και ένα σημείο x_0. Το σύνολο των κατά δρόμους κλάσεων ομοτοπίας των βρόγχων στον X με σημείο στήριξης το x_0 με την πράξη του γινομένου μονοπατιών λέγεται <u>θεμελιώδης ομάδα</u> του χώρου X στο σημείο στήριξης x_0 και συμβολίζεται $\pi_1(X, x_0)$.

<u>Πρόταση 2.4</u>: Η θεμελιώδης ομάδα είναι ανεξάρτητη του σημείου στήριξης σε κατα τόξα συνεκτικούς χώρους. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $\pi_1(X)$ αντί για $\pi_1(X, x_0)$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ένας τοπολογικός χώρος X ο οποίος είναι συνεκτικός κατά τόξα, $x_1 \in X, h$ μονοπάτι από το x_0 στο x_1 και $\bar{h}$ μονοπάτι από το x_1 στο x_0 με $\bar{h}(s) = h(1-s), s \in I$. Τότε, αν f βρόγχος με βάση το x_1, $h \cdot f \cdot \bar{h}$ είναι βρόγχος με βάση το x_0. Έχουμε λοιπόν μια απεικόνιση από την $\pi_1(X, x_1)$ στην $\pi_1(X, x_0)$.

<u>Ισχυρισμός</u>: Η απεικόνιση $\beta_h : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ που ορίζεται μέσω της $\beta_h([f]) = [h \cdot f \cdot \bar{h}]$ είναι ισομορφισμός.

Πράγματι, έστω $[f], [g] \in \pi_1(X, x_1)$.

Υπολογίζουμε $\beta_h([f \cdot g]) = [h \cdot f \cdot g \cdot \bar{h}] = [h \cdot f \cdot \bar{h} \cdot h \cdot g \cdot \bar{h}] = [h \cdot f \cdot \bar{h}][h \cdot g \cdot \bar{h}] = \beta_h([f]) \beta_h([g])$

άρα η β_h είναι ομομορφισμός ομάδων.

Πρέπει ακόμα να δείξουμε ότι η $\beta_{\bar{h}}$ είναι η αντίστροφη της β_h.

Έστω ένα $[h] \in \pi_1(X, x_0)$. Για $\beta_{\bar{h}}[h] = [\beta_{\bar{h}}] \cdot [h] \cdot [\beta_h]$ υπολογίζουμε

$$\beta_h(\beta_{\bar{h}}[h]) = [\beta_h] \cdot [\beta_{\bar{h}}] \cdot [h] \cdot [\beta_h] \cdot [\beta_{\bar{h}}] = [h]$$

Επομένως η β_h είναι ισομορφισμός. ■

Από τον ορισμό κι από την παραπάνω ιδιότητα προκύπτει ότι η θεμελιώδης ομάδα είναι τοπολογική αναλλοίωτη του X, δηλαδή, αν δύο χώροι είναι ομοιομορφικοί οι θεμελιώδεις τους ομάδες είναι ισομορφικές.

<u>Ορισμός</u>: Ένας χώρος X λέγεται <u>απλά συνεκτικός</u> αν είναι συνεκτικός κατά δρόμους και επιπλέον ισχύει $\pi_1(X) = \{e\}$.

<u>Πρόταση 2.5</u>: Ο X είναι απλά συνεκτικός αν και μόνον αν για κάθε δύο σημεία του X υπάρχει μοναδική κλάση ομοτοπίας μονοπατιών που τα συνδέει.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω X απλά συνεκτικός και έστω δύο μονοπάτια h_1, h_2 με ίδιο αρχικό και τελικό σημείο. Θέλουμε να δείξουμε ότι ανήκουν στην ίδια κλάση ομοτοπίας. Έχουμε ότι $h_1 \simeq h_1 \cdot \bar{h}_2 \cdot h_2 \simeq h_2$ εφόσον $h_1 \cdot \bar{h}_2 \in \pi_1(X) = \{e\}$. Συνεπώς $[h_1] = [h_2]$ για οποιαδήποτε μονοπάτια που συνδέουν δύο ίδια σημεία του X. ■

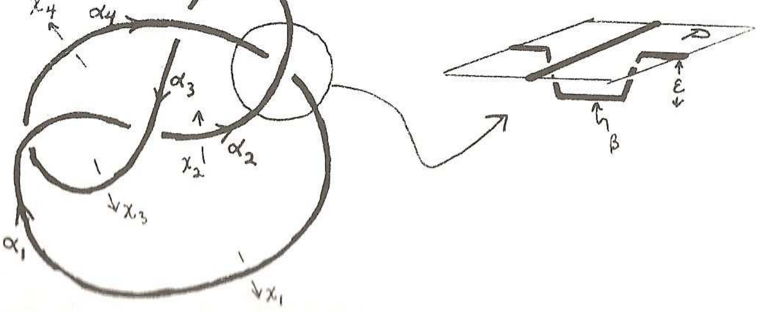
<u>Ορισμός</u>: Έστω K^{n-2} ένας κόμβος στον $\mathbb{R}^n$. Η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus K)$ του συμπληρώματος λέγεται ομάδα του κόμβου K. Η ομάδα είναι ισομορφικά ίδια αν θεωρήσουμε τον κόμβο K στην S^n αντί για τον $\mathbb{R}^n$.

2.2 Η ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ WIRTINGER

<u>Θεώρημα 2.6</u>: Δοθέντος ενός κόμβου K η θεμελιώδης ομάδα του έχει μία παράσταση της μορφής:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = (x_1, \ldots x_n ; r_1, \ldots r_n)$$

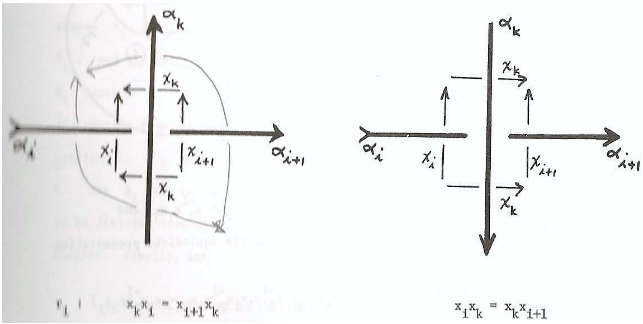
η οποία προκύπτει ως εξής: δίνουμε έναν προσανατολισμό στον κόμβο και αριθμούμε τα τόξα ανάμεσα σε δύο κάτω διασταυρώσεις. Έτσι έχουμε έναν πεπερασμένο αριθμό τόξων $a_1, \ldots a_n$ καθένα a_i από τα οποία ενώνεται με τα τόξα a_{i-1} και a_{i+1} $(mod n)$. Η ένωση όλων των τόξων είναι ο κόμβος K. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε ένα βέλος x_i που να περνάει κάτω από κάθε τόξο a_i με προσανατολισμό από δεξιά προς τα αριστερά ως προς τον προσανατολισμό του a_i (βλ. Παρακάτω σχήμα). Παίρνουμε ένα φανταστικό βασικό σημείο $h_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ και θεωρούμε τους βρόγχους στον $\mathbb{R}^3 \setminus K$ που συνίστανται από τα προσανατολισμένα τρίγωνα που πηγαίνει από το h_0 στην ουρά του κάθε βέλους, κατά μήκος του βέλους ως την αρχή του και πίσω στο h_0.



Για κάθε διασταύρωση που περνάει από πάνω της ένα a_i γράφουμε τη σχέση που ισχύει μεταξύ των τριών βελών x_i που αντιστοιχούν στα τρία τόξα που συναντώνται στη διασταύρωση. Αυτή η σχέση θα είναι είτε:

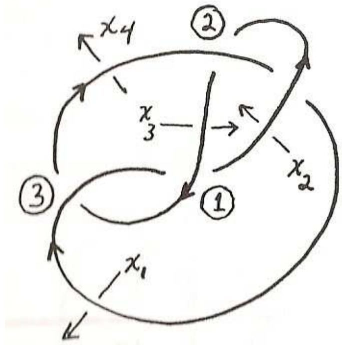
$$x_k x_i = x_{i+1} x_k \quad \text{είτε} \quad x_i x_k = x_k x_{i+1}$$

όπου a_k το τόξο που περνάει πάνω από τη διασταύρωση που συναντώνται τα a_i και a_{i+1} (βλ. Παρακάτω σχήμα).



Η σχέση που τελικά ισχύει για κάθε διασταύρωση συμβολίζεται με r_i. Υπάρχουν ακριβώς n σχέσεις $r_1, \ldots, r_n$ από τις οποίες κάποια από αυτές ίσως να μη δίνει παραπάνω πληροφορία.

- <u>Ο τετριμμένος κόμβος</u>: Υπάρχει ένα μόνο τόξο a_1 και ένα βέλος x_1. Η παράσταση της ομάδας του κύκλου είναι $\pi_1(R^3 \setminus K) = (x_1;)$, άπειρη κυκλική.
- *<u>O figure-8</u>*: Για τον figure-8 έχουμε τα τόξα a_1, a_2, a_3, a_4 τα βέλη x_1, x_2, x_3, x_4 και προκύπτουν οι σχέσεις



$$r_1: \ x_3 x_1 = x_1 x_4$$

$$r_2: \ x_2 x_4 = x_1 x_2$$

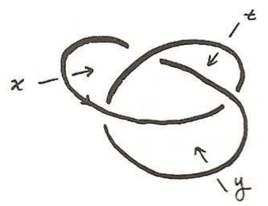
$$r_3: \ x_1 x_3 = x_3 x_2$$

$$r_4: \ x_4 x_2 = x_3 x_4$$

Παραλείποντας την r_2 ως συνέπεια των άλλων τριών και γράφοντας τα x_2, x_4 ως προς τα x_1, x_3 παίρνουμε την παράσταση:

$$\pi_1(R^3 \setminus figure-8) \simeq (x_1, x_3 ; x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3 = x_3 x_1^{-1} x_3 x_1)$$

- <u>Ο κόμβος trefoil:</u> Έχουμε τα βέλη x, y, z και προκύπτουν οι σχέσεις



$x z = z y, y x = x z.$ Γράφουμε τη δεύτερη $z = x^{-1} yx$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη παίρνουμε $yx = x^{-1} yxy.$ Επομένως παίρνουμε την παράσταση

$$\pi_1(R^3 \setminus trefoil) = (x, y ; xyx = yxy)$$

2.3 ΕΠΑΓΟΜΕΝΟΙ ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ

<u>Πρόταση 2.7</u>: Έστω $h:(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ μία συνεχής απεικόνιση τοπολογικών χώρων. Τότε η h επάγει έναν ομομορφισμό:

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

μέσω της: $h_*([f]) = [h \circ f].$

<u>Απόδειξη</u>:

- Η h_* είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $[f] = [f']$ στην $\pi_1(X, x_0)$ τότε υπάρχει ομοτοπία μεταξύ τους, έστω $F: I \times I \rightarrow X.$ Τότε η σύνθεση $h \circ F$ είναι ομοτοπία από το $h \circ f$ στο $h \circ f'.$

- Ο h_* είναι ομομορφισμός. Πράγματι, έχουμε:

$$(f*g)(s)=f(2s) \text{ για } s\in[0,1/2]$$
$$(f*g)(s)=g(2s-1) \text{ για } s\in[1/2,1].$$

Επίσης:

$$h((f*g)(s))=h(f(2s)) \text{ για } s\in[0,1/2]$$
$$h((f*g)(s))=h(g(2s-1)) \text{ για } s\in[1/2,1].$$

Επομένως $h\circ(f*g)$ ισούται με τη σύνθεση $(h\circ f)*(h\circ g)$. Συνεπάγεται ότι

$$h_*([f]*[g])=h_*([f])*h_*([g])$$

επομένως ο h_* είναι ομομορφισμός. ■

Ο επαγόμενος ομομορφισμός h_* δεν εξαρτάται μόνο από την απεικόνιση $h:X\to Y$ αλλά και από την επιλογή του σημείου στήριξης. Αν έχουμε δύο διαφορετικά σημεία στήριξης του X δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύμβολο h_* για δύο διαφορετικούς ομομορφισμούς οι οποίοι έχουν πεδία ορισμού $\pi_1(X,x_0)$ και $\pi_1(X,x_1)$ αντίστοιχα. Επιπλέον αν $id:(X,x_0)\to(X,x_0)$ η ταυτοτική απεικόνιση, τότε προφανώς ο επαγόμενος ομομορφισμός id_* είναι η ταυτοτική απεικόνιση στην $\pi_1(X,x_0)$.

<u>Πρόταση 2.8</u>: Αν έχουμε τις συνεχείς απεικονίσεις $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ και $h:(Y,y_0)\to(Z,z_0)$ τότε $(k\circ h)_*=k_*\circ h_*$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $[f]\in\pi_1(X,x_0)$. Τότε έχουμε:

$$(k\circ h)_*([f])=[(k\circ h)\circ f]=[k\circ(h\circ f)]=k_*([h\circ f])=k_*(h_*([f]))=(k_*\circ h_*)([f]) \quad . \quad ■$$

<u>Πρόταση 2.9</u>: Αν $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ είναι ομοιομορφισμός, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός $h_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ είναι ισομορφισμός.

<u>Απόδειξη</u>: Αφού ο h είναι ομοιομορφισμός ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση $k:(Y,y_0)\to(X,x_0)$. Τότε

$$k_*\circ h_*=(k\circ h)_*=id_{\pi_1(X,x_0)}$$
$$h_*\circ k_*=(h\circ k)_*=id_{\pi_1(Y,y_0)}$$

Αυτό σημαίνει ότι ο k_* είναι η αντίστροφη απεικόνιση του h_* , άρα ο h_* είναι 1-1 και επί, δηλαδή ισομορφισμός. ■

2.4 ΣΥΣΤΟΛΕΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ορισμός: Μία συστέλλουσα παραμόρφωση του X στο $A \subset X$ είναι μια απεικόνιση $F: X \times I \to X$ τέτοια ώστε

$$F(x,0)=x, \forall x \in X$$

$$F(x,1) \in A, \forall x \in X$$

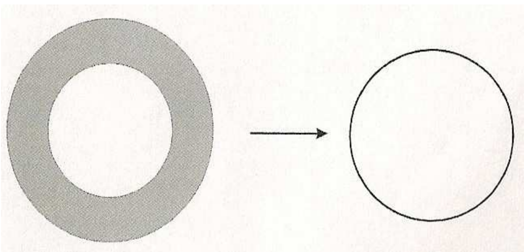
$$F(a,t)=a, \forall a \in A, \forall t \in I$$

Τότε λέμε ότι ο A είναι συστολή παραμόρφωσης του X.

Παράδειγμα: Έστω ο κυκλικός δακτύλιος $R=\{r\mathrm{e}^{i\theta} | 1 \leqslant r \leqslant 2\}$, το υποσύνολό του $A=\{\mathrm{e}^{i\theta}\}$ και την απεικόνιση $F: R \times I \to R$ *με* $F(r\mathrm{e}^{i\theta})=(t+(1-t)r)\mathrm{e}^{i\theta}$. Έχουμε:

$$F(r\mathrm{e}^{i\theta},0)=r\mathrm{e}^{i\theta}$$
$$F(r\mathrm{e}^{i\theta},1)=\mathrm{e}^{i\theta} \in A$$
$$F(\mathrm{e}^{i\theta},t)=\mathrm{e}^{i\theta}$$

Άρα η F είναι μία συστέλλουσα παραμόρφωση του δατύλιου R στο σύνολο A (βλ. Παρακάτω σχήμα).



Ορισμός: Έστω $A \subset X$. Μία συστολή του X στον A είναι μια απεικόνιση $r: X \to A$ τέτοια ώστε $r(X)=A$ και $r(a)=a, \forall a \in A.$

Παράδειγμα: Αν $x_0 \in X$ τότε η σταθερή απεικόνιση $r: X \to \{x_0\}$ είναι μια συστολή.

Ορισμός: Μία απεικόνιση $f: X \to Y$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία αν υπάρχει $g: Y \to X$ τέτοια ώστε $f \circ g \simeq 1_Y, g \circ f \simeq 1_X$ όπου $1_X, 1_Y$ οι ταυτοτικές απεικονίσεις των X, Y αντίστοιχα. Οι τοπολογικοί χώροι X, Y λέγονται ομοτοπικά ισοδύναμοι αν υπάρχει $f: X \to Y$ ομοτοπική ισοδυναμία.

- Η ομοτοπική ισοδυναμία είναι μία σχέση ισοδυναμίας.
- Ο n-δίσκος D^n είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με ένα σημείο.
- Αν $A \subset X$ είναι συστολή παραμόρφωσης του X, τότε οι A, X είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι.

Ορισμός: Λέμε ότι ο χώρος X είναι συσταλτός αν ο X είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με ένα σημείο.

Άρα, αν ο X είναι συσταλτός τότε ο X είναι απλά συνεκτικός.

3. ΧΩΡΟΙ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ

3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΧΩΡΩΝ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ

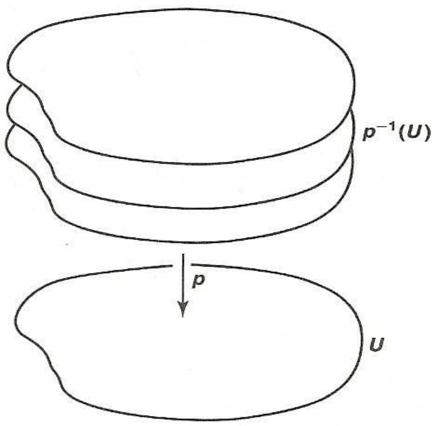
Ορισμός: Έστω X, $\tilde{X}$ τοπολογικοί χώροι, έστω $p:\tilde{X}\to X$ μία συνεχής απεικόνιση και έστω ότι ο $\tilde{X}$ είναι κατά δρόμους συνεκτικός. Αν κάθε σημείο του $x\in X$ έχει μια ανοικτή γειτονιά U τέτοια ώστε η αντίστροφη εικόνα $p^{-1}(U)$ να μπορεί να γραφεί σαν ένωση ξένων ανοικτών συνόλων V_α στον $\tilde{X}$ τέτοια ώστε για κάθε δείκτη α, ο περιορισμός της p στο V_α να είναι ομοιομορφισμός του V_α με το U, ο p λέγεται χάρτης επικάλυψης και ο $\tilde{X}$ χώρος επικάλυψης του X.

Η συλλογή $\{V_\alpha\}$ λέγεται μια διαμέριση του $p^{-1}(U)$ σε "φέτες" (slices).

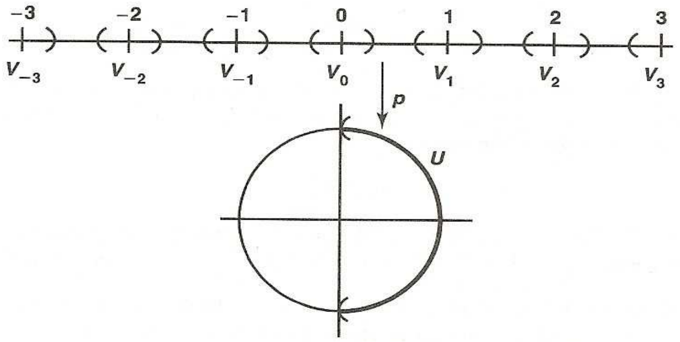
Κάθε ανοικτή γειτονιά U στον X που ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη λέγεται γειτονιά επικάλυψης.

Παραδείγματα:

- Αν S διακριτό σύνολο έχουμε $p: X\times S\to X$



- Κύκλος. Η απεικόνιση $p:\mathbb{R}\to S^1$ που δίνεται από την εξίσωση $p(x)=(cos2\pi x, sin2\pi x)$ είναι ένας χάρτης επικάλυψης. Ο p μπορεί να απεικονιστεί σαν μια συνάρτηση που τυλίγει τον άξονα των πραγματικών στον κύκλο S^1 και στην πράξη αντιστοιχεί κάθε διάστημα $[n, n+1]$ στον S^1. Κάθε ανοιχτό υποδιάστημα του S^1 μπορεί να παίξει το ρόλο της γειτονιάς επικάλυψης (βλ. Παρακάτω σχήμα).



