Το Παράδοξο του Banach-Tarski προεκτάσεις και συνέπειες

Κιουβρέκης Ιωάννης

July 16, 2008

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 0

Τα απαραίτητα

Η δυσπιστία που έχουν οι Μαθηματικοί σε θεωρήματα που έρχονται σε πλήρη αντίθεση με τις διαισθητικές μας αντιλήψεις εμφανίζεται από την απαρχή των Μαθηματικών. Οι αρχαίοι Έλληνες πίστευαν ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι η μόνη γεωμετρία που αναπαριστά πιστά το σύμπαν το οποίο ζούμε, φανταστείτε πόσο παράδοξο φαινόταν ότι η άρνηση του πέμπτου αξιώματος οδηγεί σε συνεπείς θεωρίες. Η συνολοθεωρία είναι άλλος ένας τομέας των μαθηματικών όπου τα διαισθητικά παράδοξα όχι μόνο υπάρχουν αλλά τρέφουν τη θεωρία με πολύ ισχυρά θεωρήματα. Η έννοια της ισοπληθικότητας όπως την όρισε ο Cantor αμέσως έδωσε μια πρόταση που ήταν τόσο πολύ μακρυά από την εποπτεία μας που ακόμα και σήμερα εντυπωσιάζει τους νεαρούς ερασιτέχνες και μη Μαθηματικούς...

Το σύνολο των άρτιων αριθμών είναι ισοπληθικό με το σύνολο των φυσικών.

Απλά υπέροχο δεν συμφωνείτε? Φανταστείτε λοιπόν να σας έλεγε κάποιος ότι μπορείτε να σας δώσουν μία μπάλα ποδοσφαίρου να την κόψετε σε κομμάτια και να τα κολλήσετε έτσι ώστε να έχετε δύο μπάλες σαν την πρώτη!!!Αδύνατο. Τα Μαθηματικά μας επιφυλάσσουν πολλές εκπλήξεις, παράδοξα, σίγουρα ένα από τα πιο εντυπωσιακά είναι το παράδοξο των Banach και Tarski.

Κάθε συμπαγής σφαίρα στον $\mathbb{R}$ είναι δυνατόν να την διαμερίσουμε σε πεπερασμένα το πλήθος κομμάτια (σύνολα) και να τα ανακατασκευάσουμε έτσι ώστε να πάρουμε δύο συμπαγείς σφαίρες ίσιου μεγέθους με την πρώτη.

Στο πρώτο κεφάλαιο θα αναφέρουμε τα βασικά εργαλεία που θα μας χρησιμεύσουν στη κατανόηση του "παραδόξου" (θεωρήματος) των Banach και Tarski. Θα επικεντρωθούμε περισσότερο στη κατανόηση και μελέτη της έννοιας της ελεύθερης ομάδα και των ιδιοτήτων των ελεύθερων ομάδων. Οι ελεύθερες ομάδες διαδραματίζουν θεμελιακό ρόλο στις βασικές αποδείξεις που θα μελετήσουμε στα επόμενα καφάλαια.

0.1 Δράδη ομάδας

Ορισμός 0.1. (Δράση ομάδας)΄Εστω X ένα σύνολο και G μια ομάδα. *Δράση* της G πάνω στο X λέμε μια απεικόνιση $* : G \times X \to X$ τέτοια ώστε:

(a) $*(e, x) = x$ για κάθε $x \in X$ θα γράφουμε $ex = x$ ή $e \cdot x = x$ αντί για $*(e, x) = x$

(b) $*(g_1 g_2, x) = *(g_1, *(g_2, x))$ θα γράφουμε $g_1 g_2 x = g_1(g_2 x)$.
Τότε θα λέμε ότι το X είναι ένα *G-σύνολο.*

΄Εστω X ένα G-σύνολο . ΄Εστω $x \in X$ και $g \in G$ τότε θεωρούμε τα σύνολα:

$$X_g = \{x \in X \quad | \quad gx = x\} \quad \text{και} \quad G_x = \{g \in G \quad | \quad gx = x\}.$$

Θεώρημα 0.1. *Άν X είναι ένα G-σύνολο τότε το G_x είναι υποομάδα της G για κάθε $x \in X$, η οποία λέγεται υποομάδα ισοτροπίας του x.*

Θεώρημα 0.2. *΄Εστω X ένα G-σύνολο .Άν $x_1, x_2 \in X$ ορίζουμε $x_1 \sim x_2$ αν και μόνο αν υπάρχει $g \in G$ με $gx_1 = x_2$.Η $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας .*

Γνωρίζουμε ότι κάθε σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο X δημιουργεί μια διαμέριση του X σε ξένα ανα δύο υποσύνολα του , έτσι έρχεται φυσιολογικά ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 0.2. (Τροχιά) Έστω X ένα G-σύνολο . Κάθε υποσύνολο της διαμέρισης που ορίζει η σχέση ισοδυναμίας που ορίσαμε πιο πάνω λέγεται *τροχιά* στο X υπό την G. Άν $x \in X$, τότε το υποσύνολο που περιέχεται το x λέγεται τροχιά του x και συμβολίζεται με Gx .

0.2 Ελεύθερες Ομάδες

Ορισμός 0.3. *Αν X είναι υποσύνολο μιας ομάδας F τότε η F είναι ελεύθερη ομάδα με βάση το X άν για κάθε ομάδα G και κάθε συνάρτηση f με $f : X \to G$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός φ με $\varphi : F \to G$ με $f(x) = \varphi(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Ο ορισμός αυτός της ελεύθερης ομάδας δεν βοηθάει και πολύ στο να κατανοήσουμε τι είναι μια ελεύθερη ομάδα, αλλά όπως όλοι οι ορισμοί στα Μαθηματικά έτσι και αυτός δεν ήρθε ουρανοκατέβατος. Θα δούμε στη συνέχεια γιατι ορίσαμε έτσι την ελεύθερη ομάδα.

Δώσαμε τον ορισμό της ελεύθερης ομάδας αλλά δεν έχουμε εξασφαλίσει την ύπαρξη τουλάχιστον μιας ομάδας που να ικανοποιεί τις προυποθέσεις του ορισμού. Θα κατασκευάσουμε μια ελεύθερη ομάδα ως εξής Έστω X ένα μη-κενό σύνολο και έστω ένα σύνολο X^{-1} (το αντίγραφο του X) έτσι ώστε $X \cap X^{-1} = \emptyset$ και $X =_c X^{-1}$ δηλαδή υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το X στο X^{-1} με $x \mapsto x^{-1}$.

