ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΟΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ: ΟΙ ΔΡΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΤΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ NEO-RIEMANNIAN ΟΜΑΔΑΣ ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΣΥΜΦΩΝΩΝ ΤΡΙΑΔΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΝΔΡΑΤΖΗ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ:

ΣΟΦΙΑ ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ, ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΕΜΠ

20 Δεκεμβρίου 2013

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως αντικείμενο την περιγραφή των συμμετριών στη μουσική μέσω της θεωρίας ομάδων. Μετά την αντιστοίχιση των μουσικών νοτών με το $\mathbb{Z}_{12}$, μελετούνται ξεχωριστά δύο ισόμορφες ομάδες: η ατονική και η neo-Riemannian ομάδα, και οι απλά μεταβατικές δράσεις τους πάνω στο σύνολο των συμφώνων τριάδων. Στο πλαίσιο της μελέτης αυτής, γίνεται λεπτομερής ανάλυση των δύο δυϊκών γραφημάτων, τα οποία απεικονίζουν γεωμετρικά τη δράση της neo-Riemannian ομάδας πάνω στο σύνολο των συμφώνων τριάδων. Επιδιώκοντας μία περαιτέρω σύνδεση μεταξύ των δύο ομάδων αποδεικνύεται ότι η ατονική και η neo-Riemannian είναι δυϊκές ομάδες και πως με δεδομένη την πρώτη μπορεί να κατασκευαστεί η δεύτερη ως δυϊκή της. Σε όλο το εύρος της εργασίας παρατίθενται μουσικά παραδείγματα, στα οποία γίνεται εμφανής η πρακτική εφαρμογή των παραπάνω συμπερασμάτων.

This thesis' subject is the description of symmetries in music via group theory. After corresponding musical notes to $\mathbb{Z}_{12}$, two isomorphic groups, the atonal and the neo-Riemannian group, and their simply transitive actions on the set of consonant triads, are being studied. In this sense, a detailed analysis of the two dual graphs, which depict geometrically the action of the neo-Riemannian group on the set of consonant triads, is presented. Aiming at a further connection between the two groups, it is proved that the atonal and the neo-Riemannian groups are dual, as well as that given the first group, the second can be constructed as its dual. Throughout the thesis, musical examples are presented, demonstrating the application of the conclusions mentioned above.

Πρόλογος

Αρχικά, θέλω να ευχαριστήσω θερμά την Καθηγήτρια του ΕΜΠ, κ. Σοφία Λαμπροπούλου, αφενός για την υποστήριξη του θέματος της εργασίας αυτής και αφετέρου για την στενή και καρποφόρα συνεργασία μας. Χωρίς την εμπιστοσύνη και την καθοδήγησή της, η διπλωματική αυτή θα είχε παραμείνει απλώς μία ανεκπλήρωτη ιδέα. Η κ. Λαμπροπούλου είναι υπεύθυνη για την ουσιαστική μύησή μου στον κόσμο της Άλγεβρας καθώς με δίδαξε να χαλιναγωγώ την σκέψη μου και να την μεταμορφώνω σε μαθηματικές διαδικασίες. Την ευχαριστώ επίσης για την υπομονή και την ανθρώπινη προσέγγισή της, λόγω των οποίων καλλιεργήθηκε ένα εξαιρετικό κλίμα συνεργασίας που υπερέβη τα όρια της τυπικής επίβλεψης. Κυρίως όμως την ευχαριστώ γιατί λόγω των ανοιχτών οριζόντων της μου έδωσε την ευκαιρία να συνδυάσω την αγάπη μου για την μουσική με αυτήν για την επιστήμη, μετατρέποντας ένα όνειρο σε πραγματικότητα.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Επιτροπής για τη συνεισφορά τους. Ευχαριστώ τον κ. Ανάργυρο Φελλούρη, Αναπληρωτή Καθηγητή του ΕΜΠ, για το ενδιαφέρον που επέδειξε για την εργασία αυτή, καθώς και για τα υποστηρικτικά σχόλιά του πάνω στο θέμα. Ιδιαίτερα οφείλω να ευχαριστήσω για το ενδιαφέρον του και την ενθάρρυνση τον Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μουσικών Σπουδών του ΕΚΠΑ κ. Αναστάσιο Χαψούλα, ο οποίος λόγω της ευρείας γνώσης του περί της μουσικής και μέσω των εύστοχων παρατηρήσεών του, επικύρωσε την αρτιότητα του μουσικού μέρους της εργασίας.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Σταύρο Μαλτέζο, Αναπληρωτή Καθηγητή του ΕΜΠ, που παρευρέθηκε στην παρουσίαση της εργασίας εκπροσωπώντας τον Τομέα Φυσικής της ΣΕΜΦΕ, τόσο για την υποστήριξη όσο και για τις φυσικές επεκτάσεις που συζητήθηκαν κατά τη διάρκειά της.

Φυσικά, δεν θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω θερμά την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την κατανόηση αλλά και για την ψυχολογική και πρακτική στήριξη καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα για την συμπαράσταση, την έμπρακτη βοήθεια αλλά και τις εύστοχες παρατηρήσεις του πάνω στο θέμα, τον σύντροφό μου και συνάδελφο Γιώργο Μανωλάκο, στον οποίο και αφιερώνω την εργασία αυτή.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως αντικείμενο την προσέγγιση της μουσικής ανάλυσης μέσα από την χρήση αλγεβρικών μεθόδων. Όπως υποδεικνύει και ο τίτλος, στόχος της εργασίας είναι η μελέτη των δράσεων της ατονικής (T/I) και της neo-Riemannian ομάδας πάνω στο σύνολο (S) των συμφώνων τριάδων.

Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο θα κατηγοριοποιήσουμε τους μουσικούς φθόγγους σε δώδεκα κλάσεις, τις οποίες θα αντιστοιχίσουμε με τους ακεραίους modulo 12 . Έτσι, οι φθόγγοι ανάγονται στο σύνολο $\mathbb{Z}_{12}$, επιτρέποντας τη χρήση αλγεβρικών εργαλείων πάνω τους.

Το δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας αφορά την ατονική ομάδα, T/I. Αρχικά θα ορίσουμε τις συναρτήσεις $T_n,\ I_n : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$, όπου $n = 0, 1, ..., 11$ ως μετατοπίσεις και αναστροφές κατά n, οι οποίες δρουν πάνω σε κλάσεις φθόγγων. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το σύνολο T/I εφοδιασμένο με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων αποτελεί ομάδα και μάλιστα ισόμορφη με την D_{12}, την διεδρική ομάδα τάξης 24 των συμμετριών ενός κανονικού δωδεκάγωνου. Θεωρώντας μία σύμφωνη τριαδική συγχορδία ως ένα διατεταγμένο σύνολο τριών κλάσεων φθόγγων, θα ορίσουμε το σύνολο S των 24 συμφώνων τριάδων και με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Σταθεροποιητή Τροχιάς θα δείξουμε ότι η δράση της ομάδας T/I πάνω στο σύνολο S είναι απλά μεταβατική.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την neo-Riemannian ομάδα, PLR. Αρχικά θα ορίσουμε τις τρεις συναρτήσεις $P,\ L,\ R$ και θα εξετάσουμε τη δράση τους πάνω στα στοιχεία του συνόλου S. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το σύνολο PLR το οποίο αποτελείται από όλες τις πιθανές συνθέσεις των τριών συναρτήσεων, μαζί με διμελή πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων, αποτελεί ομάδα επίσης ισόμορφη με την D_{12} και κατ᾽ επέκταση και με την ομάδα T/I. Τέλος, θα κατασκευάσουμε κανόνες υπολογισμού της δράσης της ομάδας PLR πάνω στο σύνολο S και θα αποδείξουμε ότι η δράση αυτή είναι απλά μεταβατική.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις δύο γνωστότερες γεωμετρικές απεικονίσεις της δράσης της ομάδας PLR πάνω στο σύνολο S: τα γραφήματα *Tonnetz* και *Chickenwire*. Εφόσον εξέτασουμε τα χαρακτηριστικά τους στη δισδιάστατη αλλά και την τρισδιάστατη μορφή τους (λόγω διπλής περιοδικότητας μετατρέπονται σε τόρους), θα αποδείξουμε ότι το Tonnetz και το Chickenwire είναι δυϊκά γραφήματα. Τέλος, θα εξετάσουμε αναλυτικά τέσσερα χαρακτηριστικά είδη κύκλων τριάδων που εξάγονται από αυτά και θα τα ζωντανέψουμε μέσα από τέσσερα μουσικά παραδείγματα από το κλασικό ρεπερτόριο.

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας θα εμβαθύνουμε περισσότερο στη σχέση μεταξύ των δύο ομάδων. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι οι T/I και PLR αποτελούν δυϊκές ομάδες στην συμμετρική ομάδα του συνόλου

S με βάση τον ορισμό του Lewin, δηλαδή ότι η μία είναι ο κεντροποιητής της άλλης. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε την προέλευση των δυϊκών ομάδων γενικότερα, συσχετίζοντάς τες με τις αριστερές και δεξιές κανονικές αναπαραστάσεις μίας ομάδας. Με βάση αυτή τη συσχέτιση, θα παρουσιάσουμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε τη δυϊκή ομάδα μίας πεπερασμένης ομάδας, η οποία δρα απλά μεταβατικά σε ένα πεπερασμένο σύνολο, σύμφωνα με τους Fiore-Noll, δίνοντας ως παράδειγμα την κατασκευή της ομάδας PLR από την T/I. Τέλος, θα αποτυπώσουμε τη δυϊκότητα των T/I και PLR σε μεταθετικά διαγράμματα και θα δείξουμε την εφαρμογή τους στη μουσική ανάλυση μέσω τριών παραδειγμάτων.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

"Τίθεται το ερώτημα:
έχει νόημα να μιλούμε για συμμετρία στη μουσική;
Η απάντηση είναι ναι."
Ι. Ξενάκης

Ιστορικά, η συσχέτιση της μουσικής με αλγεβρικές μεθόδους έχει υπάρξει μία μακρά και αμφιλεγόμενη διαδικασία. Μάλιστα, μία διαδικασία, η οποία υπερβαίνει συχνά στυλιστικές θεωρήσεις και γεωγραφικά πλαίσια, εστιάζοντας στις παρατηρούμενες συμμετρίες στη μουσική όλων των τόπων και όλων των εποχών. Με δεδομένη λοιπόν, κατά τον Ι. Ξενάκη, την ύπαρξη συμμετρίας στη μουσική, το καταλληλότερο εργαλείο για να την περιγράψουμε είναι η Θεωρία Ομάδων.

Με την εισαγωγή της θεωρίας ομάδων στη μουσική εγείρεται ένα σημαντικό ερώτημα από τους μουσικολόγους: τα αποτελέσματα που προκύπτουν από μία τέτοια μαθηματική περιγραφή έχουν μουσική συνέπεια, ή παρουσιάζουν αμιγώς μαθηματικές υποθέσεις; Σαφώς και μία τέτοια προσπάθεια δεν έχει ως στόχο την στυγνή μαθηματικοποίηση της μουσικής, ούτε και την σύγχυση της μουσικής με την μαθηματική μοντελοποίησή της. Παρόλα αυτά, υπάρχουν μαθηματικές δομές που υποβόσκουν σε όλα τα μουσικά έργα, και η θεωρία ομάδων δίνει τη δυνατότητα για την κατανόηση των δομών αυτών. Με κοινό τόπο τη συμμετρία, στοχεύουμε στην ενοποίηση των μουσικών θεωριών ανάλυσης υπό ένα νέο πρίσμα.

Για την καλύτερη κατανόηση της προσπάθειας αυτής, για την ενοποίηση των μουσικών θεωρίων με βάση τις αλγεβρικές συμμετρίες, είναι χρήσιμο να αντιπαραβάλλουμε την ενοποίηση που επιτυγχάνεται στις Φυσικές επιστήμες (Grand Unified Theories). Βεβαίως, ίσως να μην είναι δόκιμο ή συμφέρον να συγκρίνουμε την φυσική με την μουσικολογία, καθώς στην περίπτωση της μουσικολογίας μία αντίστοιχη ενοποίηση δεν θα μας παρείχε σε καμμία περίπτωση εργαλεία για την πρόβλεψη της έκβασης της μουσικής σε ένα έργο, όπως αντίστοιχα η ενοποίηση προσφέρει στον κλάδο τη φυσικής μέσα για την πρόβλεψη των υπό εξέταση φυσικών φαινομένων. Παρόλα αυτά, μία τέτοια ολιστική ιδέα ένωσης αποδεκτών τοπικών θεωριών για την καλύτερη περιγραφή και σύνδεση της μουσικής γενικότερα, βρίσκεται πίσω από την προσπάθεια αυτή. Ποιές είναι όμως οι «τοπικές» θεωρίες μουσικής ανάλυσης προς ενοποίηση και σε ποιά είδη μουσικής αφορούν; Πριν απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα είναι χρήσιμο να κάνουμε μία μικρή ιστορική αναδρομή για την μουσική σύνθεση σε συνάρτηση με την έννοια της τονικότητας.

Η *τονικότητα* ως όρος υποδηλώνει την τάση της μουσικής να οργανώνεται γύρω από ένα μουσικό κέντρο. Στην δυτική μουσική, από το 1600 ως το 1850 οι συνθέτες «έχτιζαν» τα έργα τους γύρω από έναν συγκεκριμένο φθόγγο - την τονική, η οποία ήταν η πρώτη νότα της κλίμακας[1] στην οποία γραφόταν το έργο - ενώ όλοι οι υπόλοιποι φθόγγοι σχετίζονταν με τον κεντρικό φθόγγο αυτό. Η τονική εδραιωνόταν γρήγορα από την αρχή ενός κομματιού και η λύση σε αυτήν ήταν απαραίτητη για να τελειώσει το έργο. Παράλληλα με την εξέλιξη της τονικής μουσικής γεννήθηκε και η τονική θεωρία, η οποία παρείχε ένα κατάλληλο πλαίσιο ανάλυσής της. Από τα μέσα του 19ου αιώνα [2], οι συνθέτες ξεκίνησαν να επεκτείνουν τα όρια της τονικότητας (υστεροτονική μουσική) με μία ελευθερία άνευ προηγουμένου, χρησιμοποιώντας «διάφωνες» συγχορδίες και προτείνοντας διαφορετικού τύπου λύσεις. Με το πέρασμα στον 20ο αιώνα, σε πολλές περιπτώσεις η τονικότητα εκλείπει, με αποτέλεσμα την κατάργηση του συστήματος μείζονος - ελάσσονος. Έτσι γεννιέται η ατονική μουσική, η οποία προϋποθέτει την ισότητα των φθόγγων, και την οργάνωσή τους σε νέες δομές (ακολουθίες, σειρές κ.ά).

Για την υστεροτονική και ατονική μουσική, η τονική ανάλυση δεν παρείχε πλέον επαρκή εξήγηση. Έτσι, ως θεωρία ανάλυσης της υστεροτονικής μουσικής γεννήθηκε η neo-Riemannian μουσική θεωρία, ενώ για την ατονική μουσική κατασκευάστηκε η ατονική θεωρία. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η πρώτη πήρε το όνομα της από τον Γερμανό θεωρητικό της μουσικής Hugo Riemann[3], ο οποίος ήταν ο πρώτος που επιδίωξε μία ολιστική προσέγγιση της μουσικής μέσω των θετικών επιστημών. Ο θεωρητικός της μουσικής H. Riemann είναι γνωστός για τις συναρτήσεις $P, L, R, (D)$ που πρώτος εισήγαγε τον 19ο αιώνα στην μουσική ανάλυση και την γραφική αναπαράσταση των δράσεών τους πάνω στις σύμφωνες τριαδικές συγχορδίες (Tonnetz), καθώς επίσης και την θεωρία του περί δυϊσμού, έννοιες οι οποίες θα εξεταστούν αναλυτικά στα κεφάλαια που ακολουθούν.

Στην εργασία αυτή γίνεται μία προσπάθεια αλγεβρικής θεμελίωσης όσον αφορά στη χρήση της θεωρίας ομάδων στη neo-Riemannian και ατονική ανάλυση, καθώς και - γυρνώντας στο ζήτημα της ενοποίησης θεωριών που τέθηκε νωρίτερα - στη σύνδεση μεταξύ των δύο μουσικών θεωριών με τη βοήθεια των μαθηματικών εννοιών του ισομορφισμού και της δυϊκότητας των ομάδων. Η συνένωση αυτή των δύο θεωριών προϋποθέτει την αντιστοίχιση των νοτών με κάποια κυκλική ομάδα $\mathbb{Z}_n$[4]. Τρείς θεωρητικοί της μουσικής, συνθέτες, είναι

[1] Οι μείζονες και ελάσσονες κλίμακες παρουσιάζονται στο τέλος της εργασίας (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ).

[2] Οι χρονικές περίοδοι που αναφέρουμε είναι ενδεικτικές, καθώς στο πέρασμα των αιώνων πολλά μουσικά κινήματα επικαλύπτονται χρονικά.

[3] Ο Hugo Riemann είναι απλά συνονόματος με τον γνωστό μαθηματικό Bernhard Riemann.

[4] Πιο συγκεκριμένα, στην εργασία αυτή επιλέγουμε να εργαστούμε με την $\mathbb{Z}_{12}$.

υπεύθυνοι για την σύλληψη αυτή: ο Ιωάννης Ξενάκης, ο Milton Babbit και ο Anatol Vieru. Πράγματι, σε πρώτο επίπεδο είναι η μετάφραση αυτή των φθόγγων σε μαθηματικά αντικείμενα, η οποία μας επιτρέπει να οργανώσουμε τις σύμφωνες συγχορδίες σε ένα αλγεβρικό σύνολο (S), πάνω στο οποίο θα εξετάσουμε τη δράση της neo-Riemannian ομάδας (PLR) και της ατονικής ομάδας (T/I) που αντιπροσωπεύουν τις αντίστοιχες μεθόδους ανάλυσης για να δούμε τα αποτελέσματά τους. Αυτή τη μετάφραση θα ξεκινήσουμε να περιγράφουμε στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας.

Κεφάλαιο 1

Η αντιστοίχιση των κλάσεων φθόγγων με το $\mathbb{Z}_{12}$

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι η μετάφραση των μουσικών φθόγγων σε μαθηματικά αντικείμενα. Αρχικά θα κατηγοριοποιήσουμε τους φθόγγους-συχνότητες σε 12 ισοδύναμες κλάσεις, τις οποίες θα ταυτοποιήσουμε με τις 12 νότες. Στη συνέχεια, επαναπροσδιορίζοντας την έννοια του φθόγγου, θα μετατρέψουμε τις παραπάνω κλάσεις σε κλάσεις ακεραίων και θα τις αντιστοιχίσουμε με το $\mathbb{Z}_{12}$. Η αντιστοίχιση αυτή θα επιτρέψει την εφαρμογή αλγεβρικών εργαλείων πάνω στις μουσικές νότες.

1.1 Κλάσεις Φθόγγων και Συχνότητα

Η *συχνότητα*, f, αποτελεί το φυσικό μέγεθος, το οποίο εκφράζει τον αριθμό των ταλαντώσεων, N, ανά μονάδα χρόνου, t, δηλαδή, $f = N/t$ με μονάδα μέτρησης το 1Hertz (Hz).Το σύνολο των συχνοτήτων που αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος ονομάζεται *ακουστικό φάσμα* και εκτείνεται συνεχώς από 20 έως 20.000 Hz. Ο *φθόγγος* μπορεί να προσδιοριστεί ως συχνότητα στο ακουστικό φάσμα, όμως δεν αποτελεί αμιγώς φυσικό μέγεθος. Ψυχοακουστικά, ως μέγεθος εκφράζει την αισθητηριακή εμπειρία της συχνότητας και έτσι επιτρέπει την οργάνωση των ήχων-συχνοτήτων σε ένα διακριτό σύνολο (F).

Πρώτος ο Πυθαγόρας (570-495 π.Χ) παρατήρησε πως όταν η εμπειρία αυτή γίνεται ιδιαίτερα ευχάριστη ακούγοντας δύο φθόγγους, είτε ταυτόχρονα, είτε σε αλληλουχία (άρα το διάστημα μεταξύ τους είναι σύμφωνο, όπως λέμε), ο ρητός αριθμός p/q, που αναπαριστά τον λόγο μεταξύ των συχνοτήτων των δύο φθόγγων, αποτελείται από μικρούς ακεραίους αριθμούς. Ειδικότερα, όταν ο λόγος αυτός είναι $2/1$ οι φθόγγοι ακούγονται παρόμοιοι. (Όπως θα δούμε παρακάτω απέχουν μία οκτάβα.) Για παράδειγμα, ερμηνεύοντας την παρατήρηση αυτή βάσει σύγχρονων δεδομένων, θεωρούμε δυό φθόγγους με συχνότητες $a_1 = 261,63Hz$ και $b_1 = 523,25Hz$ αντίστοιχα, με λόγο $b_1/a_1 = 1.9999 = 2$. Τότε, οι φθόγγοι ακούγονται παρόμοιοι.

Πριν μιλήσουμε εκτενέστερα για τους φθόγγους είναι χρήσιμο να ορίσουμε μαθηματικά την σχέση ισοδυναμίας:

Ορισμός 1.1.1 *(Σχέση Ισοδυναμίας)*
Μια σχέση "$\sim$" σε ένα σύνολο X ονομάζεται *σχέση ισοδυναμίας* αν και μόνο αν για κάθε $a, b, c \,\epsilon\, X$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Ανακλαστική: $a \sim a$,

2. Συμμετρική: Αν $a \sim b$ τότε $b \sim a$,

3. Μεταβατική: Αν $a \sim b$ και $b \sim c$ τότε $a \sim c$.

Για παράδειγμα, στο σύνολο των φθόγγων-συχνοτήτων (F) ορίζουμε σχέση (ισοδυναμίας) "$\sim$" ως εξής. Έστω οι φθόγγοι $a, b \,\epsilon\, F$. Θεωρούμε:

$$a \sim b \quad \text{αν} \quad a/b = 2^j \ , \ \text{όπου } j \,\epsilon\, \mathbb{Z}\,. \tag{1.1}$$

Πράγματι, έχουμε σχέση ισοδυναμίας, εφόσον :

1. $a \sim a$ για όλους τους φθόγγους:

   $$\frac{a}{a} = 2^0 \Rightarrow 1 = 2^j \Rightarrow j = 0 \,\epsilon Z \Rightarrow a \sim a\,,$$

2. Αν $a \sim b$ τότε $b \sim a$ για όλους τους φθόγγους a, b:

   $$a \sim b \Rightarrow \frac{a}{b} = 2^j \Rightarrow \frac{b}{a} = 2^{-j}, -j \,\epsilon Z \Rightarrow b \sim a\,,$$

3. Αν $a \sim b$ και $b \sim c$ τότε $a \sim c$ για όλους τους φθόγγους a, b, c :

   $$a \sim b \Rightarrow \frac{a}{b} = 2^j, j\epsilon Z$$

   $$b \sim c \Rightarrow \frac{b}{c} = 2^k, k\epsilon Z$$

   Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη:

   $$\frac{a}{b}\frac{b}{c} = 2^{j+k} \Rightarrow \frac{a}{c} = 2^{j+k}, (j+k) \,\epsilon\, Z \Rightarrow a \sim c\,.$$

Έτσι, η σχέση (1.1) κατηγοριοποιεί φθόγγους-συχνότητες με λόγο 2^j , $j \,\epsilon\, \mathbb{Z}$, σε μία ισοδύναμη *κλάση φθόγγων* (pitch class). Δύο ισοδύναμοι φθόγγοι απέχουν j οκτάβες και άρα με βάση τον Πυθαγόρα ακούγονται παρόμοιοι. *Οκτάβα* ορίζεται ως η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ισοδύναμων φθόγγων, δηλαδή δύο φθόγγων με λόγο $a/b = 2$. Η οκτάβα είναι μία θεμελιώδης οντότητα του τονικού συστήματος, καθώς αποτελεί το μέγιστο υποσύνολο του συνόλου των φθόγγων το οποίο περιέχει μη ισοδύναμους διαδοχικούς φθόγγους.

Αν διαιρέσουμε την οκτάβα σε 12 ίσα μέρη που αντιστοιχούν σε λόγο s το καθένα, έχουμε : $s^{12} = 2/1 \rightarrow s = 2^{1/12} = 1.0594$. Ο λόγος s $(semitone)$ είναι ο λόγος των συχνοτήτων δύο γειτονικών φθόγγων και αντιστοιχεί μουσικά στο θεμελιώδες διάστημα του *ημιτονίου*. (Για μία απόσταση n ημιτονίων ο λόγος των συχνοτήτων είναι: $(2^{1/12})^n = 2^{n/12}$). Έτσι, παίρνουμε τους 12 ισοκατανεμημένους φθόγγους μέσα σε μία οκτάβα. Ο τρόπος αυτός ισοκατανομής της οκτάβας σε 12 μέρη ονομάζεται *equal tempered tuning*[1]. Επομένως, το σύνολο των φθόγγων-συχνοτήτων σε μία οκτάβα[2] (ξεκινώντας από έναν φθόγγο a) παίρνει τη μορφή γεωμετρικής προόδου με λόγο s:

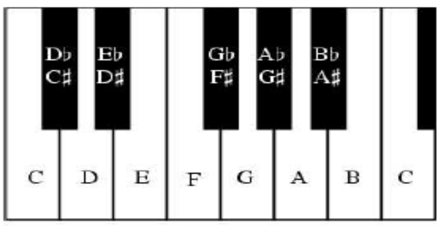
$$O = \{a, a \cdot s, a \cdot s^2, ..., a \cdot s^{12} \sim a\}.$$

Οι 12 αυτοί φθόγγοι αντιστοιχίζονται στις *12 νότες*, όπως αυτές παρατίθενται στην πρώτη και δεύτερη γραμμή του Πίνακα 1.1. Χρήσιμο είναι να αναφέρουμε στο σημείο αυτό, ότι οι νότες στην αγγλική βιβλιογραφία συμβολίζονται με λατινικούς χαρακτήρες, όπως παρατίθενται στην τρίτη και τέταρτη γραμμή του Πίνακα 1.1, και έτσι θα τις χρησιμοποιούμε από εδώ και στο εξής.

Ντο	Ντο $\sharp$	Ρε	Ρε $\sharp$	Μι	Φα	Φα $\sharp$	Σολ	Σολ $\sharp$	Λα	Λα $\sharp$	Σι
	Ρε $\flat$		Μι $\flat$			Σολ $\flat$		Λα $\flat$		Σι $\flat$	
C	$C\sharp$	D	$D\sharp$	E	F	$F\sharp$	G	$G\sharp$	A	$A\sharp$	B
	$D\flat$		$E\flat$			$G\flat$		$A\ flat$		$B\flat$	

Πίνακας 1.1: Οι νότες

Παρατηρούμε ότι οι φθόγγοι που αντιστοιχούν στα μαύρα πλήκτρα έχουν δύο ονομασίες (μία με $\sharp$ και μία με $\flat$). Οι φθόγγοι αυτοί ονομάζονται *εναρμόνιοι*. Στην Εικόνα 1.2 φαίνεται η αντιστοίχηση των νοτών με τα πλήκτρα του πιάνου σε μία οκτάβα.



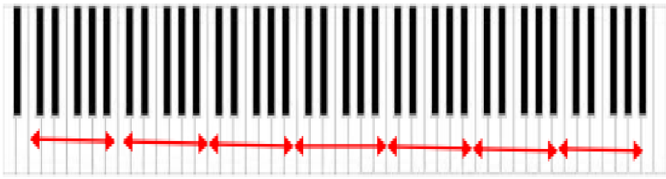
Εικόνα 1.2: Οι νότες σε μία οκτάβα

[1] Ο τρόπος αυτός ισοκατανομής των συχνοτήτων σε μία οκτάβα ξεκίνησε να αναπτύσσεται κατά τον 17ο αιώνα. Προηγουμένως χρησιμοποιούνταν άλλα συστήματα χορδίσματος, στα οποία τα διαστήματα μεταξύ των 12 νοτών δεν ήταν ακριβώς ίσα (*just intonation tunings*).

[2] Έτσι, το σύνολο των φθόγγων (F) σε όλο του το εύρος έχει τη μορφή:

$$F = \{a, a \cdot s, a \cdot s^2, ..., a \cdot s^n\}.$$

Αν με βάση την σχέση ισοδυναμίας (1.1) ισοδύναμοι φθόγγοι αντιστοιχίζονται στην ίδια νότα, όλο το εύρος των φθόγγων που μπορούμε να ακούσουμε μετατρέπεται σε μία αλληλουχία οκτάβων, δηλαδή δώδεκα νοτών. Στην Εικόνα 1.3 φαίνεται το εύρος όλων των φθόγγων στα πλήκτρα του πιάνου.



Εικόνα 1.3: Τα πλήκτρα του πιάνου ανά οκτάβες

Τελικά, οι 12 ισοδύναμες κλάσεις φθόγγων ταυτοποιούνται με τις 12 νότες. Αν λοιπόν όπου a, b εισάγουμε τις συχνότητες δύο φθόγγων και ισχύει $a/b = 2^j$, $j \in Z$, τότε οι δύο φθόγγοι αντιστοιχούν στην ίδια νότα. Για παράδειγμα, οι φθόγγοι με συχνότητες a_1, b_1 που έχουν λόγο $b_1/a_1 = 2$ όπως είδαμε προηγουμένως, αντιπροσωπεύουν το μεσαίο Ντο και το Ντο μία οκτάβα ψηλότερα από το μεσαίο.

1.2 Κλάσεις Φθόγγων και ακέραιοι modulo 12

Από τα προηγούμενα γίνεται εμφανής μία σχέση ανάμεσα στις κλάσεις μουσικών φθόγγων και στους ακεραίους modulo 12. Συγκεκριμένα, ας φανταστούμε όλους τους φθόγγους να παριστάνονται από το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, με το 0 να αντιστοιχίζεται στο "μεσαίο" C. Τότε, οι φθόγγοι των πλήκτρων του πιάνου αντιστοιχούν σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{Z}$. Κατ' αυτόν τον τρόπο, η σχέση ισοδυναμίας (1.1) μεταξύ των φθόγγων-συχνοτήτων μεταφράζεται σε σχέση ισοδυναμίας φθόγγων-ακεραίων.

Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ ορίζουμε τη σχέση (ισοδυναμίας) "$\equiv$" ως εξής. Έστω $a, b \in Z$ ακέραιοι-φθόγγοι. Θεωρούμε :

$$a \equiv b \quad \text{αν} \quad b - a = 12n\ ,\ n \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.2}$$

Πράγματι, έχουμε σχέση ισοδυναμίας, εφόσον:

1. $a \equiv a$ για όλους τους φθόγγους a:

   $a - a = 0 \Rightarrow n = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \equiv a\,,$

2. Αν $a \equiv b$ τότε $b \equiv a$ για όλους τους φθόγγους a, b:

   $a \equiv b \Rightarrow b - a = 12n \Rightarrow a - b = 12(-n),\ -n \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \equiv a\,,$

3. Αν $a \equiv b$ και $b \equiv c$, τότε $a \equiv c$ για όλους τους φθόγγους $a,\ b,\ c$:

   $a \equiv b \Rightarrow b - a = 12n\ ,\ n\epsilon\ \mathbb{Z}$

   $b \equiv c \Rightarrow c - b = 12m\ ,\ m\epsilon\ \mathbb{Z}$

   Προσθέτουμε κατά μέλη:

   $b - a + c - b = 12(n+m) \Rightarrow c - a = 12(n+m), n + m\epsilon Z \Rightarrow a \equiv c\,.$

Η σχέση ισοδυναμίας ¨≡¨ διαμελίζει το σύνολο των ακεραίων σε 12 κλάσεις ισοδυναμίας : 0, 1, ..., 11. Για παράδειγμα, στην κλάση 0 ανήκουν όλοι οι ακέραιοι που είναι πολλαπλάσια του 12, στην κλάση 1 ανήκουν όλοι οι ακέραιοι που διαιρούμενοι δια 12 αφήνουν υπόλοιπο 1 κ.ο.κ. Το σύνολο των 12 κλάσεων υπολοίπων modulo 12 συμβολίζεται με $\mathbb{Z}_{12}$.

Φυσικά και πάλι η ισοδυναμία υποννοεί πως το διάστημα μεταξύ των φθόγγων μίας κλάσης είναι μία οκτάβα. Οι ισοδύναμες κλάσεις για την παραπάνω σχέση ισοδυναμίας ονομάζονται και πάλι *κλάσεις φθόγγων*, με τη διαφορά πως σε αυτήν την περίπτωση έχουμε φθόγγους-ακεραίους αριθμούς και όχι φθόγγους-συχνότητες, όπως πριν (για παράδειγμα, η πρώτη κλάση είναι η 0 που περιέχει όλα τα Ντο). Η αντιστοίχιση αυτή μεταξύ κλάσεων φθόγγων-ακεραίων και νοτών παρουσιάζεται αναλυτικά στον Στον Πίνακα 1.4. Παρατηρούμε ότι εναρμόνιοι φθόγγοι αντιστοιχίζονται σε μία κλάση ακεραίων. Συνεπώς, με την αντιστοίχιση αυτή έχουμε *εναρμόνια ισοδυναμία*.

C	$C\sharp$	D	$D\sharp$	E	F	$F\sharp$	G	$G\sharp$	A	$A\sharp$	B
	$D\flat$		$E\flat$			$G\flat$		$A\flat$		$B\flat$	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

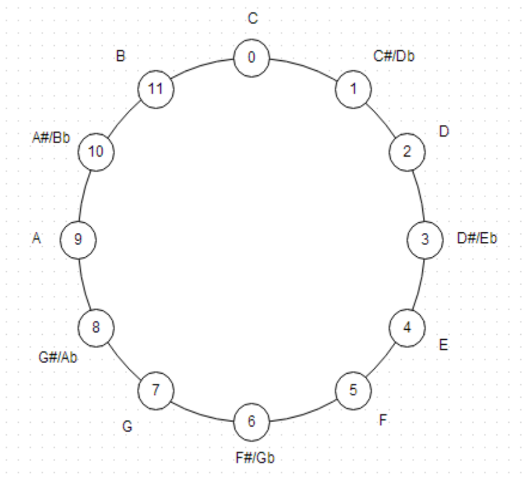
Πίνακας 1.4: Αντιστοίχιση των 12 κλάσεων των φθόγγων-ακεραίων με το $\mathbb{Z}_{12}$.

Όπως ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών φθόγγων ονομάζεται *ημιτόνιο*. Ακολουθούν οι μουσικοί όροι των διαστημάτων που μπορούν να εμφανιστούν ανάμεσα στις κλάσεις φθόγγων μίας οκτάβας[3].

[3]Υπάρχουν περισσότεροι από ένας όροι για τα παρακάτω διαστήματα στη Θεωρία της Μουσικής, οι οποίοι οφείλονται στις διαφορετικές ονομασίες της ίδιας νότας (π.χ. το διάστημα $C \rightarrow D\sharp$ - 3 ημιτόνια, ονομάζεται δεύτερη αυξημένη, ενώ το $C \rightarrow E\flat$ - 3 ημιτόνια, ονομάζεται τρίτη μικρή). Στην δική μας περίπτωση, επειδή απαιτούμε την εναρμόνια ισοδυναμία των φθόγγων, εφόσον έχουν μετατραπεί σε αριθμούς, οι πολλαπλές ονομασίες δεν μας αφορούν.

- Πρώτη καθαρή : 0 ημιτόνια
- Δεύτερη μικρή : 1 ημιτόνιο
- Δεύτερη μεγάλη : 2 ημιτόνια
- Τρίτη μικρή : 3 ημιτόνια
- Τρίτη μεγάλη : 4 ημιτόνια
- Τέταρτη καθαρή : 5 ημιτόνια
- Τέταρτη αυξημένη : 6 ημιτόνια
- Πέμπτη καθαρή : 7 ημιτόνια
- Έκτη μικρή : 8 ημιτόνια
- Έκτη μεγάλη : 9 ημιτόνια
- Έβδομη μικρή : 10 ημιτόνια
- Έβδομη μεγάλη : 11 ημιτόνια

Συνεπώς, για τη μετάβαση $0 \to 5$ εύκολα συμπεραίνουμε ότι το διάστημα μεταξύ των δύο κλάσεων φθόγγων είναι $5 - 0 = 5$ ημιτόνια. Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση $10 \to 6$; Για να απαντήσουμε σε τέτοια ερωτήματα χρειαζόμαστε την έννοια της πράξης στο $\mathbb{Z}_{12}$. Το σύνολο $\mathbb{Z}_{12}$ κληρονομεί την πρόσθεση των ακεραίων[4] και οι πράξεις υπολογίζονται απλά γεωμετρικά με βάση το μουσικό ρολόϊ (βλ. Εικόνα 1.5).



Εικόνα 1.5: Η κυκλική αντιστοίχιση των κλάσεων φθόγγων με το $\mathbb{Z}_{12}$.

Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}
3+4 &= 7 \pmod{12} \\
5+7 &= 12\ (= 12-12) = 0 \pmod{12} \\
6+7 &= 13\ (= 13-12) = 1 \pmod{12} \\
6-10 &= -4\ (= -4+12) = 8 \pmod{12}.
\end{aligned}$$

[4]Ουσιαστικά εδώ μιλούμε για την κυκλική ομάδα $\mathbb{Z}_{12}$, με γεννήτορα την βασική στροφή κατά 1.

Άρα, από την αντιστοίχιση των κλάσεων φθόγγων-αριθμών με τους ακεραίους modulo 12 βρίσκουμε από το τελευταίο παράδειγμα ότι το διάστημα $10 \to 6$ αντιστοιχεί σε 8 ημιτόνια.

Αυτή η μετάφραση από τις κλάσεις φθόγγων στο $\mathbb{Z}_{12}$ μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την αφηρημένη άλγεβρα για να μοντελοποιήσουμε τα μουσικά γεγονότα, [5] όπως θα δούμε παρακάτω.

[5] Crans, A. et al. (2009).

Κεφάλαιο 2

Η ατονική ομάδα T / I

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την ομάδα T/I. Αρχικά θα ορίσουμε τις συναρτήσεις $T_n,\ I_n : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$, όπου $n = 0, 1, ..., 11$ ως μετατοπίσεις και αναστροφές κατά n, οι οποίες δρουν πάνω σε κλάσεις φθόγγων. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το σύνολο $T/I = T\ \cup\ I = \{T_n|\quad n = 0, 1, ...11\} \cup \{I_n|\quad n = 0, 1, ...11\}$ εφοδιασμένο με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων αποτελεί ομάδα και μάλιστα ισόμορφη με την D_{12}, την διεδρική ομάδα τάξης 24 των συμμετριών ενός κανονικού δωδεκάγωνου. Θεωρώντας μία σύμφωνη τριαδική συγχορδία ως ένα διατεταγμένο σύνολο τριών κλάσεων φθόγγων, θα ορίσουμε το σύνολο S των 24 συμφώνων τριάδων και με τη βοήθεια του θεωρήματος του Σταθεροποιητή Τροχιάς θα δείξουμε ότι η δράση της ομάδας T/I πάνω στο σύνολο S είναι απλά μεταβατική, δηλαδή ότι μέσω της ομάδας T/I υπάρχει τρόπος να μεταβούμε από μία σύμφωνη τριάδα σε οποιαδήποτε άλλη και ο τρόπος αυτός είναι μοναδικός.