- Κύκλος. Ο χάρτης $p:S^1 \to S^1$ που δίνεται από την εξίσωση $p_n(1,\theta)=(1,n\theta)$ όπου (r,θ) πολικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^2$ και n οποιοσδήποτε ακέραιος, θετικός ή αρνητικός. Ο χάρτης p_n τυλίγει τον κύκλο γύρω από τον εαυτό του n φορές. Και πάλι, κάθε ανοιχτό υποδιάστημα του S^1 μπορεί να παίξει το ρόλο της γειτονιάς επικάλυψης.
- Έστω X ένα υποσύνολο του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από τους παρακάτω δύο κύκλους, οι οποίοι εφάπτονται σε ένα σημείο $X=C_1 \cup C_2$ όπου:

$$C_1=\{(x,y):(x-1)^2+y^2=1\}$$
$$C_2=\{(x,y):(x+1)^2+y^2=1\}$$

Έστω $\tilde{X}$ το σύνολο όλων των σημείων (x,y) του $\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε το x ή το y (ή και τα δύο) να είναι ακέραιος. Ο $\tilde{X}$ είναι η ένωση οριζοντίων και κάθετων γραμμών. Ορίζουμε το χάρτη $p:\tilde{X} \to X$ που δίνεται από την εξίσωση

$$p(x,y)=(1+\cos(\pi-2\pi x),\sin(2\pi x)) \quad \text{αν } y \text{ ακέραιος}$$
$$p(x,y)=(-1+\cos(2\pi y),\sin(2\pi y)) \quad \text{αν } x \text{ ακέραιος}$$

Ο χάρτης p τυλίγει κάθε οριζόντια γραμμή γύρω από τον κύκλο C_1 και κάθε κάθετη γραμμή γύρω από τον κύκλο C_2. Ο X είναι χώρος επικάλυψης του $\tilde{X}$.

- Ένας άλλος χώρος επικάλυψης του ίδιου χώρου μπορεί να βρεθεί ορίζοντας τον παρακάτω χώρο:

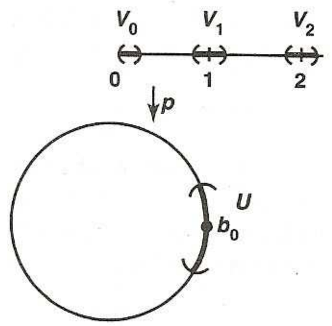
$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-3n)^2 = 1\} \text{ , } n \text{ ακέραιος}$$
$$L = \{(x, y) : x = 0\}$$
$$\tilde{X} = L \cup D$$
$$\text{όπου } D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$$

Ορίζουμε ακόμα τον χάρτη $p: \tilde{X} \to X$ που τυλίγει κάθε κύκλο D_n ομοιομορφικά επί του C_1 (του παραπάνω παραδείγματος) μέσω μιας κάθετης μετατόπισης και την γραμμή L γύρω από τον κύκλο C_2 σύμφωνα με την εξίσωση:

$$p(0, y) = (-1 + \cos(2\pi y/3), \sin(2\pi y/3)).$$

- Έστω η απεικόνιση $p: \mathbb{R}_+ \to S^1$ που δίνεται από την εξίσωση

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$



Η απεικόνιση αυτή είναι επιμορφισμός και τοπικά ομοιομορφισμός. Παρ' όλα αυτά δεν είναι χάρτης επικάλυψης για το σημείο $(1,0)$, το οποίο δεν έχει γειτονιά U που να καλύπτεται από τον p. Η τυπική γειτονιά του $(1,0)$ έχει αντίστροφη εικόνα που αποτελείται από μικρές γειτονιές V_n για κάθε n θετικό ακέραιο και μία ακόμα γειτονιά V_0 της μορφής $(0, \varepsilon)$. Κάθε ανοικτό διάστημα V_n για $n > 0$ απεικονίζεται ομοιομορφικά επί του U μέσω του χάρτη p, αλλά το διάστημα V_0 απλώς εμφυτεύεται στο U μέσω της p (δεν είναι επί). Αυτό το παράδειγμα μας δείχνει ότι η συνθήκη του τοπικού ομοιομορφισμού του χάρτη p δεν επαρκεί για να είναι ο p χάρτης επικάλυψης.

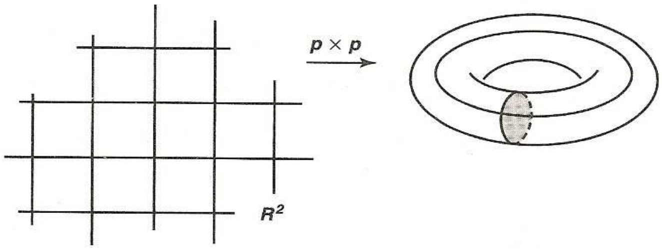
<u>Θεώρημα 3.1</u>: Αν $p: X \to X'$ και $p': Y \to Y'$ είναι προβολές επικάλυψης, τότε ο

$$p \times p' : X \times Y \to X' \times Y'$$

είναι μία προβολή επικάλυψης. Ο χάρτης $p \times q$ ορίζεται ως $(p \times q)(x, y) = (px, qy)$. Αν

U είναι μια στοιχειώδης γειτονιά του σημείου $x \in X$ και V μια στοιχειώδης γειτονιά του σημείου $y \in Y$ τότε $U \times V$ είναι μια στοιχειώδης γειτονιά του $(x, y) \in X \times Y$.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω ο χώρος $T = S^1 \times S^1$ που λέγεται τόρος. Ο χάρτης γινόμενο $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ είναι ένα κάλυμμα του τόρου από το επίπεδο $\mathbb{R}^2$. Κάθε μοναδιαίο τετράγωνο $[n, n+1] \times [m, m+1]$ τυλίγεται από τον $p \times p$ στον τόρο (βλ. Παρακάτω σχήμα).



<u>Πρόταση 3.2</u>: Έστω $(\tilde{X}, p)$ χώρος επικάλυψης του X. Η απεικόνιση

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

είναι μονομορφισμός. Η υποομάδα $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ αποτελείται από τους βρόγχους γ με βάση το x_0 που ανυψώνονται σε βρόγχους με βάση το $\tilde{x}_0$.

<u>Πρόταση 3.3</u>: Αν $p : \tilde{X} \to X$ προβολή επικάλυψης, τότε ο πληθάριθμος $Card(p^{-1}(x))$ είναι τοπικά σταθερός, δηλαδή για κάθε $x \in X$ υπάρχει U ανοιχτή γειτονιά του x τέτοια ώστε για κάθε $y \in U$ ισχύει

$$Card(p^{-1}(y)) = Card(p^{-1}(x))$$

Επομένως αν ο X είναι συνεκτικός, τότε ο $Card(p^{-1}(x))$ είναι σταθερός. Ο αριθμός αυτός λέγεται <u>αριθμός καλυμμάτων της επικάλυψης.</u>

<u>Απόδειξη</u>: Το σύνολο των σημείων $y \in Y$ με $Card(p^{-1}(y)) = Card(p^{-1}(x))$ είναι ανοικτό. Το συμπλήρωμά του είναι επίσης ανοιχτό. Αυτά τα δύο είναι ξένα και ο X είναι συνεκτικός, συνεπώς

$$\{y \in Y \ \mu\varepsilon \ Card(p^{-1}(y)) = Card(p^{-1}(x))\} = X \quad \blacksquare$$

3.2 Η ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΟΜΑΔΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Ορισμός: Αν $(\tilde{X}, p)$ χώρος επικάλυψης του X και $f: Y \to X$ απεικόνιση, τότε μία ανύψωση της f είναι μια απεικόνιση $\tilde{f}: Y \to \tilde{X}$, τέτοια ώστε $f = p \circ \tilde{f}$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Θεώρημα 3.4: Έστω $(\tilde{X}, p)$ χώρος επικάλυψης του X. Έστω $f: Y \to X$ μία απεικόνιση, όπου Y συνεκτικός χώρος. Αν για δύο ανυψώσεις $\tilde{f}, \tilde{g}: Y \to \tilde{X}$ της f ισχύει $\tilde{f}(y_0) = \tilde{g}(y_0)$ για κάποιο σημείο y_0 στον Y, τότε $\tilde{f} = \tilde{g}$.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι το υποσύνολο του Y, για το οποίο οι απεικονίσεις είναι ίσες είναι ανοικτό, και ότι το συμπλήρωμα αυτού του συνόλου, στο οποίο οι απεικονίσεις διαφέρουν, είναι επίσης ανοικτό. Επειδή αυτά τα δύο είναι ξένα και ο Y είναι συνεκτικός, το σύνολο για το οποίο οι απεικονίσεις είναι ίσες θα είναι το $\varnothing$ (άτοπο από υπόθεση) ή ολόκληρο το Y. Έστω $w \in \{y_0 \in Y | \tilde{f}(y_0) = \tilde{g}(y_0)\}$. Επιλέγουμε $N \subset X$ ανοικτή γειτονιά του $p \circ \tilde{f}(w), p \circ \tilde{g}(w)$ η οποία είναι ομαλά καλυμμένη από την p. Παίρνω $p^{-1}(N)$ να είναι η ξένη ένωση ανοικτών N_a τέτοια ώστε για κάθε a η $p|N_a : N_a \to N$ να είναι ένας ομοιομορφισμός. Επειδή η εικόνα συνεκτικού συνόλου υπό συνεχή συνάρτηση είναι συνεκτικό σύνολο και οι $\tilde{f}, \tilde{g}$ είναι συνεχείς, θα πρέπει να απεικονίζουν μία γειτονιά V του w στο ίδιο N_a. Επειδή όμως οι $\tilde{f}, \tilde{g}$ είναι ανυψώσεις ισχύει ότι $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$. Συνεπώς θα πρέπει να είναι ίσες στο V, δηλαδή το $\{y_0 \in Y | \tilde{f}(y_0) = \tilde{g}(y_0)\}$ είναι ανοικτό σύνολο αφού για τυχαίο $w \in \{y_0 \in Y | \tilde{f}(y_0) = \tilde{g}(y_0)\}$ υπάρχει ανοικτή γειτονιά του V με $V \subset \{y_0 \in Y | \tilde{f}(y_0) = \tilde{g}(y_0)\}$. Όμοια αν το $w \in \{y_0 \in Y | \tilde{f}(y_0) \neq \tilde{g}(y_0)\}$ οι $\tilde{f}, \tilde{g}$ θα πρέπει να απεικονίζουν μία ανοικτή γειτονιά του V σε διαφορετικά, συνεπώς ξένα, N_a. Έτσι θα πρέπει να είναι διαφορετικά στο V και συνεπώς το $\{y_0 \in Y | \tilde{f}(y_0) \neq \tilde{g}(y_0)\}$ είναι ανοικτό. ■

Λήμμα Lebesque 3.5: Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $\{U_a\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0 : \forall x \in X \; B_\varepsilon(x) \subset U_a$ για κάποιο α.

<u>Θεώρημα 3.6 (Path lifting property)</u>: Έστω $(\tilde{X}, p)$ χώρος επικάλυψης του X. Έστω $a: I \rightarrow X$ ένα μονοπάτι στον X τέτοιο ώστε $a(0)=x_0$. Τότε για κάθε σημείο $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ υπάρχει μοναδική ανύψωση $\tilde{a}$ του α με $\tilde{a}(0)=\tilde{x_0}$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω U_a μία ανοιχτή κάλυψη του X ώστε κάθε U_a να είναι γειτονιά επικάλυψης. Βρίσκουμε μια $\{V_x : x \in I\}$ ανοιχτή κάλυψη του I. Αυτή μπορεί να βρεθεί ως $f^{-1}(U_a)$ καθώς $\forall x \in I$ $\exists x \in f^{-1}(U_a)$ με $f(f^{-1}(U_a)) \subset U_a$ για κάποιο a. Εφόσον το I είναι συμπαγές, από λήμμα Lebesque $\exists \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε αν $|x-y| \leqslant \varepsilon$, τότε $[x, y] \subset f^{-1}(U_a)$, δηλαδή $f([x, y]) \subset U_a$ για κάποιο a. Θεωρούμε μια διαμέριση του I σε κλειστά υποδιαστήματα μήκους μικρότερου ή ίσου του ε ως εξής: Έστω $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/n < \varepsilon$ και $x_k = k/n$. Ορίζουμε $f(0) \in U_a$. Έχουμε ότι U_a είναι γειτονιά επικάλυψης άρα το $p^{-1}(U_a)$ είναι ξένη ένωση ανοιχτών U_a^i με $p: U_a^i \rightarrow U_a$ ομοιομορφισμούς. Ορίζουμε $\tilde{f}(0) = \tilde{x} \in U_a^i \subset p^{-1}(U_a)$. Έτσι $\forall t \in [x_0, x_1]$, $f(t) \in U_a$. Ορίζουμε $\tilde{f}(t) = p^{-1}(f(t))$ $\forall t \in [x_0, x_1]$. Εφόσον $p: U_a^i \rightarrow U_a$ ομοιομορφισμός η $\tilde{f}$ είναι συνεχής. Επίσης, εξ' ορισμού της $\tilde{f}$ έχουμε ότι $p \circ \tilde{f} = f$. Η μοναδικότητα του μονοπατιού προκύπτει από το παραπάνω θεώρημα. ■

<u>Θεώρημα 3.7 (Homotopy lifting property)</u>: Έστω $(\tilde{X}, p)$ χώρος επικάλυψης του X. Για έναν χώρο Y, έστω F απεικόνιση από το $Y \times [0,1]$ στον X ο οποίος είναι μια ομοτοπία από το $f_0 = F(y, 0)$ στο $f_1 = F(y, 1)$. Έστω $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ μια ανύψωση του f τότε υπάρχει μια ανύψωση $\tilde{F}: Y \times I \rightarrow \tilde{X}$ του F τέτοια ώστε $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}$.

<u>Απόδειξη</u>: Για κάθε $(y, t) \in Y \times I$ υπάρχει γειτονιά $V \times (a, b)$ τέτοια ώστε $F(V \times (a, b)) \subset U_a$ για κάποιο a. Έστω $y \in Y$, $\forall i \in I$ θεωρούμε $V_i \times (a_i, b_i)$. Το $Y \times I$ συμπαγές άρα υπάρχουν $V_1 \times (a_1, b_1), \ldots, V_n \times (a_n, b_n)$ τέτοια ώστε $V_1 \times (a_1, b_1) \cup \ldots \cup V_n \times (a_n, b_n)$ είναι κάλυψη του $Y \times I$. Θεωρούμε την τομή $z = V_1 \cap \ldots \cap V_n$. Παίρνουμε μια διαμέριση του $[0,1]$ $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ και από το λήμμα Lebesque έχουμε ότι $\exists \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για $|t_i - t_{i+1}| \leqslant \varepsilon$ να ισχύει $F(z \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_a$ για κάποιο a όπου U_a γειτονιά επικάλυψης δηλαδή $p^{-1}(U_a)$ ξένη ένωση ανοιχτών W_i^a τέτοια ώστε $p|W_i^a$ να είναι ομοιομορφισμοί. Έχουμε ορίσει $\tilde{F}: z \times \{0\} \rightarrow \tilde{X}$ $(\tilde{F}: Y \times \{0\} = \tilde{f}_0)$. Έστω $\tilde{U}$ το αντίγραφο του U στο $p^{-1}(U)$ τέτοιο ώστε $\tilde{F}(z \times \{0\}) \subset \tilde{U}$. Ορίζουμε επέκταση της $\tilde{F}$ στο $\tilde{F}(z \times [t_0, t_1])$ με

$\tilde{F}(x,t)=p^{-1}F(x,t)$ $\forall (x,t)\in z\times[t_0,t_1]$ όπου p είναι περιορισμένη στο $\tilde{U}$ και $p:\tilde{U}\to U$ ομοιομορφισμός. Συνεχίζουμε επαγωγικά. Υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει την $\tilde{f}$ στο $\tilde{F}(z\times\{t_i\})$ και επεκτείνουμε στο $\tilde{F}(z\times[t_i,t_{i+1}])$ με $\tilde{F}(x,t)=p^{-1}F(x,t)$ όπου $p:\tilde{U}_a\to U_a$ ομοιομορφισμός. Με αυτόν τον τρόπο, $\forall y\in Y$ ορίζουμε $\tilde{F}:V_y\times I\to\tilde{X}$ όπου V_y ανοικτή γειτονιά του Y. ■

<u>Πόρισμα 3.8</u>: Θεωρούμε την απεικόνιση:

$$p:\mathbb{R}\to S^1,\quad \text{όπου}\quad p(x)=(\cos(2\pi x),\sin(2\pi x))$$

Έστω $f:I\to S^1$ ένα μονοπάτι με $f(0)=x_0$ και $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$. Τότε υπάρχει μοναδικό μονοπάτι $\tilde{f}:I\to\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $p\circ\tilde{f}=f$ και $\tilde{f}(0)=\tilde{x}_0$.

<u>Πόρισμα 3.9</u>: Έστω $p:\mathbb{R}\to S^1$, $p(x)=(\cos(2\pi x),\sin(2\pi x))$ και $F:I\times I\to S^1$ ομοτοπία με $F(0{,}0)=x_0$. Αν $\tilde{x}_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $p(\tilde{x}_0)=x_0$, τότε υπάρχει μοναδική ανύψωση $\tilde{F}:I\times I\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\tilde{F}(0{,}0)=\tilde{x}_0$.

<u>Θεώρημα 3.10</u>: Ορίζουμε την απεικόνιση $\psi:\mathbb{Z}\to\pi(S^1,x_0)$ με $\psi(n)=[\omega_n(s)]$ όπου $\omega_n:I\to S^1$ είναι βρόγχος στην S^1 με $\omega_n(s)=(\cos(2\pi nx),\sin(2\pi nx))$ $\forall s\in I$ (και σημείο στήριξης το $x_0=(1{,}0)$). Η απεικόνιση ψ είναι ισομορφισμός, άρα $\pi_1(S^1)\simeq\mathbb{Z}$.

<u>Απόδειξη</u>:

- <u>Η ψ είναι ομομορφισμός:</u> Για $n,m\in\mathbb{Z}$ έχουμε $\psi(n+m)=\psi(n)\circ\psi(m)$.
- <u>Η ψ είναι 1-1:</u> Υπάρχει ανύψωση $\tilde{\omega}_n$ του ω_n στο $\mathbb{R}$:

$$\tilde{\omega}_n:I\to\mathbb{R},\qquad \tilde{\omega}_n(s)=ns$$

με $x_0=0$ και $p:\mathbb{R}\to S^1$. Έστω $\psi(n)=\psi(m)$, οπότε $\omega_n\sim\omega_m$. Άρα υπάρχει ομοτοπία $F:I\times I\to S^1$ τέτοια ώστε

$$F(s{,}0)=\omega_n(s)\quad\text{και}\quad F(s{,}1)=\omega_m(s)$$

Επιπλέον για την F έχουμε ότι $F(0{,}0)=(1{,}0)$ και $F(0,t)=F(1,t)=x_0$, $\forall t\in I$. Από το παραπάνω πόρισμα έχουμε ότι υπάρχει μοναδική ανύψωση της F, $\tilde{F}:I\times I\to\mathbb{R}$, με $\tilde{F}(0{,}0)=0$. Τέλος, έχουμε

$$\tilde{F}(s{,}0)=\tilde{\omega}_n(s),\qquad \tilde{F}(s{,}1)=\tilde{\omega}_m(s)$$

$$\tilde{F}(0,t)=0, \tilde{F}(1,0)=n, \tilde{F}(1,1)=m$$

Αφού το I είναι συνεκτικό και $p\circ\tilde{F}(1,t)=F(1,t)=x_0$ η $\tilde{F}(1,t)$ είναι σταθερή, συνεπώς $\tilde{F}(1,0)=\tilde{F}(1,1)\Rightarrow n=m$ άρα η ψ είναι 1-1.