Ορίζουμε το **αλφάβητο** στο X να έιναι το σύνολο $X \cup X^{-1}$. Άν n είναι ένας θετικός ακέραιος ορίζουμε ως **λέξη** στο X **μήκους** $n \geqslant 1$ μια συνάρτηση από

$w : \{1, 2, ..., n\} \to X \cup X^{-1}$. Για λόγους ευκολίας θα γράφουμε τη τυχούσα λέξη w μήκους n ως εξής :

$$w = x_1^{e_1}....x_n^{e_n} \text{ όπου } x_i \in X, e_i \in \{-1, 1\} \text{ και } w(i) = x_i^{e_i}.$$

Το μήκος n μιας λέξης w θα συμβολίζεται με $|w|$. Η κενή λέξη με 1 (είναι ενα νέο σύμβολο, δεν ανήκει στο X) και το μήκος της κενής λέξης είναι 0. Κάθε λέξη αναπαριστάται μοναδικά από μια συμβολοσειρά και αυτό έξασφαλίζεται από την ισότητα των συναρτήσεων. Τέλος αν $u = x_1^{e_1}...x_n^{e_n}$ και $v = y_1^{l_1}...y_m^{l_m}$ δύο λέξεις η **παράθεση** τους είναι η λέξη $uv = x_1^{e_1}...x_n^{e_n}y_1^{l_1}...y_m^{l_m}$

Η βασική ιδέα της κατασκευής μιας ελεύθερης ομάδας F με βάση το X είναι αρκετά απλή. Τα στοιχεία της F είναι οι λέξεις στο X με διμελή πράξη την παράθεση λέξεων και ταυτοτικό στοιχείο την κενή λέξη 1. Όμως παρουσιάζεται ένα πρόβλημα , εμείς θα θέλαμε $xx^{-1} = 1$ αλλα δεν είναι έτσι διότι η λέξη xx^{-1} έχει μήκος 2 ενώ η λέξη 1 έχει μήκος 0. Το πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί αν θέταμε την F ως το σύνολο των ανάγωγων λέξεων, όμως και εδω παρουσιάζεται ένα πρόβλημα γιατί π.χ. αν u, v είναι ανάγωγες λέξεις η uv δεν είναι κατ'ανάγκη ανάγωγη. Τελικά το πρόβλημα της επιλογής του συνόλου F που θα ικανοποιεί τις προυποθέσεις λύνεται αν θέσουμε ως F ενα σύνολο που τα στοιχεία του είναι κλάσσεις ισοδυναμίας υποσύνολα του συνόλου όλων των λέξεων του X.

Οι παρακάτω ορισμοί είναι πολύ σημαντικοί για την κατανόηση του τρόπου κατασκευής της ζητούμενης ελεύθερης ομάδας.

Ορισμός 0.4. *Έστω A, B λέξεις στο X ,$w = AB$ και $w' = Aaa^{-1}B$. Ορίζουμε τους στοιχειώδεις τελεστές της παρεμβολής και της διαγραφής στο σύνολο των λέξεων του X ώς εξής: Για κάθε $a \in X \cap X^{-1}$ ο τελεστής παρεμβολής Π_a είναι $\Pi_a(w = AB) = Aaa^{-1}B$ και ο τελεστής διαγραφής $D_a(w') = AB$. Θα γράφουμε $w \to w'$ αν η λέξη w' προκύπτει από την w μέσω ενός στοιχειώδη τελεστή.*

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των λέξεων ώς εξής:

$$u \sim v \Leftrightarrow_{o\rho} \exists u = w_1, w_2, ..., w_n = v \text{ λέξεις τέτοιες ώστε :}$$
$$u = w_1 \to w_2 \to ... \to w_n = v \text{ (ακολουθία μετάβασης)}$$

Θα συμβολίζουμε τη κλάση του w με $[w]$

Το παρακάτω λήμμα είναι πολύ χρήσιμο για την κατασκευή της ελεύθερης ομάδας.

Λήμμα 0.1. *Έστω X ένα σύνολο και $W(X)$ το σύνολο των λέξεων του X (άν το $X = \emptyset$ τότε $W(X) = \{\emptyset\}$)*

1. *Υπάρχει το ταυτοτικό στοιχείο στο $W(X)$, με διμελή πράξη την παράθεση των λέξεων.*
2. *Άν $u \sim v$ και $u' \sim v'$ τότε $uu' \sim vv'$*
3. *Άν G ομάδα και $f : X \to G$ τότε υπάρχει ένας ομομορφισμός $\tilde{f} : W(X) \to G$ ο οποίος επεκτείνει την f έτσι ώστε αν $u \sim u'$ τότε $\tilde{f}(u) = \tilde{f}(u')$ στην G.*

Απόδειξη. Τα 1)και 2) είναι άμεσες συνέπειες των ορισμών η απόδειξη του 3) είναι που παρουσιάζει ενδιαφέρον. Άν $w = x_1^{e_1}...x_n^{e_n}$ τότε ορίζουμε

$$\tilde{f}(w) = f(x_1)^{e_1} f(x_2)^{e_2} ... f(x_n)^{e_n}$$

Η $\tilde{f}$ είναι καλά ορισμένη λόγω της μοναδικής γραφής της w. Το οτιη $\tilde{f}$ είναι ομομορφισμός προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της. 'Εστω $w \sim w'$. Θα αποδείξουμε με επαγωγή στο μήκος της ακολουθίας $w \to ... \to w'$ οτι $\tilde{f}(w) = \tilde{w}'$. 'Εστω $w \sim w'$ με το μήκος της ακολουθίας μετάβασης να είνα 1 και έστω οτι ο τελεστής (μετάβασης) της διαγραφής $w = Aaa^{-1} \to w' = AB$ δηλαδή $D_a(w) = w'$. Η $\tilde{f}$ είναι ομομορφισμός άρα

$$\tilde{f}(Aaa^{-1}B) = \tilde{f}(A)\tilde{f}(a)\tilde{f}(a^{-1})\tilde{f}(B)$$

όμως

$$\tilde{f}(A)\tilde{f}(a)\tilde{f}(a^{-1})\tilde{f}(B) = \tilde{f}(A)\tilde{f}(B)$$

αφού είναι στοιχεία της G, άρα αφού f ομομορφισμός έχουμε

$$\tilde{f}(Aaa^{-1}B) = \tilde{f}(AB)$$

Αντίστοιχα επιχειρήματα χρισημοποιούμε και για τον τελεστή παρεμβολής και για το επαγωγικό βήμα. □

Πρόταση 0.1. *Κάθε λέξη $w \in W(X)$ είναι ισοδύναμη με μία ανάγωγη λέξη, η οποία είναι μοναδική δηλαδή άν $w \sim u$, $w \sim v$ και u, v είναι ανάγωγες τότε $u = v$.*

Θεώρημα 0.3. *Έστω X ένα σύνολο τότε το σύνολο F όλων των κλάσεων ισοδυναμίας του $W(X)$ είναι ελεύθερη ομάδα επί του X με διμελή πράξη $[u][v] = [uv]$ και κάθε στοιχείο της F έχει κανονική μορφή, δηλαδή $\forall [u] \in F$ υπάρχει μια μοναδική ανάγωγη λέξη w έτσι ώστε $[u] = [w]$.*

Απόδειξη. ῐν το $X = \emptyset$, τότε $W(X\emptyset) = \{1\}$ άρα και $F = \{1\}$. Η F είναι τετριμμένα μια ελεύθερη ομάδα. Έστω οτι το $X \neq \emptyset$,στο Λήμμα 0.1 δείξαμε η παράθεση λέξεων είναι σέβεται την σχέση ισοδυναμίας $\sim_w$ άρα η διμελής πράξη που ορίσαμε για κάθε $[u], [v] \in F$ $[u][v] = [uv]$ είναι καλά ορισμένη (ως συνάρτηση δύο μεταβλητών). Η διμελής πράξη στη F είναι προσεταιριστική λόγω της προσεταιριστικότητας της παράθεσης λέξεων στη $W(X)$:

$$\begin{aligned} [u]([w][v]) &= [u][wn] \\ &= [u(wn)] \\ &= [(uw)n] \\ &= [uw][n] \\ &= ([u][w])[n] \end{aligned}$$

Το σύνολο F είναι ομάδα διότι:

Το ουδέτερο στοιχείο υπάρχει και είναι η κλάση $[xx^{-1}] = [1]$ με $x \in W(X)$ και το αντίστροφο στοιχείο για το $[w]$ είναι το $[w^{-1}]$