2.1 Οι συναρτήσεις T_n , I_n

Η βασική ιδέα μίας σύνθεσης ξεκινά από μία μελωδία. Ας πάρουμε ως παραδειγμα μία φούγκα του Bach. Η βασική μελωδία της φούγκας αποτελεί το *θέμα*. Η περαιτέρω επεξεργασία του θέματος προσφέρει δυνατότητες για επέκταση του έργου, ήδη χωρίς την εισαγωγή επιπρόσθετου μουσικού υλικού. Οι βασικές μουσικές λειτουργίες για την επεξεργασία του θέματος είναι η μετατόπιση και η αναστροφή.
Η *μετατόπιση* (ή τρανσπόρτο), T επιτρέπει την αυτούσια επαναδιατύπωση της μελωδίας σε χαμηλότερους ή υψηλότερους τόνους διατηρώντας τα διαστήματα μεταξύ των φθόγγων.
Η *αναστροφή*, I επιτρέπει την αναδιατύπωση μίας μελωδίας διατηρώντας τις αποστάσεις των φθόγγων ¨σε απόλυτη τιμή¨ χωρίς να διατηρεί όμως τα διαστήματα αυτά καθ' αυτά.
Μπορούμε να ορίσουμε τις δύο αυτές μουσικές λειτουργίες ως μαθηματικές συναρτήσεις:

Ορισμός 2.1.1 [1]*(Μετατόπιση)*
Έστω $n \in \mathbb{Z}_{12}$. Η συνάρτηση $T_n : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T_n(x) := x + n \pmod{12} \tag{2.1}$$

ονομάζεται *Μετατόπιση κατά n (transposition).*

Ορισμός 2.1.2 [2]*(Αναστροφή)*
Έστω $n \in \mathbb{Z}_{12}$. Η συνάρτηση $I_n : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$I_n(x) := -x + n \pmod{12} \tag{2.2}$$

ονομάζεται *Αναστροφή κατά n (inversion).*

Οι δύο αυτές συναρτήσεις μπορούν να δράσουν πάνω σε :

- μεμονωμένες κλάσεις φθόγγων:

$$T_3(5) = 8 \ (\mathrm{mod}\,12)\ ,\ T_6(7) = 13 - 12 = 1 \ (\mathrm{mod}\,12)\ ,$$
$$I_3(2) = 1 \ (\mathrm{mod}\,12)\ ,\ I_4(9) = -5 + 12 = 7 \ (\mathrm{mod}\,12)\,,$$

- σύνολα κλάσεων φθόγγων:

$$T_7\{0,4,7\} = \{T_7(0), T_7(4), T_7(7)\} = \{7, 11, 2\}\ ,$$
$$I_5\{0,8,5\} = \{I_5(0), T_5(8), T_5(0)\} = \{5, 9, 0\}\,,$$

- ακολουθίες κλάσεων φθόγγων:

$$T_2\langle 7,0,0,10\rangle = \langle T_2(7), T_2(0), T_2(0), T_2(10)\rangle = \langle 9,2,2,0\rangle\ ,$$
$$I_0\langle 0,4,4,7,11\rangle = \langle I_0(0), I_0(4), I_0(4), I_0(7), I_0(11)\rangle = \langle 0,8,8,5,1\rangle\,.$$

Παράδειγμα 2.1.1 *(Ο κύκλος με τις πέμπτες)*
Εφαρμόζω κατ' εξακολούθηση την T_7 ξεκινώντας από το 0 = Ντο, δηλαδή:
$T_7(0)$, $T_7(T_7(0))$, $T_7(T_7(T_7(0)))$, ...
Έχουμε:

$T_7(0) = 7 = \text{Σολ}$

$T_7(7) = 2 = \text{Ρε}$

$T_7(2) = 9 = \text{Λα}$

$T_7(9) = 4 = \text{Μι}$

$T_7(4) = 11 = \text{Σι}$

$T_7(11) = 6 = \text{Φα}\sharp/\text{Σολ}\flat$

$T_7(6) = 1 = \text{Ντο}\sharp/\text{Ρε}\flat$

$T_7(1) = 8 = \text{Σολ}\sharp/\text{Λα}\flat$

$T_7(8) = 3 = \text{Ρε}\sharp/\text{Μι}\flat$

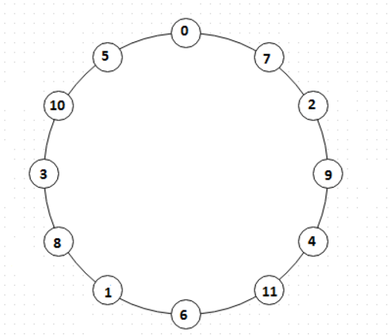
$T_7(3) = 10 = \text{Λα}\sharp/\text{Σι}\flat$

$T_7(10) = 5 = \text{Φα}$

$T_7(5) = 0 = \text{Ντο}$

[1]Fiore, music and maths.
[2]Fiore, 2007.

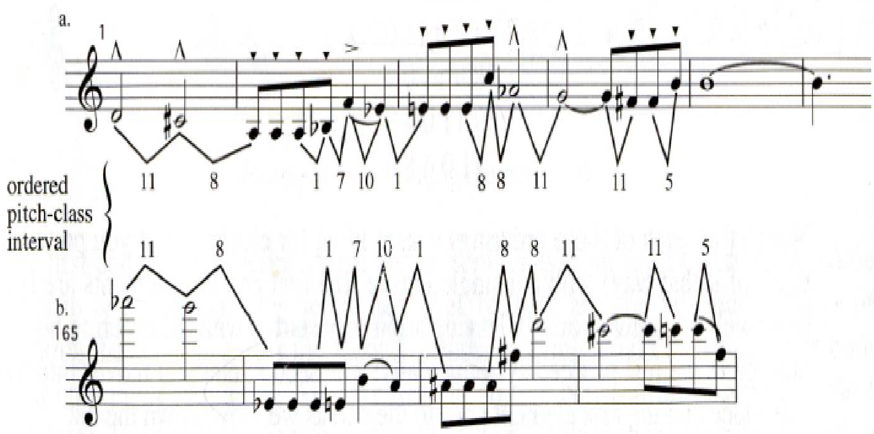
Η ακολουθία $\langle 0,7,2,9,4,11,6,1,8,3,10,5\rangle$ αποτελείται από 12 στοιχεία, όπως βλέπουμε, δηλαδή από όλες τις κλάσεις φθόγγων. Με την T_7 έχουμε μετατόπιση κατά διάστημα $n = 7$ ημιτονίων, δηλαδή πέμπτης καθαρής. Επειδή το διάστημα αυτό είναι εξαιρετικά εύηχο και χαρακτηριστικό, στη μουσική θεωρία η πέμπτη νότα σε μία κλίμακα[3] (που απέχει 7 ημιτόνια από την τονική) είναι πολύ σημαντική, εξού και δεσπόζουσα! Ο κύκλος με τις πέμπτες και η ιδιότητα του να περιέχει και τα 12 στοιχεία θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμος στη συνέχεια (πιο συγκεκριμένα στην κατασκευή του Tonnetz , βλέπε παράγραφο 4.1).



Εικόνα 2.1: Ο κύκλος των πέμπτων

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε δύο μουσικά παραδείγματα[4] χρήσης των T, I (Schoenberg, String Quartet No.4).

Παράδειγμα 2.1.2 *(Η συνάρτηση T_6 στο String Quartet No.4 του Schoenberg)*



Εικόνα 2.2: Schoenberg, String Quartet No.4 .

[3]Βλέπε ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2.

[4]Οι εικόνες είναι δανεισμένες από την εργασία του Zhang, A. (2009).

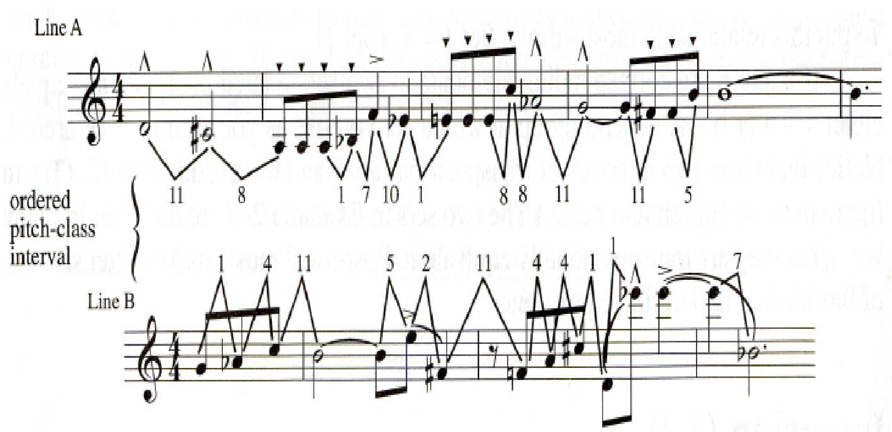
Έχουμε δύο γραμμές από ακολουθίες κλάσεων φθόγγων, δηλαδή δύο μελωδίες. Η μελωδία (έστω M) της πρώτης σειράς είναι:

$$\begin{aligned} M &= \langle D, C\sharp, A, B\flat, F, E\flat, E, C, A\flat, G, F\sharp, B \rangle \\ &= \langle 2, 1, 9, 10, 5, 3, 4, 0, 8, 7, 6, 11 \rangle. \end{aligned}$$

Η μελωδία της δεύτερης σειράς προκύπτει αν επιβάλλουμε την T_6 στην M:

$$\begin{aligned} T_6(M) &= \langle 8, 7, 3, 4, 11, 9, 10, 6, 2, 1, 0, 5 \rangle \\ &= \langle A\flat, G, E\flat, E, B, A, A\sharp, F\sharp, D, C\sharp, C, F \rangle. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.1.3 *(Η συνάρτηση I_9 στο String Quartet No.4 του Schoenberg)*

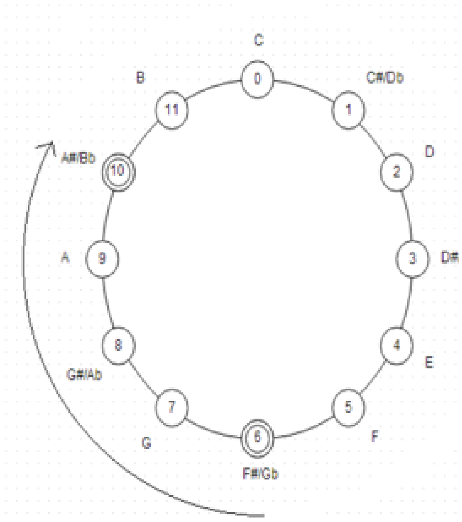


Εικόνα 2.3: Schoenberg, String Quartet No.4 .

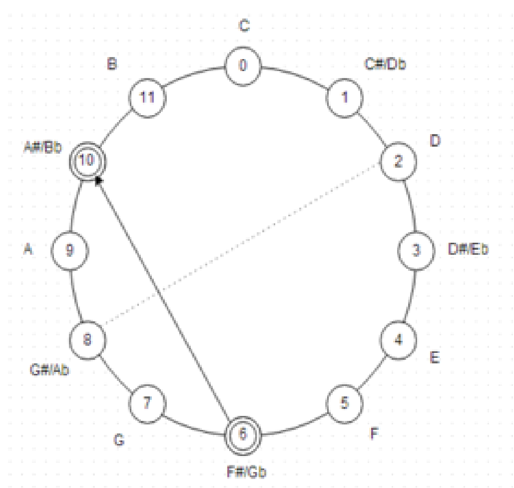
Η μελωδία της πρώτης σειράς είναι και πάλι η M. Η μελωδία της δεύτερης σειράς προκύπτει αν επιβάλλουμε την αναστροφή I_9 στην M:

$$\begin{aligned} I_9(M) &= \langle 7, 8, 0, 11, 4, 6, 5, 9, 1, 2, 3, 10 \rangle \\ &= \langle G, A\flat, C, E, F\sharp, F, A, C\sharp, D, E\flat, B\flat \rangle. \end{aligned}$$

Γεωμετρικά, η μετατόπιση $T_n(x)$ ενός φθόγγου x ερμηνεύεται ως περιστροφή κατά n βήματα στο μουσικό ρολόϊ. Αντίστοιχα, η αναστροφή $I_n(x)$ ενός φθόγγου x ερμηνεύεται ως ανάκλαση ως προς τον άξονα που διέρχεται από τις κορυφές $0 + n/2$, $6 + n/2$. Για παράδειγμα, στις Εικόνες 2.4 και 2.5 απεικονίζεται η μετάβαση της Φα$\sharp$/Σολ$\flat$ στην Λα$\sharp$/Σι$\flat$ μέσω στροφής T_4 και ανάκλασης I_4.



Εικόνα 2.4: $T_4(6) = 10$



Εικόνα 2.5: $I_4(6) = 10$

2.2 Η ομάδα T/I

Στην προηγούμενη παράγραφο ορίσαμε τις συναρτήσεις T_n , I_n των μεταθέσεων και αναστροφών:

$$T_n : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12} \ , \quad T_n(x) := x + n \ (\mathrm{mod}\ 12)$$

$$I_n : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12} \ , \quad I_n(x) := -x + n \ (\mathrm{mod}\ 12)$$

Ορίζουμε το σύνολο T/I ως:

$$\begin{aligned} T/I \ &:= \ T \ \cup \ I = \{T_n \mid n = 0, 1, ..., 11\} \cup \{I_n \mid n = 0, 1, ..., 11\} \\ &= \ \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, \\ &\qquad I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}, I_{11}\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

και ορίζουμε πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων. Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο αυτό εφοδιασμένο με την πράξη αποτελεί ομάδα.

Ορισμός 2.2.1 *(Ομάδα)*
Ομάδα $\langle G, * \rangle$ είναι ένα σύνολο G, μαζί με μία διμελή πράξη $*$ στο G τέτοια, ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

1. Το G είναι *κλειστό* ως προς την πράξη $*$ δηλαδή $a * b \in G$ για κάθε $a, b \in G$.

2. Η διμελής πράξη $*$ είναι *προσεταιριστική*.

3. Υπάρχει ένα στοιχείο e στο G τέτοιο ώστε $e * x = x * e = x$ για κάθε $x \in G$. Αυτό το στοιχείο ονομάζεται *ταυτοτικό στοιχείο* για την $*$ στο G.

4. Για κάθε a στο G υπάρχει ένα στοιχείο a' στο G με την ιδιότητα $a * a' = a' * a = e$. Το στοιχείο a' λέγεται *αντίστροφο* του a ως προς την πράξη $*$.

Θεώρημα 2.2.1 *Το σύνολο T/I με διμελή πράξη την σύνθεση συναρτήσεων είναι ομάδα.*

Απόδειξη

1. *Κλειστότητα*: Η σύνθεση δύο στοιχείων της T/I δίνει στοιχείο της T/I:

   – **Ισχυρισμός:** $T_m \circ T_n = T_{m+n \,(\mathrm{mod}\, 12)} \,\epsilon\, T/I\,.$ (2.4)

   Πράγματι,

   $$\begin{aligned}(T_m \circ T_n)(x) &= T_m(T_n(x)) = T_m(x+n) = x+n+m \\ &= x+(n+m) = T_{m+n \,(\mathrm{mod}\, 12)}(x)\,.\end{aligned}$$

   Άρα: $T_m \circ T_n = T_{m+n \,(\mathrm{mod}\, 12)} \,\epsilon\, T/I\,.$

   – **Ισχυρισμός:** $T_m \circ I_n = I_{m+n \,(\mathrm{mod}\, 12)} \,\epsilon\, T/I\,.$ (2.5)

   Πράγματι,

   $$\begin{aligned}(T_m \circ I_n)(x) &= T_m(I_n(x)) = T_m(-x+n) = -x+n+m \\ &= -x+(n+m) = I_{m+n \,(\mathrm{mod}\, 12)}\,.\end{aligned}$$

   Άρα: $T_m \circ I_n = I_{m+n \,(\mathrm{mod}\, 12)} \,\epsilon\, T/I\,.$

   – **Ισχυρισμός:** $I_m \circ T_n = I_{m-n \,(\mathrm{mod}\, 12)} \,\epsilon\, T/I\,.$ (2.6)

   Πράγματι,

   $$\begin{aligned}(I_m \circ T_n)(x) &= I_m(T_n(x)) = I_m(x+n) = -x-n+m \\ &= -x+(m-n) = I_{m-n \,(\mathrm{mod}\, 12)}\,.\end{aligned}$$

   Άρα: $I_m \circ T_n = I_{m-n \,(\mathrm{mod}\, 12)} \,\epsilon\, T/I.$

   – **Ισχυρισμός:** $I_m \circ I_n = T_{m-n \,(\mathrm{mod}\, 12)} \,\epsilon\, T/I\,.$ (2.7)

   Πράγματι,

   $$\begin{aligned}(I_m \circ I_n)(x) &= I_m(I_n(x)) = I_m(-x+n) = x-n-m \\ &= x+(m-n) = T_{m-n \,(\mathrm{mod}\, 12)}\,.\end{aligned}$$

   Άρα: $I_m \circ T_n = T_{m-n \,(\mathrm{mod}\, 12)} \,\epsilon\, T/I\,.$

2. *Προσεταιριστική* : Η ιδιότητα ισχύει ανάμεσα σε οποιαδήποτε τρία στοιχεία του T/I. Θα την αποδείξουμε ενδεικτικά για μία τριάδα $I_n, I_m, T_k \,\epsilon\, T/I$ για $n, m, k \,\epsilon\, \{0, 1, ..., 11\}$:

$$I_n \circ (I_m \circ T_k) = (I_n \circ I_m) \circ T_k\,.$$

Παίρνουμε το πρώτο μέλος :

$$I_n \circ (I_m \circ T_k) \overset{(2.6)}{=} I_n\, I_{m-k\,(\mathrm{mod}\,12)} \overset{(2.7)}{=} T_{n-m+k\,(\mathrm{mod}\,12)}\,.$$

Παίρνουμε το δεύτερο μέλος :

$$(I_n \circ I_m) \circ T_k \overset{(2.7)}{=} T_{n-m\,(\mathrm{mod}\,12)}\, T_k \overset{(2.4)}{=} T_{n-m+k\,(\mathrm{mod}\,12)}\,.$$

3. *Ταυτοτικό στοιχείο* : Υπάρχει το ταυτοτικό στοιχείο $e = T_0 \,\epsilon\, T/I$. Πράγματι,

$$T_0 \circ T_n \overset{(2.4)}{=} T_n\,,\; T_n \circ T_0 \overset{(2.4)}{=} T_n\,,\; I_0 \circ I_n \overset{(2.7)}{=} I_n\,,\; I_n \circ I_0 \overset{(2.4)}{=} I_n\,.$$

4. *Αντίστροφο στοιχείο* : Υπάρχει αντίστροφο στοιχείο $(T_n)^{-1} = T_{-n} = T_{(12-n)} \,\epsilon\, T/I$ για κάθε στοιχείο T_n. Για παράδειγμα, $T_1 \circ T_{11} = e$. Πράγματι,

$$T_n \circ T_{12-n} \overset{(2.4)}{=} T_{n+12-n\,(\mathrm{mod}\,12)} = T_0 = e\,,$$

$$T_{12-n} \circ T_n \overset{(2.4)}{=} T_{12-n+n\,(\mathrm{mod}\,12)} = T_0 = e\,.$$

Ο αντίστροφος του I_n είναι ο εαυτός του $(I_n)^{-1} = I_n$:

$$I_n \circ I_n \overset{(2.7)}{=} T_0 = e\,.$$

Συνεπώς μπορούμε πλέον να μιλούμε για την ομάδα T/I. $\square$

Ουσιαστικά, η ομάδα T/I αποτελεί μία κατηγοριοποίηση των μουσικών λειτουργιών που χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο στην ανάλυση ατονικής μουσικής, για το λόγο αυτό και η ονομασία της στην μουσική θεωρία είναι *ατονική ομάδα* (atonal group). Φυσικά, σε πολλές περιπτώσεις, η χρήση της γενικεύεται ακόμη και σε κλασσικά τονικά έργα (όπως μίας φούγκας του Bach), καθώς σε πρωταρχικές μορφές τους, η μετατόπιση και η αναστροφή αφορούν τη δυτική μουσική σε όλο της το φάσμα. Η ατονική κίνηση στην μουσική του 20ού αιώνα, με κύριους εκφραστές τους Schoenberg, Berg, Webern και τους μαθητές τους, χαρακτηρίζεται από την σταδιακή κατάργηση της τονικότητας, δηλαδή της επικράτησης ενός φθόγγου ως το μουσικό κέντρο ενός έργου. Οι νότες, που πλέον χρήζουν ίσης σημασίας μέσα ένα έργο, παρουσιάζονται σε ακολουθίες και σειρές. Έτσι, καταργείται η χρήση μείζονων και ελάσσονων κλιμάκων[5] στη μουσική σύνθεση.

[5] βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

2.3 Η δομή της ομάδας T/I

Υπολογίζουμε τους μεταθέτες της ομάδας T/I:

$$\begin{aligned}
[T_n, I_m] &= T_n \circ I_m \circ (T_n)^{-1} \circ (I_m)^{-1} \\
&= T_n \circ I_m \circ T_{12-n} \circ I_m \\
&\overset{(2.5)}{=} I_{m+n \,(\mathrm{mod}\, 12)} \circ I_{12-n+m \,(\mathrm{mod}\, 12)} \\
&\overset{(2.7)}{=} T_{n+m-12+n-m \,(\mathrm{mod}\, 12)} \\
&= T_{2n \,(\mathrm{mod}\, 12)} \,.
\end{aligned}$$

Άρα, τα T_n, I_n μετατίθενται μεταξύ τους μόνο για $n = 0,\, 6$.

$$\begin{aligned}
[T_n, T_m] &= T_n \circ T_m \circ (T_n)^{-1} \circ (T_m)^{-1} \\
&= T_n \circ T_m \circ T_{12-n} \circ T_m \\
&\overset{(2.4)}{=} T_{n+m \,(\mathrm{mod}\, 12)} \circ T_{12-n+12-m \,(\mathrm{mod}\, 12)} \\
&\overset{(2.4)}{=} T_{n+m+12-n+12-m \,(\mathrm{mod}\, 12)} \\
&= T_0 = e \,.
\end{aligned}$$

Άρα, τα T_n μετατίθενται μεταξύ τους.

$$\begin{aligned}
[I_n, I_m] &= I_n \circ I_m \circ (I_n)^{-1} \circ (I_m)^{-1} \\
&\overset{(2.7)}{=} I_n \circ I_m \circ I_n \circ I_m \\
&\overset{(2.7)}{=} T_{n-m \,(\mathrm{mod}\, 12)} \circ T_{n-m \,(\mathrm{mod}\, 12)} \\
&\overset{(2.7)}{=} T_{n-m+n-m \,(\mathrm{mod}\, 12)} \\
&= T_{2(n-m) \,(\mathrm{mod}\, 12)} \,.
\end{aligned}$$

Άρα, τα I_n μετατίθενται μεταξύ τους μόνο για $n = m,\, m+6$.

Ορισμός 2.3.1 *(Αβελιανή ομάδα)*
Μια ομάδα λέγεται *αβελιανή* αν η διμελής της πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό η T/I είναι μη αβελιανή.

Ορισμός 2.3.2 *(Κυκλική ομάδα)*
Μια ομάδα G λέγεται *κυκλική* αν υπάρχει κάποιο στοιχείο a στην G που την παράγει, δηλαδή αν $\langle a \rangle = G$. Το στοιχείο $a \in G$ ονομάζεται γεννήτορας της G.

Για την ομάδα T/I παρατηρούμε ότι έχει γεννήτορες τα T_1 (στροφή κατά $1/12$ στο ρολόϊ) και I_0 (ανάκλαση ως προς τον άξονα που περνά από τις κορυφές $0\,,\,6$), ($T_n I_0(x) = I_n(x)$). Από την πράξη στην T/I και από τον παραπάνω ορισμό συμπεραίνουμε ότι η T/I δεν είναι κυκλική.
Επίσης παρατηρούμε ότι:

- Το σύνολο T μαζί με τη διμελή πράξη είναι *υποομάδα* της T/I διότι είναι κλειστό ως προς την πράξη και ως προς τα αντίστροφα. Η T είναι κυκλική υποομάδα[6] με γεννήτορα το T_1, δηλαδή $\langle T_1 \rangle = T$, άρα και αβελιανή. Πράγματι,

$$\begin{aligned}(T_1)^n(x) &= \underbrace{(T_1 \circ T_1 \circ ... \circ T_1)}_{n}(x) = (T_1 \circ T_1 \circ ... \circ T_1)(x+1) \\ &= T_1 \circ T_1 \circ ... \circ (x+2) = ... = x+n\,.\end{aligned}$$

$$\text{Άρα} \qquad (T_1)^n = T_n\,. \tag{2.8}$$

- Το σύνολο I μαζί με τη διμελή πράξη δεν σχηματίζουν ομάδα καθώς λείπει το ταυτοτικό στοιχείο.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να ορίσουμε τι είναι ισομορφισμός :

Ορισμός 2.3.3 *(Ομομορφισμός, Ισομορφισμός)*
Μια απεικόνιση ϕ μίας ομάδας G σε μία ομάδα G' λέγεται *ομομορφισμός* αν:

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \tag{2.9}$$

για κάθε $a, b \in G$. Ένας *ισομορφισμός* $\phi \ : \ G \to G'$ είναι ένας ομομορφισμός ένα-προς-ένα και επί της G'. Ο συνήθης συμβολισμός είναι: $G \simeq G'$.

Στη συνέχεια ισχυριζόμαστε οτι η ομάδα T / I είναι ισόμορφη με την D_{12}, την διεδρική ομάδα τάξης 24. [7]

Γενικά, *συμμετρία* μίας γεωμετρικής κατασκευής ονομάζουμε οποιαδήποτε κίνηση της κατασκευής στο χώρο, έτσι ώστε μετά το πέρας της, η κατασκευή να καταλαμβάνει πάλι το ίδιο χωρίο. Δηλαδή συνολοθεωρητικά η κατασκευή παραμένει σταθερή στο χώρο, αλλά τα σημεία της μπορεί να έχουν μετακινηθεί. Η *διεδρική ομάδα τάξης* $2n$ είναι η ομάδα των συμμετριών ενός κανονικού n-γώνου, που περιέχει στροφές του κανονικού n-γώνου στο επίπεδο και ανακλάσεις (στροφές στον χώρο) μετά τη δράση των οποίων το n-γωνο καταλαμβάνει το ίδιο χωρίο, και συμβολίζεται ως D_n. Θεωρούμε κανονικό n-γωνο με κορυφές πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, ξεκινώντας από το (1,0) με αντιωρολογιακή φορά. Με C_k , $k = 0,\ 1, ..., n-1$, συμβολίζονται οι στροφές κατά γωνίες $2\pi k/n$ και με Σ_k , $k = 0,\ 1, ..., n-1$, οι ανακλάσεις ως προς τους άξονες που σχηματίζουν γωνίες $\pi k/n$ με τον άξονα xx'.

Συγκεκριμένα, για $n = 12$ έχουμε τη διεδρική ομάδα D_{12} τάξης 24 των συμμετριών του κανονικού δωδεκάγωνου:

$$\begin{aligned}D_{12} = \{&C_0 = e, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, \\ &\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_6, \Sigma_7, \Sigma_8, \Sigma_9, \Sigma_{10}, \Sigma_{11}\}\end{aligned}$$

---

[6] Η υποομάδα των στροφών είναι ισόμορφη με την κυκλική ομάδα $\mathbb{Z}_{12}$, εφόσον δύο πεπερασμένες κυκλικές ομάδες της ίδιας τάξης ($|\mathbb{Z}_{12}| = |T| = 12$) είναι ισόμορφες.

[7] Ιστορικά, οι διεδρικές ομάδες εισήχθησαν στην μουσική, αρχικά με σκοπό τη σύνθεση, από τον Milton Babbit, γενικεύοντας το 12-τονικό σύστημα του Schoenberg (integral serialism).

Η γωνία στροφής αυξάνει κατά 30^o, ενώ η γωνία που σχηματίζει ο άξονας της ανάκλασης με τον xx' αυξάνει κατά 15^o κάθε φορά.

Πρόταση 2.3.1 *Η ομάδα T/I είναι ισόμορφη με την D_{12} : $T/I \simeq D_{12}$.*

Γεωμετρική απόδειξη

Από τους ορισμούς 2.1.1 και 2.1.2 και από τις εικόνες 2.3 και 2.4 είναι φανερό ότι οι 12 μετατοπίσεις T_n και οι 12 αναστροφές I_n αντιστοιχούν στις συμμετρίες του κανονικού 12-γωνου, δηλαδή στις 12 στροφές C_k και στις 12 ανακλάσεις Σ_k [8].

Αλγεβρική απόδειξη

Μια διεδρική ομάδα τάξης $2n$ προκύπτει από δύο γεννήτορες C , Σ, οι οποίοι υπόκεινται σε τρεις σχέσεις:

$$C^n = 1 \,, \tag{2.10}$$
$$\Sigma^2 = 1 \,, \tag{2.11}$$
$$\Sigma C \Sigma^{-1} = C^{-1} \tag{2.12}$$

Στην περίπτωση μας έχουμε : $n = 12$, $C = C_1$, $\Sigma = \Sigma_0$. Με βάση τον Ορισμό 2.3.3 ένας ομομορφισμός πάνω στην T/I αρκεί να οριστεί πάνω στους γεννήτορες και θα πρέπει να σέβεται τις σχέσεις (2.5), (2.6), (2.7).

Ορίζουμε: $\phi : D_{12} \to T/I$ δίνοντας τις εικόνες των γεννητόρων :

$$\phi \,:\, C \to T_1 \,,\; \Sigma \to I_0 \tag{2.13}$$

και έχουμε :

$$(2.5)\ :\ \phi(C^{12}) = \phi(C)^{12} = \phi(T_1)^{12} = T_{12} = T_0 = e\,,$$

$$(2.6)\ :\ \phi(\Sigma^2) = \phi(\Sigma)^2 = (I_0)^2 = I_0 \circ I_0 = I_0 \circ (I_0)^{-1} = e\,,$$

$$(2.7)\ :\phi(\Sigma C \Sigma^{-1}) = \phi(\Sigma)\phi(C)\phi(\Sigma^{-1}) = I_0 \circ \underbrace{T_1 \circ I_0}_{I_1} = I_0 \circ I_1 = -I_1\,,$$

$$\text{και } -I_1(x) = x - 1 = T_{-1}(x) = (T_1(x))^{-1} = C^{-1}\,.$$

Τέλος, εφόσον όλα τα στοιχεία της ομάδας T/I είναι εικόνες μέσω του ϕ και οι ομάδες T/I και D_{12} έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, ο ομομορφισμός ϕ είναι ένα-προς-ένα και επί της T/I. Άρα, ο ϕ είναι ισομορφισμός. Συνεπώς, η ομάδα T/I είναι ισόμορφη με την D_{12}. □

[8] Crans κ.'α (2009).

Κατασκευάζουμε τους πίνακες των ομάδων T/I και D_{12}.

	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}
T_0	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}
T_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0
T_2	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1
T_3	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2
T_4	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3
T_5	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4
T_6	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
T_7	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
T_8	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
T_9	T_9	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
T_{10}	T_{10}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	I_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9
T_{11}	T_{11}	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	I_{11}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}
I_0	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1
I_1	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2
I_2	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3
I_3	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4
I_4	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5
I_5	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6
I_6	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7
I_7	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8
I_8	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	I_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}	T_9
I_9	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	I_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}	T_{10}
I_{10}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	I_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0	T_{11}
I_{11}	I_{11}	I_{10}	I_9	I_8	I_7	I_6	I_5	I_4	I_3	I_2	I_1	I_0	T_{11}	T_{10}	T_9	T_8	T_7	T_6	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1	T_0

Πίνακας 2.6: Ο πίνακας της ομάδας T/I.

	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}
E	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}
C_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0
C_2	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1
C_3	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2
C_4	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3
C_5	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	C_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4
C_6	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5
C_7	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6
C_8	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7
C_9	C_9	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8
C_{10}	C_{10}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9
C_{11}	C_{11}	E	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	Σ_{11}	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}
Σ_0	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1
Σ_1	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2
Σ_2	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3
Σ_3	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4
Σ_4	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5
Σ_5	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6
Σ_6	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7
Σ_7	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8
Σ_8	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}	C_9
Σ_9	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	Σ_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}	C_{10}
Σ_{10}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	Σ_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E	C_{11}
Σ_{11}	Σ_{11}	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	C_{11}	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	E

Πίνακας 2.7: Ο πίνακας της διεδρικής ομάδας D_{12}.

Παρατηρούμε ότι με απλή μετονομασία των στοιχείων (όπως κάναμε στους γεννήτορες) οι πίνακες είναι ακριβώς ίδιοι, άρα και από τους πίνακες φαίνεται ο ισομορφισμός μεταξύ των δύο ομάδων.

2.4 Η δράση της ομάδας T/I πάνω στο σύνολο S των συμφώνων τριάδων

2.4.1

Μέχρι στιγμής έχουμε δει κυρίως τα αποτελέσματα της δράσης των συναρτήσεων T_n , I_n πάνω σε μεμονωμένες κλάσεις φθόγγων, δηλαδή πάνω σε μεμονωμένες νότες, σε ακολουθίες κλάσεων φθόγγων, δηλαδή μελωδίες (νότες που παίζονται η μία μετά την άλλη) και σε αφηρημένα σύνολα κλάσεων φθόγγων, τα οποία δεν έχουμε ακόμη ορίσει μουσικά.

Ένα *σύνολο κλάσεων φθόγγων* αντιπροσωπεύει μία συγχορδία. Μια *συγχορδία*, δηλαδή μία συνήχηση, αποτελείται από τρεις ή και περισσότερες νότες που παίζονται ταυτόχρονα. Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε μόνο με *τριαδικές συγχορδίες ή τριάδες*, δηλαδή συγχορδίες που περιέχουν τρεις νότες, συνεπώς κάθε φορά που συναντούμε τον όρο συγχορδία, θα υπονοείται ότι εννούμε τριαδική.

Σύμφωνη ονομάζουμε μία συγχορδία, όταν οι ήχοι που την απαρτίζουν συνταιριάζονται μεταξύ τους κατά τρόπο που η ακοή μας να είναι τελείως ικανοποιημένη και να τους ακούσει κανείς σαν κάτι ενιαίο (θυμηθείτε τον Πυθαγόρα), το οποίο δε χρειάζεται καμιά επανόρθωση [9] ή ¨λύση¨ όπως λέμε. Πιο συγκεκριμένα, τα διαστήματα μεταξύ των νοτών μέσα σε μία σύμφωνη συγχορδία είναι *σύμφωνα διαστήματα*. Μετά την οκτάβα, που αποτελεί το πιο σύμφωνο διάστημα όπως είδαμε και προηγουμένως, έρχεται το διάστημα πέμπτης (7 ημιτόνια), και τα διαστήματα τρίτης μικρής (3 ημιτόνια) και τρίτης μεγάλης (4 ημιτόνια). Με τον συνδυασμό λοιπόν τριών νοτών που απέχουν τα παραπάνω διαστήματα μεταξύ τους οδηγούμαστε στην κατασκευή των συμφώνων τριαδικών συγχορδιών. Οι σύμφωνες τριάδες είναι δύο ειδών: μείζονες και ελάσσονες.

Μια *μείζονα συγχορδία* (major) αποτελείται από την πρώτη νότα, που την ονομάζουμε βάση και αυτή δίνει το όνομα στη συγχορδία, τη δεύτερη νότα σε απόσταση 4 ημιτονίων - διάστημα τρίτης μεγάλο - πάνω από τη βάση και την τρίτη νότα σε απόσταση 7 ημιτονίων - διάστημα πέμπτης καθαρό - πάνω από τη βάση. Δηλαδή, μία μείζονα τριάδα (σε ευθεία κατάσταση) έχει τη μορφή $(x,\, x+4 \,(\mathrm{mod}\, 12),\, x+7\,(\mathrm{mod}\, 12))$, όπου $x \,\epsilon\, \mathbb{Z}_{12}$. Οι μείζονες συγχορδίες συμβολίζονται με κεφαλαίο γράμμα. Για παράδειγμα, C = Ντο μείζονα = $(0,4,7) = (C,E,G)$.

[9] Καλομοίρης, Μ. (1933).

Μια *ελάσσονα συγχορδία* (minor) αποτελείται από την βάση που επίσης δίνει το όνομα στη συγχορδία, τη δεύτερη νότα σε απόσταση 3 ημιτονίων - διάστημα τρίτης μικρό - πάνω από τη βάση και την τρίτη νότα σε απόσταση 7 ημιτονίων - διάστημα πέμπτης καθαρό - πάνω από τη βάση. Δηλαδή μία ελάσσονα τριάδα (σε ευθεία κατάσταση) έχει τη μορφή $(x,\, x+3\,(\mathrm{mod}\,12),\, x+7\,(\mathrm{mod}\,12))$, όπου $x\,\epsilon\,\mathbb{Z}_{12}$. Οι ελάσσονες συγχορδίες συμβολίζονται με μικρό γράμμα. Για παράδειγμα, $a =$ λα ελάσσονα = $(4, 0, 9) = (A, C, E)$.

Ορίζουμε S *το σύνολο των συμφώνων συγχορδιών* ως εξής:

$$\begin{aligned} S &= S^{+} \cup S^{-} \\ &= \{\langle x,\, x+4\,(\mathrm{mod}\,12),\, x+7\,(\mathrm{mod}\,12)\rangle \mid x\,\epsilon\,\mathbb{Z}_{12}\} \cup \\ &\quad\; \{\langle x+7\,(\mathrm{mod}\,12),\, x+3\,(\mathrm{mod}\,12),\, x\rangle \mid x\,\epsilon\,\mathbb{Z}_{12}\}\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

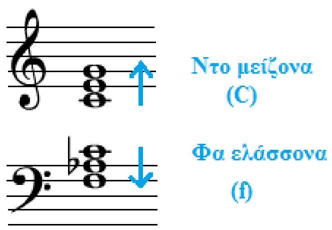
Τα 24 στοιχεία του συνόλου S παρατίθενται στον Πίνακα 2.8.