- <u>Η ψ είναι επί:</u> Έστω $\gamma\in\pi_1(S,x_0)$, τότε υπάρχει $\tilde{\gamma}:I\to\mathbb{R}$ ανύψωση του γ, με $\tilde{\gamma}(0)=0, \tilde{\gamma}(1)=n$ για κάποιο $n\in\mathbb{Z}$ (διότι $p^{-1}(1,0)=\mathbb{Z}$). Ισχυριζόμαστε ότι $\tilde{\gamma}\sim\tilde{\omega}_n$ όπου $\tilde{\omega}_n(s)=ns$. Πράγματι ορίζουμε

$$\tilde{F}(s,t)=(1-t)\tilde{\gamma}(s)+t\,\tilde{\omega}_n(s)$$

Έχουμε $\tilde{F}(s,0)=\tilde{\gamma}(s)$ και $\tilde{F}(s,1)=\omega_n(s)$. Η απεικόνιση $p\circ\tilde{F}$ είναι ομοτοπία ανάμεσα στο γ και το ω_n, άρα $[\gamma]\in Im\psi$. ■

3.3 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΧΩΡΩΝ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ

<u>Ορισμός</u>: Ο τοπολογικός χώρος Y είναι <u>τοπικά συνεκτικός κατά τόξα</u> αν για κάθε $y\in Y$ και για κάθε γειτονιά U του y, υπάρχει γειτονιά $y\in V\subset U$ τέτοια ώστε V συνεκτική κατά τόξα.

<u>Πρόταση 3.11</u>: Έστω $p:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to(X,x_0)$ και $f:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ όπου ο Y είναι συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός κατά τόξα. Τότε υπάρχει ανύψωση $\tilde{f}:(Y,y_0)\to(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ της f αν και μόνο αν $f_*(\pi_1(Y,y_0))\subset p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $(\tilde{X}_1,p_1)$ και $(\tilde{X}_2,p_2)$ δύο χώροι επικάλυψης του X. Ένας <u>ομομορφισμός</u> του $(\tilde{X}_1,p_1)$ στον $(\tilde{X}_2,p_2)$ είναι μία συνεχής απεικόνιση $\varphi:\tilde{X}_1\to\tilde{X}_2$ τέτοιος ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Σημείωση: Η σύνθεση ομομορφισμών είναι πάλι ομομορφισμός και αν ο $(\tilde{X},p)$ είναι χώρος επικάλυψης του X τότε ο ταυτοτικός χάρτης $\tilde{X}\to\tilde{X}$ είναι ομομορφισμός.

<u>Ορισμός</u>: Ένας ομομορφισμός φ από τον $(\tilde{X}_1,p_1)$ στον $(\tilde{X}_2,p_2)$ λέγεται <u>ισομορφισμός</u> αν υπάρχει ομομορφισμός ψ από τον $(\tilde{X}_2,p_2)$ στον $(\tilde{X}_1,p_1)$ τέτοιος

ώστε οι συνθέσεις $\varphi\circ\psi$ και $\psi\circ\varphi$ να είναι ταυτοτικοί χάρτες. Δύο χώροι επικάλυψης είναι ισομορφικοί αν υπάρχει ισομορφισμός του ενός επί του άλλου. Ένας <u>αυτομορφισμός</u> είναι ένας ισομορφισμός ενός χώρου επικάλυψης επί του εαυτού του.

<u>Πρόταση 3.12</u>: Έστω X συνεκτικός κατά τόξα, τοπικά συνεκτικός κατά τόξα και $p_1:\tilde{X}_1\to X$, $p_2:\tilde{X}_2\to X$ συνεκτικοί κατά τόξα χώροι επικάλυψης του X. Τότε υπάρχει ισομορφισμός $f:\tilde{X}_1\to\tilde{X}_2$ με $f(\tilde{x}_1)=\tilde{x}_2$, όπου $\tilde{x}_1\in p_1^{-1}(x_0)$, $\tilde{x}_2\in p_2^{-1}(x_0)$, αν και μόνο αν $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1))=p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2))$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι υπάρχει ισομορφισμός $f:\tilde{X}_1\to\tilde{X}_2$. Ισχύει πως $p_2\circ f=p_1$ που συνεπάγεται $p_{2*}\circ f_*=p_{1*}$ που σημαίνει πως $Im\,p_{1*}\subset Im\,p_{2*}$. Αντίστοιχα $p_2=p_1\circ f^{-1}$ που συνεπάγεται $Imp_{2*}\subset Imp_{1*}$. Επομένως $Imp_{1*}=Imp_{2*}$.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[rr, shift right, "\tilde{p}_1"'] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[ll, shift right, "\tilde{p}_2"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

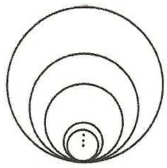
Αντίστροφα, αν ισχύει $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1))=p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2))$ έχουμε ανυψώσεις p_1, p_2 όπου $\tilde{x}_1\in p_1^{-1}(x_0)$ και $\tilde{x}_2\in p_2^{-1}(x_0)$ για τις οποίες ισχύει $p_2\tilde{p}_1=p_1$, $p_1\tilde{p}_2=p_2$ με $\tilde{p}_1(\tilde{x}_1)=\tilde{x}_2$, $\tilde{p}_2(\tilde{x}_2)=\tilde{x}_1$. Ισχύει ακόμα $p_1(\tilde{p}_2\tilde{p}_1)=p_1$. Η $\tilde{p}_2\tilde{p}_1$ είναι ανύψωση της p_1 με $\tilde{p}_2\tilde{p}_1(\tilde{x}_1)=\tilde{p}_2(\tilde{x}_2)=\tilde{x}_1$. Άρα $\tilde{p}_2\tilde{p}_1=id$. Όμοια, $\tilde{p}_1\tilde{p}_2=id$, άρα $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$ ισομορφισμοί. ∎

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[rr, "\tilde{p}_2\tilde{p}_1"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_1 \arrow[dl, "p_1"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

<u>Ορισμός</u>: Ο X είναι <u>ημιτοπικά απλά συνεκτικός</u> αν για κάθε $x\in X$ υπάρχει γειτονιά U του x τέτοια ώστε ο ομομορφισμός $i_*:\pi_1(U,x)\to\pi_1(X,x)$ είναι τετριμμένος. Ο X είναι <u>τοπικά απλά συνεκτικός</u> αν για κάθε $x\in X$ και κάθε γειτονιά W του x υπάρχει γειτονιά $U\subset W$ του x τέτοια ώστε $\pi_1(U,x)=\{1\}$.

<u>Παραδείγματα</u>:

- Ο S^1 είναι τοπικά απλά συνεκτικός.
- Το σκουλαρίκι της Χαβάης δεν είναι (ημι)τοπικά απλά συνεκτικός.



Το σκουλαρίκι της Χαβάης H είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ το οποίο αποτελείται από τους κύκλους με ακτίνα $1\backslash 2^n, n=0,1,2,\ldots$ με κέντρα στον άξονα των y. Αυτός ο χώρος δεν είναι ημιτοπικά απλά συνεκτικός διότι για το σημείο $(0,0)$ δεν υπάρχει γειτονιά U τέτοια ώστε ο ομομορφισμός $i_+ : \pi_1(U, x) \to \pi_1(H, x)$ να είναι τετριμμένος.

<u>Θεώρημα 3.13</u>: Έστω X συνεκτικός κατά τόξα, τοπικά συνεκτικός κατά τόξα και ημιτοπικά απλά συνεκτικός. Τότε για κάθε υποομάδα $H \leqslant \pi_1(X, x_0)$ υπάρχει χώρος επικάλυψης $p : X_H \to X$ τέτοιος ώστε $p_*(\pi_1(X_H, \tilde{x}_0)) = H$ για κάποιο $\tilde{x}_0 \in X_H$.

<u>Θεώρημα 3.14</u>: Έστω X συνεκτικός κατά τόξα, τοπικά συνεκτικός κατά τόξα, ημιτοπικά απλά συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Τότε υπάρχει χώρος επικάλυψης $\tilde{X}$ του X με $\pi_1(\tilde{X}) = 1$. Ο $\tilde{X}$ λέγεται <u>καθολικός χώρος επικάλυψης</u> του X.

3.4 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ

<u>Ορισμός</u>: Έστω $p : \tilde{X} \to X$ χώρος επικάλυψης. Ο αυτομορφισμός $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ ονομάζεται <u>μετασχηματισμός επικάλυψης</u>. Συμβολίζουμε με $G(\tilde{X})$ την ομάδα όλων αυτών των αυτομορφισμών, με πράξη τη σύνθεση.

<u>Παραδείγματα</u>:

- Έστω ο χάρτης επικάλυψης $p : \mathbb{R} \to S^1$ με $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$.
  Μετασχηματισμοί επικάλυψης:

  $$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } f_n(x) = x + n \text{ για } n \in \mathbb{Z}, \text{ άρα } G(\tilde{X}) = \mathbb{Z}.$$

- Έστω ο χάρτης επικάλυψης $p : S^1 \to S^1$ με $p(z) = z^n$. Τότε $G(\tilde{X}) = \mathbb{Z}_n$.

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω $p : \tilde{X} \to X$, $\tilde{X}$ συνεκτικός και $g \in G(\tilde{X})$. Αν $gx = x$ για

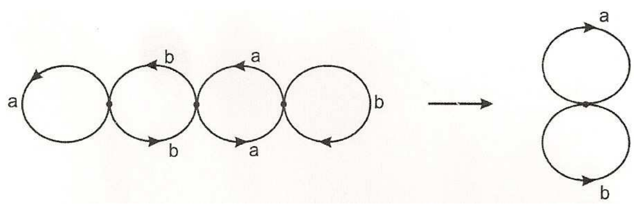
κάποιο $x \in \tilde{X}$, τότε $g = id$.

Απόδειξη: Από τη μοναδικότητα της ανύψωσης. ■

Ορισμός: Ο χώρος επικάλυψης $\tilde{X} \to X$ ονομάζεται κανονικός αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$, υπάρχει $g \in G(\tilde{X})$ τέτοιο ώστε $g\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$.

Παραδείγματα:

- Ο χώρος επικάλυψης $\mathbb{R} \to S^1$ είναι κανονικός.
- Ο παρακάτω χώρος επικάλυψης δεν είναι κανονικός.

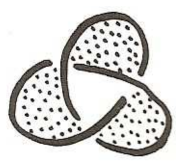


3.5 ΔΙΑΚΛΑΔΙΣΜΕΝΟΙ ΧΩΡΟΙ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ

Επιφάνειες Seifert

Ορισμός: Μία επιφάνεια Seifert για έναν κόμβο ή κρίκο $K \subset S^3$ είναι μία συνεκτική, προσανατολίσιμη, συμπαγής επιφάνεια M^2 με $\partial M = K$.

Για αντιπαράδειγμα μπορούμε να δούμε μία ταινία Möbius με σύνορο τον κόμβο trefoil. (βλ. Παρακάτω σχήμα)



Θεώρημα 3.15: Κάθε κόμβος ή κρίκος στον $\mathbb{R}^3$ ή στον S^3 είναι το σύνορο μιας προσανατολίσιμης επιφάνειας Seifert.

Κατασκευή κυκλικών χώρων επικάλυψης ενός συμπληρώματος κόμβου

Έστω M^2 μια επιφάνεια Seifert για έναν κόμβο $K \subset S^3$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν χώρο επικάλυψης για το χώρο $X = S^3 \setminus K$. Παίρνουμε την εμφύτευση $N : \mathring{M} \times (-1,1) \to S^3$.

τέτοια ώστε $\mathring{M} = N(\mathring{M} \times \{0\})$ όπου $\mathring{M} = M \setminus K$. Ορίζουμε:

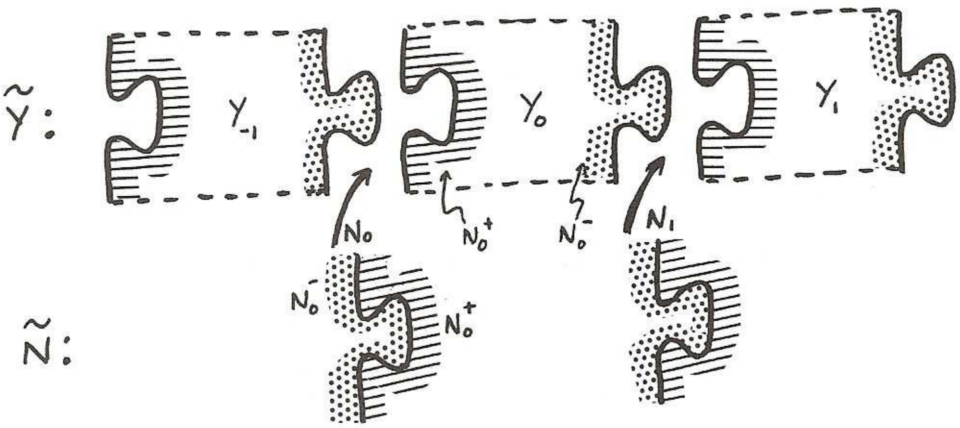
$$N = N(\mathring{M} \times (-1,1))$$

$$N^{+} = N(\mathring{M} \times (0,1))$$

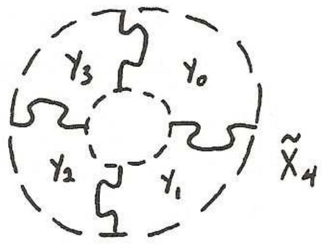
$$N^{-} = (\mathring{M} \times (-1,0))$$

$$Y = S^3 \setminus M$$

και παίρνουμε μετρήσιμα αντίγραφα N_i και Y_i και δημιουργούμε την άπειρη ένωσή τους. Ύστερα μέσω του ταυτοτικού ομοιομορφισμού ταυτίζουμε τα $N_i^{-} \subset Y_i$ με τα $N_{i+1}^{-} \subset N_{i+1}$ και τα $N_i^{+} \subset Y_i$ με τα $N_i^{+} \subset N_i$ (βλ. Παρακάτω σχήμα). Ο χώρος που προκύπτει είναι χώρος επικάλυψης $\tilde{X}$ του X και ονομάζεται <u>άπειρος κυκλικός χώρος κάλυψης</u> του X.



Με παρόμοιο τρόπο κατασκευάζουμε τον <u>πεπερασμένο κυκλικό χώρο κάλυψης</u> του $X = S^3 \setminus K$. Για δοθέντα ακέραιο k παίρνουμε πεπερασμένα αντίγραφα N_i και Y_i και δημιουργούμε την ένωσή τους. Κάνουμε τις ίδιες ταυτίσεις με προηγουμένως και επίσης ταυτίζουμε το τελευταίο $N_{k-1}^{-} \subset Y_{k-1}$ με το $N_{k-1}^{-} \subset N_0$. Ο χώρος που παίρνουμε είναι ένα κ -πλο κάλυμμα του X και συμβολίζεται με $\tilde{X}_k$.



Ορισμός διακλαδισμένων χώρων επικάλυψης

<u>Ορισμός</u>: Έστω M^n και N^n συμπαγείς πολλαπλότητες και $A^{n-2} \subset M$, $B^{n-2} \subset N$. Ένας συνεχής χάρτης $f: M \to N$ λέγεται διακλαδισμένος χώρος επικάλυψης με σύνολα διακλάδωσης A (στον M) και B (στον N) αν

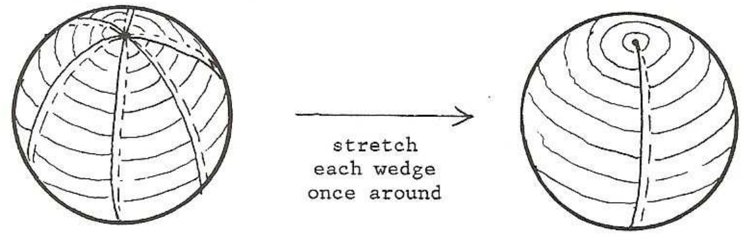
- Τα σημεία του M που αντιστοιχούν στα ανοιχτά σύνολα του N αποτελούν τη βάση μιας τοπολογίας του M.
- $f(A)=B$, $f(M \setminus A)=N \setminus B$, και ο περιορισμός $f: M \setminus A \to N \setminus B$ είναι ένας χώρος επικάλυψης.

Από τη συμπάγεια του M προκύπτει ότι ο χώρος επικάλυψης έχει πεπερασμένο αριθμό καλυμμάτων. Κάθε σημείο διακλάδωσης $a \in A$ έχει δείκτη διακλάδωσης k που σημαίνει ότι η f αντιστοιχεί k σημεία κοντά στο a σε ένα στο B. Ο αριθμός αυτός είναι σταθερός στα στοιχεία του B.

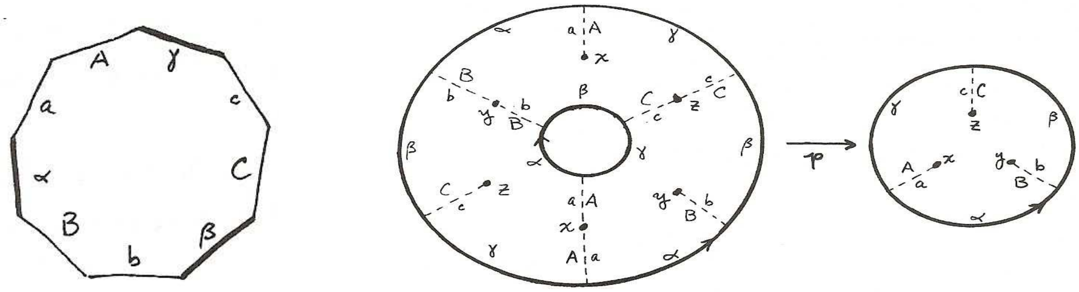
<u>Παραδείγματα</u>:

- Η απεικόνιση $p: D^2 \to D^2$ που δίνεται απ' την εξίσωση $p(z)=z^k$ είναι ένας χάρτης επικάλυψης μέσω του οποίου ο μοναδιαίος δίσκος τυλίγει τον εαυτό του k φορές. Εδώ κάθε κυκλικός τομέας χωρίς το εσωτερικό είναι μια γειτονιά επικάλυψης. Το κέντρο του κύκλου είναι το μοναδικό σημείο διακλάδωσης του μοναδιαίου δίσκου και έχει δείκτη διακλάδωσης k.

  Επεκτείνουμε τον παραπάνω χάρτη $p: S^2 \to S^2$ μέσω του οποίου παίρνουμε έναν χώρο επικάλυψης. Αντίστοιχα, κάθε σφαιρικός τομέας είναι μια γειτονιά επικάλυψης και το σύνολο διακλάδωσης της S^2 αποτελείται από δύο σημεία, τους δύο πόλους της σφαίρας, που το καθένα έχει δείκτη k (βλ. Παρακάτω σχήμα).



- Για τον παραπάνω χάρτη $p : S^2 \to S^2$ παίρνουμε $k = 2$. Έτσι έχουμε ένα διπλό διακλαδισμένο κάλυμμα της S^2. Αφαιρούμε έναν ανοιχτό δίσκο στην κάτω S^2 για τον οποίο $\bar{U}^2 \cap B = \emptyset$ (όπου B το σύνολο διακλάδωσης της κάτω S^2). Αντίστοιχα αφαιρούμε τους δύο δίσκους στην πάνω S^2 οι οποίοι απεικονίζονται σε αυτόν. Θα ισχύει αναγκαστικά πως οι κλειστότητες των δύο αυτών δίσκων δε θα έχουν κανένα κοινό σημείο με το A (το σύνολο διακλάδωσης της πάνω S^2). Καθώς η σφαίρα S^2 είναι η τοπολογική ένωση δύο δίσκων, κάτω έχει απομείνει ένας δίσκος με δύο σημεία αυτοτομών στο εσωτερικό του και αντίστοιχα πάνω ένας κυκλικός δακτύλιος (ένας δίσκος που του έχει αφαιρεθεί ένας εσωτερικός δίσκος) με δύο σημεία αυτοτομών στο εσωτερικό του. Έτσι έχουμε ένα διακλαδισμένο κάλυμμα του δίσκου από ένα κυκλικό δακτύλιο $S^1 \times I \to D^2$, με δύο σημεία αυτοτομών πάνω και κάτω δείκτη 2.
- Παίρνουμε ένα 9-γωνο με διαδοχικές πλευρές $\alpha, a, A, \gamma, c, C, \beta, b, B$ και φτιάχνουμε τρεις δίσκους ταυτοποιώντας στον πρώτο τα $a, A,$ στον δεύτερο τα b, B και στον τρίτο τα c, C.