Το ζητούμενο τώρα είναι να αποδείξουμε ότι η F είναι ελεύθερη ομάδα. ῒν $[w] \in F$, τότε:

$$[w] = [x_1^{e_1}...x_n^{e_n}] = [x_1^{e_1}]...[x_n^{e_n}]$$

φαίνεται λοιπόν ότι η F παράγεται από το X ταυτίζοντας ουσιαστικά το κάθε x με το $[x]$). Από πρόταση 0.1 έπεται ότι για κάθε $[w]$ υπάρχει μοναδική ανάγωγη λέξη u τέτοια ώστε $[w] = [u]$. Για να αποδείξουμε ότι η F είναι ελεύθερη ομάδα με βάση το X, έστω $f : X \to G$ συνάρτηση από το X σε μία G ομάδα. Ορίζουμε $\varphi : F \to G$ ώς εξής:

$$\varphi : [x_1^{e_1}][x_2^{e_2}]...[x_n^{e_n}] \mapsto f(x_1)^{e_1} f(x_2)^{e_2}...f(x_n)^{e_n}$$

όπου $x_1^{e_1}x_2^{e_2}...x_n^{e_n}$ είναι ανάγωγη. Το γεγονός ότι η φ είνια κλά ορισμένη έπεται από το ότι κάθε λέξη έχει μοναδική ανάγωγη ισοδύναμη έκφραση. Στο Λήμμα 0.1 ορίσαμε την $\tilde{f}$ και έιναι προφανές ότι,

$$\varphi([w]) = \tilde{f}(w)$$

Το μόνο που μας απομένει να δείξουμε είναι οτι η φ είναι ομομορφισμός (μάλιστα ο μοναδικός ομομορφισμός που επεκτείνει την f διότι το X παράγει την F). Έστω $[u],[v] \in F$ όπου u, v ανάγωγες λέξεις, και έστω $uv \sim_w w$ όπου w και αυτή ανάγωγη,

$$\varphi([u][v]) = \varphi([w]) = \tilde{f}(w),$$

γιατί η w είναι ανάγωγη, και

$$\varphi([u])\varphi([v]) = \tilde{f}(u)\tilde{f}(v),$$

γιατί οι u, v είναι ανάγωγες. Τέλος,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u)\tilde{f}(v) &= \tilde{f}(w), \Lambda\mu\mu\alpha 0.1(3) \\ \varphi([u][v]) &= \varphi([u])\varphi([v]) \end{aligned}$$

$\square$

Αποδείξαμε ότι για κάθε σύνολο X υπάρχει μια ελεύθερη ομάδα με βάση το X.

Τώρα μπορούμε να δώσουμε ένα ισοδύναμο ορισμο των ελεύθερων ομάδων με τον ορισμό 0.3

Ορισμός 0.5. *Μια ομάδα F ονομάζεται ελεύθερη πάνω από ένα υποσύνολο S $S \subseteq G \setminus \{1\}$ αν κάθε στοιχείο $g \in G \setminus \{1\}$ έχει μοναδική αναπαράσταση*

$$g = x_1 x_2 ... x_n$$

με $x_i \in < e_i > \setminus \{1\}$, $e_i \in S$ για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ και $e_i \neq e_j$ για $i \neq j$ και $i, j \in \{1, ..., n\}$.

Έστω I ένα σύνολο (σύνολο δεικτών εδώ) και $\{G_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια ομάδων τότε το σύνολο $G = \prod G_i$, που είναι το καρτεσιανό γινόμενο των G_i, περιέχει όλες τις οικογένειες (συνόλων) $\{x_i\}_{i \in I}$ με $x_i \in G_i \forall i \in I$. Μπορούμε να ορίσουμε δομή ομάδας στο σύνολο G με διμελή πράξη τον "πολ/μό" κατα συντεταγνένη δηλαδή αν $a = \{x_i\}_{i \in I}$ και $b = \{y_i\}_{i \in I}$ δύο στοιχεία της G τότε

$ab = \{x_i y_i\}_{i\in I}$ και προφανώς για κάθε στοιχείο $\{x_i\}_{i\in I}$ της G το αντίστροφο είναι το $\{x_i^{-1}\}_{i\in I}$. Ο ορισμός του γινομένου δύο ομάδων επεκτείνεται και στις ελεύθερες ομάδες, ο ορισμός ο οποίος διαφέρει από τον ορισμό γινομένου δύο ομάδων.

Ορισμός 0.6. *Έστω G καιH ομάδες,μια ομάδα F λέγεται το ελεύθερο γινόμενο των G, H άν υπάρχουν ομομορφισμοί $f_1 : G \to F$ και $f_2 : H \to F$ οι οποίοι ικανοποιούν την εξής πρόταση : Για κάθε ομάδα N και ομομορφισμούς $g_1 : G \to N$ και $g_2 : H \to N$ υπάρχει ένας και μοναδικός ομομορφισμός $h : F \to N$ τέτοιος ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"'] & N \\
F \arrow[ur, "h"] & H \arrow[l, "f_2"'] \arrow[u, "g_2"']
\end{tikzcd}$$

Ο ορισμός αυτός δεν εξασφαλίζει ούτε την μοναδικότητα ούτε την ύπαρξη της ομάδας(ελεύθερο γινόμενο). Με τον όρο μοναδικότητα εννοούμε ότι αν δύο ομάδες M, N είναι το ελεύθερο γινόμενο δύο ομάδων G_1 και G_2, τότε οι M, N είναι ισόμορφες. Η μοναδικότητα αλλα και η ύπαρξη αποδεικνύονται στα επόμενα δύο θεωρήματα, μάλιστα στο θεώρημα ύπαρξης παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον η μέθοδος κατασκευής του ελεύθερου γινομένου, επίσης δίνεται μια ξεκάθαρη εικόνα για τη δομή της ομάδας αυτής. Στην απόδειξη της μοναδικότητας θα χρειαστούμε το παρακάτω Λήμμα

Λήμμα 0.2. *Έστω A, B δύο σύνολα και f, g συναρτήσεις με $f : A \to B$ και $g : B \to A$ τέτοιες ώστε $f \circ g = Id_B$ και $g \circ f = Id_A$ τότε οι f, g είναι αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις.*

Απόδειξη. Έστω $\beta_1 \neq \beta_2 \in B$, από υπόθεση έχουμε ότι $\beta_1 = f \circ g(\beta_1) \neq f \circ g(\beta_2) = \beta_2 \Longrightarrow g(\beta_1) \neq g(\beta_2)$ άρα η g είναι $1-1$. Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι η f είναι $1-1$. Έστω $\alpha \in A \Rightarrow \alpha = g \circ f(\alpha) = g(f(\alpha)) = g(\beta)$ για κάποιο $\beta \in B$, άρα η g είναι επί. Αντίστοιχα για f

□

Θεώρημα 0.4. Μοναδικότητας *Έστω F και K ομάδες ελεύθερα γινόμενα των G, H. Τότε οι F και K είναι ισομορφικές.*

Απόδειξη. Έστω G, H ομάδες και F, K δύο ομάδες, ώστε η κάθεμια είναι ελεύθρο γινόμενο των G, H, τότε από τον ορισμό 0.6 υπάρχουν f_1, f_2 ομομορφισμοί που ικανοποιούν το αίτημα ώστε η F να είναι το ελεύθερο γινόμενο των G, H και αντίστοιχα υπάρχουν ομομορφοσμοί k_1, k_2 που ικανοποιούν το αίτημα ώστε η K να είναι και αυτή ελεύθερο γινόμενο των G, H. Από υπόθεση υπάρχουν μοναδικοί f και k ομορφισμοί τέτοιοι ώστε τα παρακάτω διαγράμματα να είναι μεταθετικά