Major Triads	Minor Triads
$C = \langle 0, 4, 7\rangle$	$\langle 0, 8, 5\rangle = f$
$C\sharp = D\flat = \langle 1, 5, 8\rangle$	$\langle 1, 9, 6\rangle = f\sharp = g\flat$
$D = \langle 2, 6, 9\rangle$	$\langle 2, 10, 7\rangle = g$
$D\sharp = E\flat = \langle 3, 7, 10\rangle$	$\langle 3, 11, 8\rangle = g\sharp = a\flat$
$E = \langle 4, 8, 11\rangle$	$\langle 4, 0, 9\rangle = a$
$F = \langle 5, 9, 0\rangle$	$\langle 5, 1, 10\rangle = a\sharp = b\flat$
$F\sharp = G\flat = \langle 6, 10, 1\rangle$	$\langle 6, 2, 11\rangle = b$
$G = \langle 7, 11, 2\rangle$	$\langle 7, 3, 0\rangle = c$
$G\sharp = A\flat = \langle 8, 0, 3\rangle$	$\langle 8, 4, 1\rangle = c\sharp = d\flat$
$A = \langle 9, 1, 4\rangle$	$\langle 9, 5, 2\rangle = d$
$A\sharp = B\flat = \langle 10, 2, 5\rangle$	$\langle 10, 6, 3\rangle = d\sharp = e\flat$
$B = \langle 11, 3, 6\rangle$	$\langle 11, 7, 4\rangle = e$

Πίνακας 2.8: Ο πίνακας του συνόλου S των συμφώνων συγχορδιών.

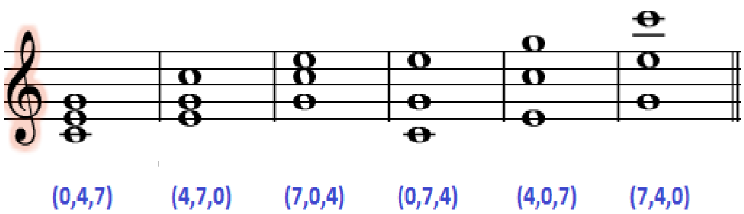
Παρατηρούμε ότι παρόλο που οι συγχορδίες αποτελούν σύνολα και όχι ακολουθίες κλάσεων φθόγγων, στον πίνακα παρουσιάζονται ως διατεταγμένα σύνολα. Ο συμβολισμός $< >$ δεν δηλώνει χρονική αλληλουχία μεταξύ τους, εφόσον οι νότες παίζονται ταυτόχρονα. Αυτού του είδους η διάταξη των νοτών μέσα στην κάθε συγχορδία - ενώ στις μείζονες συγχορδίες η βάση εμφανίζεται ως πρώτη νότα, δηλαδή οι μείζονες τριάδες παρουσιάζονται σε ευθεία κατάσταση, στις ελάσσονες η βάση της συγχορδίας εμφανίζεται τρίτη, δηλαδή οι ελάσσονες παρουσιάζονται σε αναστροφή - αλλά και η τοποθέτηση των συγχορδιών στον πίνακα - οι μείζονες ξεκινούν από την Ντο μείζονα, ενώ οι ελάσσονες ξεκινούν από την Φα ελάσσονα - αποτελούν συμβάσεις οι οποίες θα μας βοηθήσουν στην συνέχεια από αλγεβρικής πλευράς και συνδέονται με τον δυϊσμό του Γερμανού θεωρητικού της μουσικής του 19ου αιώνα Hugo Riemann $(1849 - 1919)$.[10]

Αξιωματική αφετηρία της θεωρίας περί *δυϊσμού* είναι ότι μία μείζονα και μία ελάσσονα συγχορδία προέρχονται από την αντήχηση ενός θεμελιώδους ήχου. Για παράδειγμα, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.9 η αντήχηση της νότας C (Ντο) παράγει τόσο την μείζονα τριάδα C όσο και την ελάσσονα τριάδα F (Φα). Καθώς η μείζονα τριάδα στήνεται από μία τρίτη μεγάλη και μία πέμπτη καθαρή πάνω από τη νότα Ντο, η ελάσσονα χτίζεται από τα ίδια διαστήματα αλλά κάτω από αυτόν, ως συμμετρική αναστροφή της μείζονας. Ο δυϊσμός μεταξύ των μείζονων και ελάσσονων τριάδων έχει απορριφθεί από ψυχο-ακουστικής πλευράς, δεν παύει όμως να προσφέρει μία συμμετρική αντίληψη για τις σύμφωνες τριάδες, η οποία βοηθά στην αλγεβρική μελέτη τους.



Εικόνα 2.9: Η δυϊκή αναπαράσταση των C και f.

Επίσης, σημειώνουμε ότι κάθε συγχορδία σε διατεταγμένη μορφή, εμπεριέχει σαν οντότητα και τις έξι πιθανές μεταθέσεις του συνόλου της. Για παράδειγμα, η $\langle 0, 4, 7\rangle$ εμπεριέχει μέσα της και τις έξι μεταθέσεις (ή θέσεις όπως λέμε στην αρμονία) της:



Εικόνα 2.10: Οι έξι μεταθέσεις της τριαδικής συγχορδίας C.

[10]Παρόλο που η θεωρία περί δυϊσμού αναπτύχθηκε και έγινε γνωστή μέσα από τη δουλειά του Riemann, ο πρώτος που την εισήγαγε στην μουσική θεωρία ήταν ο Γερμανός φυσικός και θεωρητικός της μουσικής Arthur von Oettingen (1836-1920).

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, κάθε συγχορδία από τις παραπάνω είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{Z}_{12}$ των κλάσεων των φθόγγων, συνεπώς οι μετατοπίσεις T και οι αναστροφές I μπορούν να δράσουν κατ' επέκταση και πάνω στις σύμφωνες τριάδες και όπως θα δούμε, να δώσουν επίσης σύμφωνες τριάδες.

Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $s =< y_1, y_2, y_3 > \, \epsilon \, S$ έχουμε $T_n, I_n : S \to S$ όπου $n = 0, 1, ..., 11$:

$$\begin{aligned} T_n(s) &= T_n\langle y_1, y_2, y_3\rangle = \langle T_n(y_1), T_n(y_2), T_n(y_3)\rangle = s' \, \epsilon \, S \,, \\ I_n(s) &= I_n\langle y_1, y_2, y_3\rangle = \langle I_n(y_1), I_n(y_2), I_n(y_3)\rangle = s' \, \epsilon \, S \end{aligned} \tag{2.15}$$

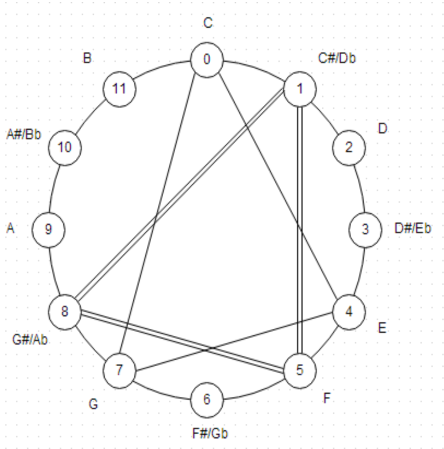
Ας δούμε αναλυτικά πώς μετασχηματίζονται οι συγχορδίες του συνόλου S μέσω των συναρτήσεων της ομάδας T/I. Σημειώνουμε ότι οι τριαδικές συγχορδίες απεικονίζονται με τρίγωνα στον μουσικό κύκλο.

- Η δράση των μετατοπίσεων διατηρεί το αν είναι μείζονα ή ελάσσονα η τριάδα που εισάγουμε διότι μένουν σταθερά τα διαστήματα και η σειρά τους και μάλιστα, αν δράσουμε όλες τις μετατοπίσεις $T_0, ..., T_{11}$ πάνω στη βασική $C = \langle 0, 4, 7\rangle$ παίρνουμε όλες τις μείζονες συγχορδίες.

  Συγκεκριμένα, με την T_n περνούμε από μία μείζονα συγχορδία (με βάση μ_1) στην μείζονα με βάση, $\mu_2 = \mu_1 + n \pmod{12}$, και από μία ελάσσονα (με βάση ϵ_1) σε μία ελάσσονα με βάση, $\epsilon_2 = \epsilon_1 + n \pmod{12}$. Στον πίνακα κατεβαίνουμε με βήμα n στην ίδια στήλη.

  Παράδειγμα 2.4.1 *(Η δράση της T_0 πάνω στην C)*
  $T_0(C) = T_0\langle 0, 4, 7\rangle = \langle T(0), T(4), T(7)\rangle = \langle 0, 4, 7\rangle = C$
  Με την T_0 παίρνουμε ως αποτέλεσμα την συγχορδία που εισάγουμε αφού είναι το ταυτοτικό στοιχείο.

  Παράδειγμα 2.4.2 *(Η δράση της T_1 πάνω στην C)*
  $T_1(C) = T_1\langle 0, 4, 7\rangle = \langle T_1(0), T_1(4), T_1(7)\rangle = \langle 1, 5, 8\rangle = C\sharp$
  Με την T_1 περνούμε από την μείζονα με βάση 0, στην μείζονα με βάση 1. Στον πίνακα κατεβαίνουμε 1 κουτί στην πρώτη στήλη και γεωμετρικά έχουμε στροφή κατά ένα, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.11.



Εικόνα 2.11: $T_1\langle 0,4,7\rangle = \langle 1,5,8\rangle$

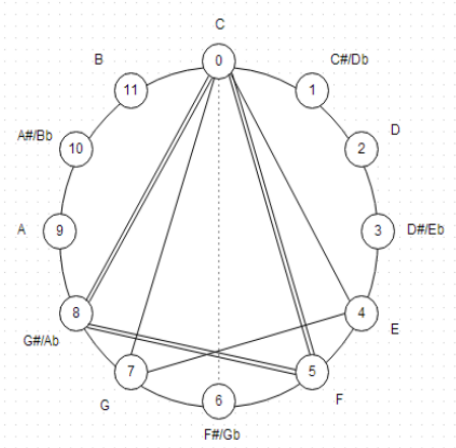
- Αντιθέτως, οι αναστροφές μετατρέπουν τις μείζονες σε ελάσσονες τριάδες και αντιστρόφως, διότι ενώ διατηρούν τα διαστήματα, αναστρέφουν τη σειρά τους. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε ότι μία ανάκλαση δρα πάνω σε μία τριάδα αντιστρέφοντας το κάθε στοιχείο αλλά και τη σειρά του. Για παράδειγμα: $I(C) = I(0,4,7) = (I(7), I(4), I(0)) = (5,8,0) = \langle 0,8,5\rangle = f$. Στην παρούσα εργασία θεωρούμε ότι μία αναστροφή δρα πάνω στο κάθε στοιχείο της διατηρώντας τη σειρά τους. Αν δράσουμε όλες τις αναστροφές $I_0, ..., I_{11}$ πάνω στη $C = \langle 0,4,7\rangle$ παίρνουμε όλες τις ελάσσονες τριάδες.

  Πιο συγκεκριμένα με την I_n περνούμε από μία μείζονα (με βάση μ_1) στην ελάσσονα με βάση, $\epsilon_2 = 5 + n - \mu_1 \pmod{12}$ και αντίστροφα, περνούμε από μία ελάσσονα (με βάση ϵ_1) στην μείζονα με βάση, $\mu_2 = 5 + n - \epsilon_1 \pmod{12}$. Ο άξονας της αναστροφής (η οποία γεωμετρικά είναι ανάκλαση) εξαρτάται μόνο από τον δείκτη n και διέρχεται από τα σημεία $n/2$, $6 + n/2$.

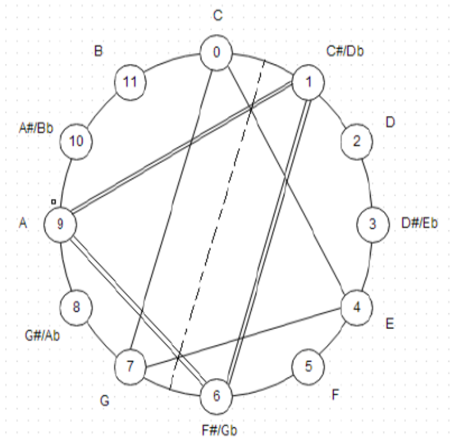
Παράδειγμα 2.4.3 *(Η δράση της I_0 πάνω στην C)*
$I_o(C) = I_o\langle 0,4,7\rangle = \langle I_o(0), I_o(4), I_o(7)\rangle = \langle 0,8,5\rangle = f$
Με την I_o περνούμε από την μείζονα με βάση 0, στην ελάσσονα με βάση 5. Γεωμετρικά έχουμε ανάκλαση ως προς τον άξονα που περνά από τις κορυφές 0 , 6 , όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.12.

Παράδειγμα 2.4.4 *(Η δράση της I_1 πάνω στην C)*
$I_1(C) = I_1\langle 0,4,7\rangle = \langle I_1(0), I_1(4), I_1(7)\rangle = \langle 1,9,6\rangle = f\sharp$
Με την I_1 περνούμε από την μείζονα με βάση 0, στην ελάσσονα με βάση 6. Γεωμετρικά έχουμε ανάκλαση ως προς τον άξονα που περνά από τις κορυφές 0.5 , 6.5, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.13.

Οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις των δύο τελευταίων παραδειγμάτων φαίνονται παρακάτω:



Εικόνα 2.12: $I_0\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,8,5\rangle$



Εικόνα 2.13: $I_1\langle 0,4,7\rangle = \langle 1,9,6\rangle$

2.4.2

Αφού είδαμε πρακτικά πώς δρά η ομάδα T/I πάνω στις σύμφωνες συγχορδίες, ήρθε η ώρα να εξετάσουμε τη δράση πιο αναλυτικά από αλγεβρικής άποψης. Αρχικά παραθέτουμε τον ορισμό της δράσης ομάδας:

Ορισμός 2.4.1 *(Δράση ομάδας)*
Έστω X ένα σύνολο και G μία ομάδα. *Δράση* της G πάνω στο X λέμε μία απεικόνιση $\cdot : G \times X \to X$ τέτοια ώστε :

1. $e \cdot x = x$ για κάθε $x \,\epsilon\, X$, δηλαδή το ταυτοτικό στοιχείο δρα ταυτοτικά,
2. $(g_1 g_2) \cdot (x) = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ για κάθε $x \,\epsilon\, X$ και κάθε $g_1,\, g_2 \,\epsilon\, G$.

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, λέμε ότι το X είναι ένα G-σύνολο.

Στη συνέχεια θα παραλείπουμε το ¨$\cdot$¨ στη δράση.

Με βάση τον ορισμό της δράσης ομάδας θεωρούμε μία σχέση (ισοδυναμίας) ¨$\sim$¨ πάνω στο σύνολο X ως εξής. Για $x,\, y \,\epsilon\, X$ ορίζουμε:

$$x \sim y \quad \text{αν υπάρχει} \quad g \,\epsilon\, G \quad \text{τέτοιο ώστε} \quad gx = y. \tag{2.16}$$

Πράγματι, έχουμε σχέση ισοδυναμίας, εφόσον:

1. $x \sim x$ για όλα τα στοιχεία του συνόλου X:

   $gx = x \Rightarrow g = e \,\epsilon\, G \Rightarrow x \sim x\,.$

2. Αν $x \sim y$ τότε $y \sim x$ για κάθε $x, y \,\epsilon\, X$:

$$x \sim y \Rightarrow gx = y\,,\; g\,\epsilon G \Rightarrow g^{-1}(gx) = g^{-1}y \Rightarrow (g^{-1}g)x = g^{-1}y$$
$$\Rightarrow ex = g^{-1}y \Rightarrow g^{-1}y = x, g^{-1}\,\epsilon\, G \Rightarrow y \sim x\,.$$

3. Αν $x \sim y$ και $y \sim z$ τότε $x \sim z$ για κάθε $x, y, z \,\epsilon\, X$:

$x \sim y \Rightarrow gx = y,\; g\,\epsilon\, G$
$y \sim z \Rightarrow hy = z\;,\;\; h\epsilon G$

Δρώντας στην πρώτη ισότητα με το h έχουμε:

$$h(gx) = hy \Rightarrow \underbrace{(hg)}_{f\epsilon G}x = hy \Rightarrow fx = hy = z \Rightarrow x \sim z\,.$$

Μια κλάση ισοδυναμίας $[x] = \{y\,\epsilon\, X \mid \quad y \sim x\}$ που προκύπτει από την παραπάνω σχέση ισοδυναμίας ονομάζεται *τροχιά*. Συγκεκριμένα:

Ορισμός 2.4.2 *(Τροχιά,* Orbit(x))
Η *τροχιά* ενός στοιχείου x που ανήκει σε ένα σύνολο X κάτω από τη δράση μίας ομάδας G πάνω στο X αποτελείται από όλα εκείνα τα στοιχεία του X στα οποία μετακινείται και ορίζεται ως :

$$\text{Orbit(x)} = \{gx \mid \quad g\,\epsilon\, G\} \;\subset\; X. \tag{2.17}$$

Στην περίπτωσή μας οι τροχιές κάτω από την δράση της ομάδας $G = T/I$ πάνω στο σύνολο $X = S$ των συμφώνων συγχορδιών είναι κλάσεις συνόλων (συγχορδιών). Μια τροχιά είναι ένα σύνολο από σύνολα (συγχορδίες) και το στοιχείο ενός συνόλου (συγχορδίας) του συνόλου S είναι μία κλάση φθόγγων.

Παράδειγμα 2.4.5 *(Η τροχιά της συγχορδίας C κάτω από τη δράση της T/I)*
Αν όλα τα στοιχεία της ομάδας T/I δράσουν πάνω στη συγχορδία $C = \langle 0, 4, 7\rangle$ παίρνουμε:

$T_0\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,4,7\rangle = C$
$T_1\langle 0,4,7\rangle = \langle 1,5,8\rangle = C\sharp$
$T_2\langle 0,4,7\rangle = \langle 2,6,9\rangle = D$
$T_3\langle 0,4,7\rangle = \langle 3,7,10\rangle = D\sharp$
$T_4\langle 0,4,7\rangle = \langle 4,8,11\rangle = E$
$T_5\langle 0,4,7\rangle = \langle 5,9,0\rangle = F$
$T_6\langle 0,4,7\rangle = \langle 6,10,1\rangle = F\sharp$
$T_7\langle 0,4,7\rangle = \langle 7,11,2\rangle = G$
$T_8\langle 0,4,7\rangle = \langle 8,0,3\rangle = G\sharp$
$T_9\langle 0,4,7\rangle = \langle 9,1,4\rangle = A$
$T_{10}\langle 0,4,7\rangle = \langle 10,2,5\rangle = A\sharp$
$T_{11}\langle 0,4,7\rangle = \langle 11,3,6\rangle = B$

$I_0\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,8,5\rangle = f$
$I_1\langle 0,4,7\rangle = \langle 1,9,6\rangle = f\sharp$
$I_2\langle 0,4,7\rangle = \langle 2,10,7\rangle = g$
$I_3\langle 0,4,7\rangle = \langle 3,11,8\rangle = g\sharp$
$I_4\langle 0,4,7\rangle = \langle 4,0,9\rangle = a$
$I_5\langle 0,4,7\rangle = \langle 5,1,10\rangle = a\sharp$
$I_6\langle 0,4,7\rangle = \langle 6,2,11\rangle = b$
$I_7\langle 0,4,7\rangle = \langle 7,3,0\rangle = c$
$I_8\langle 0,4,7\rangle = \langle 8,4,1\rangle = c\sharp$
$I_9\langle 0,4,7\rangle = \langle 9,5,2\rangle = d$
$I_{10}\langle 0,4,7\rangle = \langle 10,6,3\rangle = d\sharp$
$I_{11}\langle 0,4,7\rangle = \langle 11,7,4\rangle = e$

Άρα η τροχιά της C μείζονας κάτω από τη δράση της ομάδας T/I είναι όλο το σύνολο S των συμφώνων συγχορδιών.

$$\text{Orbit(C)} = S \rightarrow |\text{Orbit(C)}| = |S| = 24, \tag{2.18}$$

όπου με $|\ |$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων.

Στη συνέχεια θέλουμε να δείξουμε ότι η δράση της T/I πάνω στο σύνολο S είναι απλά μεταβατική χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Σταθεροποιητή Τροχιάς (Θεώρημα 2.4.2).

Ορισμός 2.4.3 *(Μεταβατική δράση)*
Μια δράση ομάδας ονομάζεται *μεταβατική* αν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει ένα $g \in G$ τέτοιο ώστε: $gx = y$. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει μόνο μία τροχιά και η τροχιά αυτή είναι όλο το X.

Ορισμός 2.4.4 *(Απλή δράση)*
Μια δράση ομάδας ονομάζεται *απλή* αν :

$$gx = g'x \ , \ x \in X \rightarrow \ g = g'$$

Ορισμός 2.4.5 *(Απλά μεταβατική δράση)*
Μια δράση ομάδας ονομάζεται *απλά μεταβατική* αν είναι και απλή και μεταβατική, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε x και κάθε y, $x,\ y \in X$ υπάρχει ένα μοναδικό $g \in G$ τέτοιο ώστε: $gx = y$.

Ορισμός 2.4.6 *(Σταθεροποιητής)*
Ο *σταθεροποιητής (stabilizer)* ενός στοιχείου x που ανήκει σε ένα σύνολο X αποτελείται από όλα εκείνα τα στοιχεία της G που αν δράσουν πάνω στο x δίνουν ως αποτέλεσμα τον εαυτό του, δηλαδή:

$$G_x = \{g \in G \mid \ \ gx = x\} \ \subset \ G \tag{2.19}$$

Θεώρημα 2.4.1 *Αν X είναι ένα G-σύνολο, τότε το G_x είναι υποομάδα της G για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη
Έστω $x \in X$ και $g_1, g_2 \in G_x$. Τότε $g_1 x = x$ και $g_2 x = x$. Επομένως $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) = g_1 x = x$, άρα $g_1, g_2 \in G_x$ και το G_x είναι κλειστό ως προς την πράξη που επάγεται από την G. Φυσικά, $ex = x$, άρα $e \in G_x$. Αν $g \in G_x$, τότε $gx = x$, άρα $x = ex = (g^{-1}g)x = g^{-1}(gx) = g^{-1}x$, επομένως $g^{-1} \in G_x$. Δηλαδή, το G_x είναι υποομάδα της G. $\square$

Θεώρημα 2.4.2 ***(Θεώρημα Σταθεροποιητή τροχιάς)***
Αν μία πεπερασμένη ομάδα G δρα πάνω σε ένα σύνολο X τότε:

$$|G| \ / \ |G_x| \ = \ |\mathit{Orbit(\ x)}| \, . \tag{2.20}$$

Πρόταση 2.4.1 *Η δράση της ομάδας T/I πάνω στο σύνολο S των συμφώνων τριάδων είναι απλά μεταβατική.*

Απόδειξη

Από το Παράδειγμα 2.4.5 έχουμε:

$$|\text{Orbit(C)}| = |S| = 24 = |T/I| \,, \tag{2.21}$$

δηλαδή, κάτω από τη δράση της ομάδας T/I πάνω στο S υπάρχει μόνο μία τροχιά η οποία είναι όλο το σύνολο S. Άρα, με βάση τον Ορισμό 2.4.3 συμπεραίνουμε ότι η δράση της T/I πάνω στο S είναι μεταβατική.

Με αντικατάσταση της σχέσης (2.21) στο θεώρημα του σταθεροποιητή τροχιάς παίρνουμε: $|G_C| = 1$, δηλαδή η ομάδα - σταθεροποιητής περιέχει μόνο το ταυτοτικό στοιχείο e. Άρα, αν για κάποια τριάδα $s \,\epsilon\, S$ έχουμε:

$$g's = gs \Rightarrow g^{-1}(g's) = g^{-1}(gs) \Rightarrow (g^{-1}g')s = (g^{-1}g)s \Rightarrow (g^{-1}g)s = s \,,$$

πρέπει $g^{-1}g = e \Rightarrow g = g'$, για $g,\ g' \,\epsilon\, G$. Άρα, με βάση τον Ορισμό 2.4.4 η δράση της T/I πάνω στο S είναι απλή.

Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα και τον Ορισμό 2.4.5 δείξαμε ότι η δράση της ομάδας T/I πάνω στο σύνολο S των συμφώνων τριάδων είναι απλά μεταβατική. $\square$

Η απόδειξη αυτή θεμελιώνει θεωρητικά τον τρόπο με τον οποίο κινούμαστε ανάμεσα στις συγχορδίες με τη βοήθεια της ομάδας T/I. Δηλαδή, θεμελιώνει το γεγονός ότι ξεκινώντας από μία συγχορδία υπάρχει τρόπος να φτάσουμε σε οποιαδήποτε άλλη και ο τρόπος αυτός είναι μοναδικός. Αντιθέτως, η δράση της T/I πάνω στο Z_{12} των κλάσεων φθόγγων δεν είναι απλά μεταβατική, αφού μπορώ να κινηθώ από την μία νότα στην άλλη με δύο τρόπους. Για παράδειγμα: $T_2(5) = I_0(5) = 7$.

Τελικά, με την αρμονική ανάλυση μέσω της ατονικής ομάδας T/I δίνεται αυτή η δυνατότητα της άμεσης μετάβασης από μία σύμφωνη τριάδα σε οποιαδήποτε άλλη με μοναδικό τρόπο. Από την άλλη πλευρά όμως, όσον αφορά στις αναστροφές I_n, αγνοείται ένας σημαντικός παράγοντας: αυτός της ακουστικής. Ας θεωρήσουμε τη μουσική λειτουργία που μετασχηματίζει μία μείζονα τριάδα στην ομώνυμή της ελάσσονα. Η λειτουργία αυτή ακούγεται η ίδια, είτε εφαρμόζεται πάνω στη C μείζονα, είτε στην D μείζονα, γιατί η ακοή μας είναι σχετική. Όμως, ερμηνεύοντας την λειτουργία ως δράση της T/I, παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση που εφαρμόζεται είναι διαφορετική. Πράγματι: $C \xrightarrow{I_7} c$, ενώ $D \xrightarrow{I_{11}} d$. Το πρόβλημα αυτό θα αντιμετωπιστεί εισάγοντας στη μουσική ανάλυση την ομάδα PLR, την οποία θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3

Η neo-Riemannian ομάδα PLR

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με την ομάδα PLR. Αρχικά θα ορίσουμε τις τρεις συναρτήσεις P, L, R από το σύνολο των συμφώνων τριάδων S στον εαυτό του με τη βοήθεια των αναστροφών I, και θα εξετάσουμε τη δράση τους πάνω στα στοιχεία του συνόλου S. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το σύνολο PLR το οποίο αποτελείται από όλες τις πιθανές συνθέσεις των τριών συναρτήσεων, εφοδιασμένο με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων, αποτελεί ομάδα και μάλιστα ισόμορφη με την D_{12} και κατ' επέκταση και με την ομάδα T/I. Επιπλέον, θα κατασκευάσουμε κανόνες υπολογισμού της δράσης της ομάδας PLR πάνω στο σύνολο S και θα αποδείξουμε ότι η δράση αυτή είναι απλά μεταβατική.

3.1 Οι συναρτήσεις P , L , R

Η ομάδα PLR ή neo-Riemannian έχει τις βάσεις της στις συναρτήσεις P, L, R του H.Riemann. Παρόλα αυτά οι νεο-Ρημανικές θεωρίες περί μουσικής (neo-Riemannian music theories) ξεκίνησαν να απασχολούν τους μουσικολόγους τις τελευταίες δεκαετίες. Γεννήθηκαν ως εργαλεία επίλυσης των προβλημάτων τα οποία εμφανίζονταν κατά την ανάλυση χρωματικής μουσικής[1] που αφενός ήταν τριαδική, αφετέρου δεν είχε αυστηρή τονική ενότητα.

Η μουσική αυτή - που περιλαμβάνει έργα ρομαντικών και υστερορομαντικών συνθετών όπως οι Wagner, Liszt και μεταγεννέστερων συνθετών, αλλά και κάποια ¨περάσματα¨ σε έργα κλασικών συνθετών όπως οι Mozart και Schubert[2] - ονομάζεται πλέον *τριαδική υστερο-τονική μουσική* κατά τον Cohn, καθώς ποιοτικά βρίσκεται κάπου ανάμεσα στην τονική μουσική (κλασικισμός) και την ατονική μουσική του 20ου αιώνα (δωδεκαφθογγισμός, σειραϊσμός κτλ).

[1] Η χρωματική μουσική προκύπτει από δομές που γεννιούνται μέσα από τις χρωματικές κλίμακες.

[2] Cohn, R. (1998).

Η γέννηση λοιπόν των neo-Riemannian μουσικών θεωριών οφείλεται στον μαθηματικό, μουσικολόγο και συνθέτη David Lewin (1933-2003), ο οποίος στα θεμελιώδη έργα του *Generalized Musical Intervals and Transformations (GMIT)* και *A formal theory of generalized tonal functions* καταπιάνεται με τις τρεις αυτές συναρτήσεις με στόχο την αντιμετώπιση των προβλημάτων που εγείρονται κατά την μουσική ανάλυση αυτού του ρεπερτορίου.
Ορίζουμε τις τρεις συναρτήσεις P, L, R στο σύνολο S των συμφώνων τριαδικών συγχορδιών, με τη βοήθεια των αναστροφών I (βλ. Ορισμό 2.1.2):

Ορισμός 3.1.1 [3]*(Παράλληλη)*
Η συνάρτηση $P : S \rightarrow S$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$P\langle y_1, y_2, y_3\rangle := I_{y_1+y_3}\langle y_1, y_2, y_3\rangle = \langle y_3, y_1 - y_2 + y_3, y_1\rangle \tag{3.1}$$

ονομάζεται *Παράλληλη (Parallel)*.

Ορισμός 3.1.2 [4]*(Ανταλλαγή προσαγωγέα)*
Η συνάρτηση $L : S \rightarrow S$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$L\langle y_1, y_2, y_3\rangle := I_{y_2+y_3}\langle y_1, y_2, y_3\rangle = \langle -y_1 + y_2 + y_3, y_2, y_3\rangle \tag{3.2}$$

ονομάζεται *Ανταλλαγή προσαγωγέα (Leading tone exchange)*.

Ορισμός 3.1.3 [5]*(Σχετική)*
Έστω $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{Z}_{12}$. Η συνάρτηση $R : S \rightarrow S$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$R\langle y_1, y_2, y_3\rangle := I_{y_1+y_2}\langle y_1, y_2, y_3\rangle = \langle y_2, y_1, y_1 + y_2 - y_3\rangle \tag{3.3}$$

ονομάζεται *Σχετική (Relative)*.

Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι ¨συσχετισμένες¨ αναστροφές (*contextual inversions*), όπου η θέση του άξονα της αναστροφής εξαρτάται από την συγχορδία - ανεξάρτητη μεταβλητή που εισάγουμε στην συνάρτηση. Αντιθέτως, στις αναστροφές I_n η θέση του άξονα είναι ανεξάρτητη της εισροής αφού σχετίζεται μόνο με τον ακέραιο n [6]. Η θέση του άξονα κατά τη δράση των συναρτήσεων P, L, R σε σχέση με την εισροή $< y_1, y_2, y_3 >$ σε κάθε περίπτωση είναι:

- Στην συνάρτηση P ο άξονας περνά από τις κορυφές $\frac{y_1+y_3}{2}$, $6+\frac{y_1+y_3}{2}$.
- Στην συνάρτηση L ο άξονας περνά από τις κορυφές $\frac{y_2+y_3}{2}$, $6+\frac{y_2+y_3}{2}$.
- Στην συνάρτηση R ο άξονας περνά από τις κορυφές $\frac{y_1+y_2}{2}$, $6+\frac{y_1+y_2}{2}$.

[3] Fiore, T. (2007).
[4] Fiore, T. (2007).
[5] Fiore, T. (2007).
[6] Crans, A. et al. (2009).

Και οι τρεις συναρτήσεις, ως αναστροφές, μας πηγαίνουν από μία μείζονα σε μία ελάσσονα και αντίστροφα, κρατώντας πάντα δύο νότες ίδιες αλλά αναστρέφοντας τις θέσεις τους. Έτσι μεγαλώνουμε όσο το δυνατόν περισσότερο την τομή των κλάσεων φθόγγων ανάμεσα σε δύο διαφορετικές συγχορδίες.

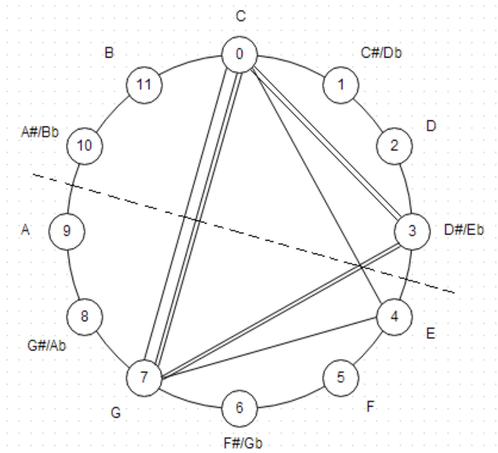
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μας διευκολύνει να θεωρούμε τα γνωστά σύμβολα "$+$" , "$-$" σαν ισοτιμία για τις μείζονες και τις ελάσσονες συγχορδίες, αντίστοιχα. Για παράδειγμα, Ντο μείζονα $= C = C^+$, Ντο ελάσσονα $= c = C^-$.

Ας δούμε τώρα πώς δρουν στην πράξη οι συναρτήσεις P, L, R πάνω στις τριαδικές συγχορδίες.

- Η συνάρτηση P μετασχηματίζει μία σύμφωνη συγχορδία στη μοναδική συγχορδία αντίθετης ομοτιμίας, η οποία έχει ανεστραμμένες την πρώτη με την τρίτη νότα της αρχικής. Από μουσικής πλευράς, περνούμε από μία μείζονα στην ομώνυμη ελάσσονα και από μία ελάσσονα στην ομώνυμη μείζονα. *Ομώνυμες* ονομάζονται μία μείζονα και μία ελάσσονα συγχορδία αν συμβολίζονται με το ίδιο γράμμα και αντίθετη ομοτιμία.

  Παράδειγμα 3.1.1 *(Η δράση της P πάνω στις C^+, C^-)*
  $P(C^+) = P\langle 0,4,7\rangle = I_7\langle 0,4,7\rangle = \langle 7,3,0\rangle = C^-$
  και αντίστροφα,
  $P(C^-) = P\langle 7,3,0\rangle = I_7\langle 7,3,0\rangle = \langle 0,4,7\rangle = C^+$.

  Με την P από την Ντο μείζονα περάσαμε στην Ντο ελάσσονα και αντίστροφα. Στην γεωμετρική αναπαράσταση που φαίνεται στην Εικόνα 3.1, ο άξονας συμμετρίας περνά από τις κορυφές $\frac{y_1+y_3}{2} = 3.5$, $6 + \frac{y_1+y_3}{2} = 9.5$.

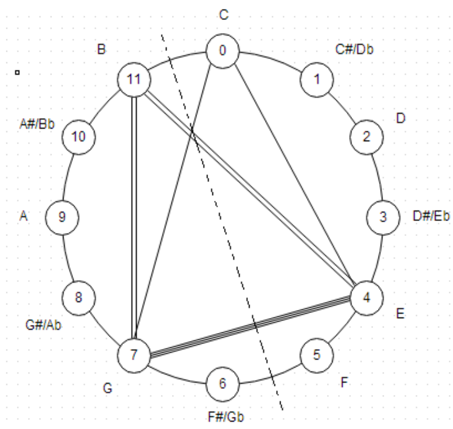


Εικόνα 3.1: Η μετάβαση: $C^+ \overset{P}{\longleftrightarrow} C^-$.

- Η συνάρτηση L μετασχηματίζει μία σύμφωνη συγχορδία στη μοναδική συγχορδία αντίθετης ομοτιμίας, η οποία έχει ανεστραμμένες την δεύτερη με την τρίτη νότα της αρχικής. Από μουσικής πλευράς περνούμε από μία μείζονα στην ελάσσονα με βάση μία τρίτη μεγάλη (4 ημιτόνια) πάνω από τη βάση της μείζονας και από μία ελάσσονα συγχορδία περνούμε στη μείζονα με βάση 4 ημιτόνια κάτω από τη βάση της ελάσσονας. Σε κάθε μετάβαση από μείζονα σε ελάσσονα τριάδα, η φωνή που κινείται οδηγεί τη βάση της μείζονας στην τρίτη νότα της ελάσσονας και αντίστροφα. Με τον τρόπο αυτό, θεωρώντας τη μείζονα κλίμακα με τονική τη βάση της μείζονας τριάδας, περνούμε από την τονική στον προσαγωγέα της (δηλαδή την έβδομη νότα της κλίμακας) και αντίστροφα. Εξού και η ονομασία της λειτουργίας L ως «ανταλλαγή προσαγωγέα».

Παράδειγμα 3.1.2 *(Η δράση της L πάνω στις C^+, E^-)*
$L(C^+) = L\langle 0,4,7\rangle = I_{11}\langle 0,4,7\rangle = \langle 11,7,4\rangle = E^-$
και αντίστροφα,
$L(E^-) = L\langle 11,7,4\rangle = I_{11}\langle 11,7,4\rangle = \langle 0,4,7\rangle = C^+$.

Με την L από την Ντο μείζονα περάσαμε στην Μι ελάσσονα και αντίστροφα. Στη γεωμετρική αναπαράσταση που φαίνεται στην Εικόνα 3.2, ο άξονας συμμετρίας περνά από τις κορυφές $\frac{y_2+y_3}{2} = 5.5$, $6+\frac{y_2+y_3}{2} = 11.5$.

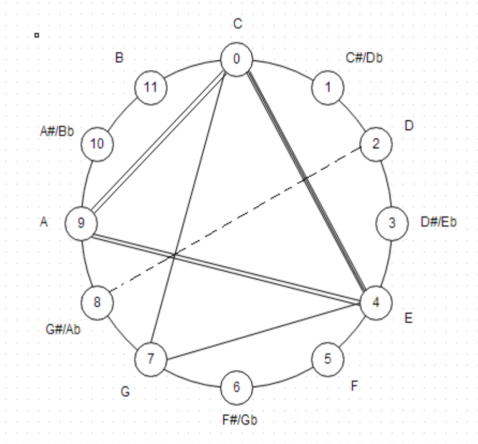


Εικόνα 3.2: Η μετάβαση: $C^+ \overset{L}{\longleftrightarrow} E^-$.

- Η συνάρτηση R μετασχηματίζει μία σύμφωνη συγχορδία στη μοναδική συγχορδία αντίθετης ομοτιμίας, η οποία έχει ανεστραμμένες την πρώτη με την δεύτερη νότα της αρχικής. Από μουσικής πλευράς περνούμε από μία μείζονα στην σχετική της ελάσσονα και από μία ελάσσονα στην σχετική της μείζονα. Μια μείζονα και μία ελάσσονα συγχορδία είναι *σχετικές* αν η βάση της ελάσσονας είναι 3 ημιτόνια κάτω από τη βάση της μείζονας.