Ύστερα παίρνουμε έναν κυκλικό δακτύλιο κολλώντας τους παραπάνω τρεις δίσκους. Στη συνέχεια φτιάχνουμε έναν δίσκο ταυτίζοντας και τα τρία ζεύγη $(a, A), (b, B), (c, C)$. Έτσι έχουμε ένα τριπλό διακλαδισμένο κάλυμμα του δίσκου από τον κυκλικό δακτύλιο. Τα σημεία αυτοτομών είναι διπλάσια στον κυκλικό δακτύλιο που αποτελεί χώρο επικάλυψης του δίσκου καθώς κάθε σημείο αυτοτομής στον δίσκο έχει δύο σημεία αυτοτομών στον κυκλικό δακτύλιο. Το ένα απ' αυτά έχει δείκτη 2 ενώ το άλλο έχει δείκτη 1. Συνολικά, έχουμε 6 σημεία διακλάδωσης πάνω και 3 σημεία διακλάδωσης δείκτη 2 κάτω. Ακόμα η μία συνιστώσα συνόρου του κυκλικού δακτυλίου απεικονίζεται ομοιομορφικά στον δίσκο ενώ η άλλη τον τυλίγει δύο φορές.

4.ΟΜΟΛΟΓΙΕΣ

4.1 ΣΥΜΠΛΟΚΑ ΚΑΙ ΟΜΟΛΟΓΙΚΑ ΣΥΜΠΛΕΓΜΑΤΑ

<u>Ορισμός</u>: Έστω $r+1$ το πλήθος σημεία στον $\mathbb{R}^r$, $p_0, p_1, \dots p_r$. Αυτά τα σημεία λέγονται <u>γεωμετρικά ανεξάρτητα</u> αν τα διανύσματα $(p_0, p_1) \dots (p_0, p_r)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

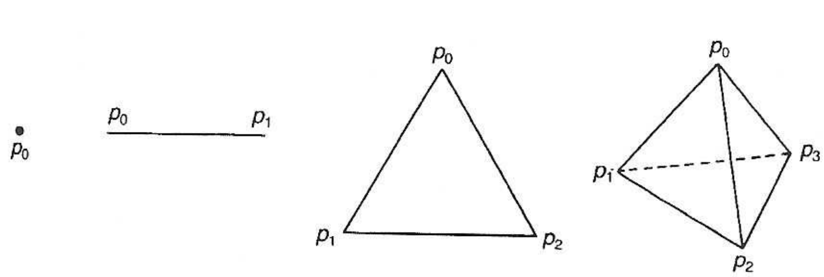
<u>Ορισμός</u>: Έστω $p_0, p_1, \dots p_r$ σημεία γεωμετρικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}^m$ με $m \geqslant r$. Το r -σύμπλοκο $\sigma_r = \langle p_0, \dots p_r \rangle$ συμβολίζεται με

$$\sigma^r = \{x \in \mathbb{R}^m | x = \sum_{i=0}^{r} c_i p_i, c_i \geqslant 0, \sum_{i=0}^{r} c_i = 1\}.$$

$(c_0, \dots c_r)$ λέγεται <u>βαρυκεντρική συντεταγμένη</u> του x. Εφόσον το σ_r είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, είναι συμπαγές.

<u>Παραδείγματα</u>:

- Ένα 0-σύμπλοκο $\langle p_0 \rangle$ είναι ένα σημείο ή μια κορυφή.
- Ένα 1-σύμπλοκο $\langle p_0 p_1 \rangle$ είναι μία γραμμή ή μια πλευρά.
- Ένα 2-σύμπλοκο $\langle p_0 p_1 p_2 \rangle$ ορίζεται να είναι ένα τρίγωνο συμπεριλαμβανομένου του εσωτερικού του.
- Ένα 3-σύμπλοκο $\langle p_0 p_1 p_2 p_3 \rangle$ είναι ένα συμπαγές τετράεδρο.



<u>Ορισμός</u>: Έστω q ένας ακέραιος τέτοιος ώστε $0 \leqslant q \leqslant r$. Αν διαλέξουμε $q+1$ σημεία $p_{i_0}, \dots, p_{i_q}$ από τα $p_0, \dots, p_r$, αυτά τα $q+1$ σημεία ορίζουν ένα q-σύμπλοκο $\sigma_q = \langle p_{i_0}, \dots, p_{i_q} \rangle$, το οποίο λέγεται <u>q-πλευρά</u> του σ_r. Γράφουμε $\sigma_q \leqslant \sigma_r$ αν το σ_q

είναι μία πλευρά του σ_r. Αν $\sigma_q \neq \sigma_r$, λέμε ότι το σ_q είναι γνήσια πλευρά του σ_r, και συμβολίζεται $\sigma_q < \sigma_r$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω K ένα σύνολο πεπερασμένου αριθμού συμπλόκων στον $\mathbb{R}^m$. Αν αυτά τα σύμπλοκα είναι καλά τοποθετημένα μαζί, το K λέγεται <u>ομολογικό σύμπλεγμα</u>. Με το “καλά τοποθετημένα” εννοούμε:

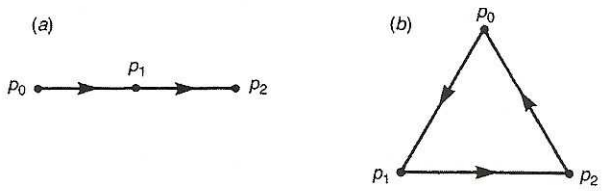
- μία αυθαίρετη πλευρά ενός συμπλόκου του K ανήκει στο K, δηλαδή αν $\sigma \in K$ και $\sigma' \leqslant \sigma$ τότε $\sigma' \in K$.
- αν σ και σ' είναι δύο σύμπλοκα του K, η τομή $\sigma \cap \sigma'$ είναι είτε κενή είτε μία κοινή πλευρά των σ και σ', δηλαδή αν $\sigma, \sigma' \in K$ τότε είτε $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$ είτε $\sigma \cap \sigma' \leqslant \sigma$ και $\sigma \cap \sigma' \leqslant \sigma'$.

Η διάσταση ενός ομολογικού συμπλέγματος K ορίζεται να είναι η μεγαλύτερη διάσταση συμπλόκων του K.

4.2 ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΑ ΣΥΜΠΛΟΚΑ

Μπορούμε να προσδιορίσουμε προσανατολισμό σε ένα r -σύμπλοκο για $r \geqslant 1$. Για προσανατολισμένα σύμπλοκα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $(\ldots)$. Ένα προσανατολισμένο 1 -σύμλοκο $\sigma_1 = (p_0 p_1)$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα με την κατεύθυνση $p_0 \rightarrow p_1$. Ισχύει ότι $(p_0 p_1 + p_1 p_0 = 0)$ δηλαδή το $p_1 p_0$ είναι το αντίστροφο του $p_0 p_1$, $p_0 p_1 = -p_1 p_0$.

Αντίστοιχα, ένα προσανατολισμένο 2 -σύμπλοκο $\sigma_2 = (p_0 p_1 p_2)$ είναι ένα τρίγωνο με καθορισμένο προσανατολισμό κατά μήκος των πλευρών του.



Έστω P μία μετάθεση των $0,1,2$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

Απαιτούμε $(p_i \, p_j \, p_k) = sgn(P)(p_0 \, p_1 \, p_2)$ όπου $sgn(P) = +1(-1)$ αν η P είναι άρτια ή περιττή μετάθεση αντίστοιχα (ισοδυναμεί με άρτιο ή περιττό πλήθος αντιμεταθέσεων αντίστοιχα).

Έπονται οι σχέσεις:

$$(p_0 \, p_1 \, p_2) = (p_2 \, p_0 \, p_1) = (p_1 \, p_2 \, p_0) = -(p_0 \, p_2 \, p_1) = -(p_2 \, p_1 \, p_0) = -(p_1 \, p_0 \, p_2).$$

Ένα προσανατολισμένο 3 -σύμπλοκο $\sigma_3 = (p_0 \, p_1 \, p_2 \, p_3)$ είναι μια διατεταγμένη ακολουθία τεσσάρων κορυφών ενός τετραέδρου. Έστω P μια μετάθεση των $0,1,2,3$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$$

όπου απαιτούμε $(p_i \, p_j \, p_k \, p_l) = sgn(P)(p_0 \, p_1 \, p_2 \, p_3)$.

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε ένα προσανατολισμένο r -σύμπλοκο για οποιοδήποτε $r \geqslant 1$: Έστω $r+1$ γεωμετρικά ανεξάρτητα σημεία $p_0, p_1, \ldots p_r$ στον $\mathbb{R}^m$. Έστω μια διατεταγμένη ακολουθία σημείων $\{p_{i_0}, \ldots, p_{i_r}\}$ που προκύπτει από μια μετάθεση των σημείων $p_0, p_1, \ldots, p_r$. Ορίζουμε τα $\{p_{i_0}, \ldots, p_{i_r}\}$ και $\{p_0, \ldots, p_r\}$ να είναι ισοδύναμα αν η

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & r \\ i_0 & i_1 & \ldots & i_r \end{pmatrix}$$

είναι άρτια μετάθεση. Η παραπάνω είναι μία σχέση ισοδυναμίας, η κλάση ισοδυναμίας της οποίας λέγεται προσανατολισμένο r -σύμπλοκο. Σε αντιστοιχία με τα προηγούμενα ισχύει $(p_{i_0} \, p_{i_1} \ldots p_{i_r}) = sgn(P)(p_0 \, p_1 \ldots p_r)$.

4.3 ΟΜΑΔΕΣ-ΑΛΥΣΙΔΕΣ, ΟΜΑΔΕΣ-ΚΥΚΛΟΙ ΚΑΙ ΟΜΑΔΕΣ ΣΥΝΟΡΑ

Το σύνορο ενός r -συμπλόκου σ_r συμβολίζεται με $\theta_r \sigma_r$ και το θ_r νοείται ως ένας τελεστής που δρα πάνω στο σύμπλοκο για να παράγει το σύνορό του.

Ορισμός: Έστω $\sigma_r(p_0 \ldots p_r)$ $(r > 0)$ ένα προσανατολισμένο r -σύμπλοκο. Το σύνορο $\theta_r \sigma_r$ του σ_r ορίζεται ως:

$$\theta_r \sigma_r \equiv \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (p_0 p_1 \ldots \hat{p}_i \ldots p_r)$$

όπου το σημείο p_i υπό το ^ αφαιρείται.

Παραδείγματα:

- $\theta_1(p_0 p_1) = p_1 - p_0$
- $\theta_2(p_0 p_1 p_2) = (p_1 p_2) - (p_0 p_2) + (p_0 p_1)$
- $\theta_3(p_0 p_1 p_2 p_3) = (p_1 p_2 p_3) - (p_0 p_2 p_3) + (p_0 p_1 p_3) - (p_0 p_1 p_2)$
- Ορίζουμε $\theta_0 p_0 = 0$ εφόσον ένα 0-σύμπλοκο δεν έχει σύνορο.

Ορισμός: Η ομάδα r-αλυσίδων $C_r(K)$ ενός ομολογικού συμπλέγματος K είναι μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα με γεννήτορες τα προσανατολισμένα r -σύμπλοκα του K. Αν $r > dim K$, το $C_r(K)$ ορίζεται να είναι 0. Ένα στοιχείο του $C_r(K)$ λέγεται r-αλυσίδα.

Πιο συγκεκριμένα, έστω I_r το πλήθος των r -συμπλόκων στο K. Συμβολίζουμε καθένα από αυτά με $\sigma_{r,i}$ $(1 \leqslant i \leqslant I_r)$ και τότε κάθε $c \in C_r(K)$ εκφράζεται ως

$$c = \sum_{i=1}^{I_r} c_i \sigma_{r,i} \quad \text{όπου} \quad c_i \in \mathbb{Z}$$

Οι ακέραιοι c_i λέγονται συντεταγμένες του c.

Δοθέντων δύο r -αλυσίδων, $c = \sum_i c_i \sigma_{r,i}$ και $c' = \sum_i c'_i \sigma_{r,i}$, έχουμε το άθροισμα

$$c + c' = \sum_i (c_i + c'_i) \sigma_{r,i}$$

Το ουδέτερο στοιχείο είναι το $0 = \sum_i 0 \cdot \sigma_{r,i}$ και το αντίστροφο στοιχείο του c είναι το $-c = \sum_i (-c_i) \sigma_{r,i}$. Επομένως έχουμε δομή αβελιανής ομάδας.

Το σύνορο $\theta_r \sigma_r$ του σ_r είναι μία $(r-1)$ -αλυσίδα. Το θ_r δρα γραμμικά πάνω σε ένα στοιχείο $c = \sum_i c_i \sigma_{r,i}$ του $C_r(K)$

$$\theta_r c = \sum_i c_i \theta_r \sigma_{r,i}$$

και προκύπτει πάλι μια $(r-1)$ -αλυσίδα.

Συνεπώς μέσω του θ_r ορίζεται ένας τελεστής:

$$\theta_r : C_r(K) \to C_{r-1}(K)$$

Ο τελεστής θ_r λέγεται <u>τελεστής συνόρου</u> και είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων.

Έστω K ένα n -διάστατο ομολογικό σύμπλεγμα. Τότε υπάρχει μια ακολουθία από ελεύθερες αβελιανές ομάδες και ομομορφισμούς:

$$0 \to C_n(K) \to C_{n-1}(K) \to \ldots \to C_1(K) \to C_0(K) \to 0$$

μέσω των i , θ_n , $\theta_{n-1} \ldots \theta_2$, θ_1 , θ_0 αντίστοιχα. Η ακολουθία αυτή ονομάζεται <u>αλυσιδωτό σύμπλεγμα</u> σχετιζόμενο με το K και συμβολίζεται με $C(K)$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $c \in C_r(K)$. Αν ικανοποιείται η σχέση

$$\theta_r c = 0$$

η c ονομάζεται <u>r-κύκλος</u>. Το σύνολο των r -κύκλων $Z_r(K)$ είναι μια υποομάδα της $C_r(K)$ και ονομάζεται <u>ομάδα r-κύκλων</u>. Παρατηρούμε ότι

$$Z_r(K) = ker\, \theta_r$$

<u>Ορισμός</u>: Έστω K ένα n -διάστατο ομολογικό σύμπλεγμα και έστω $c \in C_r(K)$. Αν υπάρχει στοιχείο $d \in C_{r+1}(K)$ τέτοιο ώστε

$$c = \theta_{r+1} d$$

η c λέγεται <u>r-σύνορο</u>. Το σύνολο των r -συνόρων $B_r(K)$ είναι μια υποομάδα του $C_r(K)$ και ονομάζεται <u>ομάδα r-συνόρων</u>. Παρατηρούμε ότι

$$B_r(K) = im \theta_{r+1}$$

<u>Πρόταση 4.1</u>: Η σύνθεση $\theta_r \circ \theta_{r+1} : C_{r+1}(K) \to C_{r-1}(K)$ είναι η μηδενική απεικόνιση, δηλαδή $\theta_r(\theta_{r+1} c) = 0$ για κάθε $c \in C_{r+1}(K)$.

<u>Απόδειξη</u>: Εφόσον ο τελεστής θ_r δρα γραμμικά πάνω σε ένα στοιχείο $c = \sum_i c_i \sigma_{r,i}$ του $C_r(K)$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $\theta_r \circ \theta_{r+1} = 0$ για κάποιον γεννήτορα του $C_{r+1}(K)$. . Αν $r = 0$ έχουμε $\theta_0 \circ \theta_1 = 0$ αφού ο θ_0 είναι ο μηδενικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι $r > 0$. Έστω $\sigma = (p_0 \ldots p_r\, p_{r+1}) \in C_{r+1}(K)$. Υπολογίζουμε:

$$\theta_r(\theta_{r+1}\sigma)=\theta_r\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i(p_0\dots\hat{p}_i\dots p_{r+1})$$
$$=\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i\theta_r(p_0\dots\hat{p}_i\dots p_{r+1})$$
$$=\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(p_0\dots\hat{p}_j\dots\hat{p}_i\dots p_{r+1})+\sum_{j=i+1}^{r+1}(-1)^{j-1}(p_0\dots\hat{p}_i\dots\hat{p}_j\dots p_{r+1}))$$
$$=\sum_{j<i}(-1)^{i+j}(p_0\dots\hat{p}_j\dots\hat{p}_i\dots p_{r+1})-\sum_{j>i}(-1)^{i+j}(p_0\dots\hat{p}_i\dots\hat{p}_j\dots p_{r+1})=0$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Θεώρημα 4.2: Έστω $Z_r(K)$ και $B_r(K)$ η ομάδα r -κύκλων και η ομάδα r -συνόρων του $C_r(K)$. Τότε

$$B_r(K)\subset Z_r(K)$$

Απόδειξη: Έστω $c\in B_r(K)$. Ισχύει ότι $c=\theta_{r+1}d$ για κάποιο $d\in C_{r+1}(K)$. Τότε $\theta_r c=\theta_r(\theta_{r+1}d)=0,$ που σημαίνει ότι $c\in Z_r(K)$. Επομένως $B_r(K)\subset Z_r(K)$. ■

Γεωμετρική ερμηνεία

Σύμφωνα με τον ορισμό του τελεστή $\theta_r,$ η δράση του τελεστή αυτού αποφέρει το σύνορο μιας r -αλυσίδας. Έστω c ένας r -κύκλος. Το γεγονός ότι $\theta_r c=0$ σημαίνει ότι ο c δεν έχει σύνορο. Έστω c ένα r -σύνορο. Το γεγονός ότι $c=\theta_{r+1}d$ σημαίνει πως το c είναι το σύνορο του d του οποίου η διάσταση είναι κατά μία μεγαλύτερη από του c. Το αποτέλεσμα της προηγούμενης πρότασης είναι σύμφωνο με τη διαίσθηση που υποδεικνύει ότι το σύνορο δεν έχει σύνορο. Σημαντικό ρόλο στις ομολογίες παίζουν τα στοιχεία εκείνα του $Z_r(K)$ που δεν είναι σύνορα. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι κάθε σύνορο είναι κύκλος ενώ μπορούμε να κατασκευάσουμε κύκλο που δεν είναι σύνορο.

4.4 ΟΜΑΔΕΣ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

Ορισμός: Έστω K ένα n -διάστατο ομολογικό σύμπλεγμα. Η r -ομάδα ομολογίας $H_r(K),\quad 0\leqslant r\leqslant n,$ σχετιζόμενη με το K ορίζεται από:

$$H_r(K)\equiv Z_r(K)/B_r(K)$$

Για $r>n$ ή $r<0$ ορίζουμε $H_r(K)=0$.

Η $H_r(K)$ είναι καλά ορισμένη αφού η $B_r(K)$ είναι κανονική υποομάδα της $Z_r(K)$. Η ομάδα $H_r(K)$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή των συμπλόκων, των r -κύκλων,

$$H_r(K)\equiv\{[z]|z\in Z_r(K)\}$$

όπου κάθε κλάση ισοδυναμίας $[z]$ λέγεται κλάση ομολογίας. Δύο r -κύκλοι z και z' είναι στην ίδια κλάση ομολογίας αν και μόνο αν $z-z'\in B_r(K)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο z είναι ομόλογος με τον z' και συμβολίζουμε $z\sim z'$ ή $[z]=[z']$.