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "f_1"'] & K \\ F \arrow[ur, "f"] & H \arrow[l, "f_2"] \arrow[u, "k_2"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "k_1"'] & F \\ K \arrow[ur, "k"] & H \arrow[l, "k_2"] \arrow[u, "f_2"'] \end{tikzcd}$$

□

Χρησιμοποιόντας το προηγούμενο λήμμα αρκεί να δείξουμε ότι $k \circ f = Id_F$ και $f \circ k = Id_K$. Για να το αποδείξουμε χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η F είναι ελεύθερο γινόμενο των G, H άρα και το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_1"'] & F \\
F \arrow[ur, "h"] & H \arrow[l, "f_2"] \arrow[u, "f_2"']
\end{tikzcd}$$

από το τελευταίο διάγραμμα έχουμε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση τέτοια ώστε $h \circ f_i = f_i$ για $i = 1, 2$ και τα δύο προηγούμενα $k \circ f \circ f_i = k \circ k_i = f_i$

άρα $h = k \circ f$. Αντικαθιστώντας στο τρίτο σχεδιάγραμμα την Id_F το διάγραμμα είναι μεταθετικό μιας και $Id_F \circ f_i = f_i$ για $i = 1, 2$ και από μοναδικότητα του ομομορφισμού έπεται ότι $k \circ f = Id_F$. Αντίστοιχα αποδεικνύουμε ότι $f \circ k = Id_K$.

Θεώρημα 0.5. Ύπαρξης*Για κάθε ζεύγος ομάδων G, H υπάρχει το ελεύθερο γινόμενο τους F.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $G \cap H = set$(αλλιώς αντικαθιστούμε την G με μία ισομορφική G' τέτοια ώστε $G' \cap H = \emptyset$). Έστω $U = G \cup H$ και S το σύνολο όλων των λέξεων του U, δηλαδή όλες οι πεπερασμένς ακολουθίες της μορφής

$$g = g_1 g_2 ... g_n$$

όπου $g_i \in G \cup H$ για κάθε $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Η κενή λέξη () θα τη συμβολίζουμε και εδώ με 1, στη περίπτωση πού το $n = 0$. Το γινόμενο δύο λέξεων gh ορίζεται ως η παράθεση λέξεων με το ταυτοτικό στοιχείο να είναι η κενή λέξη και το αντίστροφο στοιχείο για μια λέξη $g = g_1 g_2 ... g_n$ να είναι η $g^{-1} = g_1^{-1} g_2^{-1} ... g_n^{-1}$ με $1^{-1} = 1$. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο σύνολο S ώς εξής: δύο λέξεις θα είναι ισοδύναμες $g \sim h$ ανν μπορούμε να πάρουμε την h από τη g αν υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών τελεστών $T_1, T_2, ..., T_n$ έτσι ώστε $T_n \circ ... \circ T_2 \circ T_1(g) = h$. Οι στοιχειώδης αυτοί τελεστές είναι:

1. ο τελεστής της διαγραφής Δ_α για κάποιο $\alpha \in G \cup H$, δηλαδή αν η λέξη είναι της μορφής $g_1 ... g_{k-1} g_k g_{k+1} g_{k+2} ... g_n$ και $g_{k+1} = g_k^{-1}$ τότε $\Delta_{g_k}(g) = g_1 ... g_{k-1} g_{k+2} ... g_n$.

2. ο τελεστής της παρεμβολής Π_α για κάποιο $\alpha \in G \cup H$, δηλαδή αν η λέξη είναι της μορφής $g_1 ... g_k g_{k+1} ... g_n$ τότε $\Pi_\alpha^{k+1}(g) = g_1 ... g_k \alpha \alpha^{-1} g_{k+1} ... g_n$ (το $k+1$ δηλώνει σε ποια θέση παρεμβάλεται*γιατί οχι στον προηγουμενο)

3. ο τελεστής συστολής Σ_{ab}, αν g λέξη της μορφής $g = g_1 ... g_{m-1} a b g_{m+2} ... g_n$ με a και $b \in L$ ($L = G$ ή $L = H$) και $\alpha\beta = c$, τότε $\Sigma_{ab}(g) = g_1 ... g_{m-1} c g_{m+2} ... g_n$.

4. ο τελεστής επέκτασης E_c , αν g λέξη της μορφής $g = g_1 ... g_{m-1} c g_{m+2} ... g_n$ και $ab = c$ με a και $b \in L$ ($L = G$ ή $L = H$), τότε $\Sigma_{ab}(g) = g_1 ... g_{m-1} a b g_{m+2} ... g_n$.

Είναι προφανές ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο S. Έστω C το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας στο S, θα συμβολίζουμε με $[g]$ τη κλάση του g. Όπως και πριν (*ελεύθερες ομάδες) είναι τετριμμένο να δείξουμε ότι αν $g \sim g'$ και $h \sim h'$ τότε $gh \sim g'h'$ και $g^{-1} \sim h^{-1}$. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί να ορίσουμε τη προφανή διμελή πράξη στο C

$$[g][h] = [gh] \text{ και } [g]^{-1} = [g^{-1}]$$

με ταυτοτικό στοιχείο $e = [1]$. Το επόμενο μας βήμα είναι να δείξουμε ότι οι ομομορφισμοί i_G και i_H που ορίζονται ώς εξής

$$i_G : G \to C \text{ με } i_G(x) = [x]$$

$$\text{και}$$

$$i_H : H \to C \text{ με } i_H(x) = [x]$$

ικανοποιούν το αίτημα του ορισμού του ελεύθερου γινομένου. Έστω.......

$\square$

0.3 Στοιχεία από Θεωρία Μέτρου

Ορισμός 0.7. σ-Άλγεβρα *Μία οικογένια C υποσυνόλων ενός συνόλου X λέγεται σ-άλγεβρα στο X αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. $X \in C$
2. *άν* $A \in C$ *τότε* $X \setminus A \in C$
3. *άν* $A_n \in C$ *για κάθε* $n \in I\!N$, *τότε* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in C$

Ορισμός 0.8. *Έστω X ένα σύνολο και C μια σ-άλγεβρα στο X. Μια συνάρτηση μ*

$$\mu : C \to [0, +\infty)$$

λέγεται αριθμήσιμα προσθετικό ή σ-προσθετικό μέτρο άν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. $\mu(\emptyset) = 0$, *και*
2. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$

Παράδειγμα 0.1. *Έστω X ένα σύνολο και A μια σ-άλγεβρα στο X τότε η συνάρτηση μ ορισμένη*

$$\mu(Y) = \begin{cases} n & \text{αν το } Y \text{ έχει ακριβώς } n \text{ στοιχεία} \\ \infty & \text{άν το } Y \text{ είναι άπειρο} \end{cases}$$

είναι αριθμήσιμα αθροιστικό μέτρο.

0.4 Αξίωμα Επιλογής

Ίσως το πιο αμφιλεγομένο αξίωμα που πρότεινε ο Zermelo είναι το Αξίωμα της επιλογής.

Κεφάλαιο 1

G-paradoxical and Groups

Μελετώντας το παράδοξο των Banach-Tarski παρουσιάζονται στον μελετητή πολλές και ευχάριστες εκπλήξεις οι οποίες δίνουν τροφή για πολλές συζητήσεις. Μία από τις πιο σημαντικές είναι η χρήση αλγεβρικών και γεωμετρικών μεθόδωνγια την κατασκευή παράδοξων σε καταστάσεις που φαίνεται αδύνατο. Σε αυτο το κεφάλαιο θα δούμε πώς με καθαρά αλγεβρικές μεθόδους αποδεικνύουμε την μη-ύπαρξη συγκεκριμένων μέτρων.