Παράδειγμα 3.1.3 *(Η δράση της R πάνω στις C^+, A^-)*
$R(C^+) = R\langle 0,4,7\rangle = I_4\langle 0,4,7\rangle = \langle 4,0,9\rangle = A^-$
και αντίστροφα,
$R(A^-) = R\langle 4,0,9\rangle = I_4\langle 4,0,9\rangle = \langle 0,4,7\rangle = C^+$

Με τη R από την Ντο μείζονα περάσαμε στη Λα ελάσσονα και αντίστροφα. Στη γεωμετρική αναπαράσταση που φαίνεται στην Εικόνα 3.3, ο άξονας συμμετρίας περνά από τα σημεία $\frac{y_1+y_2}{2} = 2$, $6 + \frac{y_1+y_2}{2} = 8$.

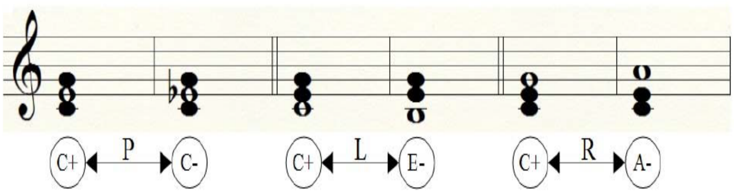


Εικόνα 3.3: Η μετάβαση: $C^+ \overset{R}{\longleftrightarrow} A^-$.

Από τα παραπάνω παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι η διπλή εφαρμογή κάθε μίας από τις $P,\ L,\ R$ πάνω σε μία σύμφωνη συγχορδία δίνει ως αποτέλεσμα την ίδια τη συγχορδία, δηλαδή:

$$P^2 = e,\ L^2 = e,\ R^2 = e\ . \tag{3.4}$$

Στην Εικόνα 3.4 φαίνονται τα τρία παραδείγματα που εξετάσαμε στο πεντάγραμμο:



Εικόνα 3.4: Τα Παραδείγματα 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 στο πεντάγραμμο.

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό των συναρτήσεων $P,\ L,\ R$ που αναδύεται από τα παραπάνω παραδείγματα είναι το εξής: κατά τη σύνδεση δύο συμφώνων συγχορδιών, εκτός του ότι δύο νότες μένουν ίδιες, ακόμη και η φωνή που αλλάζει κάνει ιδιαίτερα μικρές κινήσεις. Συγκεκριμένα, η φωνή που αλλάζει, μετακινείται κατά ένα ημιτόνιο στην περίπτωση των συναρτήσεων $P,\ L$ και κατά δύο ημιτόνια στην περίπτωση της συνάρτησης R. Στο Παράδειγμα 3.1.1 έχουμε: $4 \to 3$, στο Παράδειγμα 3.1.2: $0 \to 11$ και στο Παράδειγμα 3.1.3: $7 \to 9$. Αυτή η μικρή κίνηση είναι πολύ σημαντική στο πλαίσιο της δυτικής κλασικής μουσικής παράδοσης, όπου η βηματική κίνηση των φωνών είναι μία διαχρονική νόρμα επιβεβλημένη σε πολλές εποχές (1500-1900 μ.Χ.) και μουσικά στυλ. Συνεπώς το χαρακτηριστικό αυτό μας βοηθά ιδιαίτερα στη μουσική ανάλυση ενός μεγάλου αριθμού έργων, μέσω των παραπάνω συναρτήσεων.

Αν εφαρμόσουμε τις $P,\ L,\ R$ πάνω σε διάφωνες (όχι σύμφωνες) συγχορδίες θα συναντήσουμε και πάλι αυτήν την ιδιαιτερότητα; Ας πάρουμε ως παράδειγμα την διάφωνη τριάδα $\langle 0,1,5\rangle$.

Παράδειγμα 3.1.4 *(Η δράση των $P,\ L,\ R$ πάνω στην $\langle 0,1,5\rangle$)*
$P\langle 0,1,5\rangle = I_5\langle 0,1,5\rangle = \langle 5,4,0\rangle$
$L\langle 0,1,5\rangle = I_6\langle 0,1,5\rangle = \langle 6,5,1\rangle$
$P\langle 0,1,5\rangle = I_1\langle 0,1,5\rangle = \langle 1,0,8\rangle$

Παρατηρούμε ότι για την φωνή που κινείται στην κάθε περίπτωση έχουμε «άλματα» 3 ημιτονίων, εφόσον $P : 1 \to 4$, $R : 5 \to 8$, και 6 ημιτονίων, εφόσον $L : 0 \to 6$. Κάθε επανάληψη της διαδικασίας αυτής, χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε διάφωνη συγχορδία δίνει απαγορευτικά αποτελέσματα - αντίθετα της σχεδόν βηματικής κίνησης που αναζητούμε. Εξαίρεση αποτελεί η συγχορδία $\langle 0,4,8\rangle$, η οποία δίνει ταυτοτικά αποτελέσματα και γι' αυτό δεν μας ενδιαφέρει. [7] Πιο συγκεκριμένα:
$P\langle 0,4,8\rangle = \langle 8,4,0\rangle \quad , \quad L\langle 0,4,8\rangle = \langle 0,8,4\rangle \quad , \quad R\langle 0,4,8\rangle = \langle 4,0,8\rangle.$

Συνεπώς, η φειδωλή κίνηση της φωνής που αλλάζει *(parsimonious voice leading)*[8] είναι ένα μοναδικό χαρακτηριστικό που εμφανίζεται κατά τους μετασχηματισμούς των συμφώνων τριάδων μέσω των συναρτήσεων $P,\ L,\ R$. Παρόλο που οι σύμφωνες τριάδες μουσικά ξεχωρίζουν λόγω του ότι είναι ιδιαίτερα εύηχες, η δυνατότητα της μικρής ως βηματικής κίνησης της φωνής που αλλάζει, είναι εντελώς ανεξάρτητο γεγονός από τις ακουστικές τους ιδιότητες. Η δυνατότητα αυτή είναι συνάρτηση των διαστημάτων μεταξύ των φθόγγων μέσα σε μία σύμφωνη τριάδα, δηλαδή προκύπτει λόγω της εσωτερικής δομής των μείζονων και ελάσσονων τριάδων [9].

[7] Crans, A. et al. (2009).

[8] Το λεγόμενο parsimonious voice leading σχετίζεται με την αρχή της ελάχιστης κίνησης του Schoenberg.

[9] Cohn, R. (1996).

3.2 Η ομάδα PLR

Αναζητούμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς σύνθεσης των συναρτήσεων P, L, R, που θα αποτελέσουν το σύνολο PLR.

Ορισμός 3.2.1 [10]*(Η ομάδα PLR)*
Η *ομάδα PLR* είναι η ομάδα της οποίας το σύνολο αποτελείται από όλες τις πιθανές συνθέσεις των συναρτήσεων P, L, R, με διμελή πράξη την σύνθεση συναρτήσεων.

Αρχικά φανταζόμαστε πως οι συνδυασμοί αυτοί είναι πάρα πολλοί, αλλά στην πραγματικότητα υπάρχουν μόνο 24 συνδυασμοί, οι οποίοι αποτελούν τα στοιχεία του συνόλου PLR. Κατ' αρχάς, βάσει της (3.4), σε οποιονδήποτε συνδυασμό των P, L, R δε θα υπάρχουν μεμονωμένες άρτιες δυνάμεις τους. Ξεκινούμε αναζητώντας τους συνδυασμούς των L, R. (Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η P παράγεται από τις L, R). Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις R, L σε μία συγχορδία για να αναλύσουμε τα αποτελέσματα:

Παράδειγμα 3.2.1 *(Η τροχιά της C^+ κάτω από τη δράση των L, R)*
Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις R, L πάνω στην C^+:

$R(C^+) = A^-$
$LR(C^+) = L(A^-) = F^+$
$R(LR)(C^+) = R((LR)(C^+)) = R(F^+) = D^-$
$(LR)^2(C^+) = L(R(LR)(C^+)) = L(D^-) = A\sharp^+$
$R(LR)^2(C^+) = R((LR)^2(C^+)) = R(A\sharp^+) = G^-$
$(LR)^3(C^+) = L((R(LR)^2(C^+)) = L(G^-) = D\sharp^+$
$R(LR)^3(C^+) = R((LR)^3(C^+)) = R(D\sharp^+) = C^-$
$(LR)^4(C^+) = L((R(LR)^3(C^+)) = L(C^-) = G\sharp^+$
$R(LR)^4(C^+) = R((LR)^4(C^+)) = R(G\sharp^+) = F^-$
$(LR)^5(C^+) = L((R(LR)^4(C^+)) = L(F^-) = C\sharp^+$
$R(LR)^5(C^+) = R((LR)^5(C^+)) = R(C\sharp^+) = A\sharp^-$
$(LR)^6(C^+) = L((R(LR)^5(C^+)) = L(A\sharp^-) = F\sharp^+$
$R(LR)^6(C^+) = R((LR)^6(C^+)) = R(F\sharp^+) = D\sharp^-$
$(LR)^7(C^+) = L((R(LR)^6(C^+)) = L(D\sharp^-) = B^+$
$R(LR)^7(C^+) = R((LR)^7(C^+)) = R(B^+) = G\sharp^-$
$(LR)^8(C^+) = L((R(LR)7(C^+)) = L(G\sharp^-) = E^+$
$R(LR)^8(C^+) = R((LR)^8(C^+)) = R(E^+) = C\sharp^-$

[10] Fiore, T. (2007)

$(LR)^9(C^+) = L((R(LR)^8(C^+)) = L(C\sharp^-) = A^+$
$R(LR)^9(C^+) = R((LR)^9(C^+)) = R(A^+) = F\sharp^-$
$(LR)^{10}(C^+) = L((R(LR)^9(C^+)) = L(F\sharp^-) = D^+$
$R(LR)^{10}(C^+) = R((LR)^{10}(C^+)) = R(D^+) = B^-$
$(LR)^{11}(C^+) = L((R(LR)^{10}(C^+)) = L(B^-) = G^+$
$R(LR)^{11}(C^+) = R((LR)^{11}(C^+)) = R(G^+) = E^-$
$(LR)^{12}(C^+) = L((R(LR)^{11}(C^+)) = L(E^-) = C^+$
Από εδώ και πέρα αρχίζουν να επαναλαμβάνονται.

Οι 24 σύνθετες συναρτήσεις:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&LR\ ,\ (LR)^2,\ (LR)^3\ ,\ (LR)^4\ ,\ (LR)^5\ ,\ (LR)^6\ ,\ (LR)^7\ ,\ (LR)^8\ ,\\ &(LR)^9\ ,\ (LR)^{10}\ ,\ (LR)^{11}\ ,\ (LR)^{12}\ ,\ R\ ,\ R(LR)\ ,\ R(LR)^2\ ,\\ &R(LR)^3\ ,\ R(LR)^4\ ,\ R(LR)^5\ ,\ R(LR)^6\ ,\ R(LR)^7\ ,\\ &R(LR)^8\ ,\ R(LR)^9\ ,\ R(LR)^{10}\ ,\ R(LR)^{11}\}\end{aligned}$$

ανήκουν στο σύνολο L/R και η εφαρμογή τους πάνω στην C^+ μας δίνει όλο το σύνολο S των συμφώνων συγχορδιών. Άρα οι συναρτήσεις αυτές είναι διακριτές και το σύνολο L/R έχει τουλάχιστον 24 στοιχεία: $|L/R| \geq 24$. Παρατηρούμε ότι η L δεν περιλαμβάνεται στο σύνολο Σ, αλλά, όπως θα δούμε σε λίγο, $L = R(LR)^{11}$.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τη δράση των L, R πάνω σε οποιαδήποτε συγχορδία.

Λήμμα 3.2.1 *Έστω $s \in S$. Για κάθε $g \in T/I$ και για κάθε $h \in PLR$ ισχύει:*

$$gh(s) = hg(s)\,. \tag{3.5}$$

Απόδειξη
Με βάση τις σχέσεις (3.1), (3.2), (3.3) μπορούμε να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις P, L, R μετατίθενται με τους γεννήτορες της T/I: T_1, I_0, δηλαδή:

$$PT_1(s) \;=\; T_1P(s) \quad , \quad PI_0(s) \;=\; I_0P(s) \tag{3.6}$$
$$LT_1(s) \;=\; T_1L(s) \quad , \quad LI_0(s) \;=\; I_0L(s) \tag{3.7}$$
$$RT_1(s) \;=\; T_1R(s) \quad , \quad RI_0(s) \;=\; I_0R(s)\,. \tag{3.8}$$

Θα το αποδείξουμε ενδεικτικά για την P. Έστω μία τριάδα $s = \langle x_1, x_2, x_3\rangle \in S$. Για τις P, T_1 έχουμε:

$$\begin{aligned}PT_1\langle x_1, x_2, x_3\rangle &= P\langle x_1+1, x_2+1, x_3+1\rangle\\ &= \langle x_3+1, x_1-x_2+x_3+1, x_1+1\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1P\langle x_1, x_2, x_3\rangle &= T_1\langle x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1\rangle \\ &= \langle x_3 + 1, x_1 - x_2 + x_3 + 1, x_1 + 1\rangle \end{aligned}$$

Άρα $\quad PT_1(s) = T_1P(s)$.

Για τις P, I_0 έχουμε:

$$\begin{aligned} PI_0\langle x_1, x_2, x_3\rangle &= P\langle -x_1, -x_2, -x_3\rangle \\ &= \langle -x_3, -x_1 + x_2 - x_3, -x_1\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_0P\langle x_1, x_2, x_3\rangle &= I_0\langle x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1\rangle \\ &= \langle -x_3, -x_1 + x_2 - x_3, -x_1\rangle \end{aligned}$$

Άρα $\quad PI_0(s) = I_0P(s)$.

Αφού οι συναρτήσεις T_1, I_0 είναι οι γεννήτορες της T/I και οι συναρτήσεις P, L, R οι γεννήτορες της ομάδας PLR (στην οποία σίγουρα περιλαμβάνονται οι 24 σύνθετες συναρτήσεις που εξετάζουμε), άρα κάθε στοιχείο της T/I μετατίθεται με κάθε στοιχείο της PLR. $\square$

Με βάση το Λήμμα 3.2.1 και το Παράδειγμα 3.2.1 προκύπτουν οι εξής παρατηρήσεις:

Πρόταση 3.2.1 *Στο σύνολο PLR και για κάθε $s \in S$ ισχύουν:*

1. *Η συνάρτηση P μπορεί να γραφεί ως σύνθεση των R, L:*

$$P(s) = R(LR)^3(s)\,. \tag{3.9}$$

2. *Η συνάρτηση L μπορεί να γραφεί επίσης ως:*

$$L(s) = R(LR)^{11}(s)\,. \tag{3.10}$$

3. *Η συνάρτηση $(LR)^{12}$ αποτελεί ταυτοτικό στοιχείο:*

$$(LR)^{12}(s) = (LR)^0(s) = L^2(s) = R^2(s) = s\,. \tag{3.11}$$

Απόδειξη

1. Πράγματι, με βάση το Παράδειγμα 3.2.1 έχω:

$$P(C^+) = (R(LR))^3(C^+) = C^-\,. \tag{3.12}$$

Θέλω να γενικεύσω για κάθε σύμφωνη τριάδα. Όπως είδαμε στην υποπαράγραφο 2.4.1 του προηγούμενου κεφαλαίου, κάθε μείζονα τριάδα

μπορεί να προκύψει από τη δράση της T_n για κάποιο $n \,\epsilon\, \mathbb{Z}_{12}$ πάνω στη βασική C^+ και κάθε ελάσσονα μπορεί να προκύψει από τη δράση της I_n για κάποιο $n \,\epsilon\, \{0, 1, ..., 11\}$ πάνω στη βασική C^+.
Δηλαδή, για κάθε στοιχείο $s \,\epsilon S$:

$$s = \begin{cases} T_n(C^+) & \text{αν } s \text{ μείζονα,} \\ I_n(C^+) & \text{αν } s \text{ ελάσσονα.} \end{cases} \tag{3.13}$$

Δρούμε απο αριστερά την T_n στην (3.12):

$$\begin{aligned} T_nP(C^+) &= T_nR(LR)^3(C^+) \overset{\text{Λήμμα 3.2.1}}{\Longleftrightarrow} \\ PT_n(C^+) &= R(LR)^3T_n(C^+) \overset{(3.13)}{\Longleftrightarrow} \\ P(s) &= R(LR)^3(s)\ , \text{ για κάθε μείζονα τριάδα } s. \end{aligned}$$

Ομοίως, δρούμε από αριστερά την I_n στην (3.12):

$$\begin{aligned} I_nP(C^+) &= I_nR(LR)^3(C^+) \overset{\text{Λήμμα 3.2.1}}{\Longleftrightarrow} \\ PI_n(C^+) &= R(LR)^3I_n(C^+) \overset{(3.13)}{\Longleftrightarrow} \\ P(s) &= R(LR)^3(s)\ , \text{ για κάθε ελάσσονα τριάδα } s. \end{aligned}$$

Άρα, τελικά ισχύει ότι $P(s) = R(LR)^3(s)$.

2. Πράγματι, από το Παράδειγμα 3.2.1 έχουμε:

$$L(C^+) = R(LR)^{11}(C^+)\,. \tag{3.14}$$

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι η σχέση (3.10) ισχύει αν τα δύο μέλη δράσουν πάνω σε οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου S.

3. Πράγματι, από το Παράδειγμα 3.2.1 έχουμε:

$$(LR)^{12}(C^+) = L^2(C^+) = R^2(C^+) = (C^+)\,. \tag{3.15}$$

Και πάλι μπορούμε να γενικεύσουμε και να δείξουμε ότι η σχέση (3.11) ισχύει αν τα δύο μέλη δράσουν πάνω σε οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου S. $\square$

Θεώρημα 3.2.1 *Το σύνολο $PLR = L/R$ εφοδιασμένο με τη σύνθεση συναρτήσεων ως διμελή πράξη, είναι ομάδα, τάξης 24 και*

$$PLR = \{(LR)^n \mid n = 1, 2, ..., 12\} \cup \{R(LR)^n \mid n = 0, 1, ..., 11\}. \tag{3.16}$$

Απόδειξη

Εφόσον η P μπορεί να εκφραστεί μέσω των άλλων δύο συναρτήσεων, μπορούμε να ονομάσουμε το σύνολο PLR ως L/R. Από την Πρόταση 3 έπεται ότι οποιαδήποτε άλλη σύνθετη συνάρτηση προκύπτει από τις L, R θα είναι ισοδύναμη με κάποια από τις 24 συναρτήσεις Σ που γνωρίζουμε. Συνεπώς, για το σύνολο $L/R = PLR$ έχουμε:

$PLR = \{(LR)^n \mid n = 1, 2..., 12\} \cup \{R(LR)^n \mid n = 0, 2, ..., 11\}$, και άρα: $|PLR| = 24$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι πληρούνται τα αξιώματα της ομάδας.

1. *Κλειστότητα*: Η σύνθεση δύο στοιχείων της PLR δίνει στοιχείο της PLR. Πράγματι,

   – $$(LR)^n \circ (LR)^m \overset{(3.11)}{=} (LR)^{n+m\,(\mathrm{mod}\,12)} \,\epsilon\, PLR. \tag{3.17}$$

   – $$R(LR)^n \circ (LR)^m \overset{(3.17)}{=} R(LR)^{m+n\,(\mathrm{mod}\,12)} \,\epsilon\, PLR. \tag{3.18}$$

   – **Ισχυρισμός:** $$(LR)^n \circ R(LR)^m = R(LR)^{m-n\,(\mathrm{mod}\,12)} \,\epsilon\, PLR. \tag{3.19}$$

   Πράγματι, για $n = 1$ και $m = 1, 2, ..., 12$ έχουμε:

   $$\begin{aligned} LR \circ R(LR)^1 &= R = R(LR)^0 \\ LR \circ R(LR)^2 &= (LR \circ R(LR)^1)(LR) = R(LR) \\ LR \circ R(LR)^3 &= (LR \circ R(LR)^2)(LR) = R(LR)(LR) = R(LR)^2 \\ LR \circ R(LR)^4 &= (LR \circ R(LR)^3)(LR) = R(LR)^2(LR) = R(LR)^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

   Άρα: $$LR \circ R(LR)^m = R(LR)^{m-1}. \tag{3.20}$$

Για $n=2$ και $m=1,2,...12$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
(LR)^2 \circ R(LR)^1 &= LRLRRLR = L \overset{(3.10)}{=} R(LR)^{11} \\
(LR)^2 \circ R(LR)^2 &= ((LR)^2 \circ R(LR)^1)(LR) = (LR)^{11}(LR) \\
&= R(LR)^{12} = R(LR)^0 = R \\
(LR)^2 \circ R(LR)^3 &= ((LR)^2 \circ R(LR)^2)(LR) = R(LR) \\
(LR)^2 \circ R(LR)^4 &= ((LR)^2 \circ R(LR)^3)(LR) = R(LR)(LR) \\
&= R(LR)^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Άρα: $\quad (LR)^2 \circ R(LR)^m = R(LR)^{m-2}$.

Γενικά, για τυχαίο $n=1,2,...,12$ έχουμε:

$(LR)^n \circ R(LR)^m = R(LR)^{m-n\,(\mathrm{mod}\,12)} \,\epsilon\, PLR.$

– **Ισχυρισμός:** $\quad R(LR)^n \circ R(LR)^m = (LR)^{m-n\,(\mathrm{mod}\,12)} \,\epsilon\, PLR$. (3.21)

Πράγματι, από προηγούμενα έχουμε:

$$\begin{aligned}
R(LR)^n \circ R(LR)^m &= R((LR)^n R(LR)^m) = R(R(LR)^{m-n\,(\mathrm{mod}\,12)}) \\
&\overset{(3.11)}{=} (LR)^{m-n\,(\mathrm{mod}\,12)}.
\end{aligned}$$

Άρα, $R(LR)^n \circ R(LR)^m = (LR)^{m-n\,(\mathrm{mod}\,12)} \,\epsilon\, PLR$.

2. *Προσεταιριστική* : Η ιδιότητα ισχύει ανάμεσα σε οποιαδήποτε τρία στοιχεία της ομάδας PLR. Θα την αποδείξουμε ενδεικτικά για μία τριάδα $(LR)^n, (LR)^m, R(LR)^k \,\epsilon\, PLR$ για $n, m \,\epsilon\, \{1,2,...,12\}$ και $k \,\epsilon\, \{0,1,...,11\}$:
Παίρνουμε το πρώτο μέλος :

$$\begin{aligned}
((LR)^n \circ (LR)^m) \circ R(LR)^k &= (LR)^{n+m\,(\mathrm{mod}\,12)} \circ R(LR)^k \\
&= R(LR)^{k-n-m\,(\mathrm{mod}\,12)}.
\end{aligned}$$

Παίρνουμε το δεύτερο μέλος :

$$\begin{aligned}
(LR)^n \circ ((LR)^m) \circ R(LR)^k) &= (LR)^n \circ R(LR)^{k-n\,(\mathrm{mod}\,12)} \\
&= R(LR)^{k-m-n\,(\mathrm{mod}\,12)}.
\end{aligned}$$

3. *Ταυτοτικό στοιχείο* : Από (3.11) υπάρχει το ταυτοτικό στοιχείο $e = (LR)^{12} \,\epsilon\, PLR$.

4. *Αντίστροφο στοιχείο* : Για κάθε στοιχείο $(LR)^n$ υπάρχει ο αντίστροφος $((LR)^n)^{-1} = (LR)^{-n} = (LR)^{12-n(\mathrm{mod}\,12)} \epsilon\ PLR$. Για παράδειγμα, $(LR)^1 \circ (LR)^{11} = e$. Πράγματι:

   $$(LR)^n \circ (LR)^{12-n\,(\mathrm{mod}\,12)} = (LR)^{n+12-n\,(\mathrm{mod}\,12)} = (LR)^0 = e\,.$$

   ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Με βάση το Παράδειγμα 3.2.1 μπορούμε να εξάγουμε τις εξής ισότητες:

   $$\begin{aligned} RL(C^+) &= G^+ = (LR)^{11}(C^+) \\ (RL)^2(C^+) &= D^+ = (LR)^{10}(C^+) \\ (RL)^3(C^+) &= A^+ = (LR)^9(C^+) \\ &\vdots \\ \text{Άρα: } (RL)^n(C^+) &= (LR)^{12-n}(C^+) = (LR)^{-n}(C^+)\,. \end{aligned}$$

   Γενικεύοντας για κάθε σύμφωνη τριάδα χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2.1 έχουμε:

   $$(RL)^n = (LR)^{12-n} = (LR)^{-n}\,. \tag{3.22}$$

   Τέλος, ο αντίστροφος του στοιχείου $R(LR)^n$ είναι ο εαυτός του : $(R(LR)^n)^{-1} = R(LR)^n$. Πράγματι,

   $$R(LR)^n \circ R(LR)^n \overset{(3.21)}{=} (LR)^{n-n} = (LR)^0 = e\,.$$

Άρα, το σύνολο PLR με διμελή πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων είναι ομάδα. □

Κατά συνέπεια το Παράδειγμα 3.2.1 όντως αποτελεί την τροχιά της C^+ κάτω από τη δράση της PLR σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4.2.

Παρατηρούμε ότι ενώ η ομάδα T/I δρα πάνω σε κλάσεις φθόγγων και κατ' επέκταση σε σύνολα που τις περιέχουν, όπως οι συγχορδίες, η ομάδα PLR δρα εξ' ορισμού αποκλειστικά πάνω σε τριαδικές συγχορδίες. Ενώ στην πρώτη περίπτωση οι σύμφωνες τριάδες είναι σύνθετες οντότητες κατασκευασμένες από συνδυασμούς κλάσεων φθόγγων, στη δεύτερη περίπτωση οι τριάδες θεωρούνται ¨θεμελιώδεις ολότητες¨[11].

3.3 Η δομή της ομάδας PLR

Υπολογίζουμε τους μεταθέτες της ομάδας:

$$\begin{aligned} [(LR)^n, (LR)^m] &= (LR)^n(LR)^m(LR)^{12-n}(LR)^{12-m} \\ &\overset{(3.17)}{=} (LR)^{n+m+12-n+12-m\,(\mathrm{mod}\,12)} \\ &= (LR)^0 = e\,. \end{aligned}$$

[11] Lewin, D. (1987) 175-6.

Άρα τα $(LR)^n$ μετατίθενται μεταξύ τους.

$$\begin{aligned}[R(LR)^n,(LR)^m] &= R(LR)^n(LR)^m R(LR)^n(LR)^{12-m}\\ &\overset{(3.17)}{=} R(LR)^{n+m\,(\mathrm{mod}\,12)}R(LR)^{n+12-m\,(\mathrm{mod}\,12)}\\ &\overset{(3.21)}{=} (LR)^{2(6-m)\,(\mathrm{mod}\,12)}\,.\end{aligned}$$

Άρα τα $R(LR)^n,\ (LR)^m$ μετατίθενται μεταξύ τους μόνο για $m=0,6$.

$$\begin{aligned}[R(LR)^n,R(LR)^m] &= R(LR)^n R(LR)^m R(LR)^n R(LR)^m\\ &\overset{(3.21)}{=} (LR)^{m-n\,(\mathrm{mod}\,12)}(LR)^{m-n\,(\mathrm{mod}\,12)}\\ &\overset{(3.17)}{=} (LR)^{2(m-n)\,(\mathrm{mod}\,12)}\end{aligned}$$

Άρα τα $R(LR)^n,\ R(LR)^m$ μετατίθενται μεταξύ τους μόνο για $m=n,n+6$.

Με βάση τον Ορισμό 2.3.1 και τα παραπάνω αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι η ομάδα PLR είναι μη αβελιανή. Παρατηρώντας τα στοιχεία της PLR (βλ. σύνολο Σ) και με βάση τη σχέση (3.18) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ομάδα $PLR = L/R$ έχει γεννήτορες τα στοιχεία LR και $L = R(LR)^{11}$. Πράγματι, η (3.18) ισοδύναμα γράφεται:

$$R(LR)^n = R(LR)^{m+n\,(\mathrm{mod}\,12)}(LR)^{12-m\,(\mathrm{mod}\,12)}\,. \tag{3.23}$$

Άρα για κάθε $n=0,1,...,11$ παίρνουμε το αντίστοιχο $m=11-n$ και βρίσκουμε την $R(LR)^n$ συναρτήσει των L, LR. Από την πράξη και τον Ορισμό 2.3.2 συμπεραίνουμε ότι η $PLR = L/R$ είναι μη κυκλική ομάδα.
Επίσης παρατηρούμε ότι:

- Το σύνολο των στοιχείων $\{(LR)^n \quad | \; n=1,2,...,12\}$ μαζί με τη διμελή πράξη είναι *υποομάδα* της ομάδας PLR διότι είναι κλειστό ως προς την πράξη και ως προς τα αντίστροφα. Η υποομάδα αυτή είναι κυκλική με γεννήτορα το $(LR)^1$, δηλαδή $\langle (LR)^1\rangle = (LR)^n$, άρα και αβελιανή, με βάση τους Ορισμούς 2.3.1, 2.3.2. (Στο κεφάλαιο 4 δίνουμε δύο ακόμα υποομάδες της PLR, την P/L (4.1) και την P/R (4.2).)

- Το σύνολο των στοιχείων $\{R(LR)^n \quad | \; n=0,1,...,11\}$ μαζί με τη διμελή πράξη δεν σχηματίζουν υποομάδα καθώς λείπει το ταυτοτικό στοιχείο.

Πρόταση 3.3.1 *Η ομάδα PLR είναι ισόμορφη με τη D_{12} : $PLR \simeq D_{12}$.*

Απόδειξη

Με βάση τον Ορισμό 2.3.3 ένας ομομορφισμός, ξ, πάνω στην PLR αρκεί να οριστεί πάνω στους γεννήτορες και θα πρέπει να σέβεται τις σχέσεις (2.5), (2.6), (2.7). Ορίζουμε $\xi\,:\,D_{12}\to PLR$ δίνοντας τις εικόνες των γεννητόρων:

$$\xi\ :\quad C\ \to\ LR\,,\quad \Sigma\ \to\ L = R(LR)^{11} \tag{3.24}$$

και έχουμε :

$$(2.5)\ :\ \xi(C^{12}) = \xi(C)^{12} = (LR)^{12} = e\,,$$

$$(2.6)\ :\ \xi(\Sigma^2) = \xi(\Sigma)^2 = L^2 = e\,,$$

$$(2.7)\ :\ \xi(\Sigma C \Sigma^{-1}) = \xi(\Sigma)\xi(C)\xi(\Sigma^{-1}) = \xi(\Sigma)\xi(C)\xi(\Sigma)^{-1} = L \circ LR \circ L$$
$$= L^2(RL) = RL \overset{(3.22)}{=} (LR)^{-1} = C^{-1}\,.$$

Τέλος, εφόσον όλα τα στοιχεία της ομάδας PLR είναι εικόνες μέσω του ξ και οι ομάδες PLR και D_{12} έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, ο ομομορφισμός ξ είναι ένα-προς-ένα και επί της PLR. Άρα, ο ξ είναι ισομορφισμός. Συνεπώς, η ομάδα PLR είναι ισόμορφη με την D_{12}. $\square$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον πίνακα της ομάδας PLR.

	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R
e	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R
(LR)	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11
(LR)^2	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10
(LR)^3	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9
(LR)^4	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8
(LR)^5	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7
(LR)^6	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6
(LR)^7	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5
(LR)^8	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4
(LR)^9	(LR)^9	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	R(LR)^2	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3
(LR)^10	(LR)^10	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	R(LR)	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2
(LR)^11	(LR)^11	e	(LR)	(LR)^2	(LR)^3	(LR)^4	(LR)^5	(LR)^6	(LR)^7	(LR)^8	(LR)^9	(LR)^10	R	R(LR)^11	R(LR)^10	R(LR)^9	R(LR)^8	R(LR)^7	R(LR)^6	R(LR)^5	R(LR)^4	R(LR)^3	R(LR)^2	R(LR)
R(LR)^11	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)
R(LR)^10	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2
R(LR)^9	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3
R(LR)^8	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4
R(LR)^7	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5
R(LR)^6	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6
R(LR)^5	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7
R(LR)^4	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8
R(LR)^3	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	R(LR)^2	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9
R(LR)^2	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	R(LR)	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11	(LR)^10
R(LR)	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	R	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e	(LR)^11
R	R	R(LR)	R(LR)^2	R(LR)^3	R(LR)^4	R(LR)^5	R(LR)^6	R(LR)^7	R(LR)^8	R(LR)^9	R(LR)^10	R(LR)^11	(LR)^11	(LR)^10	(LR)^9	(LR)^8	(LR)^7	(LR)^6	(LR)^5	(LR)^4	(LR)^3	(LR)^2	(LR)	e

Πίνακας 3.5: Ο πίνακας της ομάδας PLR.

Συγκρίνοντας τον παραπάνω πίνακα με τον πίνακα της D_{12} (Πίνακας 2.6), παρατηρούμε ότι με απλή μετονομασία των στοιχείων οι πίνακες είναι ακριβώς ίδιοι, άρα και από τους πίνακες φαίνεται ο ισομορφισμός μεταξύ των δύο ομάδων.

Τελικά, συμπεραίνουμε λόγω της μεταβατικής ιδιότητας του ισομορφισμού ότι: **Οι ομάδες PLR , T/I και D_{12} είναι ισόμορφες**. Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις τρεις βασικές σχέσεις για τους γεννήτορες κάθε ομάδας σε αντιστοιχία:

T/I	D_{12}	PLR
${T_1}^{12} = T_0 = e$	$C^{12} = e$	$(LR)^{12} = e$
${I_0}^2 = T_0 = e$	$\Sigma^2 = e$	$L^2 = e$
$T_1 * I_0 * T_1 * I_0 = e$	$C * \Sigma * C * \Sigma = e$	$L * (LR) * L * (LR) = e$

Πίνακας 3.6: Οι σχέσεις των γεννητόρων για τις ομάδες T/I, D_{12}, PLR.

3.4 Η δράση της ομάδας PLR πάνω στο σύνολο S των συμφώνων τριάδων - STRANS SYSTEMS

Μέχρι το σημείο αυτό, έχουμε δει πώς μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τη δράση των συναρτήσεων P, L, R πάνω σε οποιαδήποτε σύμφωνη τριάδα του συνόλου S σύμφωνα με τις σχέσεις (3.1), (3.2), (3.3). Όμως, η διαδικασία υπολογισμού της δράσης ενός τυχαίου στοιχείου της PLR πάνω σε μία σύμφωνη τριάδα είναι περίπλοκη, καθώς οι συναρτήσεις είναι συνθέσεις συναρτήσεων και δεν υπάρχει κανόνας γενίκευσης. Για παράδειγμα, πώς μπορεί να υπολογιστεί η δράση $R(LR)^{10}\langle 2, 10, 7\rangle$; Ο υπολογισμός θα μπορούσε να γίνει μόνο έμμεσα, εφαρμόζοντας όλες τις ¨προηγούμενες¨ συναρτήσεις πάνω στην $\langle 2, 10, 7\rangle$ διαδοχικά, όπως κάναμε στο παράδειγμα (3.2.1) για την C^+, βρίσκοντας την τροχιά δηλαδή της $\langle 2, 10, 7\rangle$.

Λόγω της πολυπλοκότητας των υπολογισμών αυτών, και για ευκολότερη χρήση στην μουσική ανάλυση, συνηθίζεται οι μετασχηματισμοί των συμφώνων τριάδων να γίνονται γραφικά. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε δύο γραφήματα που διευκολύνουν την πλοήγηση μεταξύ των συμφώνων συγχορδιών με τη βοήθεια των στοιχείων της ομάδας PLR.

Στο σημείο αυτό, θα επιχειρήσουμε να φτιάξουμε γενικευμένους κανόνες υπολογισμού της δράσης όλων των στοιχείων PLR πάνω σε κάθε τυχαία σύμφωνη τριάδα. Αποκωδικοποιώντας τα δεδομένα του Πίνακα 5.3 (στον οποίο υπολογίσαμε τη δράση των 24 στοιχείων της PLR πάνω στις 24 σύμφωνες τριάδες μέσω της διαδικασίας που περιγράψαμε παραπάνω) φτάνουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Κάθε σύνθετη συνάρτηση $(LR)^n$, για $n = 1, 2, ..., 12$ διατηρεί την ομοτιμία. Κάθε στοιχείο αυτής της μορφής δρώντας πάνω σε μία μείζονα τριάδα (με βάση μ_1) δίνει την μείζονα τριάδα με βάση $\mu_2 = \mu_1 - 7n \pmod{12}$. Αντίστοιχα, δρώντας πάνω σε μία ελάσσονα τριάδα (με βάση ϵ_1) δίνει την ελάσσονα τριάδα με βάση $\epsilon_2 = \mu_1 + 7n \pmod{12}$. Γνωρίζοντας τα διαστήματα μεταξύ των φθόγγων σε μία μείζονα και σε μία ελάσσονα τριάδα αντίστοιχα (παράγραφος 2.4), μπορούμε βρίσκοντας τη βάση της καινούργιας τριάδας να τη χτίσουμε. Έτσι, για τη δράση του στοιχείου $(LR)^n$ πάνω σε μία μείζονα τριάδα με βάση $\mu_1 \,\epsilon\, \mathbb{Z}_{12}$ έχουμε:

$$(LR)^n\langle\mu_1, \mu_1 + 4, \mu_1 + 7\rangle = \langle\mu_2, \mu_2 + 4, \mu_2 + 7\rangle \pmod{12} \,\epsilon\, S\,, \quad (3.25)$$

όπου $\mu_2 = \mu_1 - 7n \pmod{12}$.

Για παράδειγμα, αν $\mu_1 = 5$ και $n = 7$, τότε $\mu_2 = 4$ και έχουμε:

$$(LR)^7\langle 5, 9, 0\rangle = \langle 4, 8, 11\rangle\ .$$

Αντίστοιχα, για την δράση του στοιχείου $(LR)^n$ πάνω σε μία ελάσσονα τριάδα με βάση $\epsilon_1 \,\epsilon\, \mathbb{Z}_{12}$ έχουμε:

$$(LR)^n\langle\epsilon_1 + 7, \epsilon_1 + 3, \epsilon_1\rangle = \langle\epsilon_2 + 7, \epsilon_2 + 3, \epsilon_2\rangle \pmod{12} \,\epsilon\, S\,, \quad (3.26)$$

όπου $\epsilon_2 = \mu_1 + 7n \pmod{12}$.

