



Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Τμήμα Μαθηματικών

Διαφορική Τοπολογία και Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Εκπόνηση πτυχιακής εργασίας

Κάρδαρης Δημήτρης

A.M 09104188

Επιβλέπων καθηγητής:

κ. Λαμπροπούλου Σοφία

αναπλ. καθηγήτρια Μαθηματικών

Ιούλιος 2010

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα παρουσιαστεί η σχέση μεταξύ γεωμετρικής τοπολογίας και θεωρητικής Φυσικής, κυρίως υπό το πρίσμα των εξισώσεων Yang-Mills. Αφού πρώτα αναδειχθεί το ιστορικό υπόβαθρο που αποτελεί τη βάση για αυτήν τη βαθιά σύνδεση, θα γίνει η παρουσίαση μιας γεωμετρικής ερμηνείας της θεωρίας βαθμίδος με όρους τοπικών εγκάρσιων τομών κυρίων ινωδών G -δεσμών και της καμπυλότητας των μορφών συνοχής επί αυτών. Στη συνέχεια θα συζητηθούν θέματα που αφορούν τη διαρκή και γόνιμη αλληλεπίδραση των δύο αυτών κλάδων τη σημερινή εποχή. Ταυτόχρονα συμπεριλαμβάνεται μια γρήγορη εισαγωγή σε μια ποικιλία απρόσμενων εφαρμογών σε πεδία όπως είναι τα μαγνητικά μονόπολα, οι δυϊκότητες της θεωρίας χορδών και η υπερσυμμετρική κβαντομηχανική μέσω της θεωρίας Morse. Η παρουσίαση αυτής της διασύνδεσης θα γίνει σε δύο συγκλίνουσες κατευθύνσεις: από πλευρά Φυσικής, μέσω της τοπολογικής κβαντικής θεωρίας πεδίου και από πλευράς Μαθηματικών μέσω της ανάπτυξης τοπολογικών αναλλοιώτων 4-πολλαπλοτήτων στη διαφορική γεωμετρία.

Summary

In the present thesis, the relation between geometric topology and theoretical Physics will be presented, mainly under the scope of Yang-Mills equations. Just after light is given in the historical context that undergoes this deep connection, a geometric interpretation of gauge theories under the framework of local cross sections of principal G -bundles and the curvature of connection forms defined over them will be presented. Afterwards a conversation will take place dealing with issues related to the continuous and flourishing interplay of those two fields in the main era. A quick introduction of various unexpected applications in fields like magnetic monopoles, dualities in string theory and SUSYQM with equivariant Morse theory, is also included. The presentation will take place in two convergent directions: from the physical point of view, namely TQFT and from the mathematical view point, mostly within the development of topological invariants for 4-manifolds in differential geometry.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	3
1. Πρόλογος	5
1.1. Ιστορική αναδρομή και το κίνητρο για την από κοινού μελέτη των δύο κλάδων	5
1.2. Συνδυαστική τοπολογία και ηλεκτρονική φυσική.....	6
1.3. Το ολοκλήρωμα περιέλιξης του Gauss στον ηλεκτρομαγνητισμό και στη θεωρία κόμβων.....	8
1.4. Θεωρία πλεξίδων και δινώδης ατομική θεωρία	12
1.5. Μετρική Schwarzschild και η τοπολογική δομή των χωροχρονικών ανωμαλιών.....	14
2. Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας	19
2.1. Ινώδεις δέσμες.....	19
2.2. Μορφές συνοχής σε διανυσματικές δέσμες	27
2.3. Μορφές συνοχής σε κύριες δέσμες	31
2.4. Παράλληλη μεταφορά και η ομάδα ολονομίας	34
3. Φυσικά φαινόμενα πολυπλοκότερης τοπολογικής φύσεως	38
3.1. Τα μαγνητικά μονόπολα του Dirac	38
3.1.1. Φαινομενικές ανωμαλίες και χορδές Dirac	39
3.1.2. Συνθήκη κβάντωσης	41
3.1.3. Δυόνια.....	44
3.1.4. Η τοπολογία των μαγνητικών μονοπόλων	45
3.2. Το φαινόμενο Ehrenberg-Siday-Aharonov-Bohm	50
3.3. Ο γεωμετρικός φασικός χώρος των Pancharatnam-Berry	56
4. Θεωρία βαθμίδας στις 4 διαστάσεις	58
4.1. d-instantons	58
4.2. Η θεωρία Donaldson για τις 4-πολλαπλότητες	65
5. Τοπολογική Κβαντική Θεωρία Πεδίου	71
5.1. Συναρτησιακά ολοκληρώματα τροχιάς Feynman	71
5.2. Πολυωνυμικές αναλλοίωτες και θεωρία Seiberg-Witten	75
5.3. Θεωρία Chern-Simons	80
5.4. Ομολογία Floer και πολυώνυμο Jones	85

6. Θεωρία Morse και Θεωρία Υπερχορδών.....	89
6.1. Ανισότητες Morse	89
6.2. Υπερσυμμετρική Κβαντομηχανική μέσω θεωρίας Morse.....	90
6.3. Δυσϊκότητες, κατοπτρική συμμετρία και πολλαπλότητες Calabi-Yau.....	93
7. Επίλογος.....	97
Βιβλιογραφία	98