1.1 G-paradoxical actions

Ορισμός 1.1. *Έστω G ομάδα που δρά σε ένα σύνολο X και $E \subseteq X$. Το E λέγεται $G-paradoxical$ εάν υπάρχουν ξένα ανα δύο υποσύνολα $A_1, ...An, B_1, ..., B_m$ του E και $g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_m$ που ανήκουν στη G τέτοια ώστε :*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i = \bigcup_{j=1}^{m} h_j B_j$$

Μιλώντας γενικά, το σύνολο E έχει δύο ξένα υποσύνολα $(\bigcup A_i, \bigcup B_j)$ τέτοια ώστε το καθένα μπορούμε να το "αναδιατάξουμε" μέσω της G και να καλύψουμε όλο το E. Άν το E είναι $G - paradoxical$ +++

Παράδειγμα 1.1. *Κάθε κυκλική ομάδα G είναι paradoxical*

Παράδειγμα 1.2. *Οι άρτιοι φυσικοί είναι Φ-paradoxical όπου $\Phi = \{f|f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 1-1 και επί $\}$ Έστω A το σύνολο των άρτιων φυσικών και $A_1 = \{n|n \in \mathbb{N} \& n = 0 mod 4\}$, $A_2 = \{n|n \in \mathbb{N} \& n = 2 mod 4\}$ δύο υποσύνολα του A τέτοια ώστε $A_1 \cup A_2 = A$ και $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, αν Π είναι το σύνολο των περιττών φυσικών τότε αφού $|A_1| = |A|$ και $|A_2 \cup \Pi| = |\Pi|$ υπάρχουν αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις f_1, f_2 με $f_1 : A_1 \to A$ και $f_2 : A_2 \cup \Pi \to \Pi$. Ορίζουμε $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:*

$$f(n) = \begin{cases} f_1(n) & \text{για } n \in A_1 \\ f_2(n) & \text{για } n \in A_2 \cup \Pi \end{cases}$$

διαπιστώνουμε πολύ εύκολα ότι η συνάρτηση f είναι μια 1-1 και επί συνάρτηση απο το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}$ με $f[A_1] = A$.Ισοδύναμα , μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση g 1-1 και επί τέτοια ώστε $g[A_2] = A$ και να καταλήξουμε στο

$$A = f[A_1] = g[A_2]$$

Παράδειγμα 1.3. *Κάθε άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι Φ-paradoxical*

Θεώρημα 1.1. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(a) $|X| = 2|X|$
(b) Το X είναι F-paradoxical όπου F η $F = \{f|f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 1-1 και επί $\}$
(c) Το X είναι άπειρο (ή κενό)

Απόδειξη: (a)$\Rightarrow$(b) Έστω συναρτήσεις $f : X \to A$ και $g : X \to B$ 1-1 και επί με $A \cup B = X$ και $A \cap B = \emptyset$, η ύπαρξη των A, B είναι συνέπεια του (a) [*Έστω X σύνολο για το οποίο ισχύει $|X| = 2|X|$ τότε : Άν $X_0 = X \times \{0\}$ και*

$X_1 = X \times \{1\}$ *τότε* $X_0 \cap X_1 = \emptyset$ $|X_0| = |X_1| = |X|$ *και* $|X_0 \cup X_1| = 2|X| = |X|$ *, απο Θεώρημα Scröder-Bernstein υπάρχει συνάρτηση* $h : X_0 \cup X_1 \rightarrowtail X$ *1-1 και επί οπότε θέτοντας* $A = h[X_0]$ $B = h[X_1]$ *εξασφαλίζουμε την ύπαρξη των* A, B *.]*

1.2 examples of paradoxical actions

Θεώρημα 1.2. *Μια ελεύθερη ομάδα* F *με* $rankF = 2$ *είναι F-paradoxical όπου η* F *δρά με τον αριστερό πολλαπλασιασμό.*

Απόδειξη. Έστω σ, τ οι ελεύθεροι γεννήτορες της F. Άν συμβολίσουμε με $W(e) = \{w \in F | (\exists \sigma' \in F) w = \sigma F\}$ τότε $F = \{1\} \cup W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$ η τομή ανα δύο αυτών ρων συνόλων είναι κενή και $F = \cup W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1})$ και $F = \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$ Διαπιστώνουμε πολύ εύκολα ότι αν $w \in W(\sigma^{-1})$ τότε $\sigma^{-1} \in W(\sigma^{-1})$ δηλαδή $w \in \sigma W(\sigma^{-1})$ και $1 \in \sigma W(s^{-1})$. □

Ορισμός 1.2. *ΘΑ δώσουμε τον ορισμό του Semigroup. Έστω ένα σύνολο* S *και* $\circ : S \times S \longrightarrow S$ *μια διμελής πράξη στο σύνολο* S *και η* $\circ$ *είναι προσεταιριστική τότε το σύνολο έχει τη δομή Semigroup.*

Θεώρημα 1.3. *Έστω* S *μία ελεύθερη ημιομάδα(Semigroup) με γεννήτορες* σ *και* τ*.Η* S *περιέχει δύο ξένα σύνολα* A *και* B *τέτοια ώστε* $\tau S = A$ *και* $\sigma S = B$*. Αυτό συνεπάγεται οτι κάθε ομάδα* F *που περιέχει μία ελεύθερη ημιομάδα με* $rank = 2$ *, περιέχει και ένα μη-κενό paradoxical σύνολο.*

Απόδειξη. Θέτουμε $A = \{w \in F | w = \sigma\rho\}$ και $B = \{w \in F | w = \tau\rho\}$. Άν το S είναι "εμφυτευμένο" (δηλαδή υπάρχει $H \leqslant G$ τέτοια ώστε $H \simeq S$ - ισομορφικά) τότε το S είναι paradoxical μιας και $S = \tau^{-1}A = \sigma^{-1}B$. □

1.3 geometrical paradoxes

Θεώρημα 1.4. (AC) *S^1 είναι αριθμήσιμα SO_2-paradoxcal . Άν G είναι η ομάδα μεταφορών που δρά στο , τότε το είναι αριθμήσιμα G-paradoxical.*

Απόδειξη. Έστω το σύνολο $RSO_2 = \{e^{i\varphi 2\pi} \quad | \quad \varphi \in \mathbb{Q}\}$ το οποίο αποτελεί υποομάδα της SO_2. Η δράση της υποομάδας RSO_2 στο S^1 διαμερίζει το S^1 σε τροχιές (υπεραριθμήσιμο το πλήθος τροχιών) RSO_2x με $x \in S^1$. Έστω M ένα (*choice set*) υποσύνολο του S^1 το οποίο περίεχει ένα αντιπρόσωπο απο κάθε RSO_2x τροχιά, το M έχει υπεραριθμήσιμο το πλήθος στοιχεία. Η RSO_2 ώς σύνολο είναι αριθμήσιμο ως προς την πληθικότητα, οπότε μπορώ να απαριθμήσω τα στοιχεία της. Έστω $\{\rho_1, ..., \rho_n, ...\}$ μια αρίθμηση των στοιχείων της RSO_2, με βάση αυτή την αρίθμηση δημιουργώ τα εξής σύνολα: $M_1 = \rho_1 M, ..., M_n = \rho_n M$. Διαπιστώνουμε οτι η συλλογή $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ αποτελεί μια διαμέριση του S^1 για την οποία ισχύουν ότι για κάθε $i \neq j$ έχουμε $M_i \cap M_j = \emptyset$, $S^1 = \bigcup M_i$. Το επόμενο βήμα στη απόδειξη είναι να δούμε οτι $M_i = \rho_i \rho_j^{-1} M_j \forall i, j$, τότε παίρνοντας την οικογένεια των M_i με άρτιους δείκτες $M_2, M_4, ...$ είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $S^1 = \bigcup g_{\frac{i}{2}} g_i M_i$. Αντίστοιχα ισχύει $S^1 = \bigcup g_{\frac{i+1}{2}} g_i M_i$ με $i = 2n - 1$ και $n \geq 1$ άρα το S^1 είναι RSO_2-paradoxical. Αυτή η κατασκευή εύκολα μεταφέρεται στο διάστημα [0,1) χρησιμοποιόντας .... □