Για παράδειγμα, αν $\epsilon_1 = 8$ και $n = 6$, τότε $\mu_2 = 2$ και έχουμε:

$$(LR)^6\langle 3, 11, 8\rangle = \langle 9, 5, 2\rangle\ .$$

- Κάθε σύνθετη συνάρτηση $R(LR)^n$, για $n = 0, 1, ..., 11$ δεν διατηρεί την ομοτιμία. Κάθε στοιχείο αυτής της μορφής δρώντας πάνω σε μία μείζονα τριάδα (με βάση μ_1) δίνει την ελάσσονα τριάδα με βάση $\epsilon_2 = \mu_1 - 3 - 7n \pmod{12}$. Αντίστοιχα, δρώντας πάνω σε μία ελάσσσονα τριάδα (με βάση ϵ_1) δίνει τη μείζονα τριάδα με βάση $\mu_2 = \epsilon_1 + 3 + 7n \pmod{12}$. Και πάλι, έχοντας βρει τη βάση της καινούργιας τριάδας, μπορούμε να τη χτίσουμε. Έτσι, για τη δράση του στοιχείου $R(LR)^n$ πάνω σε μία μείζονα τριάδα με βάση $\mu_1 \,\epsilon\, \mathbb{Z}_{12}$ έχουμε:

$$R(LR)^n\langle\mu_1, \mu_1 + 4, \mu_1 + 7\rangle = \langle\epsilon_2 + 7, \epsilon_2 + 3, \epsilon_2\rangle \pmod{12} \,\epsilon\, S\,, \quad (3.27)$$

όπου $\epsilon_2 = \mu_1 - 3 - 7n \pmod{12}$.

Για παράδειγμα, αν $\mu_1 = 4$ και $n = 2$, τότε $\epsilon_2 = 11$ και έχουμε:

$$R(LR)^2\langle 4, 8, 11\rangle = \langle 6, 2, 11\rangle\ .$$

Αντίστοιχα, για τη δράση του στοιχείου $R(LR)^n$ πάνω σε μία ελάσσονα τριάδα με βάση $\epsilon_1 \,\epsilon\, \mathbb{Z}_{12}$ έχουμε:

$$R(LR)^n\langle\epsilon_1 + 7, \epsilon_1 + 3, \epsilon_1\rangle = \langle\mu_2, \mu_2 + 4, \mu_2 + 7\rangle \pmod{12} \,\epsilon\, S\,, \quad (3.28)$$

όπου $\mu_2 = \epsilon_1 + 3 + 7n \pmod{12}$.

Για παράδειγμα, αν $\epsilon_1 = 3$ και $n = 4$, τότε $\mu_2 = 10$ και έχουμε:

$$R(LR)^7\langle 10, 6, 3\rangle = \langle 10, 2, 5\rangle \ .$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η δράση της ομάδας PLR πάνω στο σύνολο S είναι απλά μεταβατική, κατά αντιστοιχία με την T/I.

Πρόταση 3.4.1 *Η δράση της ομάδας PLR πάνω στο σύνολο S των συμφώνων τριάδων είναι απλά μεταβατική.*

Απόδειξη

Από το Παράδειγμα 3.2.1 γνωρίζουμε ότι η τροχιά της C^+ αποτελείται από όλα τα στοιχεία του συνόλου S και άρα $|Orbit(C^+)| = |S| = 24 = |PLR|$. Άρα, εφόσον κάτω από τη δράση της PLR πάνω στο S παίρνουμε μία τροχιά η οποία είναι όλο το S, η δράση της PLR πάνω στο S είναι μεταβατική, βάσει του Ορισμού 2.4.3. Επίσης, από το Θεώρημα Σταθεροποιητή Τροχιάς για $G = PLR$ και $x = C^+$ παίρνουμε : $|G_C| = 1$. Έτσι, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4.4 αποδεικνύεται ότι η δράση της PLR πάνω στο S είναι απλή, ακριβώς όπως στην περίπτωση της T/I. Άρα, με βάση τον Ορισμό 2.4.6 η δράση της PLR πάνω στο S είναι απλά μεταβατική. $\square$

Η απόδειξη αυτή θεμελιώνει θεωρητικά τον τρόπο με τον οποίο κινούμαστε ανάμεσα στις συγχορδίες μέσω των συναρτήσεων της ομάδας PLR: με αφετηρία οποιαδήποτε συγχορδία μπορούμε να μεταβούμε σε οποιαδήποτε άλλη κατά μοναδικό τρόπο.

Σύμφωνα με τον $Lewin$ [$GMIT$], μία ομάδα και ένα σύνολο συνθέτουν ένα *σύστημα "STRANS" (Simply Transitive Group Action on a Set)* εφόσον η δράση της ομάδας πάνω στο σύνολο είναι απλά μεταβατική.

Έως το σημείο αυτό έχουμε αποδείξει πως οι δράσεις των ομάδων T/I και PLR πάνω στο σύνολο S είναι απλά μεταβατικές. Συνεπώς, έχουμε κατασκευάσει δύο συστήματα STRANS με κοινό σύνολο, το σύνολο S των συμφώνων συγχορδιών.

Έτσι, μία ομάδα μαζί με ένα σύνολο οικοδομούν ένα σύστημα, το οποίο δεν είναι απλά ένα μαθηματικό εργαλείο για μουσική ανάλυση, αλλά "ένα αλληλεξαρτώμενο σύνολο από στοιχεία που πλάθουν μία ενοποιημένη ολότητα"[12].

[12] Satyendra, R. (2004).

Κεφάλαιο 4

Οι γεωμετρικές απεικονίσεις της δράσης της ομάδας PLR πάνω στο σύνολο S

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε τις δύο γνωστότερες γεωμετρικές απεικονίσεις της δράσης της ομάδας PLR πάνω στο σύνολο S: τα γραφήματα *Tonnetz* και *Chickenwire* .

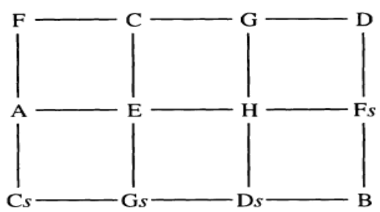
Κατόπιν μίας μικρής ιστορικής αναδρομής θα παρουσιάσουμε το Tonnetz στην πιο σύγχρονη μορφή του ως *neo-Riemannian Tonnetz* (βλ. Εικόνα 4.3) και θα εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά του. Στο γράφημα αυτό κάθε κορυφή απεικονίζει μία κλάση φθόγγων και κάθε τρίγωνο απεικονίζει μία σύμφωνη τριάδα. Δυο τριάδες που μοιράζονται δύο νότες, στο γράφημα είναι δύο γειτονικά τρίγωνα με κοινή πλευρά. Οι δράσεις των στοιχείων της PLR εμφανίζονται ως στροφές ενός τριγώνου ως προς την κοινή πλευρά μέχρι προβολής πάνω στο αντίστοιχο γειτονικό τρίγωνο. Το δισδιάστατο γράφημα μετατρέπεται σε τόρο λόγω διπλής περιοδικότητας (βλ. Εικόνα 4.4).

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε το γράφημα Chickenwire (βλ. Εικόνα 4.5) το οποίο επίσης μετατρέπεται σε τόρο (βλ. Εικόνα 4.6). Στο γράφημα αυτό, οι κορυφές απεικονίζουν σύμφωνες τριάδες και οργανώνονται σε εξαγωνικές κυψέλες όταν μοιράζονται και οι έξι μία κλάση φθόγγων, ενώ οι συναρτήσεις P, L, R απεικονίζονται από τα τρία διαφορετικά είδη (παράλληλων) πλευρών.

Έχοντας δει τα βασικά χαρακτηριστικά τους, θα αποδείξουμε ότι το Tonnetz και το Chickenwire είναι δυϊκά γραφήματα. Τέλος, θα εξετάσουμε αναλυτικά τέσσερα χαρακτηριστικά είδη κύκλων (από τριάδες) που εξάγονται από αυτά και θα τα ζωντανέψουμε μέσα από τέσσερα μουσικά παραδείγματα από το κλασικό ρεπερτόριο.

4.1 Το γράφημα Tonnetz

Ο δισδιάστατος πίνακας, γνωστός ως *Tonnetz* (δίκτυο τόνων στα Γερμανικά) ή *Table of tonal relations* (πίνακας των τονικών σχέσεων), αποτελεί την πιο γνωστή γεωμετρική απεικόνιση της ομάδας PLR, η οποία επιτρέπει την εύκολη πλοήγηση ανάμεσα στις σύμφωνες τριάδες. Παρόλο που σήμερα, κάτω από τις μετατροπές που έχει υποστεί, υποστηρίζει τις αλγεβρικές ιδιότητες των συμφώνων τριάδων, το Tonnetz επινοήθηκε αρχικά για να λειτουργήσει σαν ένα ποσοτικό μέτρο της ¨συμφωνίας¨ μεταξύ δύο νοτών. Πρώτος ο μαθηματικός Leonard Euler (1707-1783) προσπάθησε να δημιουργήσει μία γραφική αναπαράσταση των νοτών, στην οποία οι αποστάσεις μεταξύ τους είναι αντιπροσωπευτικές της συμφωνίας τους: οι γειτονικές νότες είναι περισσότερο σύμφωνες ενώ όσο πιο απομακρυσμένες είναι, τα διαστήματα τείνουν να γίνουν διάφωνα.



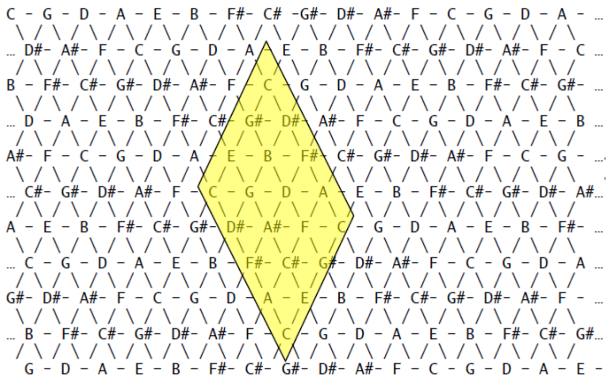
Εικόνα 4.1: Το Tonnetz του Euler.

Τοποθέτησε, λοιπόν τις 12 νότες σε έναν πίνακα 4×3, όπου ο οριζόντιος άξονας είναι άξονας των πέμπτων (δηλαδή οι νότες που βρίσκονται δίπλα η μία στην άλλη απέχουν 7 ημιτόνια) και ο κάθετος είναι ο άξονας των τρίτων μεγάλων (δηλαδή οι νότες που βρίσκονται η μία κάτω από την άλλη απέχουν 4 ημιτόνια). Σημειώνουμε ότι στην Εικόνα η νότα H συμβολίζει την B και η B την $B\flat$.

Στην συνέχεια, ο Γερμανός φυσικός και θεωρητικός της μουσικής Arthur von Oettingen (1836-1920) με την εισαγωγή μίας υποτείνουσας, η οποία αποτελούσε τον άξονα των τρίτων μικρών (δηλαδή οι νότες που βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη απέχουν 3 ημιτόνια), έφτιαξε μία πρώτη απεικόνιση των συμφώνων τριάδων. Η κίνηση αυτή έφερε στο προσκήνιο τις σχέσεις των τριάδων με τις συναρτήσεις P, L, R του Hugo Riemann.

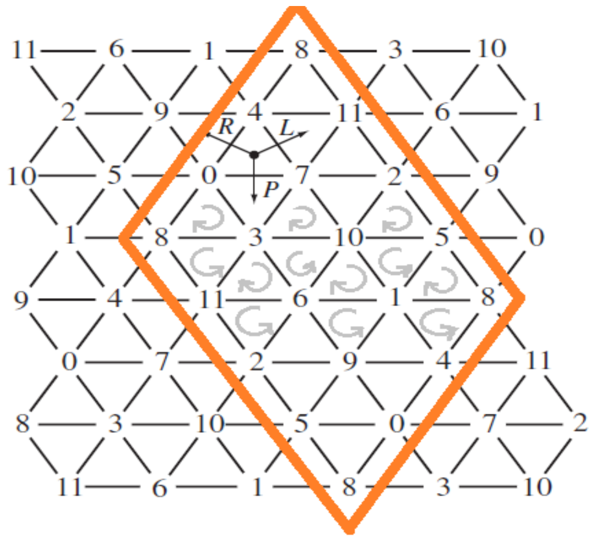
Όπως βλέπουμε στην Εικόνα 4.2[1]το γράφημα εκτείνεται επ' άπειρον, θεωρώντας τους μουσικούς φθόγγους σε όλο τους το εύρος και έτσι αυτή η πρώιμη ακόμα έκδοση του Tonnetz μπορεί να θεωρηθεί σαν μία δομή κατασκευασμένη από επαναλήψεις μίας θεμελιώδους κυψέλης (το παραλληλόγραμμο μέσα στο πλέγμα) με τις ίδιες νοτες στις τέσσερις γωνίες της, η οποία κυψέλη περιέχει και τις δώδεκα νότες .

[1]Behringer, R. et al. (2009).



Εικόνα 4.2: Το Tonnetz του Riemann.

Μετά την επεξεργασία του παραπάνω γραφήματος από τους μουσικολόγους του 20ου αιώνα Hyer, Lewin, Cohn παίρνουμε την πιο σύγχρονη μορφή του Tonnetz , το *neo-Riemannian Tonnetz* (βλ. Εικόνα 4.3).



Εικόνα 4.3: Το δισδιάστατο neo-Riemannian Tonnetz.

Πίσω από το γράφημα αυτό κρύβεται η απαίτηση της αντιστοίχισης των νοτών με το $\mathbb{Z}_{12}$, όπου ίδιες νότες διαφορετικών οκτάβων αντιστοιχίζονται στην ίδια κλάση υπολοίπων. Με βάση αυτή την απαίτηση, θα εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά του γραφήματος:

- Αντί για λατινικούς χαρακτήρες έχουμε ακεραίους αριθμούς.
- Το γράφημα παύει να εκτείνεται στο άπειρο. Πράγματι, στην Εικόνα 4.3 φαίνεται ένα *θεμελιώδες* παραλληλόγραμμο, το οποίο περιέχει όλους τους φθόγγους-ακεραίους από μια φορά και το άπειρο γράφημα

προκύπτει από τις παράλληλες μετατοπίσεις κατά μήκος των πλευρών του. Συμπεραίνουμε ότι το Tonnetz είναι διπλά περιοδικό.[2] Συνεπώς, αν ενώσουμε την πάνω με την κάτω πλευρά και την δεξιά με την αριστερή πλευρά σε μία θεμελιώδη δομή, μπορούμε να φτιάξουμε έναν τόρο. Στην Εικόνα 4.7 μπορούμε να δούμε έναν τόρο neo-Riemannian Tonnetz (στον οποίο αντί για ακεραίους έχουν χρησιμοποιηθεί λατινικοί χαρακτήρες για να συμβολίζουν τις κλάσεις φθόγγων).

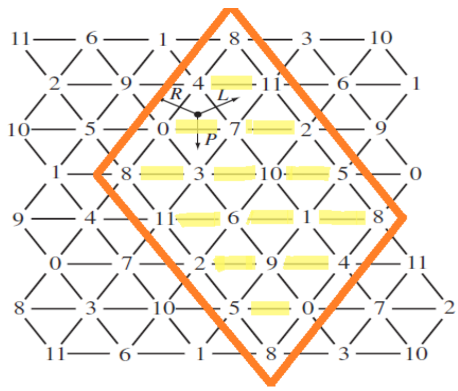
- Κάθε σημείο του πλέγματος απεικονίζει πλέον όχι έναν φθόγγο αλλά μία κλάση φθόγγων.

- Κάθε τρίγωνο απεικονίζει μία σύμφωνη τριάδα. Παρατηρούμε ότι οι μείζονες και οι ελάσσονες συγχορδίες αναπαρίστανται με τρίγωνα αντίθετου προσανατολισμού (τα μεν κοιτούν προς τα πάνω, τα δε προς τα κάτω)[3]

- Τρίγωνα τα οποία αντιστοιχούν σε ομώνυμες συγχορδίες διαφορετικής ομοτιμίας (για παράδειγμα C^+ και C^-) έχουν κοινή μια *οριζόντια* πλευρά. Ο τρόπος που είναι τοποθετημένα στο γράφημα παραπέμπει στην θεωρία περί δυϊσμού του Riemann.

- Ο οριζόντιος άξονας των πέμπτων μετατρέπεται στον κύκλο των πέμπτων (Παράδειγμα 2.1.1). Η μετάθεση του συνόλου $\mathbb{Z}_{12}$ κάτω από τη δράση της T_7 μπορεί να γραφτεί σαν ένας κύκλος (βλ. Εικόνα 4.4):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (0,7,2,9,4,11,6,1,8,3,10,5)\ . \tag{4.1}$$



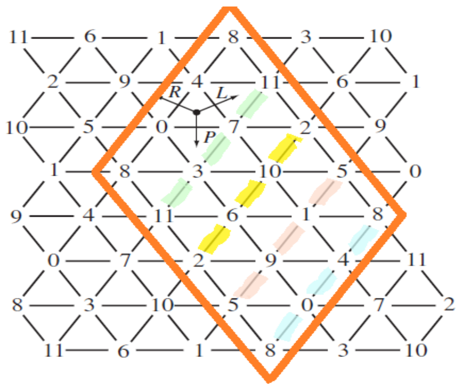
Εικόνα 4.4: Ο κύκλος των πέμπτων πάνω στο Tonnetz.

- Οι διαγώνιοι άξονες των τρίτων μεγάλων και τρίτων μικρών μετατρέπονται στους κύκλους των τρίτων μεγάλων και μικρών. Όπως βρήκαμε τον κύκλο των πέμπτων αντίστοιχα βρίσκουμε και αυτούς τους κύκλους.

[2] Crans, A. et al (2009).
[3] Gollin, E. (1998).

Βρίσκουμε πρώτα τους κύκλους των τρίτων μεγάλων με τη βοήθεια της συνάρτησης T_4. Η μετάθεση του συνόλου $\mathbb{Z}_{12}$ κάτω από τη δράση της T_4 μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο τεσσάρων ξένων κύκλων (βλ. Εικόνα 4.5):

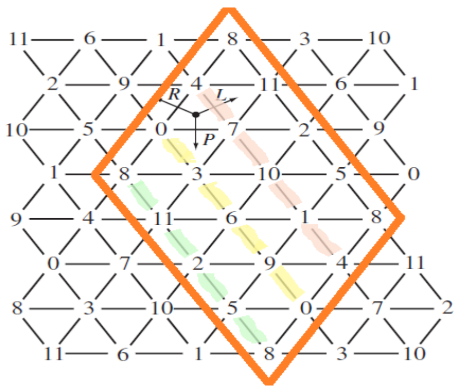
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (0,4,8)(1,5,9)(2,6,10)(3,7,11) \ . \tag{4.2}$$



Εικόνα 4.5: Οι κύκλοι των τρίτων μεγάλων πάνω στο Tonnetz.

Βρίσκουμε τους κύκλους των τρίτων μικρών με τη βοήθεια της συνάρτησης T_3. Η μετάθεση του συνόλου $\mathbb{Z}_{12}$ κάτω από τη δράση της T_3 μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο τριών ξένων κύκλων (βλ. Εικόνα 4.6):

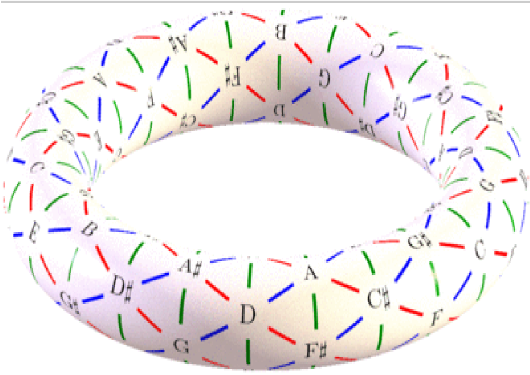
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (0,3,6,9)(1,4,7,10)(2,5,8,11) \ . \tag{4.3}$$



Εικόνα 4.6: Οι κύκλοι των τρίτων μικρών πάνω στο Tonnetz.

- Η πλοήγηση από συγχορδία σε συγχορδία μπορεί να γίνει εύκολα μέσω των συναρτήσεων P, L, R. Κάθε μία από τις τρεις συναρτήσεις αναστρέφει ένα τρίγωνο ως προς μία πλευρά του - την πλευρά αυτή που ενώνει τις 2 νότες που διατηρούνται - και το προβάλλει πάνω σε ένα γειτονικό τρίγωνο με το οποίο μοιράζεται αυτήν την πλευρά.[4] Πιο συγκεκριμένα:

  1. Η P αναστρέφει ένα τρίγωνο ως προς τον οριζόντιο άξονα των πέμπτων και περνούμε στη ομώνυμη μείζονα/ελάσσονα. Για παράδειγμα, $C^+ = \langle 0,4,7\rangle \rightarrow \langle 0,3,7\rangle = C^-$.
  2. Η L αναστρέφει ένα τρίγωνο ως προς τον άξονα των τρίτων μικρών και αν ξεκινούμε από μείζονα περνούμε στην ελάσσονα μίας τρίτης μικρής πάνω ή αν ξεκινούμε από ελάσσονα περνούμε στην μείζονα μίας τρίτης μικρής κάτω. Για παράδειγμα, $\langle 0,4,7\rangle \rightarrow \langle 11,7,4\rangle = E^-$.
  3. Η R αναστρέφει ένα τρίγωνο ως προς τον άξονα των τρίτων μεγάλων και περνούμε στη σχετική μείζονα / ελάσσονα. Για παράδειγμα, $\langle 0,4,7\rangle \rightarrow \langle 4,0,9\rangle = A^-$.



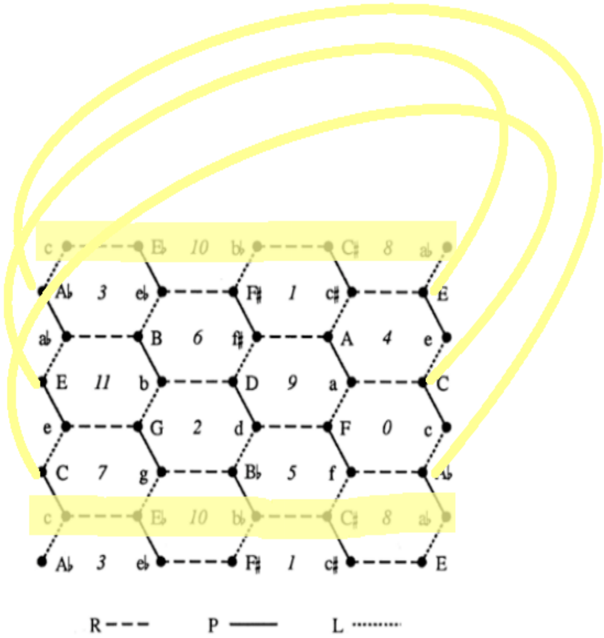
Εικόνα 4.7: Ο τόρος neo-Riemannian.

4.2 Το γράφημα Chickenwire

Το 1998 οι Douthett&Steinbach επινόησαν ένα ακόμη γράφημα το οποίο απεικονίζει τη δράση της ομάδας PLR πάνω στο σύνολο S των συμφώνων τριάδων.[5] Το γράφημα αυτό ονομάζεται Chickenwire λόγω των εξαγωνικών κυψέλων που εμφανίζονται.

[4] Cohn, R. (1998).

[5] Νωρίτερα ο Waller είχε μελετήσει αυτό το γράφημα αλλά δεν το είχε εισάγει στην neo-Riemannian θεωρία.



Εικόνα 4.8: Το δισδιάστατο Chickenwire.

Στο γράφημα Chickenwire οι κορυφές απεικονίζουν σύμφωνες τριάδες και όχι κλάσεις φθόγγων, ενώ δύο κορυφές συνδέονται με μία πλευρά, όταν οι δύο τριάδες που αντιπροσωπεύουν έχουν δύο κλάσεις φθόγγων κοινές.

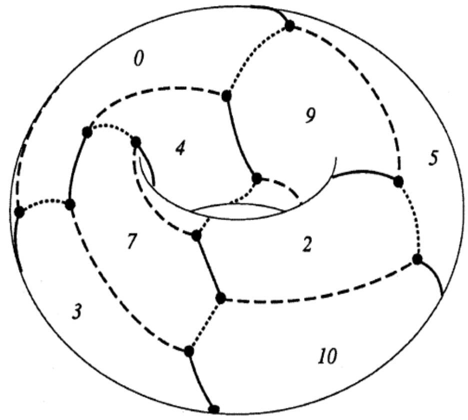
Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά του γραφήματος:

- Παρατηρούμε ότι μία κορυφή συνδέεται με τρείς άλλες κορυφές εφόσον μία τριάδα μοιράζεται δύο κλάσεις φθόγγων ακριβώς με άλλες τρείς τριάδες. Αυτό οδηγεί σε ένα εξαγωνικό πλέγμα (chickenwire).

- Κάθε εξαγωνική κυψέλη χαρακτηρίζεται από έναν ακέραιο, ο οποίος συμβολίζει την κλάση φθόγγων που έχουν κοινή, οι τριάδες που την απαρτίζουν.

- Οι πλευρές αντιστοιχούν σε μετασχηματισμούς της ομάδας PLR : Στην Εικόνα 4.8 οι συνεχείς πλευρές αντιστοιχούν στην συνάρτηση P, οι πλευρές με διακκεκομμένες αντιστοιχούν στην συνάρτηση R και οι πλευρές με κουκκίδες αντιστοιχούν στην συνάρτηση L [6]. Έτσι, ξεκινώντας από κάθε συγχορδία-κορυφή, μπορώ να περάσω με μία κίνηση μέσω των τριών συναρτήσεων σε άλλες τρεις συγχορδίες-κορυφές.

[6] Τα γραφήματα είναι δανεισμένα από Douthett, Steinbach, 1998.



Εικόνα 4.9: Ο τόρος Chickenwire.

- Αν απαιτήσουμε και πάλι εναρμόνια ισοδυναμία και equal tempered tuning το δισδιάστατο γράφημα γίνεται διπλά περιοδικό και μπορεί να μετατραπεί σε έναν τόρο. Όπως περιγράφουν οι ίδιοι οι εμπνευστές του, αν ενώσουμε τις πάνω με τις κάτω κορυφές κατασκευάζουμε έναν κύλινδρο. Στη συνέχεια φέρνουμε κοντά τις δεξιές και αριστερές άκρες του κυλίνδρου για να φτιάξουμε τον τόρο, αλλά πριν τις ενώσουμε περιστρέφουμε τη μία άκρη κατά ένα τρίτο μίας ολόκληρης περιστροφής, έτσι ώστε να συμπίπτουν οι ίδιες κορυφές[7] (βλ. Εικόνα 4.9).

- Παρατηρούμε ότι ξεκινώντας από κάθε τριάδα (είτε μείζονα είτε ελάσσονα) μπορούμε να περάσουμε σε οποιαδήποτε άλλη τριάδα με πέντε κινήσεις το πολύ. Δηλαδή με πέντε κινήσεις μπορούμε να καλύψουμε όλη την επιφάνεια του τόρου. Μάλιστα, οι 22 τριάδες προσεγγίζονται μέσα σε τέσσερις κινήσεις και στην πέμπτη κίνηση εμφανίζεται για πρώτη φορά η εναπομένουσα τριάδα. Πράγματι,

Πρόταση 4.2.1 *Για κάθε σύμφωνη τριάδα υπάρχει μία και μόνο μία άλλη σύμφωνη τριάδα που η ελάχιστη απόσταση της από την αρχική είναι πέντε κινήσεις (πλευρές).*

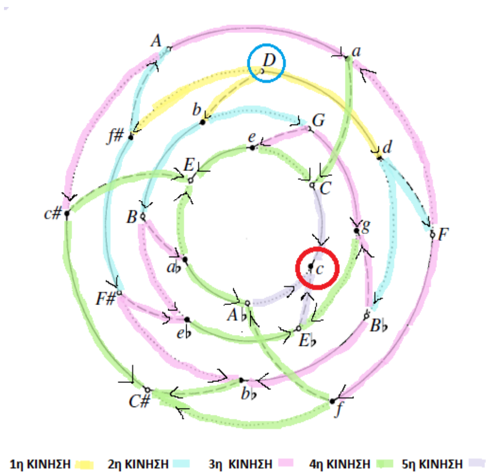
Απόδειξη
Ξεκινάμε από μία μείζονα τριάδα, έστω την D.

1. Πρώτη κίνηση: Όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.10, ενώνουμε την κορυφή της D με τις γειτονικές κορυφές της με κατεύθυνση από την κορυφή D προς τις γειτονικές της (διαδρομές με κίτρινο χρώμα). Έτσι προσεγγίζουμε τις τριάδες $f\sharp$, d, b.

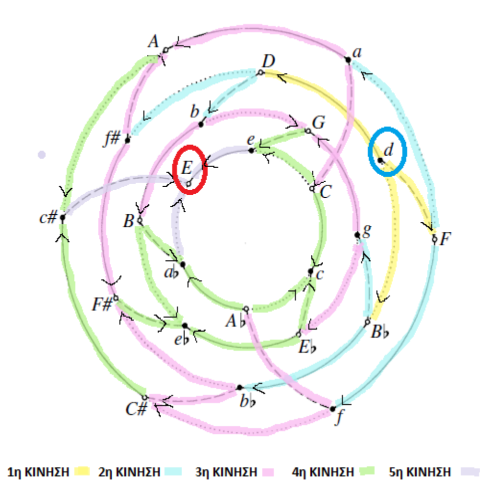
[7] Douthett, J. et al. (1998).

2. Δεύτερη κίνηση: Ενώνουμε τις κορυφές των $f\sharp$, d, b με τις γειτονικές τους κορυφές με κατεύθυνση προς αυτές (διαδρομές με γαλάζιο χρώμα), εξαιρώντας μονοπάτια που έχουν ήδη χρωματιστεί. Έτσι, προσεγγίζουμε τις τριάδες $F\sharp$, A, F, $B\flat$, G, B.
3. Τρίτη κίνηση: Ενώνουμε τις κορυφές των $F\sharp$, A, F, $B\flat$, G, B με τις γειτονικές τους με κατεύθυνση προς αυτές (διαδρομές με ροζ χρώμα), εξαιρώντας μονοπάτια που έχουν ήδη χρωματιστεί. Έτσι, προσεγγίζουμε τις τριάδες a, $c\sharp$, f, e, g, $a\flat$, $e\flat$, $b\flat$.
4. Τέταρτη κίνηση: Ενώνουμε τις κορυφές των τριάδων a, $c\sharp$, f, e, g, $a\flat$, $e\flat$, $b\flat$ με τις γειτονικές τους με κατεύθυνση προς αυτές (πράσινο χρώμα), εξαιρώντας μονοπάτια που έχουν ήδη χρωματιστεί. Έτσι, προσεγγίζουμε τις τριάδες $C\sharp$, E, C, $A\flat$, $E\flat$. Ως εδώ έχουν εμφανιστεί 23 τριάδες (μαζί με την αρχική).
5. Πέμπτη κίνηση : Αν συνεχίσουμε να ενώνουμε τις τριάδες στις οποίες φτάσαμε με την τέταρτη κίνηση, με τις γειτονικές τους κατά τον ίδιο τρόπο (γκρι χρώμα), η μόνη τριάδα που εμφανίζεται για πρώτη φορά είναι η c.

Αν ξεκινούσαμε από μία ελάσσονα και επαναλαμβάναμε την παραπάνω διαδικασία θα φτάναμε και πάλι στο ίδιο συμπέρασμα. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.11, ξεκινώντας από την d σε ακτίνα τεσσάρων κινήσεων έχουμε προσεγγίσει όλες τις τριάδες, εκτός της E. $\square$



Εικόνα 4.10: Οι 5 κινήσεις με αφετηρία την D πάνω σε μία κάτοψη του τόρου.



Εικόνα 4.11: Οι 5 κινήσεις με αφετηρία την d πάνω σε μία κάτοψη του τόρου.

4.3 Τα Tonnetz και Chickenwire ως δυϊκά γραφήματα

Έχοντας ολοκληρώσει τις περιγραφές των δύο γραφημάτων θέλουμε να δείξουμε ότι το Tonnetz και το γράφημα Chickenwire είναι δυϊκά γραφήματα (dual graphs).

Ορισμός 4.3.1 *(Δυϊκό γράφημα)*
Δυϊκό γράφημα ενός γραφήματος G είναι ένα γράφημα G', το οποίο έχει μία κορυφή για κάθε χωρίο του G και μία πλευρά που ενώνει δύο γειτονικά χωρία για κάθε πλευρά του G.

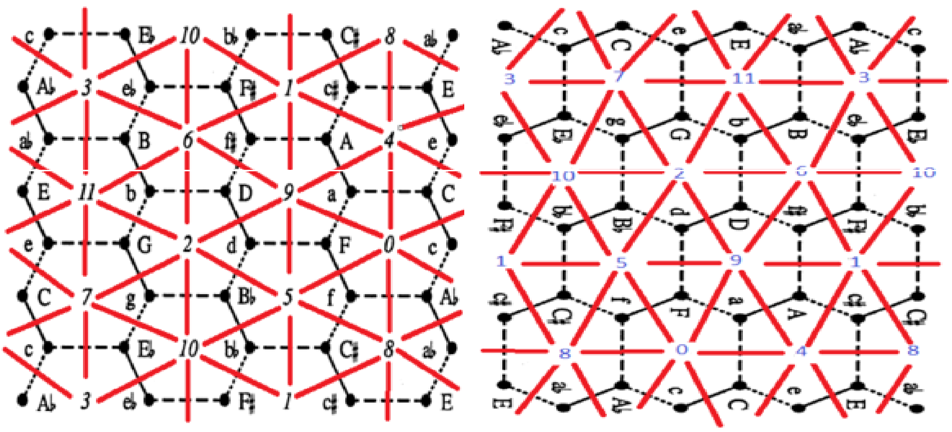
Πρόταση 4.3.1 *Τα γραφήματα Tonnetz και Chickenwire είναι δυϊκά γραφήματα.*

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι στο Tonnetz υπάρχει μία κορυφή που αντιστοιχεί σε κάθε χωρίο (εξαγωνική κυψέλη) στο γράφημα Chickenwire και μία πλευρά που ενώνει δύο χωρία (δηλαδή ένα προσανατολισμένο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο τριγώνων), η οποία αντιστοιχεί σε κάθε πλευρά στο γράφημα Chickenwire. Κατά συνέπεια, το Tonnetz είναι δυϊκό γράφημα του Chickenwire .

Αντιστρόφως, στο γράφημα Chickenwire υπάρχει μία κορυφή που αντιστοιχεί σε κάθε χωρίο (τρίγωνο) στο Tonnetz και μία πλευρά που ενώνει δύο χωρία (δηλαδή ένα νοητό τμήμα που ενώνει τις κορυφές δύο γειτονικών κυψελών), η οποία αντιστοιχεί σε κάθε ακμή στο Tonnetz. Κατά συνέπεια, το γράφημα Chickenwire είναι δυϊκό γράφημα του Tonnetz . □

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα διαγράμματα φέρουν ισοδύναμες πληροφορίες. Ειδικότερα, η Πρόταση 4.2.1 ισχύει και για το Tonnetz, όπου μία σύμφωνη τριάδα αναπαρίσταται από ένα τρίγωνο.



Εικόνα 4.12: Η μετατροπή του γραφήματος Chickenwire στο Tonnetz .

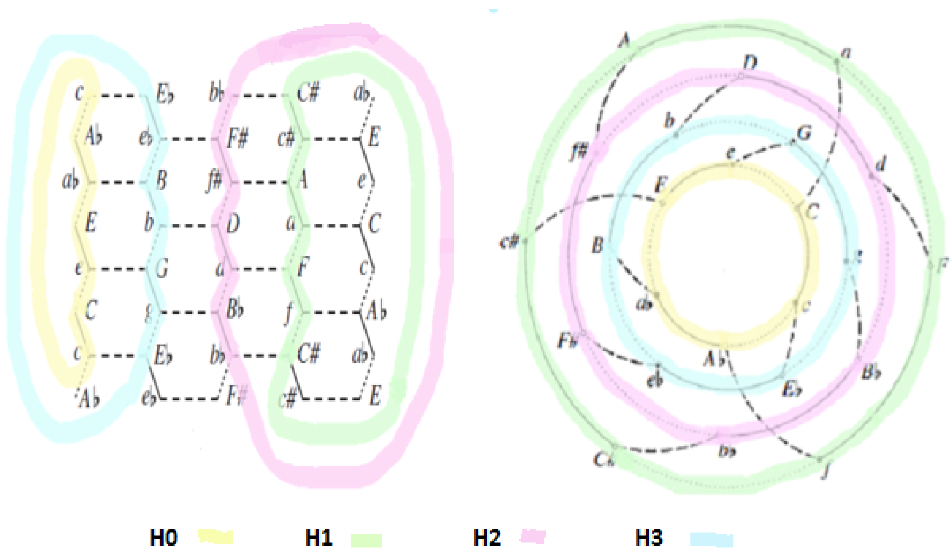
4.4 Τεσσάρων ειδών χαρακτηριστικοί μουσικοί κύκλοι

Από τα δύο γραφήματα που μελετήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους παίρνουμε τεσσάρων ειδών χαρακτηριστικούς κύκλους τριάδων, τους οποίους θα εξετάσουμε αναλυτικά στις υποπαραγράφους που ακολουθούν. Αυτοί είναι:

1. Οι 4 εξατονικοί κύκλοι,
2. Οι 3 οκτατονικοί κύκλοι,
3. Ο χαμιλτονιανός κύκλος,
4. Οι 12 εξαγωνικές κυψέλες.

4.4.1 Οι εξατονικοί κύκλοι

Εξετάζοντας το βασικό χωρίο του δισδιάστατου γραφήματος Chickenwire (Εικόνα 4.8), παρατηρούμε ότι ταυτίζοντας τις δύο οριζόντιες πλευρές προκύπτουν τέσσερις διαφορετικοί κύκλοι, (H_0), (H_1), (H_2), (H_3) που τα στοιχεία τους ενώνονται με πλευρές που είναι εναλλάξ συνεχείς και με κουκκίδες. Αυτοί είναι κύκλοι συμφώνων τριάδων που γεννιούνται με τη βοήθεια των συναρτήσεων P, L και έχουν μήκος 6. Οι κύκλοι αυτοί ονομάζονται *εξατονικοί* ή *εξάκυκλοι*. Σημειώνουμε ότι οι πλευρές με τις διακεκομμένες στο γράφημα Chickenwire ονομάζονται *εξατονικές γέφυρες*, εφόσον ενώνουν τριάδες που ανήκουν σε διαφορετικούς εξατονικούς κύκλους. Στην Εικόνα 4.13 απεικονίζονται οι εξατονικοί κύκλοι στο διασδιάστατο γράφημα και πάνω σε μία κάτοψη του τόρου Chickenwire.



Εικόνα 4.13: Οι εξατονικοί κύκλοι.