Θεώρημα 4.3: Οι ομάδες ομολογίας είναι τοπολογικές αναλλοίωτες. Έστω X ομοιομορφικός με τον Y και (K,f) και (L,g) τριγωνοποιήσεις των X, Y αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$H_r(K)\simeq H_r(L) r=0,1,2,\dots$$

Συγκεκριμένα, για δύο τριγωνοποιήσεις του ίδιου χώρου X, (K,f) και (L,g) έχουμε

$$H_r(K)\simeq H_r(L) r=0,1,2,\dots$$

Επομένως, οι ομάδες ομολογίας είναι τοπολογικές αναλλοίωτες, δηλαδή ανεξάρτητες από την εκάστοτε τριγωνοποίηση ενός τοπολογικού χώρου X. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να πάρουμε την ομάδα ομολογίας ενός χώρου να προκύπτει από μια αυθαίρετη τριγωνοποίηση του χώρου, δηλαδή

$$H_r(X)\equiv H_r(K) r=0,1,2,\dots$$

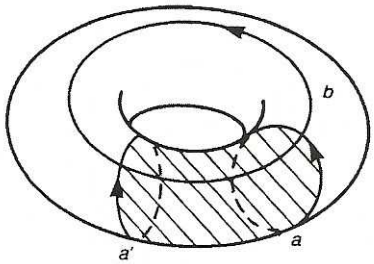
για (K,f) τριγωνοποίηση του χώρου X.

Θεώρημα 4.4: Έστω K συνεκτικό ομολογικό σύμπλεγμα. Τότε

$$H_0(K)\simeq\mathbb{Z}.$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Η r -ομάδα ομολογίας έχει γεννήτορες τις r -αλυσίδες εκείνες οι οποίες αφενός δεν έχουν σύνορο και αφετέρου δεν είναι οι ίδιες σύνορο κάποιας $(r+1)$ -αλυσίδας. Για παράδειγμα, ένας τόρος δεν έχει σύνορο και επιπλέον δεν είναι σύνορο κάποιας 3 -αλυσίδας. Άρα, η ομάδα $H_2(T^2)$ είναι ελεύθερα παραγόμενη από έναν γεννήτορα, την ίδια την τριγωνοποιημένη επιφάνεια, που σημαίνει ότι $H_2(T^2)\simeq\mathbb{Z}$. Όσον αφορά την πρώτη ομάδα ομολογίας $H_1(T^2)$ μπορούμε να βρούμε δύο βρόγχους a, b που να μην έχουν σύνορο και να μην είναι οι ίδιοι σύνορο κάποιων δύο αλυσίδων. Σε οποιαδήποτε άλλη επιλογή βρόγχου a' έχουμε ότι είναι ομόλογος με κάποιον από τους δύο προεπιλεχθέντες καθώς μπορούμε να σκιάσουμε την περιοχή ανάμεσά τους και η σκιασμένη αυτή περιοχή να έχει σαν σύνορο το $\alpha' - \alpha$.



Συνεπώς η $H_1(T^2)$ είναι ελεύθερα παραγόμενη από δύο γεννήτορες a και b που σημαίνει ότι $H_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Σχετικά με την ομάδα ομολογίας $H_0(T^2)$, από το παραπάνω θεώρημα και εφόσον ο T^2 είναι συνεκτικός έχουμε $H_0(T^2) \simeq \mathbb{Z}$.

Γενικεύοντας, ο τόρος Σ_g γένους g δεν έχει σύνορο και δεν είναι σύνορο κάποιας 3 -αλυσίδας, συνεπώς $H_2(\Sigma_g) \simeq \mathbb{Z}$ αφού ο Σ_g είναι ο μοναδικός γεννήτορας ο οποίος παράγει ελεύθερα την $H_2(\Sigma_g)$. Η πρώτη ομάδα ομολογίας παράγεται από τους βρόγχους οι οποίοι δεν αποτελούν σύνορο κάποιας περιοχής. Επιλέγοντας κατάλληλα a_i, b_i βρίσκουμε $H_1(\Sigma_g) = \{i_1[a_1] + j_1[b_1] + \ldots + i_g[a_g] + j_g[b_g]\} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$ $(2\text{g}\ \varphi o\rho \acute{\varepsilon} \varsigma)$. Λόγω του ότι η επιφάνεια Σ_g είναι συνεκτική έχουμε ότι $H_0(\Sigma_g) \simeq \mathbb{Z}$.

<u>Θεώρημα 4.5</u>: Έστω $K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_N$ με $K_i \cap K_j = \emptyset$. Τότε

$$H_r(K) = H_r(K_1) \times H_r(K_2) \times \ldots \times H_r(K_N).$$

<u>Θεώρημα 4.6</u>: Έστω ότι ο X είναι κατά τόξα συνεκτικός. Τότε η $\pi_1(X)$ είναι αβελιανή πάνω από την $H_1(X)$.

Το παραπάνω θεώρημα με άλλα λόγια λέει ότι η $H_1(X)$ είναι ισομορφική με την $\pi_1(X)/F$ όπου F η αντιμεταθέτρια υποομάδα της $\pi_1(X)$. Αν η $\pi_1(X)$ είναι μια ομάδα με παράσταση $(x_i; r_m)$ το αντιμεταθέτρια υποομάδα είναι η υποομάδα που παράγεται από στοιχεία της μορφής $x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}$. Επομένως το $\pi_1(X)/F$ είναι μία ομάδα με γεννήτορες τα $\{x_i\}$ και σχέσεις το σύνολο $\{r_m\}$ και το $\{x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}\}$. Το παραπάνω θεώρημα λοιπόν λέει ότι αν $\pi_1(X)=(x_i;r_m)$, τότε $H_1(X)=(x_i;r_m,x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1})$.

4.5 ΑΡΙΘΜΟΙ BETTI ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ EULER-POINCARE

Ορισμός: Έστω K ένα ομολογικό σύμπλεγμα. Ο r-αριθμός Betti $b_r(K)$ ορίζεται να είναι

$$b_r(K)\equiv dim H_r(K;\mathbb{R})$$

Παραδείγματα:

- Για τον τόρο T^2 έχουμε τους αριθμούς Betti $b_0(K)=1$, $b_1(K)=2$, $b_2(K)=1$.
- Για τη σφαίρα S^2 $b_0(K)=1$, $b_1(K)=0$, $b_2(K)=1$.

Θεώρημα 4.7 (Euler-Poincarè): Έστω K ένα n -διάστατο ομολογικό σύμπλεγμα και έστω I_r ο αριθμός των r -συμπλόκων του K. Τότε,

$$\chi(K)\equiv\sum_{r=0}^{n}(-1)^r I_r=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r b_r(K).$$

Απόδειξη: ' Εστω ο ομομορφισμός

$$\theta_r: C_r(K;\mathbb{R})\rightarrow C_{r-1}(K;\mathbb{R})$$

όπου $C_{-1}(K;\mathbb{R})$ ορίζεται να είναι $\{0\}$. Εφόσον ο $C_{r-1}(K;\mathbb{R})$ και ο $C_r(K;\mathbb{R})$ είναι διανυσματικοί χώροι έχουμε:

$$I_r=dim C_r(K;\mathbb{R})=dim(ker\,\theta_r)+dim(im\theta_r)=dim Z_r(K;\mathbb{R})+dim B_{r-1}(K;\mathbb{R})$$

όπου το $B_{-1}(K)$ ορίζεται να είναι $\{0\}$. Ακόμα έχουμε:

$$b_r(K)=dim H_r(K;\mathbb{R})=dim(Z_r(K;\mathbb{R})/B_r(K;\mathbb{R}))=dim Z_r(K;\mathbb{R})-dim B_r(K;\mathbb{R})$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις, υπολογίζουμε:

$$\chi(K)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^n I_r$$

$$\chi(K)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r(dimZ_r(K;\mathbb{R})+dimB_{r-1}(K;\mathbb{R}))$$

$$\chi(K)=\sum_{r=0}^{n}\{(-1)^r dimZ_r(K;\mathbb{R})-(-1)^r dim\,B_r(K;\mathbb{R})\}$$

$$\chi(K)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r b_r(K) \quad . \quad ■$$

Σημείωση: Δοθέντων δύο διανυσματικών χώρων V και W, ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.8: Αν $f:V\rightarrow W$ γραμμική απεικόνιση, τότε

$$dimV=dim(kerf)+dim(imf).$$

4.6 ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

Με χρήση των ομάδων ομολογίας μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό για τις προσανατολίσιμες πολλαπλότητες:

Ορισμός: Μία συνεκτική, συμπαγής n -πολλαπλότητα M^n χωρίς σύνορο είναι προσανατολίσιμη αν $H_n(M^n)\neq 0$. Όμοια, μία συνεκτική, συμπαγής πολλαπλότητα M^n με μη-κενό σύνορο, λέμε ότι είναι προσανατολίσιμη αν $H_n(M,\theta M)\neq 0$.

Οι παραπάνω ομάδες είναι είτε τετριμμένες είτε άπειρα κυκλικές. Στην περίπτωση που είναι άπειρα κυκλικές, η επιλογή ενός από τους δύο πιθανούς γεννήτορες λέγεται προσανατολισμός και μία προσανατολίσιμη πολλαπλότητα μαζί με την επιλογή αυτή λέγεται προσανατολισμένη πολλαπλότητα. Ισχύει ακόμα πως το σύνορο μιας προσανατολισμένης n -πολλαπλότητας είναι προσανατολισμένο επιλέγοντας τον $(n-1)$ -κύκλο που είναι το σύνορο του επιλεχθέντος γεννήτορα n -κύκλου. Για M, N προσανατολισμένες n -πολλαπλότητες, ένας ομοιομορφισμός $h:M^n\rightarrow N^n$ λέγεται ότι διατηρεί ή ότι αντιστρέφει τον προσανατολισμό αν ο επαγόμενος ομομορφισμός των n -ομάδων ομολογίας απεικονίζει τον επιλεχθέντα γεννήτορα της M στον επιλεχθέντα γεννήτορα της N, ή στον αντίστροφο, αντίστοιχα.

5. ΤΑ ΤΡΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΑΠΑΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

5.1 ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Το 1910 ο Max Dehn σε μία εργασία του παρουσίασε ιδέες οι οποίες θα μπορούσαν να αποσαφηνίσουν πολλές έννοιες στη θεωρία κόμβων και στις 3 -πολλαπλότητες. Το κλειδί για τα αποτελέσματα αυτά ήταν το “Λήμμα του Dehn”. Το 1928 ο Kneser παρατήρησε ένα σημαντικό κενό στην απόδειξη του λήμματος το οποίο και παρέμεινε αναπόδεικτο για περίπου μισό αιώνα μέχρι την απόδειξη του Παπακυριακόπουλου το 1957. Στο μεταξύ είχαν εμφανιστεί δύο εργασίες του Johansson πάνω στο Λήμμα του Dehn στη δεύτερη από τις οποίες περικλειόταν η απόδειξη της ακόλουθης πρότασης: “Αν το Λήμμα του Dehn ισχύει για όλες τις προσανατολίσιμες 3 -πολλαπλότητες, τότε ισχύει και για όλες τις μη-προσανατολίσιμες”. Ο Παπακυριακόπουλος απέδειξε το Λήμμα κάνοντας χρήση αυτού του γεγονότος, αποδεικνύοντας δηλαδή ότι ισχύει για προσανατολίσιμες 3 -πολλαπλότητες.

1. <u>Το θεώρημα του βρόγχου:</u> Έστω M^3 μια 3 -πολλαπλότητα με $\theta M^3 \neq 0$ και $L \subset \theta M^3$ όπου L βρόγχος συσταλτός στην M^3 αλλά όχι συσταλτός στο θM^3. Τότε υπάρχει απλή κλειστή καμπύλη με τις ίδιες ιδιότητες.

2. <u>Το Λήμμα του Dehn:</u> Έστω M^3 μια 3 -πολλαπλότητα και $f: D^2 \to M^3$ η απεικόνιση ενός δίσκου χωρίς αυτοτομές στο σύνορο θD^2 (που σημαίνει πως αν $x \in \theta D^2$, τότε για οποιοδήποτε $y \in D^2$ με $x \neq y$ θα ισχύει $f(x) \neq f(y)$). Τότε υπάρχει μία εμφύτευση $g: D^2 \to M^3$ με $g(\theta D) = f(\theta D)$.

   Το παρακάτω είναι ένας συνδυασμός των δύο παραπάνω θεωρημάτων:

   <u>Το Λήμμα του Dehn και το θεώρημα του βρόγχου</u>: Αν M^3 είναι μια 3 -πολλαπλότητα και ο ομομορφισμός $\pi_1(\theta M^3) \to \pi_1(M^3)$ έχει μη τετριμμένο πυρήνα, τότε υπάρχει ένας δίσκος $D^2 \subset M^3$ τέτοιος ώστε $\theta D \subset \theta M$ και αναπαριστά ένα μη τετριμμένο στοιχείο του $\pi_1(\theta M^3)$.

Η σπουδαιότητα αυτών των θεωρημάτων έγκειται στο γεγονός ότι μέσω αλγεβρικών υποθέσεων μπορούμε να καταλήξουμε σε γεωμετρικά αποτελέσματα.

3. <u>Το θεώρημα της σφαίρας:</u> Αν M^3 είναι μια προσανατολίσιμη 3 -πολλαπλότητα με $\pi_2(M^3)\neq\{0\}$, υπάρχει μία 2 -σφαίρα S^2 εμφυτευμένη στην M^3 που δεν είναι συσταλτή στην M^3.

Η συνθήκη $\pi_2(M)\neq\{0\}$ σημαίνει την ύπαρξη στην M μιας 2 -σφαίρας με αυτοτομές που δεν είναι συσταλτή στην M. Το θεώρημα της σφαίρας είναι παράλληλο με το λήμμα του Dehn τόσο στο περιεχόμενο όσο και στην απόδειξη. Η απόδειξη του είναι μια τροποποίηση αυτής του Λήμματος του Dehn.

5.2 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΤΕΤΡΙΜΜΕΝΟΥ ΚΟΜΒΟΥ

Το θεώρημα του τετριμμένου κόμβου προκύπτει από το λήμμα του Dehn και είναι πολύ βασική εφαρμογή του στη θεωρία κόμβων.

Ένας <u>στερεός τόρος</u> (δηλαδή ένας τόρος μαζί με το εσωτερικό του) είναι ένας χώρος ομοιομορφικός με τον $S^1\times D^2$ και συμβολίζεται με V. Κάθε ομοιομορφισμός $h:S^1\times D^2\to V$ λέγεται <u>πλαισίωση</u> του V.

<u>Ορισμός</u>: Μία απλή κλειστή καμπύλη J στο θV η οποία δεν είναι συσταλτή στο θV λέγεται <u>μεσημβρινός</u> του V αν για κάποια <u>πλαισίωση</u> $h:S^1\times D^2\to V$ ισχύει $J=h(\{1\}\times\theta D^2)$.

Μία απλή κλειστή καμπύλη J στο θV λέγεται <u>παράλληλος</u> του V αν για κάποια <u>πλαισίωση</u> $h:S^1\times D^2\to V$ ισχύει $J=h(S^1\times\{1\})$.

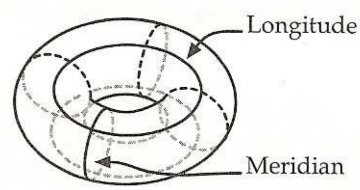
<u>Πρόταση 5.1</u>: Έστω J μια απλή κλειστή καμπύλη μη συσταλτή στο θV. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- Η J είναι μεσημβρινός.
- Η J είναι ομολογικά τετριμμένη στο V.
- Η J είναι ομοτοπικά τετριμμένη στο V.

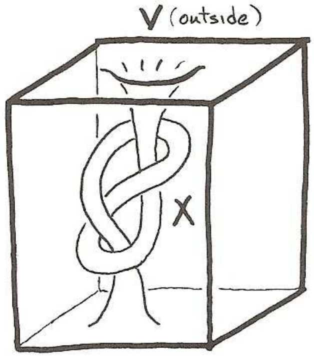
- Η J αποτελεί το σύνορο ενός δίσκου στο V.

<u>Πρόταση 5.2</u>: Έστω $K \in \theta V$ μια απλή κλειστή καμπύλη. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- Η K είναι παράλληλος.
- Η K αναπαριστά έναν γεννήτορα του $H_1(V) \simeq \pi_1(V) \simeq \mathbb{Z}$.
- Η K τέμνει κάποιο μεσημβρινό σε ένα σημείο.



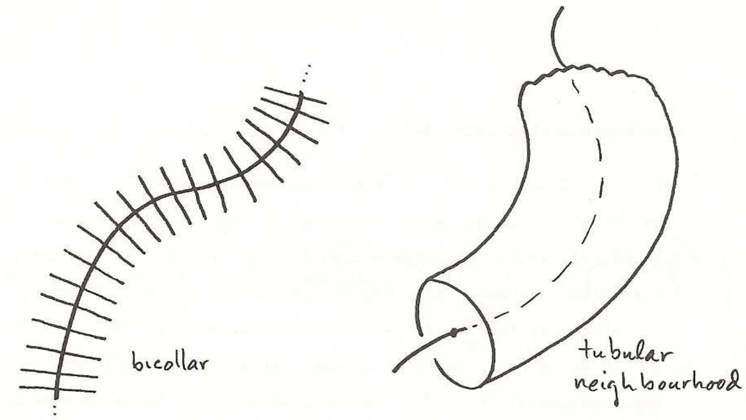
Εμφυτεύουμε το V στην S^3, $V \subset S^3$ και συμβολίζουμε $X = \overline{S^3 \setminus V} = S^3 \setminus \mathring{V}$. Ο χώρος X που προκύπτει είναι μία πολλαπλότητα με σύνορο $\theta X = \theta V$.



<u>Ορισμός</u>: Η μοναδική πλαισίωση $h: S^1 \times D^2 \to V$ για την οποία ισχύει ότι $h(S^1 \times \{1\})$ είναι ομολογικά τετριμμένο στον X λέγεται <u>προτιμώμενη πλαισίωση</u> του V στην S^3. (Ισχύει ότι υπάρχει μοναδικός παράλληλος ομολογικά τετριμμένος στον X).

<u>Ορισμός</u>: Ένα υποσύνολο $X \subset Y$ λέγεται <u>bicollared</u> (στο Y) αν υπάρχει εμφύτευση $b: X \times [-1,1] \to Y$ τέτοια ώστε $b(x,0) = x$ για $x \in X$. Ο χάρτης b ή η εικόνα του είναι το ίδιο το bicollar. Στην περίπτωση που μιλάμε για πολλαπλότητες χωρίς σύνορο ($n-1$ και n διάστασης αντίστοιχα) το bicollar είναι μια γειτονιά του X στο Y, συγκεκριμένα $b(X \times (-1,1))$ είναι ένα ανοικτό σύνολο. Γενικότερα, έστω $M^m \subset N^n$, όπου $m<n$, M^m, N^n πολλαπλότητες και $\theta M = \theta N = \emptyset$. Μία <u>σωληνοειδής γειτονιά</u> είναι μία εμφύτευση $t: M \times B^{n-m} \to N$ τέτοια ώστε $t(x,0) = x$ για $x \in M$. Με B^{n-m} συμβολίζουμε τη μοναδιαία μπάλλα στον $\mathbb{R}^{n-m}$ με κέντρο το 0. Για παράδειγμα, η σωληνοειδής γειτονιά ενός κόμβου $K^1 \in \mathbb{R}^3$ είναι ένας στερεός τόρος, και ο κόμβος είναι

η κεντρική καμπύλη του.



<u>Ορισμός</u>: Μία εμφύτευση $f: B^k \to M^n$, όπου M πολλαπλότητα, λέγεται <u>επίπεδη</u> αν επεκτείνεται σε μία εμφύτευση $\bar{f}: U \to M$, όπου U γειτονιά του B^k στον $\mathbb{R}^n$ $(B^k \in \mathbb{R}^n)$. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το $f(B^k) \subset M$ είναι ένας <u>επίπεδος δίσκος</u>.