Πόρισμα 1.1. (AC)*Δεν υπάρχει αριθμήσιμα αθροιστικό μέτρο ανναλοίωτο απο τις στροφές , συνολικού μέτρου 1 ορισμένο σε όλα τα υποσύνολα του S^1.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε οτι ένα τέτοιο μέτρο ,έστω μ , υπάρχει ,τότε αν θέσουμε $A = \bigcup\{M_i | i = 2n+1, n \geq 0\}$ και $B = \bigcup\{M_i | i = 2n, n \geq 1\}$ όπου M_i τα σύνολα του προηγούμενου θεωρήματος τότε :

$$1 = \mu(S^1) = \mu(A) + \mu(B) = \mu(S^1) + \mu(S^1) = 2 \text{ άτοπο}$$

□

Πόρισμα 1.2. AC

(a) Υπάρχει ένα υποσύνολο του [0,1) το οποίο είναι μη-Lebesque μετρήσιμο .

(b) Δεν υπάρχει αριθμήσιμα αθροιστικό μέτρο ανναλοίωτο απο τις μεταφορές ορισμένο σε όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ *το οποίο κανονικοποιεί το* $[0,1]^n$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε οτι ένα τέτοιο μέτρο δεν υπάρχει για τον $\mathbb{R}^1$, διότι για κάθε τέτοιο μέτρο μ^n στον $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^1$ τέτοιο ώστε : $\mu(A) = \mu^n(A \times [0,1]^{n-1})$.

Αλλά για το μέτρο μ στον $\mathbb{R}^1$ ο περιορισμός του στο $[0,1)$ θα παρέμενε αναλλοίωτος κάτω απο τη δράση της G , όπου τα στοιχεία της G είναι οι μεταφορές κατα $mod1$. □

Sierpinski-Mazurkiewicz-Paradox

1.4 Equidecomposability

Πρίν δείξουμε όμως το Sierpinski-Mazurkiewicz-Paradox θα παρουσιάσουμε ένα άλλο θεώρημα. Θα αποδεείξουμε ότι ο "σπασμένος" κύκλος $S^1 \setminus \{pt\}$ μπορεί να διαμεριστεί σε δύο σύνολα τέτοια ώστε μπορούμε να τα reassembled to form a complete circle.

Ορισμός 1.3. *Έστω G ομάδα που δρά στο σύνολο X και $A, B \subseteq X$. Τα A, B λέγονται G-equidecomposable άν τα A και B υπάρχουν διαμερίσεις $A_1, ..., A_n$ και $B_1, ..., B_n$ έτσι ώστε το A_i να έιναι congruent με το B_i, δηλαδή να υπάρχει ενα $g_i \in G$ τέτοιο ώστε $g_iA_i = B_i$.*

Θα γράφουμε $A \sim_G B$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\tilde{g}A \to B$, που δίνεται από τον τύπο:

$$g(x) = \begin{cases} g_1 x & \text{για } x \in A_1 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ g_n x & \text{για } x \in A_n \end{cases} \tag{1.1}$$

είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Αντίστροφα άν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση της μορφής (1.1) τότε $A \sim_G B$.

Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο A σε πεπερασμένα το πλήθος υποσύνολα και να τα reassembled to form B μέσω της G-δράσης.

Θεώρημα 1.5. *Η Equidecomposability είναι σχέση ισοδυναμίας στο δυναμοσύνολο του X, $P(X)$.*

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι η $\sim_G$ είναι σχέση αυτοπαθής και συμμετρική. Για να δείξουμε την μεταβατικότητα της $\sim_G$, έστω $A, B, C \subseteq X$ και $A_1, A_2, ..., A_n$ μια διαμέριση του A ,$B_1, B_2, ..., B_n$ μια διαμέριση του B και $g_1, g_2, ..., g_n \in G$ έτσι ώστε $A \sim_G B$ και $B'_1, B'_2, ..., B'_m$ μια (όχι αναγκαστικά διαφορετική από την προηγούμενη) διαμέριση του B , $C_1, C_2, ..., C_3$ μια διαμέριση του C και $h_1, h_2, ..., h_m \in G$ έτσι ώστε $B \sim_G C$.

Για όλα τα $i \in \{1, 2, ..., n\}$ και $j \in \{1, 2, ..., m\}$ ορίζουμε

$$B_{ij} = B_i \cap B'_j$$

Υποθέτουμε ότι κανένα από τα B_{ij} δεν είναι κενό. Τότε η οικογένεια συνόλων $\{B_{ij}\}_{ij \in n \times m}$ είναι μια διαμέριση του B. Στη συνέχεια ορίζουμε τα σύνολα

$$A_{ij} = g^{-1} B_{ij} \text{ και } C_{ij} = h_j B_{ij}$$

που οι αντίστοιχες οικογένεις συνόλων $\{A_{ij}\}_{ij \in n\times m}$ $\{C_{ij}\}_{ij\in n\times m}$ είναι διαμερίσεις του A και C αντίστοιχα και

$$C_{ij} = h_j g_i A_{ij}$$

άρα $A \sim_G C$. Άν κάποια από τα B_{ij} είναι κενά τα αγνοούμε και δουλεύουμε παρόμοια,μόνο που το σύνολο δεικτών ij δεν είναι το πλήθος mn αλλά λιγότερα. □

Το επόμενα δύο θεωρήματα δείχνουν τη σχέση μεταξύ G-paradoxicality και Equicomposability.

Θεώρημα 1.6. *Έστω $E \subseteq X$, το E είναι G-paradoxical ανν υπάρχουν A,B σύνολα με $A, B \subseteq E$, $A \cap B = \emptyset$ τέτοια ώστε $A \sim_G E$ και $B \sim_G E$.*

Απόδειξη. Άν $A \sim_G E$ και $B \sim_G E$ με $A, B \subseteq E$, $A \cap B = \emptyset$ είναι τετριμμένο να δείξουμε οτι το E είναι G-paradoxical. Για το αντίστροφο έστω $E \subseteq X$ το οποίο είναι G-paradoxical, τότε υπάρχουν υποσύνολα του E,ξένα ανα δύο, $A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_m$ και $g_1, g_2, ..., g_n, h_1, h_2, ..., h_m \in G$ έτσι ώστε

$$E = \bigcup_{i=1}^n g_i A_i = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j.$$

Επειδή δεν ξέρουμε αν τα σύνολα έιναι ξένα μεταξύ τους ορίζουμε

$$A'_1 = A_1$$
$$A'_k = A_k \setminus g_k^{-1}(\bigcup_{i=1}^{k-1} g_i A_i)$$

για $k = 1, 2, ..., n$. Οι οικογένεια $\{A'_k\}_{k\in[1,n]}$ είναι μια οικογένεια συνόλων ξένων ανα δύο , δηλαδή $A_i \neq Aj$ για $i \neq j$, και ο τελεστής της ένωσης στην οικογένεια $\{g_k A'_k\}_{k\in[1,n]}$δίνει το E, $\bigcup\{g_k A'_k\}_{k\in[1,n]} = E$. Άρα $E \sim_G \bigcup_{i=1}^n A'_i = A'$. Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε μια οικογένεια $\{B'_k\}_{k\in[1,n]}$ με $E \sim_G \bigcup_{i=1}^n B'_i = B'$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θα πρέπει να δείξουμε ότι $A' \cap B' = \emptyset$ όμως $A' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ και $B' \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, άρα ισχύει ότι η τομή τους είναι κενή. □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει την συνολοθεωρητική σχέση των δύο κλάσεων ιδιοτήτων.