Θα βρούμε τους τέσσερις αυτούς κύκλους με τη βοήθεια των συναρτήσεων $P,\ L$. Για να βρούμε τον κύκλο (H_0) εφαρμόζουμε τις P, L εναλλάξ ξεκινώντας από την συγχορδία C^+:

$$\langle 0,4,7\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 7,3,0\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 8,0,3\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 3,11,8\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 4,8,11\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 11,7,4\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 0,4,7\rangle\ ,\ \text{οπότε κλείνει ο κύκλος } (H_0).$$

Για να βρούμε τον κύκλο (H_1) εφαρμόζουμε τις P, L εναλλάξ ξεκινώντας από την συγχορδία $C\sharp^+$:

$$\langle 1,5,8\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 8,4,1\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 9,1,4\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 4,0,9\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 5,9,0\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 0,8,5\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 1,5,8\rangle\ ,\ \text{οπότε κλείνει ο κύκλος } (H_1).$$

Για να βρούμε τον κύκλο (H_2) εφαρμόζουμε τις P, L εναλλάξ ξεκινώντας από την συγχορδία D^+:

$$\langle 2,6,9\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 9,5,2\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 10,2,5\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 5,1,10\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 6,10,1\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 1,9,6\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 2,6,9\rangle\ ,\ \text{οπότε κλείνει ο κύκλος } (H_2).$$

Για να βρούμε τον κύκλο (H_3) εφαρμόζουμε τις P, L εναλλάξ ξεκινώντας από την συγχορδία $E\flat^+$:

$$\langle 3,7,10\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 10,6,3\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 11,3,6\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 6,2,11\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 7,11,2\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 2,10,7\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 3,7,10\rangle\ ,\ \text{οπότε κλείνει ο κύκλος } (H_3).$$

Η διαδικασία εύρεσης του κάθε κύκλου ισοδυναμεί με εφαρμογή του συνόλου συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} L/P &= \{P\,,\,LP\,,\,PLP\,,\,LPLP\,,\,PLPLP\,,\,LPLPLP\} \\ &= \{(LP)^n \,|\, n = 1,2,3\} \cup \{P(LP)^n \,|\, n = 1,2,3\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

σε κάθε αρχική συγχορδία. Για το σύνολο L/P έχουμε το εξής.

Πρόταση 4.4.1 *(Ομάδα L/P)*

1. *Το σύνολο $L/P \subseteq PLR$, με $|LP| = 6$, περιέχει όλες τις πιθανές συνθέσεις των L, P.*

2. *Το σύνολο L/P εφοδιασμένο με πράξη την σύνθεση συναρτήσεων είναι υποομάδα της PLR.*

Απόδειξη

1. Από τη διαδικασία εύρεσης του πρώτου κύκλου παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} (LP)^3(C^+) &= C^+ \\ P(LP)^2(C^+) &= L(C^+) \end{aligned}$$

Με βάση το Λήμμα 3.2.1 μπορώ να γενικεύσω τις δράσεις αυτών των συναρτήσεων για κάθε συγχορδία και άρα:

$$(LP)^3 = e = P^2 = L^2 \tag{4.5}$$
$$P(LP)^2 = L \tag{4.6}$$

Άρα, δρώντας περαιτέρω πάνω σε οποιαδήποτε συγχορδία θα παίρνουμε όμοια αποτελέσματα. Συνεπώς, οποιαδήποτε άλλη σύνθετη συνάρτηση των L, P θα είναι ισοδύναμη με κάποια από τις παραπάνω. Άρα $|LP| = 6$.

2. Από το 1. το σύνολο L/P είναι κλειστό ως προς την πράξη (σύνθεση). Από την Πρόταση 3.2.1 έχουμε: $P = R(LR)^3$, $L = R(LR)^{11}$. Μπορούμε λοιπόν, να γράψουμε το σύνολο L/P συναρτήσει των στοιχείων της $PLR = L/R$:

$$L/P = \{P = R(LR)^3\,,\,LP = (LR)^4\,,\,P(LP) = R(LR)^7\,,\,(LP)^2 = (LR)^8\,,\,P(LP)^2 = R(LR)^{11}\,,\,(LP)^3 = (LR)^{12} = e\}\,.$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο L/P περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο και για κάθε στοιχείο περιέχει το αντίστροφό του. Άρα, η L/P είναι υποομάδα της PLR. $\square$

Άρα, αποδείξαμε ότι:

Πρόταση 4.4.2 *Οι τέσσερις εξατονικοί κύκλοι* (H_0), (H_1), (H_2), (H_3) *αποτελούν τις τροχιές που δημιουργούνται κάτω από τη δράση της υποομάδας* L/P *πάνω στο σύνολο* S.

Με τους τέσσερις εξατονικούς κύκλους καλύψαμε όλο το σύνολο S των συμφώνων συγχορδιών χωρίς επανεμφανίσεις των τριάδων, αφού ως τροχιές δεν περιέχουν κοινές τριάδες ($H_0 \cap H_1 = \emptyset$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, ...).

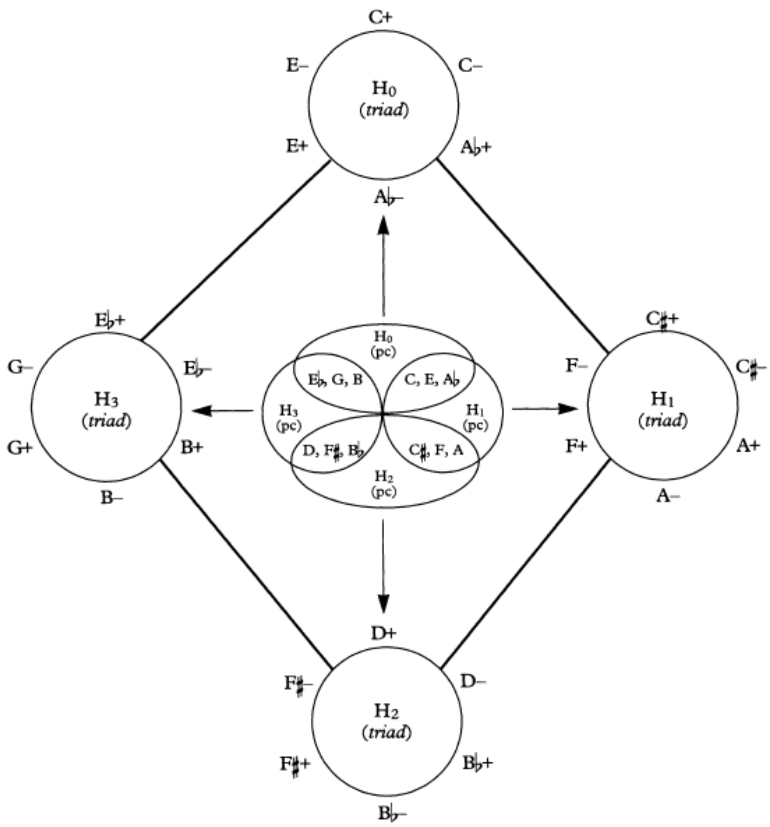
$$
\begin{aligned}
S &= H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \\
&\quad (C^+, C^-, A\flat^+, A\flat^-, E^+, E^-) \cup (C\sharp^+, C\sharp^-, A^+, A^-, F^+, F^-\sharp) \cup \\
&\quad (D^+, D^-, B\flat^+, B^-\flat, F\sharp^+, F\sharp^-) \cup (E\flat^+, E\flat^-, B^+, B^-, G^+, G^-, E\flat^+)
\end{aligned}
$$

Το σύνολο των κλάσεων φθόγγων από τις οποίες αποτελούνται οι τριάδες μέσα σε έναν εξατονικό κύκλο ονομάζεται *εξατονικό σύστημα*. Έτσι, σε κάθε εξατονικό κύκλο αντιστοιχεί ένα εξατονικό σύστημα. Τα εξατονικά συστήματα είναι:

$$
\begin{aligned}
H_0(pc) &= \{0, 3, 4, 7, 8, 11\} \\
H_1(pc) &= \{1, 4, 5, 8, 9, 0\} \\
H_2(pc) &= \{2, 5, 6, 9, 10, 1\} \\
H_3(pc) &= \{3, 6, 7, 10, 11, 2\}
\end{aligned}
$$

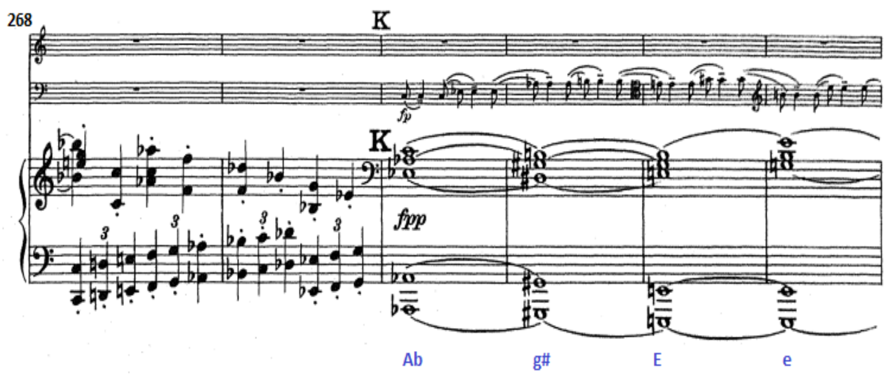
Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 4.14, δύο γειτονικοί κύκλοι μοιράζονται από τρεις κλάσεις φθόγγων (pitch classes) , ενώ δύο απέναντι κύκλοι δεν έχουν κοινές κλάσεις φθόγγων και οι κλάσεις που περιέχουν είναι συμπληρωματικές.[8] Σημειώνουμε ότι κάθε κύκλος έχει δύο γειτονικούς και έναν απέναντι. Οι εξατονικοί κύκλοι και τα εξατονικά τους συστήματα φαίνονται στο παρακάτω γράφημα (Εικόνα 4.14), το οποίο ονομάζεται *υπερεξατονικό σύστημα* κατά τον Cohn.

[8]Cohn, R. (1996).

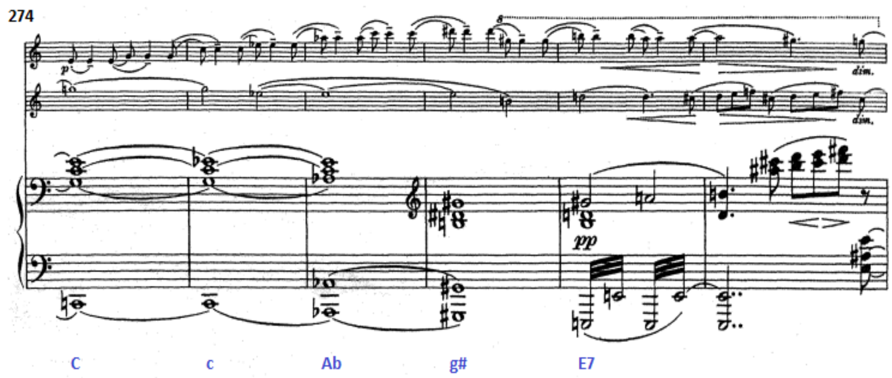


Εικόνα 4.14: Το υπερεξατονικό σύστημα.

Παράδειγμα 4.4.1 *(Ο κύκλος (H_0) στον Brahms)*
Ένα μουσικό παράδειγμα χρήσης του κύκλου (H_0), ξεκινώντας από την συγχορδία Ab, παρατηρούμε στα μέτρα 270-278 του πρώτου μέρους από το Κονσέρτο για βιολί και τσέλο op.102 του Brahms [9], Εικόνα 4.15.



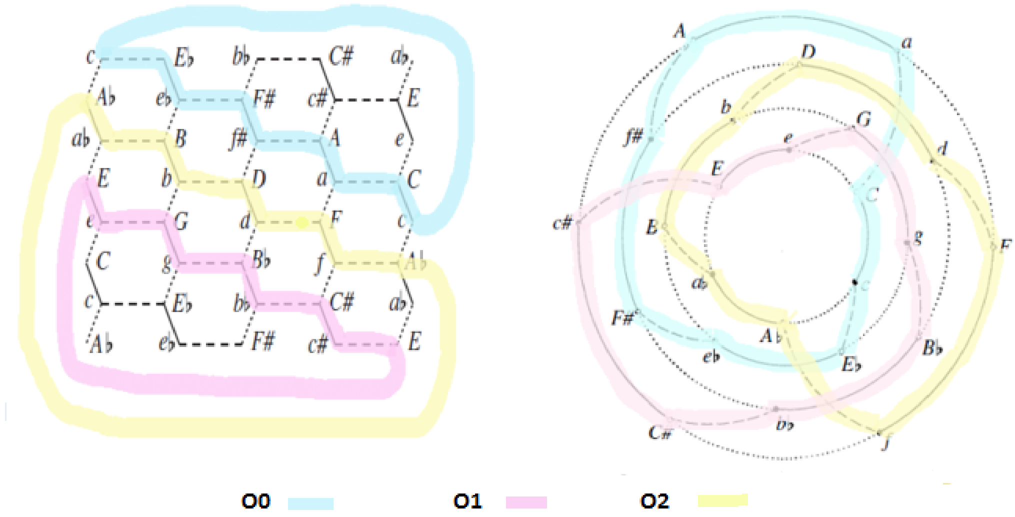
[9]Η τελευταία συγχορδία είναι μεθ' εβδόμης και την χρησιμοποιούμε καταχρηστικά εφόσον εμείς αναφερόμαστε μόνο σε τριάδες.



Εικόνα 4.15: Οι ακολουθία των τριάδων στα μέτρα 270-8 του Κονσέρτου για βιολί και πιάνο του Brahms.

4.4.2 Οι οκτατονικοί κύκλοι

Εξετάζοντας και πάλι το βασικό χωρίο του δισδιάστατου γραφήματος Chickenwire (Εικόνα 4.8), παρατηρούμε ότι ταυτίζοντας τις δύο κάθετες πλευρές προκύπτουν τρεις διαφορετικοί κύκλοι, (O_0), (O_1), (O_2) που τα στοιχεία τους ενώνονται με πλευρές που είναι εναλλάξ διακεκομμένες και συνεχείς. Αυτοί είναι κύκλοι συμφώνων τριάδων που γεννιούνται με τη βοήθεια των συναρτήσεων P, R και έχουν μήκος ίσο με 8. Οι κύκλοι αυτοί ονομάζονται *οκτατονικοί* ή *οκτάκυκλοι*. Σημειώνουμε ότι οι πλευρές με τις κουκκίδες ονομάζονται *οκτατονικές γέφυρες* αφού ενώνουν τριάδες που ανήκουν σε διαφορετικούς οκτατονικούς κύκλους. Στην Εικόνα 4.16 απεικονίζονται οι οκτατονικοί κύκλοι στο διδιάστατο γράφημα και πάνω σε μία κάτοψη του τόρου Chickenwire .



Εικόνα 4.16: Οι οκτατονικοί κύκλοι.

Θα βρούμε τους τρείς αυτούς κύκλους με τη βοήθεια των συναρτήσεων P, R. Για να βρούμε τον κύκλο (O_0) εφαρμόζουμε τις P, R εναλλάξ ξεκινώντας από την συγχορδία C^+:

$$\langle 0,4,7\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 7,3,0\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 3,7,10\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 10,6,3\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 6,10,1\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 1,9,6\rangle$$
$$\xleftrightarrow{R} \langle 9,1,4\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 4,0,9\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 0,4,7\rangle \text{ , οπότε κλείνει ο κύκλος } (O_0).$$

Για να βρούμε τον κύκλο (O_1) εφαρμόζουμε τις P, R εναλλάξ ξεκινώντας από την συγχορδία $C\sharp^+$:

$$\langle 1,5,8\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 8,4,1\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 4,8,11\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 11,7,4\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 7,11,2\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 2,10,7\rangle$$
$$\xleftrightarrow{R} \langle 10,2,5\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 5,1,10\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 1,5,8\rangle \text{ , οπότε κλείνει ο κύκλος } (O_1).$$

Για να βρούμε τον κύκλο (O_2) εφαρμόζουμε τις P, R εναλλάξ ξεκινώντας από την συγχορδία D^+:

$$\langle 2,6,9\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 9,5,2\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 5,9,0\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 0,8,5\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 8,0,3\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 3,11,8\rangle$$
$$\xleftrightarrow{R} \langle 11,3,6\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 6,2,11\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 2,6,9\rangle \text{ , οπότε κλείνει ο κύκλος } (O_2).$$

Η διαδικασία εύρεσης κάθε κύκλου ισοδυναμεί με εφαρμογή του συνόλου συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} R/P = \{&P\,,\, RP\,,\, PRP\,,\, RPRP\,,\, PRPRP\,,\, RPRPRP\,,\, PRPRPRP, \\ &RPRPRPRPRP\} \\ = \{&(RP)^n \,|\, n = 1,2,3,4\} \cup \{P(RP)^n \,|\, n = 0,1,2,3\} \end{aligned} \tag{4.7}$$

σε κάθε αρχική συγχορδία. Για το σύνολο R/P έχουμε:

Πρόταση 4.4.3 *(Ομάδα R/P)*

1. *Το σύνολο $R/P \subseteq PLR$, με $|RP| = 8$, περιέχει όλες τις πιθανές συνθέσεις των R, P.*

2. *Το σύνολο R/P εφοδιασμένο με πράξη την σύνθεση συναρτήσεων είναι υποομάδα της PLR.*

Απόδειξη

1. Από τη διαδικασία εύρεσης του πρώτου κύκλου παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} (RP)^4(C^+) &= C^+ \\ P(RP)^3(C^+) &= R(C^+) \end{aligned}$$

Με βάση το Λήμμα 3.2.1 μπορώ να γενικεύσω τις δράσεις αυτών των συναρτήσεων για κάθε συγχορδία και άρα:

$$(RP)^4 = e = P^2 = R^2 \tag{4.8}$$

$$P(RP)^3 = R \tag{4.9}$$

Άρα, δρώντας περαιτέρω πάνω σε οποιαδήποτε συγχορδία θα παίρνουμε όμοια αποτελέσματα. Συνεπώς οποιαδήποτε άλλη σύνθετη συνάρτηση θα είναι ισοδύναμη με κάποια από τις παραπάνω. Άρα $|R/P| = 8$.

2. Από το 1. το σύνολο R/P είναι κλειστό ως προς την πράξη (σύνθεση). Από την Πρόταση 3.2.1 έχουμε: $P = R(LR)^3$. Μπορούμε λοιπόν, να γράψουμε το σύνολο R/P συναρτήσει των στοιχείων της $PLR = L/R$:

$$\begin{aligned} R/P = \{P = R(LR)^3\,,\, RP = (LR)^3\,,\, P(RP) = R(LR)^6\,, \\ (RP)^2 = (LR)^6\,, P(RP)^2 = R(LR)^9\,,\, (RP)^3 = (LR)^9\,, \\ P(RP)^3 = R\,,\, (RP)^4 = e\}\,. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο R/P περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο και για κάθε στοιχείο περιέχει το αντίστροφό του. Άρα η R/P είναι υποομάδα της PLR . $\square$

Άρα αποδείξαμε ότι:

Πρόταση 4.4.4 *Οι τρείς οκτατονικοί κύκλοι (O_0), (O_1), (O_2) αποτελούν τις τροχιές που δημιουργούνται κάτω από τη δράση της υποομάδας R/P πάνω στο σύνολο S.*

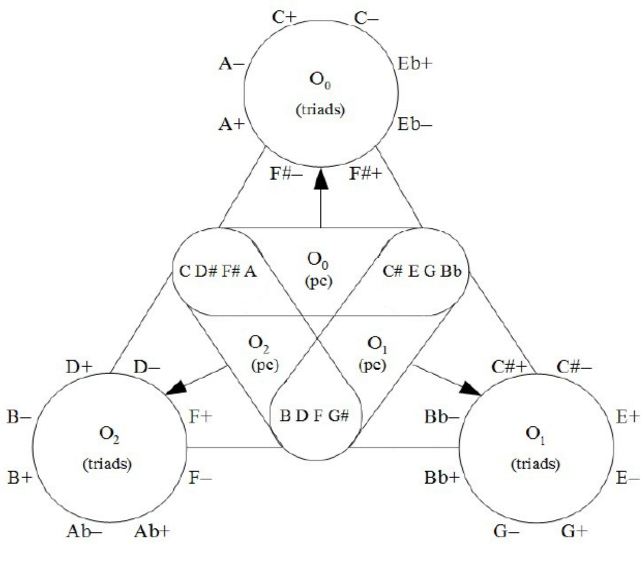
Με τους τρεις εξατονικούς κύκλους καλύψαμε όλο το σύνολο S των συμφώνων συγχορδιών χωρίς επανεμφανίσεις των τριάδων, αφού ως τροχιές δεν περιέχουν κοινές τριάδες ($O_0 \cap O_1 = \emptyset$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset, O_0 \cap O_2 = \emptyset$).

$$\begin{aligned} S &= O_0 \cup O_1 \cup O_2 \\ &= (C^+, C^-, E\flat^+, E\flat^-, F\sharp^+, F\sharp^-, A^+, A^-) \cup \\ &\quad (C\sharp^+, C\sharp^-, E^+, E^-, G^+, G^-, B\flat^+, B\flat^-) \cup \\ &\quad (D^+, D^-, F^+, F^-, A\flat^+, A\flat^-, B^+, B^-) \end{aligned}$$

Το σύνολο των κλάσεων φθόγγων από τις οποίες αποτελούνται οι τριάδες μέσα σε έναν οκτατονικό κύκλο ονομάζεται *οκτατονικό σύστημα*. Έτσι, σε κάθε οκτατονικό κύκλο αντιστοιχεί ένα οκτατονικό σύστημα. Τα οκτατονικά συστήματα είναι:

$$\begin{aligned} O_0(pc) &= \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\} \\ O_1(pc) &= \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\} \\ O_2(pc) &= \{0, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11\} \end{aligned}$$

Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 4.17 δύο κύκλοι μοιράζονται από τέσσερις κλάσεις φθόγγων (pitch classes)[10]. Οι οκτατονικοί κύκλοι και τα οκτατονικά τους συστήματα φαίνονται στο παρακάτω γράφημα, το οποίο ονομάζεται *υπεροκτατονικό σύστημα*.



Εικόνα 4.17: Το υπεροκτατονικό σύστημα.

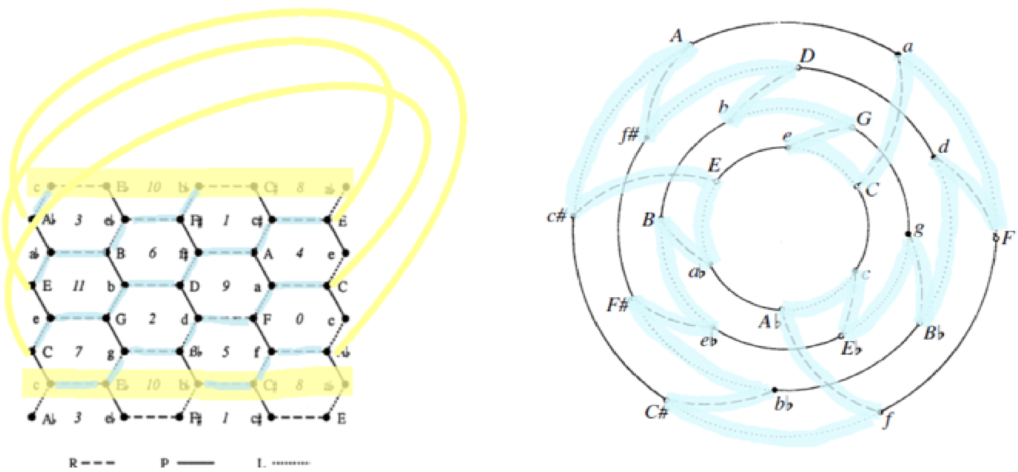
Παράδειγμα 4.4.2 *(Ο κύκλος (O_0) στον Schubert)*
Ένα μουσικό παράδειγμα χρήσης του κύκλου (O_0) ξεκινώντας από τη συγχορδία c παρατηρούμε στα πρώτα μέτρα του Andante της ουβερτούρας στον *Die Zauberharfe* του Schubert .

[10] Συγκεκριμένα, τις νότες από τις οποίες αποτελείται μία 7η ελαττωμένη.

Εικόνα 4.18: Η ακολουθία των τριάδων στα πρώτα μέτρα της ουβερτούρας *Die Zauberharfe* του Schubert.

4.4.3 Ο Χαμιλτονιανός κύκλος

Ο κύκλος τάξης 24 που τα στοιχεία του ενώνονται με πλευρές εναλλάξ με κουκκίδες και διακεκομένες, γεννιέται από τις συναρτήσεις L, R. Αυτός ο κύκλος είναι Χαμιλτονιανός κύκλος, καθώς περνάει από όλα τα στοιχεία-κορυφές του τόρου ακριβώς μία φορά. Αν ξεκινήσω να εφαρμόζω εναλλάξ τις συναρτήσεις L, R πάνω σε μία συγχορδία τελικά παίρνω τη δράση όλης της ομάδας $PLR = L/R$ πάνω στο S. Πράγματι, όπως έχουμε υπολογίσει στο παράδειγμα 3.2.1, η τροχιά της $C^+ = \langle 0, 4, 7\rangle$ είναι όλο το σύνολο S. Στην εικόνα 4.19 απεικονίζεται ο Χαμιλτονιανός κύκλος στο δισδιάστατο γράφημα και πάνω σε μία κάτοψη του τόρου Chickenwire.



Εικόνα 4.19: Ο χαμιλτονιανός κύκλος.

Παράδειγμα 4.4.3 *(Ο χαμιλτονιανός κύκλος στον Beethoven)*
Ο Cohn πρώτος παρατήρησε ότι οι πρώτες 19 τριάδες ξεκινώντας από την C^+ εμφανίζονται στα μέτρα 143-172 του δεύτερου μέρους της 9ης συμφωνίας του

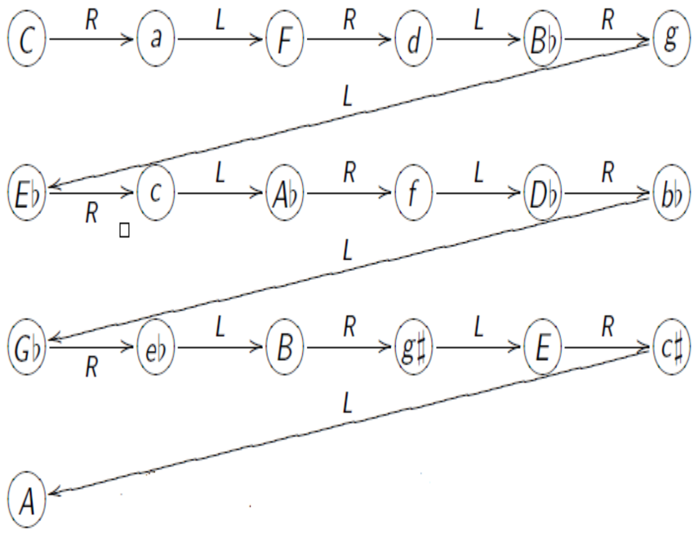
Beethoven[11](εικόνα 4.13).

Εικόνα 4.20: 9η Συμφωνία του Beethoven, μεταγραφή για 2 πιάνα, 4 χέρια (Liszt), μέτρα 137-176.

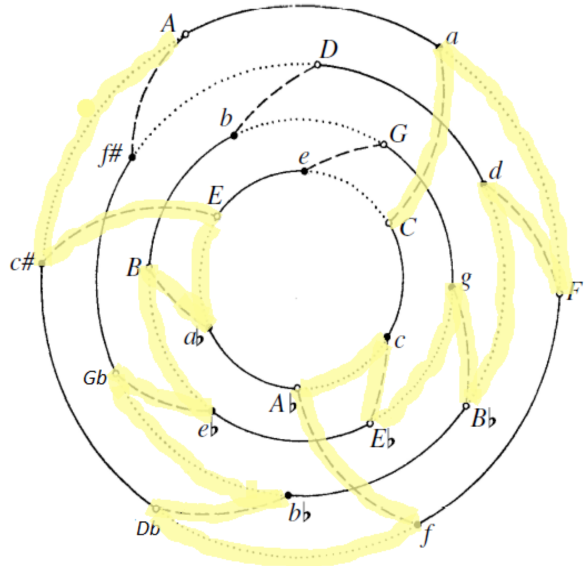
Το μονοπάτι που διαγράφεται πανω στον χαμιλτονιανό κύκλο από αυτή την

[11]Ο Ludwig van Beethoven συνέθεσε την Ενάτη Συμφωνία κατά τη διάρκεια των ετών 1822-1824, σχεδόν 80 χρόνια πριν ο Henri Poincare εκδώσει την μελέτη του στην τοπολογία

ακολουθία τριάδων (Εικόνα 4.21) φαίνεται σε μία κάτοψη του τόρου Chickenwire (Εικόνα 4.22).



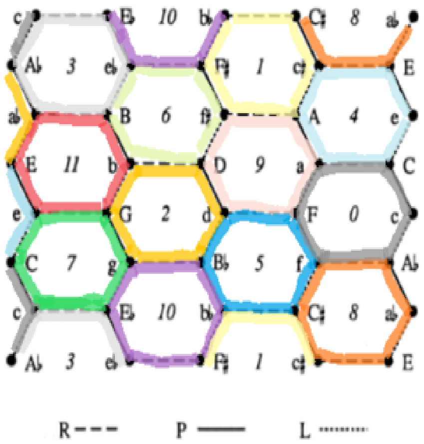
Εικόνα 4.21: Η ακολουθία των συμφώνων τριάδων στην 9η συμφωνία.



Εικόνα 4.22: Το μονοπάτι πάνω στον χαμιλτονιανό κύκλο στην 9η συμφωνία.

4.4.4 Οι εξαγωνικές κυψέλες

Οι εξαγωνικές κυψέλες είναι δώδεκα κύκλοι με μήκος 6 που τα στοιχεία τους ενώνονται με πλευρές εναλλάξ με κουκκίδες, διακεκομένες και συνεχείς στο γράφημα Chickenwire. Αυτές γεννιούνται από τις συναρτήσεις P, L, R. Οι τριάδες σε κάθε έναν από αυτούς τους κύκλους έχουν μία κλάση φθόγγων κοινή, και από αυτήν ακριβώς παίρνει το όνομα της η κάθε εξαεδρική κυψέλη, όπως έχουμε προαναφέρει. Στην Εικόνα 4.23 απεικονίζονται οι εξαγωνικές κυψέλες πάνω στο δισδιάστατο γράφημα Chickenwire.



Εικόνα 4.23: Οι εξαγωνικές κυψέλες

Θα βρούμε τις κυψέλες αυτές με τη βοήθεια των συναρτήσεων P, L, R. Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις συναρτήσεις P, L, R ξεκινώντας από την C^+:

$$\langle 0,4,7\rangle \xleftrightarrow{L} \langle 11,7,4\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 4,8,11\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 8,4,1\rangle \xleftrightarrow{L} \langle 9,1,4\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 4,0,9\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 0,4,7\rangle \text{ , οπότε κλείνει ο κύκλος } (4).$$

Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις συναρτήσεις P, L, R ξεκινώντας από την $C\sharp^+$:

$$\langle 1,5,8\rangle \xleftrightarrow{L} \langle 0,8,5\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 5,9,0\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 9,5,2\rangle \xleftrightarrow{L} \langle 10,2,5\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 5,1,10\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 1,5,8\rangle \text{ , οπότε κλείνει ο κύκλος } (5).$$

Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις συναρτήσεις P, L, R ξεκινώντας από την D^+:

$$\langle 2,6,9\rangle \xleftrightarrow{L} \langle 1,9,6\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 6,10,1\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 10,6,3\rangle \xleftrightarrow{L} \langle 11,3,6\rangle \xleftrightarrow{P} \langle 6,2,11\rangle \xleftrightarrow{R} \langle 2,6,9\rangle \text{ , οπότε κλείνει ο κύκλος } (6).$$

Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις συναρτήσεις P, L, R ξεκινώντας από την $E\flat^+$:

$\langle 3,7,10\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 2,10,7\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 7,11,2\rangle \overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 11,7,4\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 0,4,7\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 7,3,0\rangle$
$\overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 3,7,10\rangle$, οπότε κλείνει ο κύκλος (7).

Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις συναρτήσεις P, L, R ξεκινώντας από την E^+:

$\langle 4,8,11\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 3,11,8\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 8,0,3\rangle \overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 0,8,5\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 1,5,8\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 8,4,1\rangle$
$\overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 4,8,11\rangle$, οπότε κλείνει ο κύκλος (8).

Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις συναρτήσεις P, L, R ξεκινώντας από την F^+:

$\langle 5,9,0\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 4,0,9\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 9,1,4\rangle \overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 1,9,6\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 2,6,9\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 9,5,2\rangle$
$\overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 5,9,0\rangle$, οπότε κλείνει ο κύκλος (9).

Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις συναρτήσεις P, L, R ξεκινώντας από την $F\sharp+$:

$\langle 6,10,1\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 5,1,10\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 10,2,5\rangle \overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 2,10,7\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 3,7,10\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 10,6,3\rangle$
$\overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 6,10,1\rangle$, οπότε κλείνει ο κύκλος (10).

Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις συναρτήσεις P, L, R ξεκινώντας από την G^+:

$\langle 7,11,2\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 6,2,11\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 11,3,6\rangle \overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 3,11,8\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 4,8,11\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 11,7,4\rangle$
$\overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 7,11,2\rangle$, οπότε κλείνει ο κύκλος (11).

Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις συναρτήσεις P, L, R ξεκινώντας από την $A\flat^+$:

$\langle 8,0,3\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 7,3,0\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 0,4,7\rangle \overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 4,0,9\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 5,9,0\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 0,8,5\rangle$
$\overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 8,0,3\rangle$, οπότε κλείνει ο κύκλος (0).

Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις συναρτήσεις P, L, R ξεκινώντας από την A^+:

$\langle 9,1,4\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 8,4,1\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 1,5,8\rangle \overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 5,1,10\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 6,10,1\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 1,9,6\rangle$
$\overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 9,1,4\rangle$, οπότε κλείνει ο κύκλος (1).

Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις συναρτήσεις P, L, R ξεκινώντας από την $B\flat^+$:

$\langle 10,2,5\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 9,5,2\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 2,6,9\rangle \overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 6,2,11\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 7,11,2\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 2,10,7\rangle$
$\overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 10,2,5\rangle$, οπότε κλείνει ο κύκλος (2).

Εφαρμόζουμε εναλλάξ τις συναρτήσεις P, L, R ξεκινώντας από την B^+:

$\langle 11,3,6\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 10,6,3\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 3,7,10\rangle \overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 7,3,0\rangle \overset{L}{\longleftrightarrow} \langle 8,0,3\rangle \overset{P}{\longleftrightarrow} \langle 3,11,8\rangle$
$\overset{R}{\longleftrightarrow} \langle 11,3,6\rangle$, οπότε κλείνει ο κύκλος (3).

Όπως παρατηρούμε και στους υπολογισμούς αλλά και στο γράφημα, οι κύκλοι έχουν κοινές συγχορδίες μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, δύο γειτονικοί κύκλοι μοιράζονται από δύο τριάδες, δηλαδή γραφικά έχουν κοινές δύο κορυφές.

Η διαδικασία εύρεσης κάθε κύκλου ισοδυναμεί με εφαρμογή των συναρτήσεων:

$$L\,,\, PL\,,\, RPL\,,\, LRPL\,,\, PLRPL\,,\, RPLRPL$$

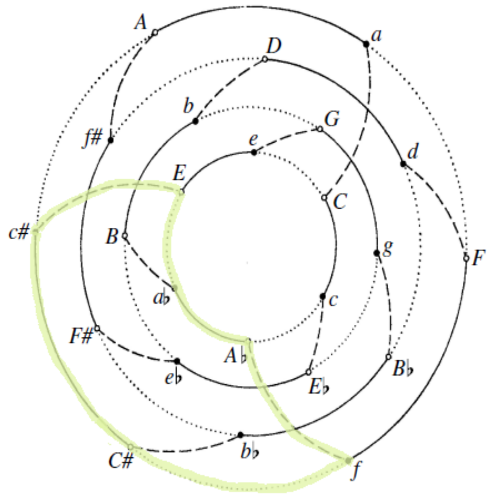
σε κάθε αρχική συγχορδία. Οι συναρτήσεις αυτές μπορούν να γραφούν συναρτήσει των στοιχειών της ομάδας $PLR = L/R$:

$$L = R(LR)^{11}\,,\; PL = (LR)^8\,,\; RPL = R(LR)^8\,,\; LRPL = (LR)^9$$
$$PLRPL = R\,,\; RPLRPL = e\,.$$

Παράδειγμα 4.4.4 *(Ο κύκλος* (8) *στον Verdi)*
Ένα μουσικό παράδειγμα χρήσης του κύκλου (8) ξεκινώντας από τη συγχορδία f αποτελεί το τραγούδι *Ah si, ben mio* της τρίτης πράξης της όπερας του Verdi, *Il Trovatore* .[12]

Εικόνα 4.24: Η ακολουθία των τριάδων στο *Ah si, ben mio* της τρίτης πράξης της όπερας *Il Trovatore.*

[12] Η προτελευταία συγχορδία $(D(D7))$ είναι μεθ' εβδόμης και την χρησιμοποιούμε καταχρηστικά εφόσον εμείς αναφερόμαστε μόνο σε τριάδες.



Εικόνα 4.25: Ο κύκλος (8) πάνω σε μία κάτοψη του τόρου.