<u>Θεώρημα 5.3 (Βασικό θεώρημα του τετριμμένου κόμβου)</u>: Ένας κόμβος $K^k \subset S^n$ $(k<n)$ είναι ισοτοπικός με τον τετριμμένο $S^k \subset S^n$ αν και μόνο αν ο K είναι το σύνορο ενός επίπεδου $(k+1)$ -δίσκου στην S^n.

Οι κόμβοι square και granny έχουν ισομορφικές ομάδες κόμβων, παρ' όλα αυτά δεν είναι ισοδύναμοι. Αυτό μας δείχνει ότι η ομάδα κόμβου δεν είναι πλήρης αναλλοίωτη κόμβου, δηλαδή πως η συνάρτηση $f: K \to \pi_1(S^3 \setminus K)$ δεν είναι ένα-προς-ένα. Παρ' όλα αυτά το λήμμα του Dehn συνεπάγεται πως μόνο ο τετριμμένος κόμβος έχει τετριμμένη (αβελιανή) ομάδα κόμβου.

<u>Θεώρημα 5.4 (Θεώρημα τετριμμένου κόμβου)</u>: Ένας κόμβος K είναι ο τετριμμένος αν και μόνο αν η $\pi_1(S^3 \setminus K)$ είναι άπειρα κυκλική.

<u>Απόδειξη</u>: Το ότι αν ο κόμβος K είναι τετριμμένος έχει άπειρα κυκλική ομάδα κόμβου το έχουμε δείξει με την παράσταση Wirtinger. Αντίστροφα, έστω $X = S^3 \setminus K$ και ότι $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}$. Από το βασικό θεώρημα του τετριμμένου κόμβου αρκεί να δείξουμε ότι ο K είναι το σύνορο ενός επίπεδου 2 -δίσκου στην S^3. Παίρνουμε μια σωληνοειδή γειτονιά V του K με μία προτιμώμενη πλαισίωση $V \simeq S^1 \times D^2$. Έπεται ότι υπάρχει μοναδικός παράλληλος ο οποίος είναι ομολογικά τετριμμένος στον $X = S^3 \setminus \mathring{V} = S^3 \setminus K$. Έστω $L \in \theta V$ αυτός ο παράλληλος. Τότε εφόσον $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$ ο L θα είναι ομοτοπικά τετριμμένος στον X. Εφαρμόζουμε το λήμμα του Dehn για τον L καθώς είναι συσταλτός στον X αλλά δεν είναι συσταλτός στο $\theta X = \theta V$. Άρα υπάρχει δίσκος

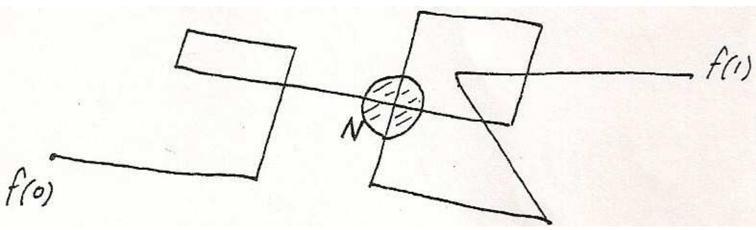
$D \subset X$ τέτοιος ώστε το $L = \theta D \subset \theta X$ και θD είναι μη τετριμμένο στοιχείο του $\pi_1(\theta X)$. Ακόμα υπάρχει ένας κυκλικός δακτύλιος στον V που συνδέει την L με τον K. Η ένωση του κυκλικού δακτυλίου αυτού με το δίσκο του οποίου σύνορο είναι η L μας δίνει έναν δίσκο στην S^3 του οποίου σύνορο είναι ο κόμβος K. Καταλήγουμε ότι ο κόμβος K είναι ο τετριμμένος. ■

5.3 ΣΚΙΑΓΡΑΦΗΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ ΤΟΥ DEHN

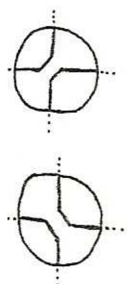
Διατυπώνουμε ένα θεώρημα αντίστοιχο του Λήμματος του Dehn για 2-πολλαπλότητες και σκιαγραφούμε την απόδειξή του.

Θεώρημα 5.5: Έστω $f:[0,1] \to M^2$ ένα κατά τμήματα γραμμικό μονοπάτι στην 2-πολλαπλότητα M^2, με $f(0) \neq f(1)$. Τότε υπάρχει μία εμφύτευση $g:[0,1] \to M^2$ τέτοια ώστε $g(0) = f(0)$ και $g(1) = f(1)$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι για τον χάρτη f τα σημεία αυτοτομών είναι πεπερασμένα. Σε κάθε σημείο αυτοτομής p του μονοπατιού $f([0,1])$, μπορούμε να βρούμε μια γειτονιά N του p ομοιομορφική με τον $\mathbb{R}^2$.

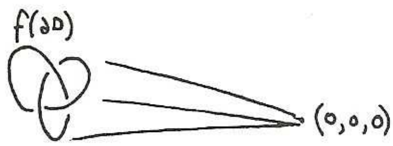


Τροποποιούμε το μονοπάτι εντός της γειτονιάς N μέσω μιας άρσης της αυτοτομής. Το καινούριο μονοπάτι έχει την εξής εικόνα:



Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για κάθε σημείο αυτοτομής και τελικά καταλήγουμε να έχουμε ένα τόξο απ' το $f(0)$ στο $f(1)$ και επιπλέον κάποιες απλές κλειστές καμπύλες τις οποίες αγνοούμε. Το τόξο αυτό είναι η εμφύτευση g που θέλαμε. ■

Υποθέτουμε ότι μπορούμε να επεκτείνουμε το παραπάνω θεώρημα για 3-πολλαπλότητες: Έστω f κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση ενός 2-διάστατου δίσκου σε μια 3-πολλαπλότητα, $f: D^2 \rightarrow M^3$, έτσι ώστε ο περιορισμός της στο σύνορο του δίσκου $f/\theta D$ να είναι εμφύτευση. Τότε υπάρχει εμφύτευση $g: D^2 \rightarrow M^3$ τέτοια ώστε $g(\theta D) = f(\theta D)$. Ο παραπάνω ισχυρισμός είναι όμως εσφαλμένος, καθώς μας δείχνει το παρακάτω αντιπαράδειγμα. Έστω $f: D \rightarrow M^3$ τέτοια ώστε $f/\theta D = trefoil$, $f(\kappa\acute{\varepsilon}\nu\tau\rho o\ \tau o\upsilon\ D) = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ και ο f επεκτείνει γραμμικά κάθε ακτίνα του δίσκου D.



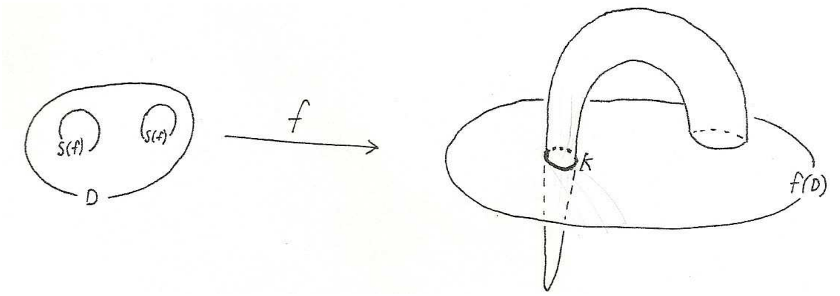
Το παράδειγμα αυτό αποτυγχάνει λόγω του ότι μέσω της f κάποια σημεία του εσωτερικού του δίσκου D και κάποια σημεία του συνόρου θD θα έχουν την ίδια εικόνα. Κάθε άλλη τέτοια g θα πρέπει να έχει ισοτοπική εικόνα με την f. Έτσι είναι αδύνατον να βρεθεί η επιθυμητή εμφύτευση. Έτσι πρέπει να απαιτήσουμε το σύνολο $f(IntD) \cap f(\theta D)$ να είναι κενό. Έχοντας δει αυτό το παράδειγμα είναι χρήσιμο να ορίσουμε το σύνολο αυτοτομών και να επαναδιατυπώσουμε το Λήμμα του Dehn.

<u>Ορισμός</u>: Το σύνολο αυτοτομών της απεικόνισης f ορίζεται να είναι το $S(f) = \{x \in D | \exists\, y \in D : y \neq x \ \kappa\alpha\iota\ f(x) = f(y)\}$.

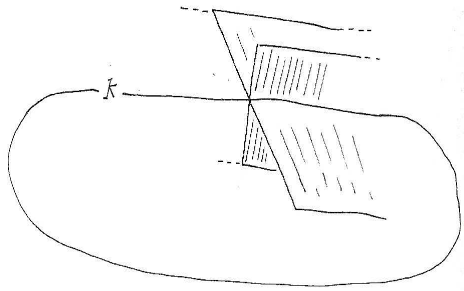
<u>Το Λήμμα του Dehn</u>: Έστω $f: D \rightarrow M^3$ ένας κατά τμήματα γραμμικός χάρτης με $\overline{S(f)} \cap \theta D = \emptyset$. Τότε υπάρχει εμφύτευση $g: D \rightarrow M^3$ με $g(\theta D) = f(\theta D)$.

Με αυτόν τον περιορισμό στην υπόθεση έχουμε ότι αν $x \in \overline{S(f)}$ συνεπάγεται ότι $x \in \mathring{D}$. Ουσιαστικά η απαίτηση $\overline{S(f)} \cap \theta D = \emptyset$ εγγυάται την ύπαρξη ενός κυκλικού δακτυλίου χωρίς αυτοτομές το οποίο να περιλαμβάνει το $f(\theta D)$. Έτσι όλες οι αυτοτομές περιορίζονται σε κάποια πεπερασμένη απόσταση από το σύνορο του δίσκου. Αν η απαίτηση ήταν $S(f) \cap \theta D = \emptyset$, δηλαδή $\forall\, x \in \theta D$ συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει $y \in \mathring{D} : f(x) = f(y)$ το αποτέλεσμα είναι πάλι αληθές αλλά πιο περίπλοκο.

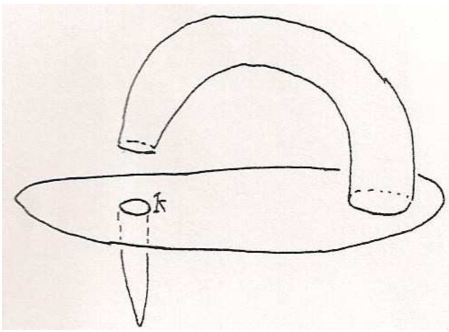
<u>Απόδειξη μιας ειδικής περίπτωσης του Λήμματος του Dehn</u>: Θεωρούμε την παρακάτω ειδική περίπτωση όπως απεικονίζεται στο σχήμα:



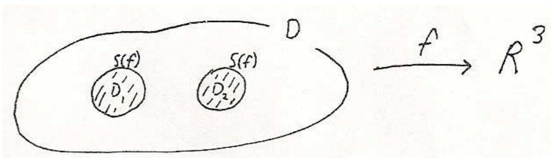
Ένας επίπεδος δίσκος στον $\mathbb{R}^3$ που έχει ένα feeler το οποίο εκτείνεται προς τα πάνω, ύστερα λυγίζει και διαπερνάει το δίσκο προς τα κάτω. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο αυτοτομών $S(f)$ είναι δύο καμπύλες στον D των οποίων η κοινή εικόνα είναι η απλή κλειστή καμπύλη K.



Περιοριζόμαστε στην περιοχή του $f(D)$ γύρω από την καμπύλη K. Μέσα σε αυτήν την περιοχή παίρνουμε τεμνόμενα τμήματα της επιφάνειας και τα ενώνουμε κατάλληλα κατά μήκος όλης της K. Έτσι άρουμε την αυτοτομή και παίρνουμε έναν χωρίς αυτοτομές δίσκο. Το καινούριο feeler ξεκινάει από το K και εκτείνεται προς τα κάτω.

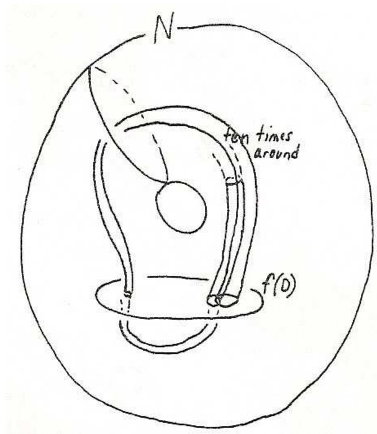


Θα μπορούσαμε να δούμε αυτήν την άρση της αυτοτομής σαν αμοιβαία αλλαγή των δύο δίσκων D_1 και D_2. ■

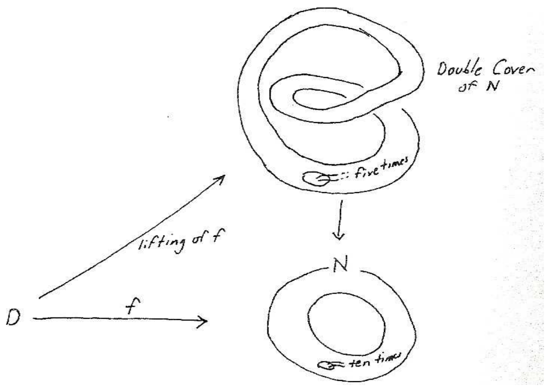


<u>Απόδειξη μιας ελαφρώς δυσκολότερης περίπτωσης</u>: Έστω ότι έχουμε ένα feeler το οποίο

εκτείνειται γύρω από τον εαυτό του δέκα φορές.



Σε αυτήν την περίπτωση το $S(f)$ είναι πολύ περίπλοκο να σχεδιαστεί καθώς δεν έχουμε πια μόνο διπλά σημεία. Επιλέγουμε μία γειτονιά N γύρω από τον $f(D)$, που να είναι ένας στερεός τόρος. Κατασκευάζουμε τη διπλή κάλυψη της N, η οποία είναι επίσης ένας στερεός τόρος. Ανυψώνουμε τον χάρτη f στη διπλή κάλυψη και η ανύψωση είναι ένας χάρτης μέσω του οποίου το feeler εκτείνεται γύρω από τον εαυτό του μόνο πέντε φορές.



Ύστερα παίρνουμε τη διπλή κάλυψη της διπλής κάλυψης και καταλήγουμε το feeler να εκτείνεται γύρω από τον εαυτό του 2,5 φορές. Συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία καταλήγουμε να έχουμε εμφύτευση. Αυτή η κατασκευή ονομάζεται πύργος διπλών καλύψεων. Η εμφύτευση στην κορυφή του πύργου κατεβαίνει κάτω ένα επίπεδο κάθε φορά με τη μέθοδο της ειδικής περίπτωσης. Έτσι, έχει αποφευχθεί το πρόβλημα των τριπλών και άνω σημείων, αφού κάθε διπλή κάλυψη δίνει μόνο διπλά σημεία και μπορούμε να ακολουθήσουμε τη μέθοδο της ειδικής περίπτωσης με την οποία μπορούμε να άρουμε μόνο διπλά σημεία αυτοτομών. ■

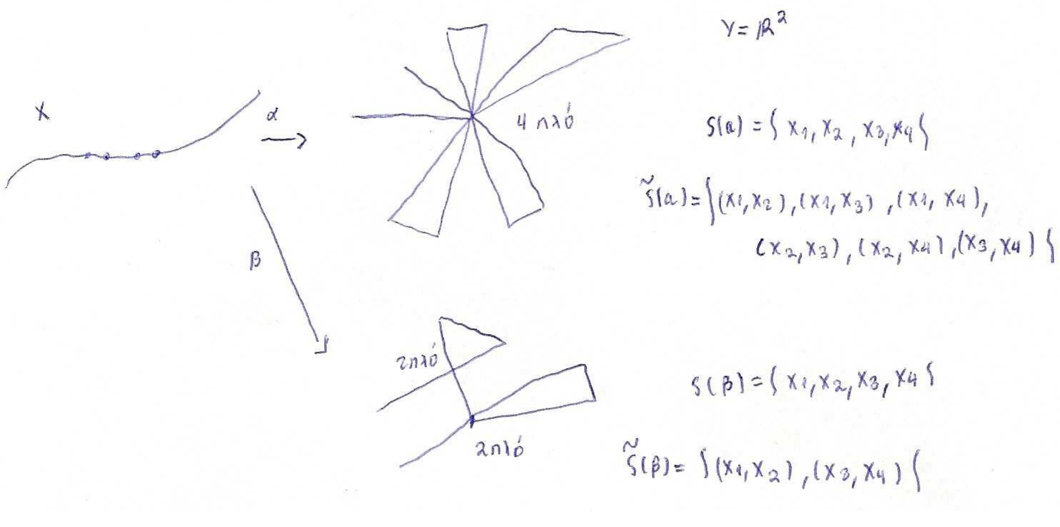
Απόδειξη του Λήμματος του Dehn: Μετονομάζουμε $f_0=f$ και έστω R_0 μία γειτονιά του $f_0(D)$ στην $M^3=M_0$. Αυτό είναι το επίπεδο 0 του πύργου. Κατασκευάζουμε τη διπλή κάλυψη M_1 του R_0, και καλούμε f_1 την ανύψωση του f_0. Έστω R_1 μία γειτονιά του $f_1(D)$ στην M_1. Έτσι έχουμε ολοκληρώσει την κατασκευή και του πρώτου επιπέδου. Με την κατασκευή της διπλής κάλυψης M_2 του R^1 ξεκινάει η κατασκευή του δεύτερου επιπέδου.

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[d, "\rho_1"] \\ D_0 \arrow[ur, dashed, "f_1"] \arrow[r, "f_0"] & R_0 \end{tikzcd}$$

Χωρίζουμε την απόδειξη σε 4 λήμματα:

<u>Λήμμα 1</u>: Αυτή η διαδικασία τερματίζεται ύστερα από πεπερασμένο αριθμό βημάτων, δηλαδή υπάρχει ένα n για το οποίο δεν υπάρχει η διπλή κάλυψη του R_n.

<u>Απόδειξη</u>: Η ιδέα της απόδειξης είναι να δείξουμε ότι το σύνολο αυτοτομών σταδιακά θα εξαφανιστεί. Για τη συνέχεια της απόδειξης χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ισχυρισμό: Αν $S(f_1)=S(f_0)$ τότε τα $f_0(D)$ $f_1(D)$ είναι ομοιομορφικά υπό την ρ_1. Αυτό όμως δεν ισχύει με τον ορισμό που έχουμε για το σύνολο αυτοτομών. Παρακάτω δίνουμε ένα παράδειγμα, στο οποίο δοθέντων δύο απεικονίσεων $\alpha: X\to Y$ και $\beta: X\to Y$ έχουμε $S(\alpha)=S(\beta)$ και οι χώροι $\alpha(X)$ και $\beta(X)$ δεν είναι ομοιομορφικοί. Πράγματι, βλέπουμε ότι $S(\alpha)=S(\beta)=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

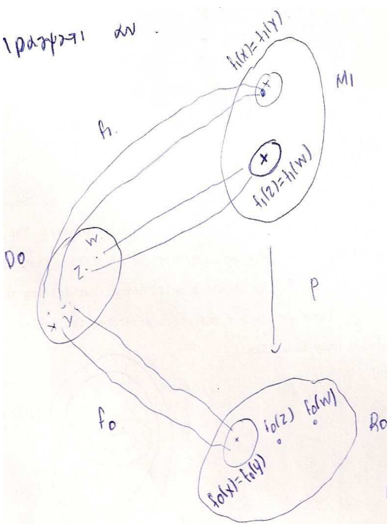


Για να ισχύει αυτός ο ισχυρισμός πρέπει να μεταβάλλουμε τον ορισμό του συνόλου αυτοτομών ως εξής:

Δοθείσης μιας απεικόνισης $f: X\to Y$ ορίζουμε το σύνολο αυτοτομών $\tilde{S}(f)=\{(x_1, x_2)\in X\times X | f(x_1)=f(x_2)\}$. Με τον καινούριο αυτό ορισμό τα σύνολα αυτοτομών στο παραπάνω παράδειγμα διαφέρουν καθώς

$\tilde{S}(\alpha)=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_1,x_4),(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_3,x_4)\}$ ενώ $\tilde{S}(\beta)=\{(x_1,x_2),(x_3,x_4)\}$. Τώρα μπορούμε να κατασκευάσουμε ομοιομορφισμό από τον $f_0(D)$ στον $f_1(D)$.