Θεώρημα 1.7. *Η Paradoxicality είναι μια κλάση ιδιοτήτας που σέβεται την equidecomposability, δηλαδή άν $A \sim_G B$ και το A είναι paradoxical τότε είναι και το B.*

Απόδειξη. Έστω G ομάδα που δρά στο σύνολο X και A,B είναι G-equidecomposable υποσύνολα του X και το A είναι $G - paradoxical$. Θέλουμε να δείξουμε ότι και το B είναι $G - paradoxical$. Με βάση το προηγούμενο θεώρημα (1.6), έστω $Z, Y \subseteq A$ με $Z \cap Y = \emptyset$ και $Z \sim_G A \sim_G Y$. Έστω $A_1, ..., A_n \subseteq A$, $B_1, ..., B_n \subseteq B$ και $g_1, ..., g_n \in G$ έτσι ώστε $A \sim_G B$. Ορίζουμε

$$Z' = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i \cap Z) \text{ και } Y' = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(B_i \cap Y)$$

Αφού $\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap Z) = Z$ έπεται ότι $Z \sim_G Z'$ και αντίστοιχα $Y \sim_G Y'$. Αφού Z, Y είναι ξένα μεταξύ τους το ίδιο θα ισχύει και για τα Z', Y'. Κατασκευάσαμε λοιπόν δύο ξένα υποσύνολα $Z', Y' \subseteq B$ έτσι ώστε $Z' \sim_G Z \sim_G A \sim_G B$ και $Y' \sim_G Y \sim_G A \sim_G B$, και λόγω της μεταβατικότητας της $\sim_G$ πέρνουμε $Z' \sim_G B \sim_G Y'$. Άρα το σύνολο B είναι $G - paradoxical$.

□

Θεώρημα 1.8. *Το $S^1 \setminus \{pt\}$ είναι equidecomposable με τον S^1.*

Απόδειξη. Ταυτίζοντας τον $I\!R^2$ με το $\mathbb{C}$, το μιγαδικό επίπεδο. Έστω $pt = 1 = e^{i0}$ και $A = \{e^{in} | n \in \{1, 2, ..., , ...\}\}$ και $B = (S^1 \setminus \{pt\}) \setminus A$. Τα σημεία e^{in} είναι unique since 2π is irrational.

Τότε διαμερίζω το σύνολο S^1 σε δύο ξένα υποσύνολα ώς εξής:

$$A_1 = \{e^{1(n+1)} | n \in I\!N\} \text{ και } A_2 = (S^1 \setminus \{e^{i0}\}) \setminus A_1$$

αντίστοιχα για το S^1,

$$B_1 = e^{-i}A_1 \text{ και } B_2 = S^1 \setminus B_1$$

το ότι τα δύο σύνολα είναι equicomposable είναι φανερό από τη διαμέριση τους. Το A_1 μέσω της ισομετρίας $r(z) = e^{-i}z$ εμφυτεύεται κανονικά στο B_1 και τα A_2 ,B_2 μέσω της ταυτοτικής απεικόνισης. □

1.5 Ένα ακόμα γεωμετρικό παράδοξο

Θεώρημα 1.9. *Έστω G_2 η ομάδα ισομετριών του επιπέδου. Η G_2 περιέχει δύο ισομετρίες ρ, σ οι οποίες παράγουν μια ελεύθερη ημιομάδα S της G_2. Επιπλέον αν $w_1, w_2 \in S$ λέξεις οι οποίες ξεκινούν από αριστερά με ρ, σ τότε $w_1(0,0) \neq w_2(0,0)$.*

Απόδειξη. Ως πρώτο βήμα ταυτίζουμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ με τον $\mathbb{C}$. Μετά διαλέγουμε ένα $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε ο $u = e^{i\theta}$ να είναι υπερβατικός μιγαδικός αριθμός (*Η ύπαρξη του θ αυτού εξασφαλίζεται από το γεγονός οτι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι άπειρο αριθμήσιμο σύνολο*). Έστω σ η μεταφορά $\sigma(z) = z + 1$ και ρ η στροφή $\rho(z) = uz$. Αρκεί να δείξουμε το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος μιας και το πρώτο είναι (εύκολο) συμπέρασμα του. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

- $w_1 = w_2$
- $w_1 \neq w_2$ Υποθέτουμε οτι $w_1 = \sigma^{i_1}\rho^{i_2}...\sigma^{i_m}$ και $w_2 = \rho^{k_1}\sigma^{k_2}...\sigma^{k_l}$ όπου $m, l \geqslant 1$ και κάθε εκθέτης είναι ένας θετικός ακέραιος. Αφού $\rho(0) = 0$ μπορούμε να υποθέσουμε οτι οι δύο λέξεις w_1 και w_2 τελειώνουν με μία δύναμη του σ εκτός και αν η w_2 είναι απλά η $w_2 = \rho^{k_1}$. Τότε : $w_1 = i_1 + i_3u^{i_2} + i_5u^{i_2+i_4} + ... + i_mu^{i_2+i_4+...+i_{m-1}}$ και $w_2 = k_2u^{k_1} + k_4u^{k_1+k_3} + ... + k_lu^{k_1+k_3+...+k_{l-1}}$ Αν $w_1(0) = w_2(0)$ τότε η σχέση αυτή

είναι ένα πολυώνυμο με ρίζα το u το οποίο όμως έρχεται σε αντίφαση με την επιλογή του θ.

□

Θεώρημα 1.10. *Έστω G ομάδα που δρα σε ένα σύνολο X και η G περιέχει δύο στοιχεία, έστω ρ, τ, τέτοια ώστε για κάποιο $x \in X$, οποιεσδήποτε δύο λέξεις στο S που ξεκινούν αντίστοιχα με ρ, σ διαφωνούν στη τιμή όταν έχουν όρισμα το x. Τότε υπάρχει ένα μη-κενό G-paradoxical υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Έστω S η υποομάδα της G που παράγεται τα τ, σ και E η $S-$ τροχα του x δηλαδή $E = \{y \in X | (\exists w \in S)[w(x) = y]\}$. Τότε $\rho(E) \subseteq E$ και $\sigma(E) \subseteq E$ αλλά από υπόθεση έχουμε οτι για κάθε ζεύγος λέξεων w_1 , w_2 -που ανήκουν στην S- $\tau w_1(x) \neq \rho w_2(x)$ άρα $\tau(E) \cap \rho(E) = \emptyset$. Ως συμπέρασμα έχουμε οτι το E είναι $G - paradoxical$ μιας και $E = \tau^{-1}(\tau E) = \rho^{-1}(\rho E)$.