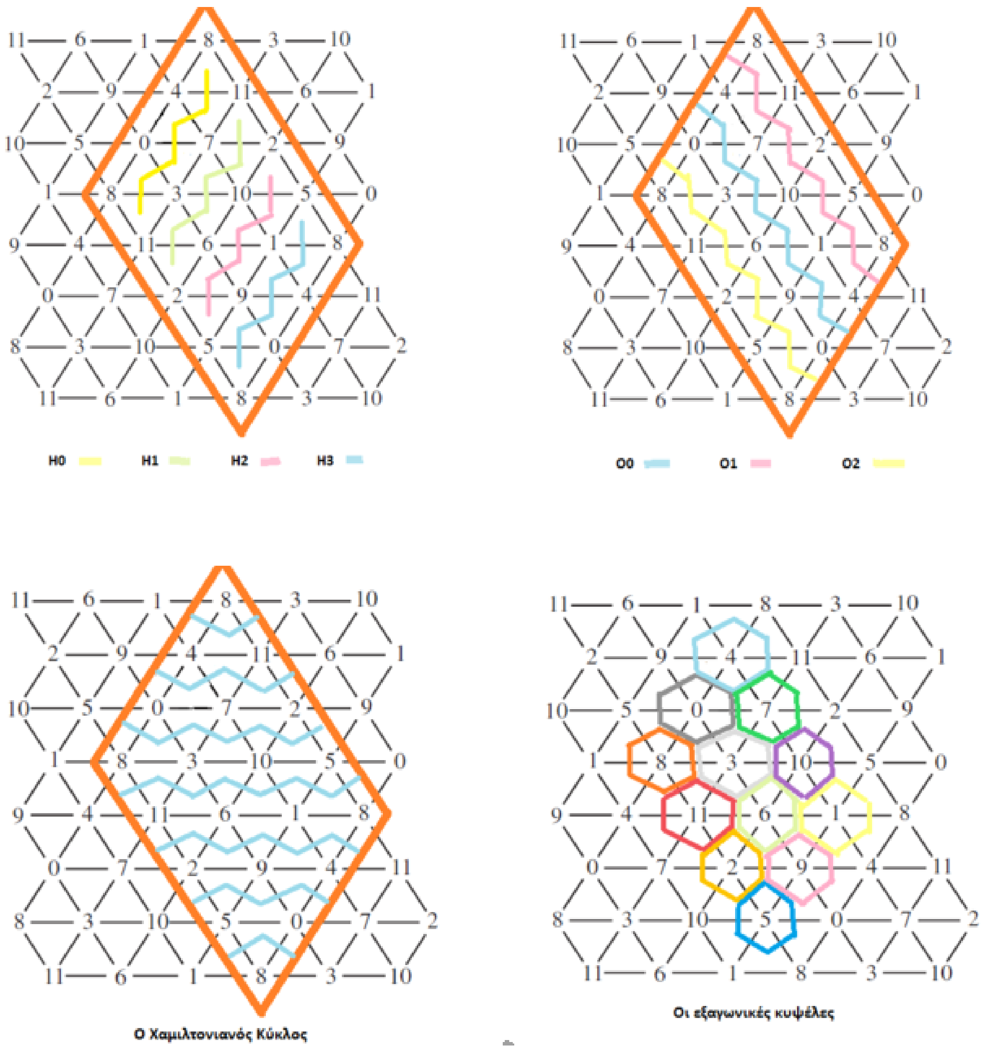
Αυτοί ήταν λοιπόν οι κύκλοι που παίρνουμε από το γράφημα Chickenwire.

Παρατηρήσεις

1. Σημειώνουμε ότι αν αποκόψουμε τις εξατονικές γέφυρες, (R), τότε ο τόρος μειώνεται σε εξατονικούς κύκλους, αν αποκόψουμε τις οκτατονικές γέφυρες, (L), τότε ο τόρος μειώνεται σε οκτατονικούς κύκλους ενώ αν αποκόψουμε τις πλευρές, (P), τότε ο τόρος γίνεται χαμιλτονιανός κύκλος[13].

2. Από τη δυϊκότητα των γραφημάτων Tonnetz και Chickenwire έπεται ότι οι κύκλοι που περιγράψαμε σε αυτήν την παράγραφο εμφανίζονται στο Tonnetz, μόνο που εκεί δημιουργούνται από τρίγωνα. Δηλαδή, είναι κύκλοι-¨κορδέλες¨. Στην Εικόνα 4.26 φαίνονται οι τέσσερις εξατονικοί κύκλοι (H_0), (H_1), (H_2), (H_3), οι τρείς οκτατονικοί κύκλοι (O_0), (O_1), (O_2), ο Χαμιλτονιανός κύκλος και οι δώδεκα εξαγωνικές κυψέλες πάνω στο Tonnetz.

[13]Douthett, J et al. (1998).



Εικόνα 4.26: Οι 4 χαρακτηριστικοί κύκλοι πάνω στο Tonnetz.

Κεφάλαιο 5

Οι T/I και PLR ως δυϊκές ομάδες

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα εμβαθύνουμε περισσότερο στη σχέση μεταξύ των ομάδων T/I και PLR. Αρχικά, θεωρώντας τις δύο ομάδες ως υποσύνολα της συμμετρικής ομάδας πάνω στο σύνολο S, $Sym(S)$, θα διαπιστώσουμε ότι οι δράσεις τους πάνω στο S εμπερικλείουν διαφορετικά σύνολα μεταθέσεων του συνόλου S. Φτάνοντας στο σημαντικότερο σημείο του κεφαλαίου θα αποδείξουμε ότι οι T/I, PLR αποτελούν δυϊκές ομάδες στην $Sym(S)$ με βάση τον ορισμό του Lewin, δηλαδή ότι η μία είναι ο κεντροποιητής της άλλης. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε την προέλευση των δυϊκών ομάδων γενικότερα, συσχετίζοντάς τες με τις αριστερές και δεξιές κανονικές αναπαραστάσεις μίας ομάδας. Με βάση αυτή τη συσχέτιση, θα παρουσιάσουμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε τη δυϊκή ομάδα μίας πεπερασμένης ομάδας, η οποία δρα απλά μεταβατικά σε ένα πεπερασμένο σύνολο, σύμφωνα με τους Fiore-Noll, δίνοντας ως παράδειγμα την κατασκευή της ομάδας PLR από την T/I. Τέλος, θα αποτυπώσουμε τη δυϊκότητα των T/I και PLR σε μεταθετικά διαγράμματα και θα δείξουμε την εφαρμογή τους στη μουσική ανάλυση μέσω τριών παραδειγμάτων.

5.1 Οι δράσεις των ομάδων T/I και PLR πάνω στο σύνολο S ως μεταθέσεις του S.

Μέχρι το σημείο αυτό έχουμε αποδείξει ότι η ομάδα D_{12} δρά απλά μεταβατικά πάνω στο σύνολο S με δύο τρόπους[1]:

I. μέσω της ομάδας T/I εφαρμόζοντας μετατοπίσεις και αναστροφές πάνω στις κλάσεις φθόγγων κάθε σύμφωνης τριάδας,

[1] Crans, A. et al. (2009).

II. μέσω της ομάδας PLR χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις P, L, R και τις συνθέσεις τους πάνω στις σύμφωνες τριάδες.

Ο ισομορφισμός μεταξύ των ομάδων T/I και PLR δηλώνει μία αντιστοίχιση του κάθε στοιχείου της μίας ομάδας σε ένα μοναδικό στοιχείο της άλλης. Κανείς μπορεί να αναρωτηθεί: γιατί να αντιστοιχίσω, για παράδειγμα, το T_1 με το LR, αφού οι δύο αυτές συναρτήσεις δεν μετασχηματίζουν τις συγχορδίες με τον ίδιο τρόπο; Πράγματι, $T_1\langle 0,4,7\rangle = \langle 1,5,8\rangle$, ενώ $(LR)\langle 0,4,7\rangle = \langle 5,9,0\rangle$. Γενικά, αντίστοιχες συναρτήσεις των δύο ομάδων δεν δίνουν ίδια αποτελέσματα αν δράσουν πάνω σε ίδιες συγχορδίες. Όμως, οι ομομορφισμοί ομάδων αναφέρονται μόνο στις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων των ομάδων και είναι πλήρως ανεξάρτητοι της επιλογής των (μουσικών) συνόλων στα οποία δρουν [2]. Αυτού του είδους η ανεξαρτησία, επιτρέπει τη δράση μίας ομάδας πάνω σε διαφορετικά μουσικά σύνολα αλλά και τη δράση διαφορετικών ομάδων πάνω στο ίδιο σύνολο. Παρόλο, λοιπόν, που στην περίπτωσή μας έχουμε δύο ισόμορφες ομάδες να δρουν πάνω στο ίδιο σύνολο (S), δεν σημαίνει ότι οι δράσεις τους είναι και ισοδύναμες. Θα στηρίξουμε τη θέση αυτή δείχνοντας ότι οι T/I και PLR ως ομάδες μεταθέσεων, περιέχουν διαφορετικά σύνολα μεταθέσεων του συνόλου S.

Ορισμός 5.1.1 *(Μετάθεση)*
Μετάθεση ενός συνόλου X λέγεται μια συνάρτηση από το X στο X που είναι ταυτόχρονα ένα-προς-ένα και επί.

Θεώρημα 5.1.1 *Έστω X ένα μη κενό σύνολο, και έστω $Sym(X)$ το σύνολο όλων των μεταθέσεων του X. Τότε, το $Sym(X)$ είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό μεταθέσεων.*

Ορισμός 5.1.2 *(Συμμετρική ομάδα)*
Έστω X το πεπερασμένο σύνολο $\{1, 2, ..., n\}$. Η ομάδα όλων των μεταθέσεων του X λέγεται *συμμετρική ομάδα για τους n χαρακτήρες* και συμβολίζεται με $Sym(n)$. Η ομάδα $Sym(n)$ έχει $n!$ στοιχεία.

Λήμμα 5.1.1 *Μία δράση μίας ομάδας G πάνω σε ένα σύνολο X είναι ισοδύναμη με έναν ομομορφισμό $\rho: G \to Sym(X)$.*

Απόδειξη

Έστω μία δράση "$\cdot$" της ομάδας G πάνω σε ένα σύνολο X. Ορίζουμε μία συνάρτηση $\rho: G \to Sym(X)$ ως:

$$\rho : g \mapsto F_g\,, \quad \text{όπου} \quad F_g : X \to X \quad \text{με} \quad F_g(x) = g \cdot x\,.$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι $F_g \,\epsilon\, Sym(X)$ για όλα τα στοιχεία $g \,\epsilon\, G$.

[2] Satyendra, R. (2004).

- Έστω $g \epsilon G$ και $x, y \epsilon X$ τέτοια ώστε $F_g(x) = F_g(y)$, τότε:

$$\begin{aligned} g \cdot x &= g \cdot y \\ g^{-1} \cdot (g \cdot x) &= g^{-1} \cdot (g \cdot y) \\ (g^{-1}g) \cdot x &= (g^{-1}g) \cdot y \\ e \cdot x &= e \cdot y \\ x &= y\,. \end{aligned}$$

  Άρα η συνάρτηση ρ είναι ένα-προς-ένα.

- Έστω $x \epsilon X$ και $g \epsilon G$ τέτοια ώστε $g \cdot y \neq x$ για όλα τα $y \epsilon X$. Θεωρούμε $g^{-1} \cdot x = t$ για κάποιο $t \epsilon X$ και έχουμε:

$$g \cdot t = g \cdot (g^{-1} \cdot x) = (gg^{-1}) \cdot x = e \cdot x\,.$$

  Φτάσαμε σε άτοπο, άρα η ρ είναι επί.

Συνεπώς, δείξαμε ότι η ρ είναι ένα-προς-ένα και επί, άρα $F_g \epsilon Sym(X)$.

Για $g, h \epsilon G$ και $x \epsilon X$ θα δείξουμε ότι η απεικόνιση ρ είναι ομομορφισμός:

$$(\rho(gh))(x) = F_{gh}(x) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = (F_g \circ F_h)(x) = (\rho(g) \circ \rho(h))(x)\,.$$

Άρα, από τη δράση της G στο X μπορούμε να εξάγουμε έναν ομορφισμό $\rho : \; G \to Sym(X)$.

Αντιστρόφως, αν $\rho : \; G \to Sym(X)$ ομομορφισμός, τότε η G δρα πάνω στο X, σύμφωνα με τη σχέση:

$$g \cdot x = (\rho(g))(x)\,.$$

Πράγματι, θα δείξουμε ότι τα αξιώματα της δράσης ομάδας ικανοποιούνται.

- Για κάθε $g, h \epsilon G$ και $x \epsilon X$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (gh) \cdot x &= (\rho(gh))(x) \\ &= (\rho(g)\rho(h))(x) \\ &= (\rho(g) \circ \rho(h))(x) \\ &= \rho(g)((\rho(h)(x)) \\ &= \rho(g)(h \cdot x) \\ &= g \cdot (h \cdot x)\,. \end{aligned}$$

- Για κάθε $x \epsilon X$ έχουμε:

$$e_G \cdot x = (\rho(e_G))(x) = (e_{Sym(S)})(x) = id(x) = x\,.$$

  Συνεπώς, από τον ομομορφισμό ρ μπορούμε να εξάγουμε μία δράση της G στο X. Άρα, μία δράση μίας ομάδας G σε ένα σύνολο X ισοδυναμεί με έναν ομομορφισμό $\rho : \; G \to Sym(X)$.

Πρόταση 5.1.1 *Οι δράσεις των T/I και PLR περιέχουν διαφορετικά σύνολα μεταθέσεων του S.*

Απόδειξη

Με βάση το Λήμμα 5.1.1 η δράση της T/I πάνω στο S (σχέση (2.15)) γεννά έναν ομομορφισμό, λ, και αντίστοιχα η δράση της PLR πάνω στο S (σχέσεις (3.1), (3.2), (3.3)) γεννά έναν ομορφισμό, ρ, στη συμμετρική ομάδα του συνόλου S:

$$\lambda : T/I \rightarrow Sym(S) \quad , \qquad \rho : PLR \rightarrow Sym(S)\,.$$

Επειδή έχουμε δείξει ότι αυτές οι δύο δράσεις είναι απλά μεταβατικές, οι ομομορφισμοί λ, ρ είναι ένα-προς-ένα (εμφυτεύσεις). Πράγματι, έστω για παράδειγμα:

$$\lambda(T_n) = \lambda(T_m)\,.$$

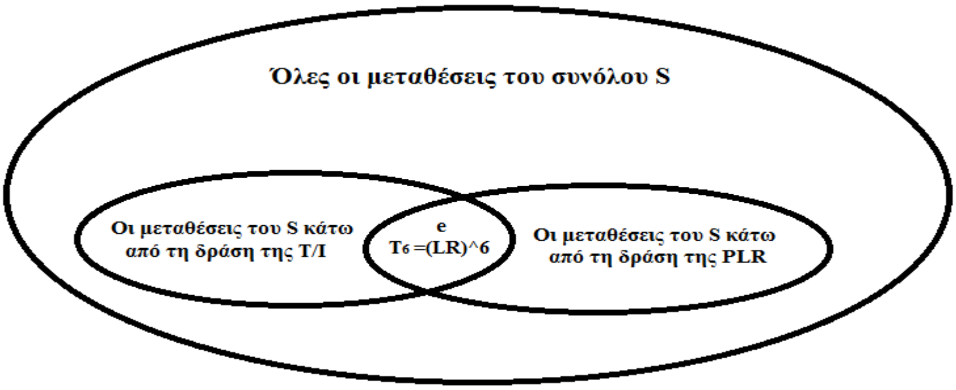
Ισοδύναμα για το τυχαίο $s = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \,\epsilon\, S$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lambda(T_n)(s) \quad &= \quad \lambda(T_m)(s) \Leftrightarrow \\
\langle x_1+n, x_2+n, x_3+n \rangle \quad &= \quad \langle x_1+m, x_2+m, x_3+m \rangle \Leftrightarrow \\
\begin{cases} x_1+n = x_1+m \\ x_2+n = x_2+m \\ x_3+n = x_3+m \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad T_n(x_i) = T_m(x_i)\,,\, i = 1,2,3\;,
\end{aligned}$$

δηλαδή, οι δράσεις των T_n και T_m στο x_i δίνουν το ίδιο στοιχείο. Από τη μεταβατικότητα της δράσης αυτό δεν επιτρέπεται εκτός αν $n = m$. Άρα $T_n = T_m$, άρα λ ένα-προς-ένα. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε τις T/I και PLR ως υποομάδες της $Sym(S)$: T/I, $PLR \leq Sym(S)$. Υπό την έννοια αυτή, κάθε μία από τις T/I και PLR δρώντας πάνω στο σύνολο S δίνει 24 μεταθέσεις του S, οι οποίες περιέχονται στο σύνολο $Sym(S)$ με τάξη 24!.

Υπολογίζουμε τις μεταθέσεις του συνόλου S στην κάθε περίπτωση, όπως φαίνεται στους Πίνακες 5.2 (για την T/I) και 5.3 (για την PLR). Κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μία μετάθεση, δηλαδή στα αποτελέσματα της δράσης μίας συνάρτησης πάνω σε όλο το σύνολο S. Παρατηρούμε πως μόνο τα ταυτοτικά στοιχεία (όπως περιμέναμε άλλωστε) και τα στοιχεία $T_6, (LR)^6$ δίνουν ίδιες μεταθέσεις του S. Συνεπώς, μολονότι η ομάδα T/I και η ομάδα PLR είναι ισόμορφες, οι δράσεις τους πάνω στις 24 σύμφωνες τριάδες εμπερικλείουν διαφορετικά σύνολα μεταθέσεων[3] (Εικόνα 5.1). □

[3] Satyendra, R. (2004).



Εικόνα 5.1: Τα σύνολα των μεταθέσεων του συνόλου S κάτω από τη δράση των ομάδων T/I και PLR.

S	(	**<0,4,7>**	**<1,5,8>**	**<2,6,9>**	**<3,7,10>**	**<4,8,11>**	**<5,9,0>**	**<6,10,1>**	**<7,11,2>**	**<8,0,3>**	**<9,1,4>**	**<10,2,5>**	**<11,3,6>**	**<0,8,5>**	**<1,9,6>**	**<2,10,7>**	**<3,11,8>**	**<4,0,9>**	**<5,1,10>**	**<6,2,11>**	**<7,3,0>**	**<8,4,1>**	**<9,5,2>**	**<10,6,3>**	**<11,7,4>**	)
T_0	(	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	)
T_1	(	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	)
T_2	(	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	)
T_3	(	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	)
T_4	(	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	)
T_5	(	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	)
T_6	(	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	)
T_7	(	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	)
T_8	(	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	)
T_9	(	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	)
T_{10}	(	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	)
T_{11}	(	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	)
I_0	(	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<2,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	)
I_1	(	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	)
I_2	(	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	)
I_3	(	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	)
I_4	(	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	)
I_5	(	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	)
I_6	(	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	)
I_7	(	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	)
I_8	(	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	)
I_9	(	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	<10,2,5>	)
I_{10}	(	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,7,4>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	<11,3,6>	)
I_{11}	(	<11,7,4>	<10,6,3>	<9,5,2>	<8,4,1>	<7,3,0>	<6,2,11>	<5,1,10>	<4,0,9>	<3,11,8>	<2,10,7>	<1,9,6>	<0,8,5>	<11,3,6>	<10,2,5>	<9,1,4>	<8,0,3>	<7,11,2>	<6,10,1>	<5,9,0>	<4,8,11>	<3,7,10>	<2,6,9>	<1,5,8>	<0,4,7>	)

Πίνακας 5.2: Οι μεταθέσεις του συνόλου S κάτω από τη δράση της ομάδας T/I.

S	(	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	)
(LR)^0	(	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	)
(LR)^1	(	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	)
(LR)^2	(	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	)
(LR)^3	(	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	)
(LR)^4	(	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	)
(LR)^5	(	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	)
(LR)^6	(	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	)
(LR)^7	(	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	)
(LR)^8	(	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	)
(LR)^9	(	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	)
(LR)^10	(	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	)
(LR)^11	(	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	)
R(LR)^11	(	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	)
R(LR)^10	(	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	)
R(LR)^9	(	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	)
R(LR)^8	(	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	)
R(LR)^7	(	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	)
R(LR)^6	(	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	)
R(LR)^5	(	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	)
R(LR)^4	(	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	)
R(LR)^3	(	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	)
R(LR)^2	(	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	)
R(LR)^1	(	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	)
R(LR)^0	(	<4,0,9>	<5,1,10>	<6,2,11>	<7,3,0>	<8,4,1>	<9,5,2>	<10,6,3>	<11,7,4>	<0,8,5>	<1,9,6>	<2,10,7>	<3,11,8>	<8,0,3>	<9,1,4>	<10,2,5>	<11,3,6>	<0,4,7>	<1,5,8>	<2,6,9>	<3,7,10>	<4,8,11>	<5,9,0>	<6,10,1>	<7,11,2>	)

Πίνακας 5.3: Οι μεταθέσεις του συνόλου S κάτω από τη δράση της ομάδας PLR.

5.2 Οι T/I και PLR είναι δυϊκές ομάδες.

Στην προηγούμενη παράγραφο (Παράγραφος 5.1) θεωρήσαμε τις T/I και PLR υποομάδες της συμμετρικής ομάδας, $Sym(S)$, του συνόλου S. Στη συνέχεια, με βάση τη θεώρηση αυτή και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του Lewin, θα αποδείξουμε ότι οι T/I και PLR είναι δυϊκές ομάδες. Η δυϊκότητα βασίζεται κυρίως στην έννοια της μεταθετικότητας, όπως θα δούμε παρακάτω.

Ορισμός 5.2.1 *(Δυϊκές ομάδες κατά Lewin)*
Έστω $Sym(X)$ η συμμετρική ομάδα πάνω στο σύνολο X. Δύο υποομάδες G, H της $Sym(X)$ ονομάζονται *δυϊκές ομάδες* αν οι φυσικές τους δράσεις πάνω στο σύνολο X είναι απλά μεταβατικές και αν κάθε μία είναι ο κεντροποιητής της άλλης, δηλαδή:

$$C_{Sym(S)}(G) = H \quad , \quad C_{Sym(S)}(H) = G\,.$$

Ορισμός 5.2.2 *(Κεντροποιητής)*
Έστω G ομάδα και έστω: $X \subseteq G$. Το σύνολο όλων των στοιχείων της G που μετατίθενται με κάθε στοιχείο του X ονομάζεται *κεντροποιητής του X εντός της G* και ορίζεται από τη σχέση:

$$C_G(X) := \{g\epsilon G \mid gx = xg,\, x\epsilon X\}\,. \tag{5.1}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο κεντροποιητής $C_G(X)$ αποτελεί υποομάδα της G.

Θεώρημα 5.2.1 *Οι T/I και PLR είναι δυϊκές ομάδες.*[4]

Απόδειξη

Θεωρούμε τις T/I, PLR ως υποομάδες της $Sym(S)$. Στις Προτάσεις 2.4.1, 3.4.1 έχουμε αποδείξει ότι οι T/I και PLR αντίστοιχα, δρούν απλά μεταβατικά πάνω στο σύνολο S. Μένει να δείξουμε ότι κάθε μία από τις δύο υποομάδες είναι ο κεντροποιητής της άλλης.
Ισχυρισμός: Η ομάδα PLR είναι ο κεντροποιητής της ομάδας T/I.
Με βάση τον Ορισμό 5.2.2, για $G = Sym(S)$ και $X = T/I$ ο κεντροποιητής του συνόλου T/I εντός της $Sym(S)$ είναι:

$$C_{Sym(S)}(T/I) = \{h\,\epsilon\, Sym(S) \mid \quad hg = gh\,,\ \forall\ g\,\epsilon\, T/I\}\,, \tag{5.2}$$

και αποτελείται από τα στοιχεία της $Sym(S)$ τα οποία μετατίθενται με όλα τα στοιχεία της T/I. Με βάση το Λήμμα 3.2.1 έχουμε αποδείξει ότι κάθε στοιχείο της PLR μετατίθεται με κάθε στοιχείο της T/I. Άρα, τα στοιχεία της PLR περιέχονται στον $C_{Sym(S)}(T/I)$, δηλαδή:

$$C_{Sym(S)}(T/I) \;\supseteq\; PLR \rightarrow \tag{5.3}$$
$$|C_{Sym(S)}(T/I)| \;\geq\; |PLR| = 24\,. \tag{5.4}$$

[4] Crans A. et al (2009).

Θέλουμε να δείξουμε ότι η ανισότητα (5.3) είναι ισότητα.
Από το θεώρημα του σταθεροποιητή τροχιάς (Θεώρημα 2.4.2) για $x = s \epsilon S$ και $G = C_{Sym(S)}(T/I)$ έχουμε:

$$\frac{|C_{Sym(S)}(T/I)|}{|C_{Sym(S)}(T/I)_s|} = |Orbit(s)|\,, \tag{5.5}$$

όπου:

$$C_{Sym(S)}(T/I)_s = \{h \,\epsilon\, C_{Sym(S)}(T/I) \mid \quad hs = s\}\,, \tag{5.6}$$

ο σταθεροποιητής ενός στοιχείου s, ο οποίος αποτελείται από τα στοιχεία του κεντροποιητή $C_{Sym(S)}(T/I)$ τα οποία δρώντας πάνω σε μία σύμφωνη τριάδα s δίνουν τον εαυτό της. Επίσης,

$$Orbit(s) = \{hs \mid \quad h \,\epsilon\, C_{Sym(S)}(T/I)\}\,, \tag{5.7}$$

είναι η τροχιά ενός στοιχείου s κάτω από τη δράση της $C_{Sym(S)}(T/I)$, για την οποία ισχύει: $|Orbit(s)| \leq |S| = 24$. Συνεπώς, από τη σχέση (5.5) έχουμε:

$$\frac{|C_{Sym(S)}(T/I)|}{|C_{Sym(S)}(T/I)_s|} \leq 24\,. \tag{5.8}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $|C_{Sym(S)}(T/I)_s| = 1$, δηλαδή ότι ο $C_{Sym(S)}(T/I)_s$ περιέχει μόνο το ταυτοτικό στοιχείο.
Έστω ότι υπάρχει $h \,\epsilon\, C_{Sym(S)}(T/I)_s$, τέτοιο ώστε $h \neq e$. Αν αυτό δράσει πάνω σε μία τριάδα $s \,\epsilon\, S$, από τη σχέση (5.6) έχουμε:

$$hs = s\,. \tag{5.9}$$

Δρούμε από αριστερά ένα στοιχείο $g \,\epsilon\, T/I$:

$$\begin{aligned} ghs = gs \quad &\overset{(5.2)}{\Longleftrightarrow} \quad hgs = gs \Longleftrightarrow \\ h(gs) \quad &= \quad gs\,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Επειδή η T/I δρά απλά μεταβατικά πάνω στο S, για κάθε s, $s' \,\epsilon\, S$ υπάρχει μοναδικό $g \,\epsilon\, T/I$ τέτοιο ώστε $gs = s'$. Θέτω λοιπόν $gs = s'$ και η σχέση (5.10) γίνεται:

$$hs' = s' \tag{5.11}$$

Από τις σχέσεις (5.9), (5.11) συμπεραίνουμε ότι αναγκαστικά: $h = e$. Άρα, οδηγηθήκαμε σε άτοπο και για τον σταθεροποιητή τροχιάς έχουμε:

$$C_{Sym(S)}(T/I)_s = \{e\} \Leftrightarrow |C_{Sym(S)}(T/I)_s| = 1\,. \tag{5.12}$$

Επιστρέφοντας στην (5.8) έχουμε:

$$|C_{Sym(S)}(T/I)| \leq 24\,. \tag{5.13}$$

Από τις σχέσεις (5.4) και (5.13) καταλήγουμε στην ισότητα:

$$|C_{Sym(S)}(T/I)| = 24 = |PLR| \tag{5.14}$$

και λόγω της (5.3):

$$C_{Sym(S)}(T/I) = PLR\,. \tag{5.15}$$

Έτσι αποδείξαμε ότι η PLR είναι ο κεντροποιητής της T/I. Ομοίως αποδεικνύουμε και ότι η T/I είναι ο κεντροποιητής της PLR. Συνεπώς οι T/I και PLR είναι δυϊκές ομάδες. $\square$

5.3 Οι δυϊκές ομάδες και οι αριστερές και δεξιές κανονικές αναπαραστάσεις

Αφού αποδείξαμε ότι οι T/I και PLR αποτελούν δυϊκές ομάδες στην $Sym(S)$, στη συνέχεια θα εξετάσουμε πώς προκύπτουν οι δυϊκές ομάδες γενικά και πώς σχετίζονται με τις αριστερές και δεξιές κανονικές αναπαραστάσεις μιάς ομάδας. Αρχικά, ορίζουμε τις αριστερές και δεξιές κανονικές αναπαραστάσεις μίας ομάδας (όπως αυτές προκύπτουν μέσα από την απόδειξη του θεωρήματος Cayley περί ισομορφισμού μίας οποιασδήποτε ομάδας με μία ομάδα μεταθέσεων).

Έστω G ομάδα. Αν $g \,\epsilon\, G$ θεωρώ την απεικόνιση $\lambda_g : G \to G$, που ορίζεται από τη σχέση:

$$\lambda_g(h) = gh\ , \quad h\,\epsilon G. \tag{5.16}$$

Η απεικόνιση λ_g είναι μετάθεση του συνόλου G. Πράγματι,

- Αν $\lambda_g(h_1) = \lambda_g(h_2)$ τότε,

  $$gh_1 = gh_2 \iff g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2 \iff h_1 = h_2.$$

  Άρα η απεικόνιση λ_g είναι ένα-προς-ένα.

- Αν $\psi \epsilon G$ τότε :

  $$\lambda_g(g^{-1}\psi) = g(g^{-1}\psi) = \psi.$$

  Άρα με την λ απεικονίζεται το G επί του G.

Κατά συνέπεια, $\lambda_g \,\epsilon\, Sym(G)$.
Ορίζουμε τώρα το σύνολο:

$$\lambda(G) = \{\lambda_g \mid g\,\epsilon G\}\,. \tag{5.17}$$

Το σύνολο $\lambda(G)$ εφοδιασμένο με πράξη τον πολλαπλασιασμό μεταθέσεων αποτελεί υποομάδα της $Sym(G)$. Πράγματι,

- το σύνολο είναι κλειστό ως προς την πράξη, δηλαδή $\lambda_{g_1}\lambda_{g_2}\,\epsilon\,\lambda(G)$. Πράγματι, είναι $\lambda_{g_1}\lambda_{g_2}=\lambda_{g_1g_2}$:

$$(\lambda_{g_1}\lambda_{g_2})(h)=\lambda_{g_1}(\lambda_{g_2}(h))=\lambda_{g_1}(g_2h)=g_1(g_2h)=(g_1g_2)(h)=\lambda_{g_1g_2}(h)\,,$$

- υπάρχει η ταυτοτική μετάθεση $\lambda_e\,\epsilon\,\lambda(G)$:

$$\lambda_e(h)=eh=h\quad\forall\,h\,\epsilon G\,,$$

- υπάρχουν τα αντίστροφα $(\lambda_g)^{-1}=\lambda_{g^{-1}}\,\epsilon\,\lambda(G)$ για όλα τα στοιχεία $\lambda_g\,\epsilon G$:

$$\lambda_g\lambda_{g^{-1}}=\lambda_{gg^{-1}}=\lambda_e=(\lambda_g)^{-1}\lambda_g\,.$$

Κατά συνέπεια, η $\lambda(G)$ είναι υποομάδα της $Sym(G)$.
Θεωρούμε την απεικόνιση $\lambda\,:\,G\,\rightarrow\,Sym(G)$, που ορίζεται από τη σχέση:

$$\lambda(g)=\lambda_g\,,\quad g\epsilon\,G. \tag{5.18}$$

Η απεικόνιση λ είναι ομομορφισμός. Πράγματι,

$$\lambda(g_1)\lambda(g_2)=\lambda_{g_1}\lambda_{g_2}=\lambda_{g_1g_2}=\lambda(g_1g_2). \tag{5.19}$$

Ο ομομορφισμός λ είναι ένα-προς-ένα (δηλαδή μονομορφισμός). Πράγματι, αν $\lambda(g_1)=\lambda(g_2)$ τα λ_{g_1}, λ_{g_2} δίνουν την ίδια μετάθεση της G. Ειδικότερα,

$$\lambda_{g_1}(e)=\lambda_{g_2}(e)\Rightarrow g_1e=g_2e\Rightarrow g_1=g_2\,. \tag{5.20}$$

Ο μονομορφισμός λ ονομάζεται *αριστερή κανονική αναπαράσταση της* G.

Αντίστοιχα, για $g\,\epsilon\,G$ θεωρώ την απεικόνιση $\rho_g\;:\;G\;\rightarrow\;G$, που ορίζεται από τη σχέση:

$$\rho_g(h)=hg^{-1}\,,\quad h\,\epsilon G. \tag{5.21}$$

Η απεικόνιση ρ_g είναι μετάθεση του συνόλου G. Πράγματι,

- Αν $\rho_g(h_1)=\rho_g(h_2)$ τότε,

$$h_1g^{-1}=h_2g^{-1}\iff h_1g^{-1}g=h_2g^{-1}g\iff h_1=h_2.$$

  Άρα η απεικόνιση ρ_g είναι ένα-προς-ένα.

- Αν $\psi\epsilon G$ τότε :

$$\rho_g(\psi g)=\psi gg^{-1}=\psi.$$

  Άρα με την ρ απεικονίζεται το G επί του G.

Κατά συνέπεια, $\rho_g\,\epsilon\,Sym(G)$.
Ορίζουμε τώρα το σύνολο:

$$\rho(G)=\{\rho_g\mid g\,\epsilon G\}\,. \tag{5.22}$$

Το σύνολο $\rho(G)$ εφοδιασμένο με πράξη τον πολλαπλασιασμό μεταθέσεων αποτελεί υποομάδα της $Sym(G)$. Πράγματι,

- το σύνολο είναι κλειστό ως προς την πράξη, δηλαδή $\rho_{g_1}\rho_{g_2}\,\epsilon\,\rho(G)$. Πράγματι, είναι $\rho_{g_1}\rho_{g_2} = \rho_{g_1 g_2}$:

$$\begin{aligned}(\rho_{g_1}\rho_{g_2})(h) &= \rho_{g_1}(\rho_{g_2}(h)) = \rho_{g_1}(hg_2^{-1}) = (hg_2^{-1})g_1^{-1} \\ &= h(g_2^{-1}g_1^{-1}) = h(g_1g_2)^{-1} = \rho_{g_1g_2}(h)\,,\end{aligned}$$

- υπάρχει η ταυτοτική μετάθεση $\rho_e\,\epsilon\,\rho(G)$:

$$\rho_e(h) = he^{-1} = h\,, \quad \forall\, h\,\epsilon G\,,$$

- υπάρχουν τα αντίστροφα $(\rho_g)^{-1} = \rho_{g^{-1}}\,\epsilon\,\rho(G)$ για όλα τα στοιχεία $\rho_g\,\epsilon G$:

$$\rho_g\rho_{g^{-1}} = \rho_{gg^{-1}} = \rho_e = (\rho_g)^{-1}\rho_g.$$

Κατά συνέπεια, η $\rho(G)$ είναι υποομάδα της $Sym(G)$.
Θεωρούμε την απεικόνιση $\rho\,:\,G \to Sym(G)$, που ορίζεται από τη σχέση:

$$\rho(g) = \rho_g\,, \quad g\,\epsilon\,G. \tag{5.23}$$

Η απεικόνιση λ είναι ομομορφισμός. Πράγματι,

$$\rho(g_1)\rho(g_2) = \rho_{g_1}\rho_{g_2} = \rho_{g_1g_2} = \rho(g_1g_2). \tag{5.24}$$

Ο ομομορφισμός ρ είναι ένα-προς-ένα (δηλαδή μονομορφισμός). Πράγματι, αν $\rho(g_1) = \rho(g_2)$ τα ρ_{g_1}, ρ_{g_2} δίνουν την ίδια μετάθεση της G. Ειδικότερα,

$$\rho_{g_1}(e) = \rho_{g_2}(e) \Rightarrow eg_1^{-1} = eg_2^{-1} \Rightarrow g_1^{-1} = g_2^{-1} \Rightarrow g_1 = g_2\,. \tag{5.25}$$

Ο μονομορφισμός ρ ονομάζεται *δεξιά κανονική αναπαράσταση της* G.

Λήμμα 5.3.1 *Οι φυσικές δράσεις των αριστερών και δεξιών κανονικών αναπαραστάσεων* $\lambda(G)$, $\rho(G)$ *πάνω στην* G *είναι απλά μεταβατικές.*

Απόδειξη

Η φυσική δράση της $\lambda(G)$ πάνω στην G, $\lambda_g \cdot h = \lambda_g(h) = gh$ μπορεί να ερμηνευτεί ως δράση της G στον εαυτό της μέσω αριστερού πολλαπλασιασμού:

$$G \times G \to G \quad \text{τέτοια ώστε} \quad (g,h) \mapsto g\,h\,.$$

Θέλουμε να βρούμε την τροχιά του στοιχείου $e\,\epsilon\,G$. Αν δράσουμε κάθε $g\,\epsilon\,G$ πάνω στο e : $g \cdot e = g$. Τότε, η τροχιά του e περιέχει όλα τα στοιχεία του συνόλου G, άρα έχουμε μία τροχιά. Συνεπώς, η αριστερή δράση της G στον εαυτό της είναι μεταβατική.
Έστω $g, h, x\,\epsilon\,G$ τέτοια ώστε $g \cdot x = h \cdot x$. Τότε έχουμε:

$$g \cdot x \cdot x^{-1} = h \cdot x \cdot x^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad g = h\,.$$

Άρα η δράση είναι απλά μεταβατική. Άρα και η δράση της $\lambda(G)$ είναι απλά μεταβατική.

Η δράση της $\rho(G)$ πάνω στο G μπορεί να ερμηνευτεί ως δράση της G στον εαυτό της (από τα αριστερά) μέσω δεξιού πολλαπλασιασμού με τον αντίστροφο:

$$G \times G \to G \quad \text{τέτοια ώστε} \quad (g, h) \mapsto h\, g^{-1}\,.$$

Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η δράση της $\rho(G)$ είναι απλά μεταβατική. $\square$

Θεώρημα 5.3.1 *(Cayley)*
Αν G ομάδα, τότε παράγονται δυϊκές ομάδες μέσω των δύο εμφυτεύσεων της G στην $Sym(G)$, ως αριστερές και δεξιές δράσεις της G στον εαυτό της. Επιπλέον, όλες οι δυϊκές ομάδες γεννιούνται με αυτόν τον τρόπο [5].

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι οι αριστερές και δεξιές αναπαραστάσεις της G, $\lambda(G)$, $\rho(G)$, είναι δυϊκές ομάδες. Στο Λήμμα 5.3.1 δείξαμε ότι οι φυσικές δράσεις των $\lambda(G)$, $\rho(G)$ είναι απλά μεταβατικές. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι τα στοιχεία της $\lambda(G)$ μετατίθενται με τα στοιχεία της $\rho(G)$. Πράγματι,

$$\lambda(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_2)\lambda(g_1) \quad \text{εφόσον}\,, \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned} \lambda(g_1)\rho(g_2)(h) &= \lambda_{g_1}\rho_{g_2}(h) = \lambda_{g_1}(\rho_{g_2}(h)) = \lambda(hg_2^{-1}) = g_1(hg_2^{-1}) \quad \text{και} \\ \rho(g_2)\lambda(g_1)(h) &= \rho_{g_2}\lambda_{g_1}(h) = \rho_{g_2}(\lambda_{g_1}(h)) = \rho_{g_2}(g_1 h) = (g_1 h)g_2^{-1}. \end{aligned}$$

Απομένει να δείξουμε ότι η $\rho(G)$ ακριβώς είναι ο κεντροποιητής της $\lambda(G)$ και αντίστροφα.