Από τη μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος έπεται ότι $S(f_1)\subseteq S(f_0)$. Πράγματι έστω ότι στο παρακάτω παράδειγμα έχουμε $x,y,z,w\in D_0$ και ισχύει ότι τα $(z,w)\in S(f_1)$ και $(z,w)\notin S(f_0)$. Τότε, αφού $f_1(z)=f_1(w)$ έχουμε ότι $p\circ f_1(z)=p\circ f_1(w)$ ενώ $f_0(z)\neq f_0(w)$. Άρα το διάγραμμα δεν είναι μεταθετικό, άτοπο.



Επομένως, $S(f_1)\subseteq S(f_0)$ που σημαίνει ότι το σύνολο αυτοτομών γίνεται μικρότερο καθώς ανεβαίνουμε τον πύργο.

Εφόσον το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
f_1(D) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p_1"] & M_1 \arrow[d, "p_1"] \\
f_0(D) \arrow[r, "j"'] & R_0
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, θα είναι μεταθετικό και το

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(f_1(D)) \arrow[r, "4"] \arrow[d, "1"] & \pi_1(M_1) \arrow[d, "3"] \\
\pi_1(f_0(D)) \arrow[r, "2"] & \pi_1(R_0)
\end{tikzcd}$$

Ο ομομορφισμός 1 είναι ισομορφισμός εφόσον προκύπτει από ομοιομορφισμό. Ο ομομορφισμός 2 είναι ισομορφισμός αφού το R_0 είναι γειτονιά του $f_0(D)$. Άρα, έχουμε ότι ο ομομορφισμός 3 πρέπει να είναι επιμορφισμός, αφού γνωρίζουμε ότι το διάγραμμα είναι μεταθετικό. Όμως, από τη θεωρία των χώρων επικάλυψης έχουμε ότι η $\pi_1(M_1)$ είναι υποομάδα της $\pi_1(R_0)$ κι έτσι οδηγούμαστε σε άτοπο.

Συνεπώς, έχουμε ότι $\tilde{S}(f_i)\subset\tilde{S}(f_{i-1})$, και αφού αυτά τα σύνολα είναι κατά τμήματα γραμμικά, οι αυτοτομές θα είναι ή μεμονωμένα σημεία ή τόξα ή τρίγωνα κλπ, δηλαδή θα πρέπει να αφαιρούμε τουλάχιστον ένα σύμπλοκο σε κάθε επίπεδο. ■

Η επιθυμητή έκβαση θα ήταν στο τελευταίο επίπεδο του χάρτη $f_n: D\rightarrow M_n$ να είχαμε εμφύτευση, όπως στην ειδική περίπτωση. Αυτό δεν ισχύει, αλλά ισχύει ότι το θR_n αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό σφαιρών.

<u>Λήμμα 2</u>: Αν μία συμπαγής, συνεκτική, χωρίς σύνορο πολλαπλότητα δεν έχει διπλό κάλυμμα, τότε το θM αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό σφαιρών.

<u>Απόδειξη</u>: Σπάμε την απόδειξη σε εφτά βήματα.

1. Η πολλαπλότητα M είναι προσανατολίσιμη, αλλιώς θα μπορούσε να κατασκευαστεί διπλό κάλυμμα.
2. Έστω ότι το θM^n έχει K συνιστώσες $B_1, B_2, \ldots B_K$. Τότε κάθε B_i είναι προσανατολίσιμο. Πράγματι, ορίζουμε έναν προσανατολισμό για κάθε 3 - σύμπλοκο της M από το βήμα 1, ο οποίος προσανατολισμός ισχύει και για κάθε B_i.
3. Η ομάδα $H_1(M)$ είναι πεπερασμένη. Αυτό μπορεί να δειχθεί υποθέτοντας ότι η $H_1(M)$ είναι άπειρη. Τότε θα είχε έναν παράγοντα $\mathbb{Z}$ από το θεώρημα πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων. Μπορούμε λοιπόν να κατασκευάσουμε έναν επιμορφισμό από το $H_1(M)$ στο $\mathbb{Z}_2$. Η ομάδα $\pi_1(M)$ με αβελιανοποίηση μας δίνει την $H_1(M)$, επομένως η σύνθεση $\pi_1(M)\rightarrow\mathbb{Z}_2$ είναι επιμορφισμός. Όμως η σύνθεση $\pi_1(M)\rightarrow\mathbb{Z}_2$ μας δίνει μια διπλή κάλυψη, άτοπο.
4. Έστω $\chi(M)$ η χαρακτηριστική Euler της M. Κατασκευάζουμε μία 3 - πολλαπλότητα χωρίς σύνορο ως εξής: Κολλάμε δύο αντίγραφα της M κατά μήκος των συνόρων τους. Η νέα αυτή πολλαπλότητα θα έχει χαρακτηριστική Euler 0, από δυικότητα. Επίσης θα έχει χαρακτηριστική Euler $2\chi(M)-\chi(\theta M)$. Έχουμε δηλαδή:

$$2\chi(M)=\chi(\theta M).$$

5. Λαμβάνοντας υπόψιν μας τον τύπο της χαρακτηριστικής Euler με τη χρήση των αριθμών Betti έχουμε $\chi(M)=r_0-r_1+r_2-r_3$ όπου $r_i=rank(H_i(M))$. Εφόσον η M είναι συνεκτική έχουμε ότι $H_0(M)\simeq\mathbb{Z}$, επομένως $r_0=1$. Από το θεώρημα πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων και το γεγονός ότι η $H_1(M)$ είναι πεπερασμένη, δηλαδή ότι δεν περιέχει παράγοντα $\mathbb{Z}$ έχουμε ότι $r_1=0$. Οι συνιστώσες $B_1, B_2, B_3, \ldots B_{K-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι γεννήτορες του $H_2(M)$, επομένως $r_2\geqslant K-1$. Τέλος, αφού η M έχει σύνορο, δεν υπάρχει $c\in C_3(K)$ ώστε $\theta_3 c=0$ που σημαίνει ότι $Z_3(K)=\{0\}$ και κατ' επέκταση $r_3(0)=0$. Συνδυάζοντας αυτά τα αποτελέσματα παίρνουμε
$$\chi(M)\geqslant K$$
6. Συνδυάζοντας τις καταληκτικές σχέσεις των βημάτων 4 και 5 παίρνουμε:
$$\chi(\theta M)\geqslant K, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ \chi(B_1)+\chi(B_2)+\ldots+\chi(B_K)\geqslant 2\mathrm{K}$$
7. Για προσανατολίσιμες 2 -πολλαπλότητες έχουμε τις παρακάτω χαρακτηριστικές Euler:
$$\chi(2-\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma)=2$$
$$\chi(\tau\acute{o}\rho o\upsilon)=0$$
$$\chi(\Sigma_2)=-2$$
$$\chi(\Sigma_3)=-4$$
κλπ

Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με το βήμα 6 δείχνει ότι οι B_i πρέπει να είναι 2 -σφαίρες για κάθε i, αποδεικνύοντας το λήμμα 2. ■

Λήμμα 3: Το συμπέρασμα του λήμματος του Dehn ισχύει στο ανώτατο επίπεδο M_n του πύργου.

Απόδειξη: Εφόσον το θR_n αποτελείται από 2-σφαίρες, χρειάζεται μόνο να δείξουμε ότι το $f_n(\theta D)$ περιέχεται σε μία από αυτές. Πράγματι, αυτό που φαίνεται να συμβαίνει είναι ότι το $f_n(\theta D)$ είναι κοντά στο θR^n και χρειάζεται μια μικρή μετατόπιση για να ισχύει ο ισχυρισμός. Για να επιτευχθεί αυτή η μετατόπιση, πρέπει να αλλάξουμε ελαφρώς τον ορισμό της γειτονιάς του R_i Έστω R_i όλα τα σύμπλοκα στη δεύτερη βαρυκεντρική υποδιαίρεση που τέμνουν το $f(\mathring{D})$ Με την αλλαγή αυτή στον ορισμό συνεπάγεται ότι $f(\theta D) \subset \theta R_i$. Η αλλαγή αυτή στον ορισμό της γειτονιάς R_i δεν δημιουργεί πρόβλημα στα αποτελέσματα των λημμάτων 1 και 2. ■

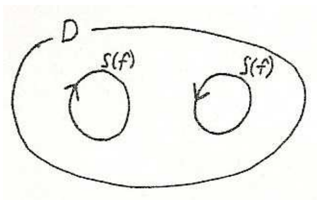
Λήμμα 4: Αν το συμπέρασμα του λήμματος ισχύει στο επίπεδο M_{j+1} ισχύει και στο επίπεδο M_j.

Απόδειξη: Έστω g_{j+1} η εμφύτευση του D στην M_{j+1}. Προσεγγίζουμε την απεικόνιση που ζητάμε μέσω της σύνθεσης $g: D \to M_j$ όπου $g = \rho_{j+1} \circ g_{j+1}$, το σύνολο αυτοτομών της οποίας βέβαια δεν είναι κενό. Αυτό που γνωρίζουμε είναι πως οι αυτοτομές δεν βρίσκονται πάνω στο σύνορο, όπως είχαμε από την αρχή. Υπάρχουν δύο λόγοι για τους οποίους είμαστε σε καλύτερη θέση από την αρχή, οι εξής:

- Η απεικόνιση g είναι τοπικά εμφύτευση του D στην M_i.
- Το $S(g)$ αποτελείται μόνο από διπλά σημεία αφού η ρ_{j+1} είναι διπλή κάλυψη και $S(g_{j+1}) = \emptyset$. Επομένως, ο g έχει πεπερασμένου πλήθους αυτοτομές και το $S(g)$ είναι μία 1 -πολλαπλότητα.

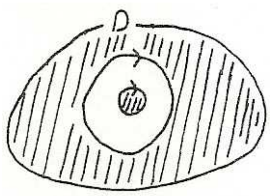
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις για το $S(g)$:

- Έστω ότι το $S(g)$ είναι δύο κύκλοι όπως οι παρακάτω:

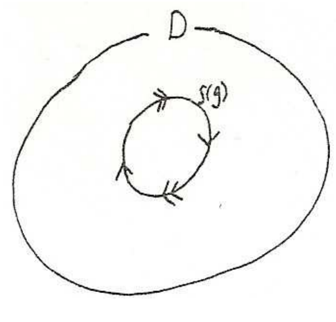


  Αυτή είναι η κατάσταση της ειδικής περίπτωσης και η αυτοτομή μπορεί να αρθεί όπως ήδη εξηγήσαμε.

- Έστω ότι οι κύκλοι είναι ομόκεντροι. Τότε η αυτοτομή μπορεί να αρθεί είτε μετακινώντας τον κυκλικό δακτύλιο μεταξύ τους, γυρίζοντάς τον ανάποδα και ξανακολλώντας τον, είτε μετακινόντας το και κολλώντας τις σκιασμένες περιοχές.



- Έστω μία καμπύλη στο $S(g)$ στην οποία ταυτοποιούνται αντίθετα σημεία υπό την g. Αυτή η αυτοτομή αίρεται μετακινώντας τον υποδίσκο του D που έχει σαν σύνορο το $S(g)$, γυρνώντας τον 180 μοίρες και ξανακολλώντας τον.



Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Λήμματος του Dehn. ■

5.4 ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

Η δυσκολία της απόδειξης του Λήμματος του Dehn, του θεωρήματος του βρόγχου και του θεωρήματος της σφαίρας έγκειται στο γεγονός ότι δεν μπορούσαν να προσεγγισθούν σε τοπικό επίπεδο, παρά χρειαζόταν να θεωρηθούν συνολικά και να αρθεί η πολυπλοκότητά τους με καθολικό τρόπο.

Ο Dehn προσπάθησε να αποδείξει το Λήμμα που διατύπωσε ξεκινώντας από έναν δίσκο με αυτοτομές και σύνορο L και δίνοντας μια ακολουθία τοπικών κινήσεων, χωρίς να επηρεάζεται το σύνορο, μειώνοντας την πολυπλοκότητα και καταλήγοντας σε έναν δίσκο χωρίς αυτοτομές.

Όταν το 1929 ο Kneser έγραψε μια εργασία βασισμένη στο Λήμμα του Dehn, στο τέλος της οποίας υπέδειξε ένα σημαντικό κενό στην απόδειξη, έδειξε ουσιαστικά πως το πρόβλημα ήταν ότι τοπικές αυτές κινήσεις δεν οδηγούσαν πάντα σε απλούστευση των αυτοτομών. Στο πρώτο κομμάτι της εργασίας του Kneser δινόταν η διατύπωση που παραθέσαμε παραπάνω ως “συνδυασμό του λήμματος του Dehn και του θεωρήματος του βρόγχου” και η απόδειξή του. Αυτό το θεώρημα πράγματι ισχύει, αλλά και η απόδειξη του Kneser βασιζόταν στις ιδέες του Dehn, και περιελάμβανε ένα σημαντικό λάθος.

Ο τρόπος που ο Παπακυριακόπουλος προσέγγισε και τελικά κατόρθωσε να φέρει εις πέρας την απόδειξη του θεωρήματος του βρόγχου και ύστερα των άλλων δύο ήταν η κατασκευή ενός πύργου από χώρους επικάλυψης. Σύμφωνα με αυτήν την τεχνική, θεώρησε έναν δίσκο με αυτοτομές, πήρε την εικόνα του σε μια 3 -πολλαπλότητα, κατασκεύασε μια κάλυψη μιας γειτονιάς του στην 3 -πολλαπλότητα, ανύψωσε το δίσκο στην κάλυψη και συνέχισε κατά τον ίδιο τρόπο την κατασκευή. Το αποτέλεσμα που επιτεύχθη ήταν σε κάθε επίπεδο της κατασκευής να υπάρχει ένα πρόβλημα του ίδιου τύπου, με μείωση όμως κάθε φορά των αυτοτομών, ώστε τελικά να υπάρχει ένα τελευταίο επίπεδο στο οποίο δεν μπορεί να κατασκευαστεί χώρος επικάλυψης. Λόγω, τέλος, του γεγονότος ότι αν μια 3 -πολλαπλότητα δεν έχει χώρο επικάλυψης, τότε η γειτονιά της εικόνας του δίσκου περιλαμβάνει έναν δίσκο χωρίς αυτοτομές, κατεβαίνοντας τον πύργο μέσω της ακολουθίας των καλύψεων, υπάρχουν αποτελέσματα, όσον αφορά την εικόνα του δίσκου, που επιτρέπουν τομές για να φτιαχτεί ο δίσκος στο ακριβώς κατώτερο επίπεδο. Έτσι αποφεύγεται το κενό που βρήκε ο Kneser στην απόδειξη του Dehn.

Στην κατηγορία των προβλημάτων που έχουν γεωμετρικές συνέπειες από αλγεβρικές υποθέσεις, το γνωστότερο είναι η Εικασία Poincarè: "Οποιαδήποτε 3 -πολλαπλότητα που είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με την S^3, είναι ομοιομορφική με την S^3 ". Η εικασία είχε διατυπωθεί από τον Poincarè το 1904 και αποδείχθηκε έναν αιώνα μετά από το Ρώσο μαθηματικό Perelman, ο οποίος βραβεύθηκε με το Βραβείο Fields τον Αύγουστο του 2006. Ο Παπακυριακόπουλος είχε ασχοληθεί για πολλά χρόνια με την Εικασία Poincarè και έβλεπε τα τρία αυτά θεωρήματα σαν απαραίτητα βήματα για την προσέγγιση της απόδειξης της εικασίας. Οι μετέπειτα εργασίες του περιελαμβάνουν χρήση της τεχνικής του πύργου των χώρων επικάλυψης στην προσπάθειά του να πετύχει αυτόν τον σκοπό.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΧΡΙΣΤΟ ΠΑΠΑΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟ

Ο Χρίστος Παπακυριακόπουλος –που το όνομά του αργότερα συντμήθηκε σε Πάπα- γεννήθηκε στην Αθήνα το 1914 και ήταν ένα από τα δύο παιδιά μιας εύπορης αθηναϊκής οικογένειας. Τελείωσε το Βαρβάκειο και το 1933 μπήκε στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Δύο χρόνια αργότερα έκανε μετεγγραφή στο μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών, ύστερα από προτροπή του καθηγητή του Νίκου Κριτικού, ο οποίος αναγνώρισε πως ο Παπακυριακόπουλος ήταν μια μαθηματική ιδιοφυϊα. Ενώ ήταν ακόμα φοιτητής συνέγραψε δύο εργασίες που δημοσιεύτηκαν το 1938 στο Δελτίο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας: “Περί μιας δείκτριας των επιπέδων κλειστών καμπυλών του Jordan” και “Περί μιας αποδείξεως του θεωρήματος του Jordan δια τας ομωνύμους επιπέδους κλειστάς καμπύλας”.

Όταν οι προπτυχιακές του σπουδές έφτασαν στο τέλος τους δημοσίευσε μία ακόμα εργασία με τίτλο “Περί των κλειστών καμπυλών του Jordan στον ευκλείδιο χώρο n διαστάσεων” και ύστερα εργάστηκε ως άμισθος βοηθός του Νίκου Κριτικού στο Πολυτεχνείο. Το 1943 υπέβαλε την διδακτορική του διατριβή “Περί μιας μεθόδου αποδείξεως του αναλλοίωτου των ομολογικών συμπλεγμάτων ενός συμπλόκου”, μια εργασία με πρωτοτυπία που αναγνωρίστηκε διεθνώς.

Λόγω του μεταδεκεμβριανού πολιτικού κλίματος που επικρατούσε στο Πολυτεχνείο, που εκτός των άλλων είχε ως συνέπεια να απολυθεί ο Νίκος Κριτικός το 1946, αποφάσισε να εγκαταλείψει την Ελλάδα και να στραφεί σε πανεπιστήμια του εξωτερικού για μεταδιδακτορικές σπουδές, μεταξύ των οποίων επέλεξε το Πρίνστον. Έκανε πολλές προσπάθειες και συνάντησε πολλά εμπόδια λόγω των πολιτικών του φρονημάτων, κατόρθωσε όμως να τα παρακάμψει και τελικά το 1949 αναχώρησε για τις ΗΠΑ. Λίγους μήνες μετά αναγκάστηκε να επιστρέψει στην Ελλάδα καθώς η μητέρα του αρρώστησε από καρκίνο.

Μόνιμα εγκαταστάθηκε στο Πρίνστον το 1952 το οποίο την εποχή εκείνη αποτελούσε ένα απ' τα κέντρα της Τοπολογίας. Έμεινε εκεί τα υπόλοιπα χρόνια της ζωής του και κατέλαβε διαδοχικά τις θέσεις του επισκέπτη καθηγητή, πρώτου βοηθού του διάσημου μαθηματικού Μοντγκόμερυ στο Ινστιτούτο Προκεχωρημένων Σπουδών του Πρίνστον και τέλος του ανώτατου ερευνητή μαθηματικού. Η θέση αυτή είναι ομότιμη ενός καθηγητή αλλά με μισθό μικρότερο από το μισό ενός καθηγητή, του επέτρεπε όμως να ασχολείται μόνο με έρευνα και με τον τρόπο που εκείνος ήθελε. Από τότε (1962) δεν είχε ούτε διδακτικά ούτε κανένα άλλο καθήκον παρά μόνο την έρευνά του που διεξήγαγε κατά τη βούλησή του.