□

Θεώρημα 1.11. Sierpinski-Mazurkiewicz Paradox *Υπάρχει ένα υποσύνολο του $I\!R^2$ το οποίο είναι paradoxical.*

Απόδειξη. Με βάση τις προηγούμενες προτάσεις μπορούμε να φανταστούμε ποιό σύνολο θα θέσουμε

$$E = \{a_0 + a_1 e^i + a_2 e^{2i\theta} + ... + a_n e^{ni\theta} | n, a_j \in I\!N\}$$

για κάποιο θ για το οποίο ο $e^{i\theta}$ είναι υπερβατικός. (Για θ=1 ισχύει *) Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε δύο ισομετρίες ρ και τ οι οποίες παράγουν μια υποημιομάδα S της ομάδας των ισομετριών G_2 του επιπέδου (έχουμε ταυτίσει τον $I\!R^2$ με το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$). Το επόμενο βήμα είναι να διαλέξουμε ένα σημείο x του επιπέδου □

Κεφάλαιο 2

The Hausdorff Paradox

Το 1914 στη προσπάθεια του ο Hausdorff να αποδείξει την μη-ύπαρξη συγκεκριμένων μέτρων ορισμένα πάνω στη σφαίρα του $I\!R^3$ απέδειξε το εξής παράδοξο:"δες σωστή μετάφραση" Η μέθοδος του Hausdorff βασιζεται στην εύρεση δύο στροφών του S^2 οι οποίες παράγουν μια ελεύθερη ομάδα ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$

Θεώρημα 2.1. *Υπάρχουν δύο στροφές στον $I\!R^3$-στροφές γύρω από άξονα που περνάει από την αρχή των αξόνων-οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Κατ'επέκταση για κάθε $n \geqslant 3$ η SO_n έχει μία ελεύθερη ομάδα F ως υποομάδα τάξης 2, δηλαδή $rank F = 2$.*

Απόδειξη. Έστω φ, ρ στρόφες (counterclockwise) γύρω από τους άξονες z-άξονα και x αντίστοιχα τέτοιες ώστε η γωνία της κάθε στροφής με τον άξονα που αφήνει αμετάβλητο είναι $\arccos \frac{1}{3}$. Τότε οι στροφές αναπαριστόνται από τους παρακάτω πίνακες:

$$\boldsymbol{\varphi}^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\rho}^{\pm\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

Αυτό που θα δείξουμε είναι ότι καμία μη τετριμμένη ανάγωγη λέξη στο $\varphi^{\pm 1}$ και $\rho^{\pm 1}$ δεν είναι ισοδύναμη με την ταυτοτική συνάρτηση. Έστω οτι υπάρχει λέξη w τέτοια ώστε να είναι ισοδύναμη με την ταυτοτική. Ισχυριζόμαστε ότι $w(1,0,0)$ είναι της μορφής $\frac{(a,\sqrt{2}b,c)}{3^k}$ όπου a,b,c ακέραιοι και ο b δεν διαιρείται από το 3. Αυτό έχει ως συνέπεια ότι $w(1,0,0) \neq (1,0,0)$, που μας οδηγεί σε άτοπο.

$\square$

Κεφάλαιο 3

Minimizing

Μέχρι τώρα δεν έχουμε δώσει σημασία στο πλήθος των κοματιών που χρησιμοποιούμε ώστε να την μπάλα. Στα προηγούμενα κεφάλαια η αναπαραγωγή της σφαίρας δεν χρησιμοποιεί πάνω από οκτώ κομμάτια και αντίστοιχα για την μπάλα δεν χρησιμοποιούμε πάνω από δεκατρία κομμάτια.μπλα μπλα μπλα

Ορισμός 3.1. *Έστω G ομάδα που δρά σε ένα σύνολο X και $E \subseteq X$. Τότε το είναι G-paradoxical χρησιμοποιόντας r κομάτια άν υπάρχουν υποσύνολα A, B του E τέτοια ώστε $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B = E$ και $A \sim_m E \sim_n B$ και $m + n = r$.*

Θεώρημα 3.1. *Έστω F μια ελεύθερη ομάδα που παράγεται από τα τ, σ. Τότε μπορούμε να διαμερίσουμε την F σε τέσσερα υποσύνολα A_1, A_2, A_3, A_4 τέτοια ώστε*

$$\sigma(A_2) = A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

$$\text{και}$$

$$\tau(A_4) = A_1 \cup A_2 \cup A_4.$$

άρα η F είναι paradoxical χρησιμοποιόντας τέσσερα κομμάτια. Επίσης για κάθε $w \in F$ μπορούμε να διαλέξουμε μια διαμέριση τέτοια ώστε το στοιχείο

w να βρίσκεται στο ίδιο σ˜νολο-κομάτι με το ταυτοτικό στοχείο.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε μια διαμέριση σε τέσσερα υποσύνολα της F όπως ακριβώς και στο θεώρημα (theorem 5) όπου $W(f)$ είναι το σύνολο όλων των λέξεων που αρχίζουν με f. Έστω w μια λέξη στην F και ρ το πιο αριστερό γράμμα της λέξης. Διακρίνουμε περιπτώσεις για το ρ. Έστω ότι $\rho = \tau^{-1}$. Τότε μπορούμε να διαμερίσουμε την F ώς εξής:

$$A_1 = W(\sigma)$$
$$A_2 = W(\sigma^{-1})$$
$$A_3 = W(\tau) \setminus \{\tau^n | n \in I\!N^+\}$$
$$A_4 = W(\tau^{-1}) \cup \{\tau^n | n \in I\!N^+\} \cup \{1\}$$

Διαπιστώνουμε ότι τα στοιχεία 1 και w ανήκουν στο ίδιο σύνολο, το A_4 και ότι:

$$\sigma(A_2) = A_2 \cup A_3 \cup A_4$$
$$\text{και}$$
$$\tau(A_4) = A_1 \cup A_2 \cup A_4.$$

Αντίστοιχα για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

□

Άμεσο πόρισμα του θεωρήματος είναι η παρακάτω πρόταση

Πόρισμα 3.1. (AC) *Έστω F μια ελεύθερη ομάδα διάστασης 2 (rankF=2) που δρα σε ένα σύνολο X χωρίς τετριμμένα σταθερά σημεία. Τότε το σύνολο X είναι F-paradoxical χρησιμοποιόντας τέσερα κομμάτια.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 4.1 για την ελεύθερη ομάδα F. Έστω A, B υποσύνολα της F τέτοια ώστε $A \cap B = \emptyset$, $F = A \cup B$ με $F \sim_2 A \& F \sim_2 B$. Έστω M ένα σύνολο επιλογής για την οικογένεια $\{G_x\}_{x \in X}$

των τροχιών των στοιχείων του X κάτω από τη δράση της F. Ορίζουμε A^*, B^* υποσύνολα του X ώς εξής:

$$A^* = \bigcup\{gM|g \in A\}$$

και

$$B^* = \bigcup\{gM|g \in B\}$$

τότε επειδή η F δεν έχει μη τετριμμένα σταθερά σημεία ισχύει ότι $A^* \cap B^* = \emptyset$ και $A^* \cup B^* = X$. Επειδή όμως για την F ισχύει ότι $F \sim_2 A \& F \sim_2 B$ έπεται ότι:

$$A^* \sim_2 F \sim_2 B^*$$

$\square$

Ώς άμεσο πόρισμα της προηγούμενης πρότασης έχουμε ότι κάθε free-non abelina group.

Ορισμός 3.2.