Ισχυρισμός : $\quad C_{SymG}(\lambda(G)) = \rho(G)\,.$

Εφόσον οι $\lambda(G)$, $\rho(G)$ αντιμετατίθενται, άρα:

$$\rho(G) \subseteq C_{Sym(G)}(\lambda(G)). \tag{5.27}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η σχέση (5.27) είναι ισότητα. Έστω ότι υπάρχει στοιχείο $f \in C_{Sym(G)}(\lambda(G))$, το οποίο να μην ανήκει στην $\rho(G)$. Επειδή το στοιχείο αυτό είναι μετάθεση, ορίζουμε την $f \in Sym(G)$ ως: $f : G \to G$ που να είναι ένα-προς-ένα και επί της G. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} f\lambda_g &= \lambda_g f\,, \quad \forall\, g \in G \\ f(\lambda_g(h)) &= \lambda_g(f(h))\,, \quad \forall h \in G \\ f(gh) &= gf(h)\,, \quad \forall\, g,\, h \in G. \end{aligned} \tag{5.28}$$

[5] Crans, A. et al. (2009).

Για $g = e$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(eh) &= e(f(h)) \Leftrightarrow \\ f(he) &= ef(h) \overset{(5.28)}{\Leftrightarrow} \\ hf(e) &= f(h)\,. \end{aligned}$$

Θέτουμε $f(e) = s$ και έχουμε:

$$f(h) = hs \quad , \forall\, h \,\epsilon\, G. \tag{5.29}$$

Άρα, η $f(h)$ είναι της μορφής $\rho(s^{-1}) = \rho_{s^{-1}}(h) = hs$. Άρα, $f \,\epsilon\, \rho((G))$ και κατ' επέκταση: $C_{SymG}(\lambda(G)) = \rho(G)$. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $C_{SymG}(\rho(G)) = \lambda(G)$. Συνεπώς οι $\lambda(G)$, $\rho(G)$ είναι δυϊκές ομάδες. □

Οι ομάδες $\lambda(G)$, $\rho(G)$ αποτελούν το πιο βασικό παράδειγμα δυϊκών ομάδων. Όλα τα άλλα παραδείγματα δυϊκών ομάδων είναι ισομορφικά με αυτό το βασικό, όπως θα δούμε παρακάτω.

5.4 Κατασκευή της δυϊκής ομάδας

Για κάθε πεπερασμένη ομάδα η οποία δρά απλά μεταβατικά πάνω σε ένα πεπερασμένο σύνολο S, μπορούμε να κατασκευάσουμε την δυϊκή της. Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε την κατασκευή της δυϊκής ομάδας κατά τους Fiore-Noll. .

Πρόταση 5.4.1 *(Κατασκευή της δυϊκής ομάδας στην πεπερασμένη περίπτωση κατά Fiore-Noll.)* [6]
Έστω G πεπερασμένη ομάδα, η οποία δρά απλά μεταβατικά πάνω σε ένα πεπερασμένο σύνολο S. Καθορίζουμε ένα σημειο $s_0 \,\epsilon\, S$ και θεωρούμε τις δύο εμφυτεύσεις:

$$\begin{aligned} \lambda:\ G &\longrightarrow Sym(S) \\ g &\longmapsto (s \mapsto gs)\,, \end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned} \rho:\ G &\longrightarrow Sym(S) \\ g &\longmapsto (hs_0 \mapsto hg^{-1}s_0)\,. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Τότε, οι εικόνες $\lambda(G)$ και $\rho(G)$ είναι δυϊκές ομάδες στην $Sym(S)$. Η ένα-προς-ένα απεικόνιση ρ εξαρτάται από την επιλογή του s_0, ενώ η εικόνα $\rho(G)$ όχι.

Απόδειξη

Αρχικά θέλουμε να δείξουμε ότι οι δράσεις των $\lambda(G), \rho(G)$ στο S είναι απλά μεταβατικές:

[6] Fiore, T. et al. (2013).

- Η ένα-προς-ένα απεικόνιση λ αποτελεί ομομορφισμό, εφόσον για $j, k \,\epsilon\, G$ έχουμε:

$$\lambda(j)\lambda(k)(hs_0) = \lambda(j)(k(hs_0)) = j(khs_0) = (jk)hs_0 = \lambda(jk)(hs_0)\,.$$

  Με βάση το Λήμμα 5.1.1 ο ομομορφισμός λ είναι ισοδύναμος με μία δράση:

$$G \times S \to S \quad \text{τέτοια ώστε} \quad g \cdot s : \lambda_g(s) = gs\,,$$

  όπου gs είναι η δράση του g πάνω στο S που μας δίνεται από την υπόθεση. Η δράση αυτή είναι η αριστερή δράση της G στο σύνολο S, η οποία από υπόθεση είναι απλά μεταβατική. Άρα, η φυσική δράση της $\lambda(G)$ είναι απλά μεταβατική.

- Αντίστοιχα, η ένα-προς-ένα απεικόνιση ρ αποτελεί ομομορφισμό εφόσον, για $j, k \,\epsilon\, G$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \rho(j)\rho(k)(hs_0) &= \rho(j)((hk^{-1})s_0) = ((hk^{-1})j^{-1}s_0) = h(jk)^{-1}s_0 \\ &= \rho(jk)(hs_0)\,. \end{aligned}$$

  Με βάση το Λήμμα 5.1.1 ο ομομορφισμός ρ είναι ισοδύναμος με μία δράση:

$$G \times S \to S \quad \text{τέτοια ώστε} \quad g \cdot s = \rho_g(h)s_0\,,$$

  όπου $s = hs_0$ (η δράση του $h \,\epsilon\, G$ πάνω στο s_0) και $\rho_g(h)s_0$ είναι η δράση του $\rho_g(h) \,\epsilon G$ πάνω στο $s_0 \,\epsilon\, S$. Σημειώνουμε ότι το κάθε $s \,\epsilon\, S$ μπορεί να εμφανιστεί ως $s = hs_0$ εφόσον από υπόθεση η δράση της G πάνω στο S είναι απλά μεταβατική, οπότε η τροχιά του s_0 είναι ολόκληρο το S. Άρα, η δράση της $\rho(G)$ είναι απλά μεταβατική.

Από το Θεώρημα σταθεροποιητή τροχιάς για την G και $X = S$ λόγω απλής μεταβατικότητας έχουμε:

$$|G| = |S|. \tag{5.32}$$

Αντίστοιχα, για $G = \lambda(G), \rho(G)$ λόγω απλής μεταβατικότητας έχουμε:

$$|\lambda(G)| = |\rho(G)| = |S| = |G|\,. \tag{5.33}$$

Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας ότι τα στοιχεία των $\lambda(G)$ και $\rho(G)$ μετατίθενται. Πράγματι, αν $j, k \,\epsilon\, G$ τότε,

$$\begin{aligned} \lambda(j)\rho(k)(hs_0) &= \lambda(j)(\rho(k)(hs_0)) = \lambda(j)(hk^{-1}s_0) = j(hk^{-1}s_0)\,, \\ \rho(k)\lambda(j)(hs_0) &= \rho(k)(\lambda(j)(hs_0)) = \rho(k)((jh)(s_0)) = (jh)k^{-1}s_0\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα,} \quad \rho(G) &\subseteq C_{Sym(S)}(\lambda(G)) \overset{(5.33)}{\Longrightarrow} \qquad (5.34) \\ |S| &\leq |C_{Sym(S)}(\lambda(G))|\,, \qquad (5.35) \end{aligned}$$

όπου,

$$C_{Sym(S)}(\lambda(G)) = \{h \,\epsilon\, Sym(S) \quad | \, hg = gh \quad \forall \, g \,\epsilon\, \lambda(G)\} \,. \tag{5.36}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η σχέση (5.34) είναι ισότητα.
Από το Θεώρημα σταθεροποιητή τροχιάς για $s \,\epsilon\, S$ και $G = C_{Sym(S)}(\lambda(G))$ έχουμε:

$$\frac{|C_{Sym(S)}(\lambda(G))|}{|C_{Sym(S)}(\lambda(G))|_s} = |Orbit(s)| \leq |S| \,, \tag{5.37}$$

όπου:

$$C_{Sym(S)}(\lambda(G))_s = \{h \,\epsilon\, C_{Sym(S)}(\lambda(G)) \mid \quad hs = s\} \,, \tag{5.38}$$

και

$$Orbit(s) = \{hs \mid \quad h \,\epsilon\, C_{Sym(S)}(\lambda(G))\} \,, \tag{5.39}$$

η τροχιά ενός στοιχείου s κάτω από τη δράση της $C_{Sym(S)}(\lambda(G))$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι η δράση της $C_{Sym(S)}(\lambda(G))$ πάνω στο S είναι απλή. Αν $c, c' \,\epsilon\, C_{Sym(S)}(\lambda(G))$ και $cs_1 = c's_1$ για κάποιο $s_1 \,\epsilon\, S$, τότε αν δράσουμε από αριστερά ένα στοιχείο $h \,\epsilon\, \lambda(G)$:

$$\begin{aligned} hcs_1 &= hc's_1 \overset{(5.35)}{\Longleftrightarrow} \\ chs_1 &= c'hs_1 \Longleftrightarrow \\ c(hs_1) &= c'(hs_1) \,. \end{aligned}$$

Άρα αναγκαστικά $c = c'$ και η δράση της $C_{Sym(S)}(\lambda(G))$ πάνω στο S είναι απλή. Κατά συνέπεια, για τον σταθεροποιητή ισχύει:

$$C_{Sym(S)}(\lambda(G))_s = e \rightarrow |C_{Sym(S)}(\lambda(G))|_s = 1 \,. \tag{5.40}$$

Επιστρέφοντας, στην (5.37) έχουμε:

$$|C_{Sym(S)}(\lambda(G))| = |Orbit(s)| \leq \, |S| \,. \tag{5.41}$$

Από τις σχέσεις (5.35) και (5.41) καταλήγουμε στην ισότητα:

$$|C_{Sym(S)}(\lambda(G))| = |Orbit(s)| = \, |S| = |\rho(G)| \tag{5.42}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι η δράση της $C_{Sym(S)}(\lambda(G))$ πάνω στο S είναι απλά μεταβατική. Τέλος, λόγω της (5.34):

$$C_{Sym(S)}(\lambda(G)) = \rho(G) \,. \tag{5.43}$$

Έτσι, αποδείξαμε ότι η $\rho(G)$ είναι ο κεντροποιητής της $\lambda(G)$. Ομοίως αποδεικνύουμε και ότι η $\lambda(G)$ είναι ο κεντροποιητής της $\rho(G)$. Συνεπώς, οι $\lambda(G)$, $\rho(G)$ είναι δυϊκές ομάδες. $\square$

Πόρισμα 5.4.1 *Αν S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και μία υποομάδα G της $Sym(S)$ δρά απλά μεταβατικά πάνω στο S, τότε ο κεντροποιητής της G στην $Sym(S)$ δρά επίσης απλά μεταβατικά.*

Θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω κατασκευή για να κατασκευάσουμε την ομάδα PLR ως δυϊκή ομάδα της T/I.

Παράδειγμα 5.4.1 *(Κατασκευή της ομάδας PLR)*
Αν στην κατασκευή της Πρότασης 5.3.1 θεωρήσουμε $G = T/I$, S το σύνολο όλων των συμφώνων τριάδων και $s_0 = C^+ = \langle 0,4,7\rangle$, τότε η $\rho(G)$ είναι η ομάδα PLR. [7]

Πράγματι, αν $g, h \,\epsilon\, T/I$, από την (5.31) ισχύουν οι εξής μετασχηματισμοί:

$$\text{για} \quad g = T_n,\, h = T_n, \quad \text{έχουμε:} \quad T_n \longmapsto (T_n s_0 \mapsto T_n T_{12-n} s_0) \tag{5.44}$$

$$\text{για} \quad g = T_n,\, h = I_n, \quad \text{έχουμε:} \quad T_n \longmapsto (I_n s_0 \mapsto I_n T_{12-n} s_0) \tag{5.45}$$

$$\text{για} \quad g = I_n,\, h = T_n, \quad \text{έχουμε:} \quad I_n \longmapsto (T_n s_0 \mapsto T_n I_n s_0) \tag{5.46}$$

$$\text{για} \quad g = I_n,\, h = I_n, \quad \text{έχουμε:} \quad I_n \longmapsto (I_n s_0 \mapsto I_n I_n s_0)\,. \tag{5.47}$$

Σημειώνουμε ότι με την δράση $T_n\langle 0,4,7\rangle$ μπορούμε να πάρουμε όλες τις μείζονες για $n = 0,1,...,11$ ενώ με την δράση $I_n\langle 0,4,7\rangle$ μπορούμε να πάρουμε όλες τις ελάσσονες τριάδες, αντίστοιχα. Κατά συνέπεια,

- με την (5.44) παίρνουμε όλους τους μετασχηματισμούς από μείζονα σε μείζονα,
- με την (5.45) παίρνουμε όλους τους μετασχηματισμούς από ελάσσονα σε ελάσσονα,
- με την (5.46) παίρνουμε όλους τους μετασχηματισμούς από μείζονα σε ελάσσονα,
- με την (5.47) παίρνουμε όλους τους μετασχηματισμούς από ελάσσονα σε μείζονα.

Οι συναρτήσεις P, L, R αντιστοιχούν σε δεξιό πολλαπλασιασμό με τις I_7, I_{11}, I_4. Συγκεκριμένα, για την P έχουμε: για $n = 0,1,...,11$:

$$P: \quad T_n\langle 0,4,7\rangle \;\mapsto\; T_n I_7\langle 0,4,7\rangle \quad \text{και} \quad I_n\langle 0,4,7\rangle \;\mapsto\; I_n I_7\langle 0,4,7\rangle\,, \tag{5.48}$$

για παράδειγμα,

$$T_0\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,4,7\rangle \overset{P}{\mapsto} T_0 I_7\langle 0,4,7\rangle = \langle 7,3,0\rangle \tag{5.49}$$

και

$$I_7\langle 0,4,7\rangle = \langle 7,3,0\rangle \overset{P}{\mapsto} I_7 I_7\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,4,7\rangle\,. \tag{5.50}$$

[7] Fiore, T. et al (2011).

Για την L έχουμε: για $n = 0, 1, ..., 11$:

$$L: \quad T_n\langle 0,4,7\rangle \;\mapsto\; T_nI_{11}\langle 0,4,7\rangle \quad \text{και} \quad I_n\langle 0,4,7\rangle \;\mapsto\; I_nI_{11}\langle 0,4,7\rangle\,, \tag{5.51}$$

για παράδειγμα,

$$T_0\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,4,7\rangle \overset{L}{\mapsto} T_0I_{11}\langle 0,4,7\rangle = \langle 11,7,4\rangle \tag{5.52}$$

και

$$I_{11}\langle 0,4,7\rangle = \langle 11,7,4\rangle \overset{L}{\mapsto} I_{11}I_{11}\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,4,7\rangle\,. \tag{5.53}$$

Για την R έχουμε: για $n = 0, 1, ..., 11$:

$$R: \quad T_n\langle 0,4,7\rangle \;\mapsto\; T_nI_4\langle 0,4,7\rangle \quad \text{και} \quad I_n\langle 0,4,7\rangle \;\mapsto\; I_nI_4\langle 0,4,7\rangle\,, \tag{5.54}$$

για παράδειγμα,

$$T_0\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,4,7\rangle \overset{R}{\mapsto} T_0I_4\langle 0,4,7\rangle = \langle 4,0,9\rangle \tag{5.55}$$

και

$$I_4\langle 0,4,7\rangle = \langle 11,7,4\rangle \overset{R}{\mapsto} I_4I_4\langle 0,4,7\rangle = \langle 0,4,7\rangle\,. \tag{5.56}$$

5.5 Εφαρμογή της δυϊκότητας των T/I και PLR στη μουσική ανάλυση

Μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει την δυϊκότητα των T/I, PLR και έχουμε εξετάσει τις δυϊκές ομάδες από αλγεβρικής πλευράς. Όμως, ποιά η χρησιμότητα της δυϊκότητας αυτής στην μουσική ανάλυση;

Λόγω της δυϊκότητας μεταξύ των T/I, PLR γνωρίζουμε ότι τα στοιχεία της T/I μετατίθενται με τα στοιχεία της PLR και ότι, μάλιστα, είναι τα μόνα στοιχεία της $Sym(S)$ με την ιδιότητα αυτή, και αντιστρόφως. Έτσι, όπως δείξαμε και στο Λήμμα 3.2.1, για κάθε $g \in T/I$, $h \in PLR$ και $s \in S$ έχουμε: $g\,h\,(s) = h\,g\,(s)$.

Μπορούμε να αποτυπώσουμε την δυϊκότητα γραφικά στο μεταθετικό διάγραμμα που ακολουθεί (Εικόνα 5.4):

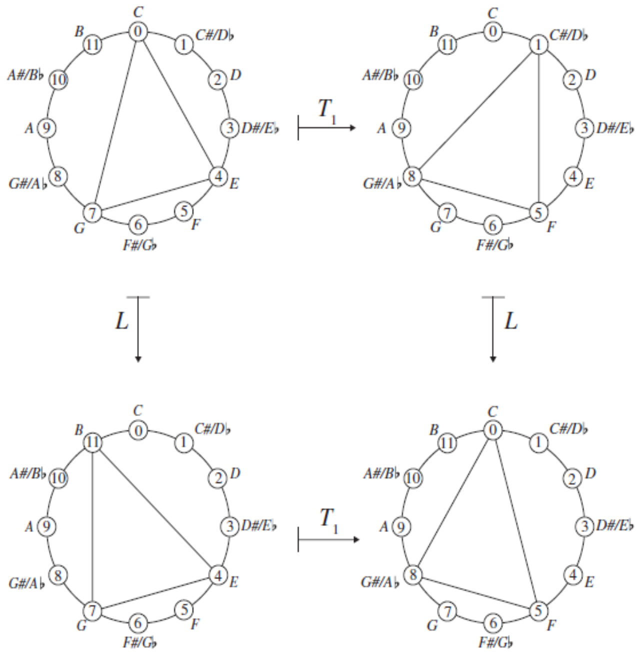
$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & S \arrow[d, "h"] \\
S \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}$$

Εικόνα 5.4: Το μεταθετικό διάγραμμα της δυϊκότητας των T/I και PLR.

Ας εξετάσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα με τους γεννήτορες $g = T_1$, $h = L$ πάνω στην $C^+ = \langle 0, 4, 7\rangle$:

$$T_1\, L\,(C^+) \;=\; L\, T_1\,(C^+). \tag{5.57}$$

Το αντίστοιχο (αναλυτικό) μεταθετικό διάγραμμα παρουσιάζεται στην Εικόνα 5.5.

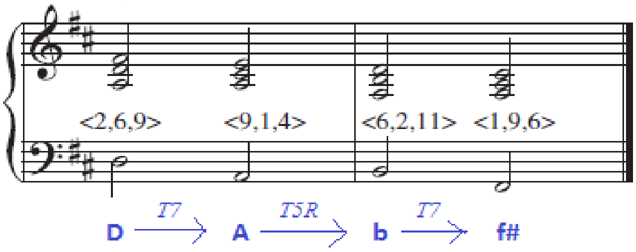


Εικόνα 5.5: Το μεταθετικό διάγραμμα για τα στοιχεία T_1, L.

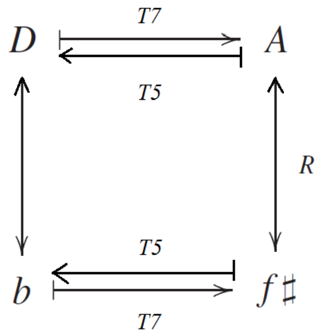
Παρατηρούμε πως όποιο μονοπάτι κι αν διαλέξει κανείς, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο. Γενικεύοντας, κάθε διάγραμμα με κορυφές στοιχεία του S, με κάθετα βέλη στην ομάδα PLR και οριζόντια βέλη στην ομάδα T/I θα μετατίθεται. Αυτή η σύνδεση των δύο ομάδων μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τα στοιχεία τους ταυτόχρονα στην ανάλυση των σχέσεων μεταξύ κάθε τετράδας συμφώνων τριάδων.

Παραθέτουμε τρία μουσικά παραδείγματα της δυϊκότητας μεταξύ των ομάδων T/I και PLR, προσαρμοσμένα από το [13].

Παράδειγμα 5.5.1 *(Η δυϊκότητα στον Pachelbel)*
Το πρώτο παράδειγμα είναι από τον Κανόνα σε D μείζονα του Johann Pachelbel (1653-1706). Η ακολουθία των τριάδων που φαίνεται στην Εικόνα 5.4 και αποτυπώνεται γραφικά στην Εικόνα 5.5 παρουσιάζεται σε 28 παραλλαγές μέσα στο έργο.

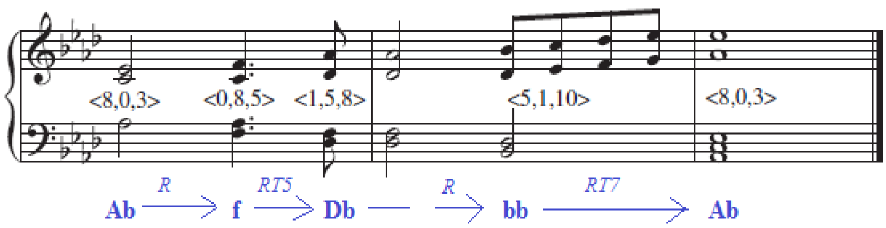


Εικόνα 5.6: Οι ακολουθίες των τριάδων στον Κανόνα σε D^+ του Pachelbel.

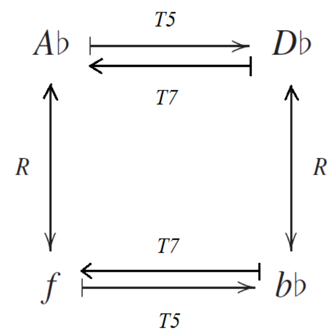


Εικόνα 5.7: Το μεταθετικό διάγραμμα για τα στοιχεία T_7, R.

Παράδειγμα 5.5.2 *(Η δυϊκότητα στον Wagner)*
Το δεύτερο παράδειγμα είναι από το θέμα Grail του Πρελούδιου στον Parsifal, Πράξη πρώτη, της ομώνυμης όπερας του Richard Wagner (1813-1883). Η ακολουθία των τριάδων φαίνεται στην Εικόνα 5.6 και αποτυπώνεται γραφικά στην Εικόνα 5.7.

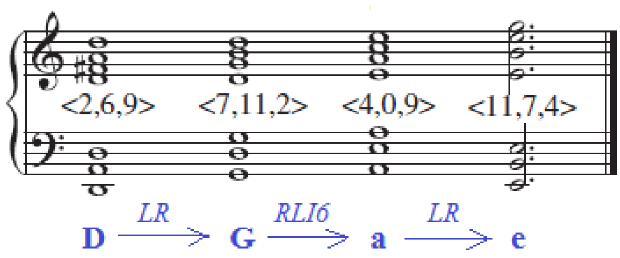


Εικόνα 5.8: Οι ακολουθίες των τριάδων στο "Grail" Theme του Wagner.

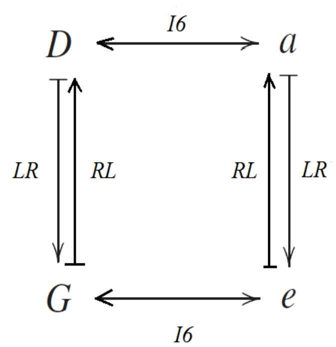


Εικόνα 5.9: Το μεταθετικό διάγραμμα για τα στοιχεία T_5, R.

Παράδειγμα 5.5.3 *(Η δυϊκότητα στον Ives)*
Το τρίτο παράδειγμα είναι από τα πρώτα μέτρα του "Religion", τραγουδιού για φωνή και πιάνο του Charles Ives (1874-1954). Η ακολουθία των τριάδων φαίνεται στην Εικόνα 5.8 και αποτυπώνεται γραφικά στην Εικόνα 5.9.



Εικόνα 5.10: Οι ακολουθίες των τριάδων στο "Religion" του Ives.



Εικόνα 5.11: Το μεταθετικό διάγραμμα για τα στοιχεία I_6, LR.

Συμπεράσματα - Επεκτάσεις

Εν κατακλείδι, με αφετηρία τη δουλειά παλαιοτέρων γνωστών μουσικολόγων (Riemann, Forte, Ξενάκης, Lewin) αλλά και συγχρόνων επιστημόνων (Cohn, Fiore, Satyendra, Noll) πραγματοποιήσαμε μία μελέτη της δράσης της διεδρικής ομάδας D_{12} πάνω στο σύνολο (S) των συμφώνων τριάδων. Όπως είδαμε, η D_{12} δρά απλά μεταβατικά πάνω στο S με δύο τρόπους: μέσω της ομάδας T/I (atonal group) και μέσω της ομάδας PLR (neo-Riemannian group). Αποδείξαμε ότι οι δύο δράσεις αυτές είναι δυϊκές. Επίσης, αναλύσαμε εκτενώς τα δύο γραφήματα Tonnetz και Chickenwire τα οποία αντικατοπτρίζουν την δράση της PLR πάνω στο S και δείξαμε ότι είναι δυϊκά γραφήματα. Κοινή προϋπόθεση για να καταλήξουμε στα παραπάνω συμπεράσματα αποτέλεσε η μετατροπή των φθόγγων σε ακεραίους αριθμούς και η οργάνωση τους σε 12 κλάσεις, οι οποίες αντιστοιχίζονται με την ομάδα Z_{12}. Συνδέοντας λοιπόν την δράση των δύο ομάδων πετύχαμε μία πρώτη συνένωση των δύο διαφορετικών μουσικών εργαλείων ανάλυσης που αυτές αντιπροσωπεύουν, με κοινό παρονομαστή τις σύμφωνες τριάδες.

Φυσικά, η μουσική δεν περιορίζεται μόνο στο πλαίσιο των συμφώνων τριάδων. Γι' αυτό έχουν πραγματοποιηθεί και ακόμη συνεχίζονται προσπάθειες για τη μελέτη τέτοιων δράσεων πάνω σε συγχορδίες μεθ' εβδόμης (συγχορδίες αποτελούμενες από τέσσερις νότες ως επέκταση των συμφώνων τριάδων) αλλά και μεθ' ενάτης (συγχορδίες αποτελούμενες από πέντε νότες). Επεκτάσεις μπορούν επίσης να γίνουν και προς την κατεύθυνση των διαφώνων συγχορδιών, διευρύνοντας έτσι το ρεπερτόριο προς ανάλυση.

Παρά τα ενθαρρυντικά αποτελέσματα που δίνει η εφαρμογή της θεωρίας ομάδων στην μουσική ανάλυση, δεν παύουν να υπάρχουν προβλήματα στην προσέγγιση αυτή. Τα προβλήματα αυτά αφορούν κυρίως θέματα σημειολογίας και αποσαφήνισης ορισμών. Επί παραδείγματι, ο συμβολισμός των μείζονων και ελάσσονων τριάδων γίνεται με δύο τρόπους, με κεφαλαία και μικρά γράμματα ή με τη βοήθεια της ομοτιμίας. Ο διπλός αυτός συμβολισμός μπορεί να προκαλέσει απορία σε έναν αναγνώστη μη εξοικειωμένο με τη μουσική ανάλυση. Εκτός αυτού, χρησιμοποιώντας τον πρώτο συμβολισμό για τις σύμφωνες τριάδες υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με τις ίδιες τις νότες, οι οποίες επίσης συμβολίζονται με γράμματα, ενώ χρησιμοποιώντας τον δεύτερο συμβολισμό για τις τριάδες ενδέχεται να υπάρχει σύγχυση με τις κλίμακες. Όσον αφορά εννοιολογικά ζητήματα, υπάρχουν αρκετοί όροι με διττή έννοια. Για παράδειγμα ο όρος «τόνος» υποδηλώνει την πρώτη νότα μίας κλίμακας (τονική) αλλά και το διάστημα μεταξύ δύο φθόγγων που αποτελείται από δύο ημιτόνια. Τέτοιου είδους προβλήματα οφείλονται στην διαφορετική φύση και ιστορική εξέλιξη των δύο πεδίων: της μουσικής και των μαθηματικών. Στις μέρες μας γίνεται προσπάθεια για την εξάλειψη τέτοιων διαφορών και τη θέσπιση ενός κοινού και σταθερού συστήματος όρων και συμβολισμών.

Τελικά, απώτερος σκοπός αυτής της μελέτης πέρα από τον προφανή, δηλαδή της σύνδεσης της άλγεβρας με την μουσική, ήταν η παρότρυνση για έρευνα προς την πλευρά αυτή. Παρόλο που στην υπόλοιπη Ευρώπη και την Αμερική ο διεπιστημονικός αυτός κλάδος βρίσκεται σε άνθιση τα τελευταία είκοσι χρόνια, στην χώρα μας αποτελεί μόνο ένα πολύ μικρό κομμάτι της ευρύτερης μουσικολογικής έρευνας. Η στροφή του ενδιαφέροντος προς αυτόν τον κλάδο μπορεί να γίνει εφικτή μόνο με τη συνεργασία και την ανταλλαγή γνώσεων μεταξύ μαθηματικών και μουσικολόγων για την εύρεση των κοινών σημείων μεταξύ της επιστήμης και της τέχνης.

Βιβλιογραφία

[1] Andreatta, M. On group theretical methods applied to music: some compositional and implementational aspects. Paris: Music Representation Team, IRCAM-Centre G.Pompidou.

[2] Andreatta, M., Amado, C.A., Noll, T. & Amiot, E. (2006) Towards Pedagogability of Mathematical Music Theory: Algebraic Models and Tiling Problems in computer-aided composition. London.

[3] Armstrong, M.A. (1988) *Groups and Symmetry*. New York: Springer-Verlag.

[4] Behringer, R. & Elliot, J. (2009) Linking Physical space with the Riemann Tonnetz for Exploration of Western Tonality. Leeds Metropolitan University.

[5] Chung, A.J. (2012) Lewinian Transformations, Transformations of Transformations, Musical Hermeneutics. Connecticut: Wesleyan University. (Bachelor Thesis).

[6] Cohn, R. (1998) Introduction to neo-Riemannian theory: A survey and a historical perspective. *Journal of Music Theory*. **42** (2), 167-180.

[7] Cohn, R (2007-2012) Lewin, David. *Oxford Music Online*.

[8] Cohn, R. (1996) Maximally Smooth Cycles. Hexatonic Systems and the Analysis of Late-Romantic Triadic Progressions. *Music Analysis*. **15** (1), (1996) 9-40.

[9] Cohn, R. (1997) neo-Riemannian operations, parsimonious trichords, and their Tonnetz representations. *Journal of Music Theory*. **41** (1), 1-66.

[10] Conrad, K. Lectures on Dihedral groups. Math. Department, University of Connecticut.

[11] Conrad, K. Lectures on Group actions. Math. Department, University of Connecticut.

[12] Conrad, K. Lectures on Transitive group actions. Math. Department, University of Connecticut.

[13] Crans, A.S., Fiore, T. & Satyendra, R. (2009) Musical actions of dihedral groups. *Amer. Math. Monthly*. 479-495.

[14] Douthett, J. & Steinbach, P. (1998) Parsimonious graphs: A study in parsimony, contextual transformations, and modes of limited transposition. *Journal of Music Theory*. **42** (2), 241-263.

[15] Fiore, T. (2011) Algebra problems for M.A.A. mini-course on geometry and algebra in music theory, Joint mathematics meeting in new Orleans.

[16] Fiore, T. (2007) Chicago REU lectures on mathematical music theory.

[17] Fiore, T. & Noll T. (2011) Commuting groups and the topos of triads. In Carlos Agon, Emannuel Amiot, Moreno Andreatta, Gerard Assayag, Jean Bresson, and John Mandereau, editors, *Proccedings of the 3rd International Conference Mathematics and Computation in Music - MCM 2011*, Lecture Notes in Computer Science, Springer.

[18] Fiore, T., Noll, T. & Satyendra, R. (2013) Incorporating voice permutations into the theory of neo-Riemannian groups and Lewinian duality, arXiv math.GR

[19] Fraleigh, J.B. (2010) *Εισαγωγή στην Άλγεβρα*. 7η έκδ. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

[20] Gollin, E. (1998) Some aspects of three dimentional *Tonnetze*. *Journal of Music Theory*. **42** (2), 195-206.

[21] Hyer, B. & Rehding, A. (2007-2012) Riemann, Hugo. *Oxford Music Online*.

[22] Kidd, M. (2006) *An Introduction to the Practical use of Music-Mathematics*. REU Project. University of Chicago.

[23] Lewin D.(1987) *Generalized Musical Intervals and Transformations*. New Haven: Yale University Press.

[24] Loy, G. (2006) *Musimathics: the mathematical foundations in music*. Cambridge: MIT Press.

[25] Machlis, J. & Forney, K. (1996) *Η απόλαυση της μουσικής: Εισαγωγή στην Ιστορία - Μορφολογία της Δυτικής μουσικής*. Αθήνα: Εκδόσεις Fagotto - Ν.Θερμός.

[26] Noll, T. (1999) Global Music Theory. Technical university of Berlin.

[27] Oshita, K. (2009) The hexatonic systems under neo-Riemannian theory: an exploration of the mathematical analysis in music. REU Project. University of Chicago.

[28] Redhing, A. *Hugo Riemann and the birth of modern musical thought.*

[29] Reitman, B. (2003) History of Mathematical Approaches to Western Music.

[30] Satyendra, R. (2004) An Informal Introduction to Some Formal Concepts from Lewin's Transformational Theory. *Journal of Music Theory.* **48** (1), 99-141.

[31] Sternberg, J. (2006) Conceptualizing Music through Mathematics and the Generalized Interval. REU Project. University of Chicago.

[32] Suciu, A. (2010) Group theory: The dihedral groups.

[33] Wright, D. Mathematics and Music.

[34] Zhang, A. (2009) The framework of music theory as represented with groups.

[35] Καλομοίρης, Μ. (1924) *Τα θεωρητικά της μουσικής: Στοιχειώδης Θεωρία* 2η έκδ. Αθήνα: Μουσικός και εκδοτικός οίκος ΓΑΪΤΑΝΟΥ.

[36] Καλομοίρης, Μ. (1933) *Αρμονία.* 2η έκδ. Αθήνα: Μουσικός και εκδοτικός οίκος ΓΑΪΤΑΝΟΥ.

[37] Κεχαγιάς, Ε. Σημειώσεις του μαθήματος *Εισαγωγή στη θεωρία ομάδων.* Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης.

[38] Λαμπροπούλου, Σ. Σημειώσεις του μαθήματος: Άλγεβρα και Εφαρμογές. Τομές Μαθηματικών, ΕΜΠ.

[39] Πάπιστας, Α. (2013) Σημειώσεις του μαθήματος: Θεωρία ομάδων. Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ.

[40] Τσούγκρας, Κ. Χρωματικές σχέσεις τριτών και συμμετρική διαίρεση της οκτάβας: Θεωρητική προσέγγιση και αναλυτική εφαρμογή στην αρμονική δομή του "Il Pensieroso" του Franz Liszt. Τμήμα Μουσικών Σπουδών, ΑΠΘ.

Παράρτημα

Οι μείζονες και ελάσσονες κλίμακες

Μία ακολουθία από φθόγγους σε συνεχή (ανιούσα ή κατιούσα) διαδοχή ονομάζεται κλίμακα. Η πρώτη νότα μίας κλίμακας ονομάζεται τονική και αποτελεί το κέντρο γύρω από το οποίο κατασκευάζεται ένα τονικό έργο. Οι διατονικές κλίμακες είναι δύο ειδών: οι μείζονες και οι ελάσσονες. Παρακάτω θα τις ορίσουμε αλγεβρικά ως διατεταγμένα υποσύνολα του $\mathbb{Z}_{12}$.

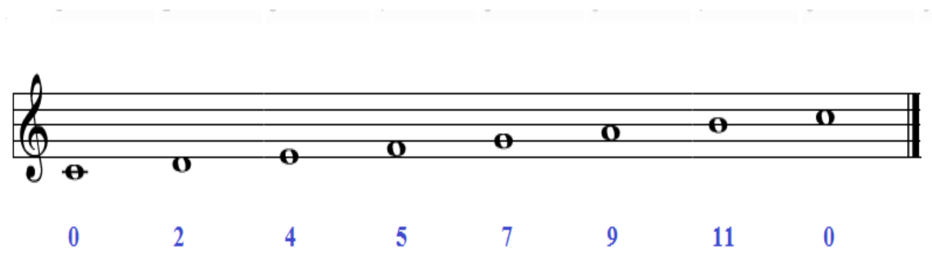
Ορισμός 7.0.1 *(Μείζονα κλίμακα)*
Θεωρούμε μία (ανιούσα) *μείζονα κλίμακα (Major Scale)* ως το διατεταγμένο σύνολο MS:

$$MS = \langle n, n+2, n+4, n+5, n+7, n+9, n+11, n\rangle (\mathrm{mod}\, 12)\ ,\ n \,\epsilon\, \mathbb{Z}_{12}\,. \tag{7.58}$$

Παράδειγμα 7.0.4 *(Ντο μείζονα)*
Για $n = 0$ παίρνουμε τη γνωστή κλίμακα Ντο μείζονα (C Major):

$$C\,Scale = \langle 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 0\rangle\,,$$

η οποία φαίνεται αποτυπωμένη στο πεντάγραμμο στην Εικόνα .



Εικόνα 7.1: Η κλίμακα Ντο μείζονα.

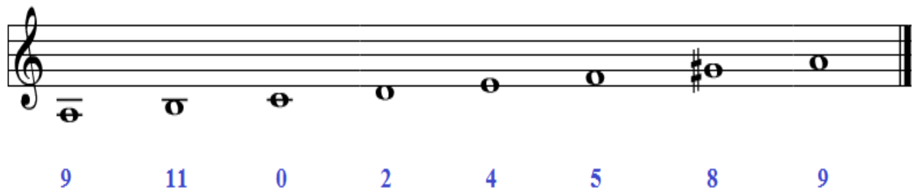
Ορισμός 7.0.2 *(Ελάσσονα κλίμακα)*
Θεωρούμε μία (ανιούσα) *ελάσσονα*[8] *κλίμακα (Minor Scale)* ως το διατεταγμένο σύνολο mS:

$$mS = \langle n, n+2, n+3, n+5, n+7, n+8, n+11, n \rangle (\mathrm{mod}\, 12)\ ,\ n \,\epsilon\, \mathbb{Z}_{12}\,. \quad (7.59)$$

Παράδειγμα 7.0.5 *(λα ελάσσονα)*
Για $n = 9$ παίρνουμε τη γνωστή κλίμακα λα ελάσσονα (a minor), σχετική της Ντο μείζονας:

$$a\, Scale = \langle 9, 11, 0, 2, 4, 5, 8, 9 \rangle\ ,$$

η οποία φαίνεται αποτυπωμένη στο πεντάγραμμο στην Εικόνα .



Εικόνα 7.2: Η κλίμακα λα ελάσσονα.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι από κάθε νότα (κλάση φθόγγων) μπορεί να ξεκινήσει μία μείζονα και μία ελάσσονα κλίμακα. Συνολικά λοιπόν, παίρνουμε 12 μείζονες και 12 ελάσσονες κλίμακες.

[8]Με τον όρο ελάσσονα εννοούμε την αρμονική ελάσσονα.