Δημοσιεύθηκαν εργασίες του στο “Annals of Mathematics” που είναι το επίσημο περιοδικό του Πρίνστον. Το έργο του ήταν υψηλού επιπέδου και παρουσίαζε πολλά σημαντικά συμπεράσματα, περισσότερο γνωστός όμως έγινε για τα τρία θεωρήματα (Το Θεώρημα του Βρόγχου, το Λήμμα του Dehn και το Θεώρημα της Σφαίρας) που απέδειξε με την καθοδήγηση της γεωμετρικής του διαίσθησης και έδωσαν νέα ώθηση στη θεωρία ομάδων και στην ομολογική άλγεβρα.

Οι εργασίες του θεωρήθηκαν τόσο αξιωσημείωτες ώστε προσκλήθηκε το 1958 στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στο Εδιμβούργο να δώσει μια διάλεξη με τίτλο “Ορισμένα προβλήματα επί των τρισδιάστατων πολλαπλοτήτων”, πρόσκληση η οποία θεωρείται μία από τις σημαντικότερες διακρίσεις στο επάγγελμα του μαθηματικού. Δύο από τις εργασίες του (“Σχετικά με τους στερεούς τόρους” [On solid tori, 1957] και “Σχετικά με το λήμμα του Dehn και την ασφαιρικότητα των κόμβων” [on Dehn's lemma and the Asphericity of Knots, 1957]) βραβεύθηκαν με το βραβείο Veblen για τη Γεωμετρία το 1964 από την Αμερικανική Μαθηματική Εταιρία. Τη δεύτερη από αυτές τις εργασίες, ο Χρίστος Παπακυριακόπουλος την αφιέρωσε στον καθηγητή του Νίκο Κριτικό, αναγνωρίζοντας την ισχυρή επίδραση που είχε ασκήσει στην επιστημονική του διαμόρφωση. Λίγους μήνες μετά ανακηρύχθηκε αντεπιστέλλον μέλος της Ακαδημίας Αθηνών.

Ο Παπακυριακόπουλος αφιέρωσε τα τελευταία δεκαπέντε χρόνια της ζωής του αποκλειστικά στην απόδειξη της Εικασίας Poincarè. Έθετε διάφορα σύνολα θεωρητικών υποθέσεων τις οποίες προσπαθούσε να επιβεβαιώσει και να ανάγει σε αυτές την εικασία Poincarè. Οι προσπάθειες του δεν έφτασαν στην απόδειξη της εικασίας, τον αποκλειστικό σκοπό που είχε θέσει και τον είχε κρατήσει αιχμάλωτο ως το θάνατό του.

Ο Χρίστος Παπακυριακόπουλος πέθανε από καρκίνο το 1976 και άφησε την περιουσία του στο Πολυτεχνείο. Μεταθανάτια τιμήθηκε σε διάφορα ιδρύματα στην Ελλάδα και σε ειδική τελετή στο πανεπιστήμιο του Πρίνστον όπου ο εκπρόσωπος της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρίας A.Flett ανέφερε στην ομιλία του για εκείνον: “Ο

Πάπα ανήκει στην πλειάδα των μεγάλων εργατών της μαθηματικής επιστήμης. Θα μείνει, στα Μαθηματικά στην πρώτη γραμμή των ερευνητών των πολύ ικανών, οι οποίοι με τη δύναμη της μεγαλοφυΐας τους πέτυχαν καταπληκτική επέκταση του συνόρου της επιστήμης αυτής”.

2. ΕΠΙΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΧΡΙΣΤΟΥ ΠΑΠΑΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ ΣΤΟ ΝΙΚΟ ΚΡΙΤΙΚΟ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ ΤΟΥ DEHN

Στην επιστολή που ακολουθεί, γραμμένη το Δεκέμβριο του 1953, ο Χρίστος Παπακυριακόπουλος εκθέτει αναλυτικά στον καθηγητή του Νίκο Κριτικό τις έως τότε προσπάθειές του να αποδείξει το Λήμμα του Dehn, τα αδιέξοδα που συνάντησε και τις νέες κατευθύνσεις που σχεδίαζε να ακολουθήσει. Πρόκειται για μια αυθεντική και πρωτοπρόσωπη καταγραφή της πολύπλοκης διαδικασίας που ακολουθεί μια ερευνητική εργασία.

Η επιστολή εντοπίστηκε σε κατάλοιπά του Νίκου Κριτικού τα οποία, με τη διαθήκη του, παραχώρησε στην Ιωάννα Φερεντίνου-Νικολακοπούλου, συμφοιτήτρια και φίλη του Χρίστου Παπακυριακόπουλου, από την εποχή των κοινών σπουδών τους στο Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Princeton, 27 Δεκεμβρίου 1953

Σεβαστέ Κύριε Καθηγητά,

Σας στέλνω τας θερμότερες ευχές μου διά το Νέον Έτος. Εφέτος είχα ωραία Χριστούγεννα. Την παραμονή το βράδυ ήμουν στο σπίτι του Professor Fox, όπου ήσαν η Κυρία Fox ο Professor Fox και ένας Ολλανδός μαθηματικός λίγο νεώτερος από εμένα, με τον οποίον είχε σχετισθή ο Professor Fox όταν ευρίσκετο στην Ολλανδία προ διετίας.

Το απόγευμα και βράδυ της ημέρας των Χριστουγέννων επήγα εις το σπίτι δύο νεαρών μαθηματικών, ενός αμερικανού και ενός ολλανδού, οι οποίοι κατοικούν εις ένα χωριό απέχον περί τα 6 μίλλια από το Princeton. Επήγα ποδαρόδρομο και με έφεραν πίσω με το αυτοκίνητό τους. Παρίσταντο πλήν των ιδιοκτητών και εμού, ο ολλανδός φίλος του Professor Fox διά τον οποίον σας έγραψα πάρα πάνω, ένας γερμανοαμερικανός νεαρός φυσικός και τέσσαρες δεσποινίδες, εκ των οποίων η μία σουηδέζα και οι τρεις αμερικανίδες.

Τώρα έρχομαι εις το κύριον μέρος του γράμματός μου. Όπως ίσως θα θυμόσαστε, το „λήμμα του Dehn" το είχα φέρει εις μίαν normal form και είχα ευρήσει και τέσσαρες ικανές και αναγκαίες συνθήκες διά την λύσιν του, με τας οποίας συμφωνούσε και ο Professor Fox. Αυτά όλα όταν βρισκόμουνα ακόμη στην Ελλάδα και ο Professor Fox στην Ολλανδία.

2/ Ὅταν ἦλθα ἐδῶ καί μάλιστα πρό ἑνός ἀκριβῶς ἔτους, ἄρχισα νά μελετῶ ἐργασίας ἐπί τῆς knot theory, μέ τόν σκοπόν ὅπως ἀποδείξω τήν ἀναγκαιότητα τῶν τεσσάρων συνθηκῶν, καθόσον ἡ ἱκανότης αὐτῶν ἦτο προφανής. Συνέπεσε μάλιστα ἀπό τοῦ παρελθόντος Ἰανουαρίου νά ἔχῃ ὁ Professor Fox καί ἕνα μάθημα περί τοῦ topology of 3-space, οὐσιωδῶς ~~knot~~ theory.

Περί τό τέλος Μαρτίου ἐνόμισα ὅτι εἶχα λύσει τό πρόβλημα. Ὁ Professor Fox ὅμως μοῦ ὑπέδειξε τό σφάλμα μου. Συγχρόνως, τήν ὑπόδειξιν τοῦ Professor Fox, ἔδωσα δύο παραδείγματα ἀποδεικνύοντα ὅτι, αἱ δύο πρῶται τῶν τεσσάρων συνθηκῶν ἦσαν ἐσφαλμέναι. Ἀμέσως μετά ὁ Professor Fox μοῦ ἔδωσε ἕνα παράδειγμα ἀποδεικνῦον ὅτι καί ἡ τρίτη τῶν τεσσάρων συνθηκῶν ἦτο ἐσφαλμένη. Τέλος εὑρῆκα ἕνα παράδειγμα ἀποδεικνῦον ὅτι καί ἡ τετάρτη, τελευταία καί ἰσχυροτέρα τῶν συνθηκῶν ἦτο καί αὐτή ἐσφαλμένη. Τότε ὁ Professor Fox εἶπε: "Ἀπ' αὐτά ἔπρεπε νά τά εἶχα ἰδῆ ἐδῶ καί ἕνα χρόνο!" Ἔτσι βρεθήκαμε πάλι σέ ἀδιέξοδο.

Ἐσυνέχισα τήν μελέτην μου ἐπί τῶν ἐργασιῶν τῆς knot theory καί τήν προσπάθειαν μου νά εὕρω μίαν διέξοδον. Τέλος περί τάς ἀρχάς Σεπτεμβρίου παρετήρησα ὅτι, ἕνα θεώρημα τοῦ Borsuk (σπουδαίου Πολωνοῦ τοπολόγου) μοῦ δίδει τήν λύσιν τοῦ „λήμματος τοῦ Dehn", ὑπό τόν ὅρον ὅπως ἀποδείξωμεν ὅτι, ἡ normal form τῆς ὁποίας ἔδωσα εἰς τό „λῆμμα τοῦ Dehn" πληροῖ μίαν ὡρισμένην συνθήκην.

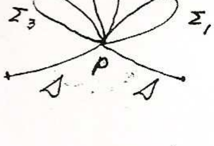
3

Συνεκέντρωσα λοιπόν τήν προσπάθειαν μου όπως αποδείξω ότι η normal form πληροί τήν ως άνω συνθήκην, διότι καί η γεωμετρική διαίσθησίς μας υπεδείκνυε ότι πράγματι έτσι συμβαίνει. Η έρευνα όμως απέδειξε ότι η normal form δέν ήτο καί τόσον κατάλληλος διά τήν απόδειξιν καί ότι έπρεπε νά εύρωμεν μίαν άλλην πλέον κατάλληλον normal form.

Πράγματι περί τάς αρχάς Δεκεμβρίου επέτυχα μίαν normal form πολύ καλυτέραν από τήν παλαιάν. Οι λόγοι διά τούς οποίους η νέα normal form είναι καλυτέρα τής παλαιάς είναι οι εξής:

1/ Η γεωμετρική διαίσθησις μας δίδει καλυτέρας πληροφορίας τώρα παρά μέ τήν παλαιάν.

2/ Εάν κατορθώσωμεν νά αποδείξωμεν ότι η νέα normal form πληροί τήν συνθήκην η οποία είναι απαραίτητος διά τό Θεώρημα τού Borsuk, τότε τό ως άνω Θεώρημα μαζί μέ μερικά άλλα μάς πληροφορούν ότι η normal form έχει τήν εξής απλουστευμένην μορφήν: Συνίσταται από ένα δίσκον Δ καί



ένα πεπερασμένον πλήθος σφαιρών $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$, όπου δίσκος καί σφαίρες έχουν ένα μόνον κοινόν σημείον p.

Τούτο είναι σύμφωνον μέ τήν γεωμετρικήν διαίσθησιν, επί πλέον δέ μάς παρέχει εντός τής αποδείξεως τού „λήμματος τού Dehn" καί τήν απόδειξιν μιάς „conjecture of Whitehead"

3/ Πλέον σημαντικός είναι ο δεσμός τού „λήμματος τού Dehn"

4/ καί μερικῶν ἀπό τά βαθύτερα θεωρήματα τῆς τοπολογίας τοῦ 3-διαστάτου χώρου, ὁ ὁποῖος ἀποκαλύπτεται ἀπό τήν νέαν normal form. Πράγματι ἡ νέα normal form συνδέεται στενά μέ μίαν ἀπό τάς σημαντικώτερας ἐργασίας τοῦ Hopf, δημοσιευμένης στά 1941. Εἰς ἕν σημεῖον μεταχειρίζομαι ἕν θεώρημα ευρισκόμενον εἰς τήν ἄνω ἐργασίαν, ἐπί πλέον δέ ἐάν κατορθώσωμεν νά ἀποδείξωμεν ὅτι ἕνα group τῆς ἄνω ἐργασίας εἶναι μηδέν, τότε, μέ τήν βοήθειαν μερικῶν ἀπό τά βαθύτερα θεωρήματα τῆς τοπολογίας, δυνάμεθα νά ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ normal form ἔχει τήν ἰδιότητα ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται ἀπό τό θεώρημα τοῦ Borsuk καί ἔτσι νά ἀποδείξωμεν τό „λῆμμα τοῦ Dehn" (καί τήν „Whitehead's conjecture") σύμφωνα μέ τά εἰς τήν 2 ἐκτεθέντα.

4/ Ἀξιοσημείωτη ἐπίσης εἶναι καί ἡ ἀντίδρασις τοῦ Professor Fox εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν, ὁ ὁποῖος ἐνῶ μέχρι πρό τριῶν ἑβδομάδων ἔδειχνε ἀρκετήν δυσπιστίαν διά τήν ἐπίλυσιν τῆς ὅλης ἐρεύνης, προχθές, συγκεκριμένως τό μεσημέρι τῆς 24 Δεκεμβρίου, εἰς μίαν μακράν συνομιλίαν τήν ὁποίαν εἴχαμε, ὄχι μόνον δέν ἐξέφρασε τήν παραμικράν δυσπιστίαν, ἀλλά μοῦ εἶπε ὅτι καλόν εἶναι νά συναντήσω τόν Whitehead καί τόν Hopf, διά νά συζητήσω μαζί τους διά τό πρόβλημα.

Ὁ Whitehead, κατά τόν Professor Fox, εἶναι ὁ τοπολόγος

5

ὁ ὁποῖος ἔχει εἰσδύσει βαθύτερα ἀπό κάθε ἄλλον εἰς τά προβλήματα τοῦ εἴδους τοῦ „λήμματος τοῦ Dehn". Σημειώσατε ὅτι, ὁ Whitehead τό 1935 ἐδημοσίευσε μίαν ἐργασίαν εἰς τό Quarterly Journal of Math. (Oxford) εἰς τήν ὁποίαν ἔδωσε μίαν ἀπόδειξιν τῆς „Poincaré's conjecture". Μετά ὀλίγον ὅμως χρόνον εἰς τό ἴδιον περιοδικόν ὁ Whitehead ἀναφέρει ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἐργασία του εἶναι ἐσφαλμένη, δίδει δέ καί ἕνα παράδειγμα τό ὁποῖον ἀντιφάσκει πρός τό κύριον θεώρημά του! Ἡ "Poincaré's conjecture" εἶναι τό πρόβλημα τό ὁποῖον ἐνόμιζα ὅτι εἶχα λύσει πρό ὀλίγων ἐτῶν καί τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόδειξις ἦτο ἐσφαλμένη ὅπως μοῦ ἔδειξε μέ ἕνα παράδειγμα ὁ Professor Fox.

Ἐν συμπεράσματι:

1/ Κατασκευάσαμεν τόν δίσκον ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ἀπό τοῦ „λήμματος τοῦ Dehn", ἀλλά μένει νά ἀποδείξωμεν ὅτι τό κατασκευασθέν εἶναι πράγματι δίσκος (Ἀνάλογα μέ τάς διαφορικάς ἐξισώσεις: Κατασκευάζομεν μίαν σειράν λύσεων τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως, ἀλλά μένει νά ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ σειρά δίδει συνάρτησιν, δηλαδή συγκλίνει).

2/ Γνωρίζομεν τί πρέπει νά ἀποδείξωμεν διά νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό κατασκεύασμα εἶναι δίσκος, ἔχομεν δέ ἐπί πλέον καί θεωρήματα καί μεθόδους εὑρισκομένους πλησίον τοῦ ζητουμένου.

3/ Ἐάν λοιπόν τό ζητούμενον εἶναι πόρισμα μιᾶς θεωρίας ἤδη κατασκευασμένης, τότε μετά ἐργασίαν μερικῶν ἑβδομάδων ἤ

6/ μηνῶν ἐνδέχεται νά κατορθώσωμεν τήν (πλήρη) ἀπόδειξίν του. Ἐάν ὅμως τό ζητούμενον εἶναι πόρισμα μιᾶς θεωρίας ὄχι ἀκόμη κατασκευασμένης, τότε θά χρειασθῇ ἐργασία πολλῶν μηνῶν ἤ καί ἐτῶν.

Ἔτσι φαίνεται νά ἔχῃ δίκαιον ὁ Professor Fox ὁ ὁποῖος λέγει ὅτι μέ τά (αὐτά) „big problems" δέν γνωρίζει κανείς πότε θά ἐπιτύχῃ ἤ πότε θά βουλιάξῃ.

Πάντως φαίνεται νά βρισκόμεθα στόν ἴσιον δρόμο, ἄν καί δέν μποροῦμε νά καθορίσωμε πόσον μακρυά ἤ κοντά ἀπό τόν τελικό σκοπό.

Παρακαλῶ διαβιβάσατε τάς εὐχάς μου (διά τό Νέον Ἔτος) καί τό σέβας μου εἰς τούς καθηγητάς κ.κ. Χατσόπουλον, Βασιλείου, Γεωργακόπουλον, καθώς καί τήν οἰκογένειαν τοῦ Κυρίου Κυριακάκη.

Χθές ἔλαβα τάς ἐργασίας τοῦ κ. Λαδόπουλου, εἰς τόν ὁποῖον ἀπαντῶ σήμερα καί στέλνω χαιρετίσματα (καί εὐχάς) διά τόν κ. Κριεζήν καί τούς λοιπούς Κυρίους.

Μέ σεβασμό

Χ. Παπακυριακόπουλος

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ADAMS C.C., The Knot Book, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004.
2. CROWELL R.H., FOX R.H., Introduction to Knot Theory, Springer-Verlag, New York, 1963.
3. FRALEIGH J.B., Εισαγωγή στην Άλγεβρα, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2006.
4. HATCER A., Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002.
5. HEMPEL J., 3-Manifolds, Princeton University Press, 1976.
6. JOHANSONN I., "Uber Singulare Elementarflachen und das Dehnsche Lemma", Math Ann., vol.110, σελ. 312-320, 1935.
7. JOHANSONN I., "Uber Singulare Elementarflachen und das Dehnsche Lemma 2", Math Ann., vol.115, σελ. 658-669, 1938.
8. KNESER H., "Geschlossene Flachen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten", Jber. Deutschen Math. Verein., vol.38, σελ. 248-260, 1929.
9. MASSAY W., Algebraic Topology: An introduction, Harcourt, New York, 1967.
10. MUNKRES J.R., Topology, Prentice Hall, Inc., New York, 2000.
11. NAKAHARA M., Geometry, Topology and Physics, Taylor & Francis, New York-London, 2003.
12. ΠΑΠΑΖΟΓΛΟΥ Π., Σημειώσεις μαθήματος "Αλγεβρική Τοπολογία", ΕΚΠΑ, 2008.
13. PAPAKYRIAKOPOULOS C. D., "The theory of three-dimensional manifolds since 1950", Proceedings of the International Congress of Mathematicians (14-21 August 1958), Cambridge University Press, 1960, σελ. 433-440.
14. PAPAKYRIAKOPOULOS C. D., "On Dehn's Lemma and the Asphericity of Knots", The Annals of Mathematics, vol.66, No 1 (Jul. 1957), σελ. 1-26.
15. POENARU V., "The three big problems of Papakyriakopoulos", Bulletin of the Greek Mathematical Society, vol.18, 1977, σελ.1-7.
16. ROLFSEN D., Knots and Links, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2000.
17. ΣΠΑΝΔΑΓΟΣ Ε., Χρίστος Παπακυριακόπουλος, Ο Ερημίτης του Πρίνστον, Αθήνα, Εκδ. Αίθρα, 2008.
18. STALLINGS J., Group Theory and three-dimensional manifolds, Yale University

Press, New Haven and London, 1971.

19. STALLINGS J., “The Power of the Works of Papakyriakopoulos in 3-manifolds” (March 30,2001).
20. SZPIRO G. G., Η “εικασία του Πουανκαρέ”, Αθήνα, Εκδ. Τραυλός, 2007.
21. ΦΕΡΕΝΤΙΝΟΥ-ΝΙΚΟΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ Ι., “Παπακυριακόπουλος Χρίστος” στο Παγκόσμιο Βιογραφικό Λεξικό, τόμ.8, σελ. 142-143, Εκδοτική Αθηνών, Αθήνα, 1991.