1. Πρόλογος

1.1. Ιστορική αναδρομή και το κίνητρο για την από κοινού μελέτη των δύο κλάδων

Πρωτίστως, είναι σημαντικό να σημειωθεί η ιστορική διαφορά που υπάρχει μεταξύ των δύο επιμέρους κλάδων στον οποίο στηρίζεται η παρούσα εργασία. Πράγματι, το χάσμα καθίσταται μεγαλύτερο από ότι θα φανταζόταν κανείς καθώς από τη μία πλευρά, βρίσκεται η Φυσική η οποία έχει μία μακροχρόνια παράδοση έως τις ημέρες μας, και από την άλλη κείται αυτός ο υποκλάδος των μαθηματικών, γνωστός ως τοπολογία, που άρχισε όμως να αναπτύσσεται συστηματικά μόλις από τις αρχές του περασμένου αιώνα. Παρ'όλα αυτά, ήδη από το 1700 σχεδόν κατά τη μελέτη διαφόρων φυσικών προβλημάτων, μεγάλες προσωπικότητες των θετικών επιστημών όπως ο Leibniz, ο Euler και ο Vandermonde έθεσαν ερωτήματα στα οποία γινόταν εμφανής νύξη για έννοιες που ήταν ουσιωδώς τοπολογικής φύσεως. Όπως θα φανεί καλύτερα και πιο κάτω, ο ίδιος ο Gauss φαίνεται να πέρασε αρκετό καιρό συλλογιζόμενος τα ερωτήματα αυτά. Την πρόωμη αυτή εποχή σχετικές ιδέες συνέχισαν να εμφανίζονται επανειλημμένως, δυστυχώς όμως ήταν τελείως διασκορπισμένες και κάπως ασαφείς για να αναθάλλει μία περαιτέρω ανάπτυξη τους. Σχεδόν παράλληλα βέβαια, έγιναν φευγαλέες και αποσπασματικές -πλην σημαντικές- συνεισφορές από τους Riemann, Helmholtz, Maxwell και Listing, ενώ ο τελευταίος θα γίνει μάλιστα ο πρώτος ο οποίος θα χαρίσει το δόκιμο όνομα "*Topologie*" από πολύ νωρίς στον κλάδο αυτό. Επισήμως όμως, ο ορισμός θα δημοσιοποιηθεί μόλις το 1847, όπου ο ίδιος θα γράψει στο βιβλίο του: [1]

«Με τον όρο Τοπολογία εννοούμε τη θεωρία εκείνη που αποσκοπεί στη μελέτη των τυπικών χαρακτηριστικών διαφόρων αντικειμένων, των νόμων κάτω από τους οποίους αυτά συνδέονται μεταξύ τους, τη σχετική τους θέση, τα διαδοχικά σημεία τα οποία σχηματίζουν καθώς επίσης τις γραμμές και τις επιφάνειες που ενδεχομένως δημιουργούν συμπεριλαμβανομένου των μερών τους ή ακόμα και των συσσωματωμάτων τους στον χώρο. Ενώ όλα αυτά πάντοτε θεωρούνται χωρίς να μας αφορούν θέματα που σχετίζονται με το μέτρο ή την ποσότητα.»

Όμως, ο όρος αυτός θα αντικαταστήσει ολοκληρωτικά τον προηγούμενο "Analysis situs" μάλλον αργοπορημένα, το 1920 με τις εργασίες του Lefschetz.

Για να φτάσει η Τοπολογία σε ένα ικανοποιητικό σύνολο αυστηρών ορισμών πέρασε από πολλά και διαφορετικά στάδια γονιμοποιούς εξέλιξης ενώ η αλληλεπίδραση της με ποικίλλα πεδία των Μαθηματικών, είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ακόμη περισσότερων συναφών κλάδων όπως: συνδυαστική τοπολογία, τοπολογία σημειοσυνόλων, γενική, ασαφής, αλγεβρική, διαφορική και γεωμετρική τοπολογία για να αναφερθούν μόνο μερικοί από αυτούς.

1.2. Συνδυαστική τοπολογία και ηλεκτρονική φυσική

Είθισται να θεωρείται πως η απαρχή της Τοπολογίας, έγινε με την αρνητική απάντηση που έδωσε ο Euler στο ερώτημα των Επτά Γεφυρών της Καινιξβέργης (σημερινό Καλίνινγκραντ)[2], όπου είχε την ιδέα να αντιστοιχήσει στο υπό εξέταση φυσικό πρόβλημα ένα συνεκτικό γράφημα και έπειτα να αποδείξει, πως μία αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ενός μονοπατιού το οποίο διατρέχει από μία μόνο φορά την κάθε πλευρά του γραφήματος (γνωστό και ως μονοπάτι Euler), είναι να διαθέτει επ'ακριβώς είτε δύο κόμβους είτε κανέναν κόμβο περιττού βαθμού.



Πράγματι, το αποτέλεσμα αυτό έγινε η βάση για τη θεωρία γραφημάτων, που πλέον θεωρείται ως κλάδος της συνδυαστικής τοπολογίας. Παρατηρεί λοιπόν κανείς, πως το κλειδί εδώ δεν είναι οι ακριβείς θέσεις των κόμβων, αλλά οι μεταξύ διασυνδέσεις τους διαμέσου των ακμών καθώς και τω αυτώ πλήθος τους. Δεν ενδιαφερόμαστε δηλαδή για το άκαμπτο σχήμα των αντικειμένων καθ'εαυτό και αυτήν ακριβώς την ιδέα επιθυμεί να κωδικοποιήσει ο ορισμός του Listing πιο πάνω. Η ένωση αυτή συνδυαστικών

και τοπολογικών εργαλείων υπό τη σκέπη της θεωρίας γράφων δεν άργησε να βρει εντυπωσιακές εφαρμογές στη Φυσική.

Για παράδειγμα, στη θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων θεωρούμε ως δίκτυο μια συλλογή από αλληλοσυνδεόμενα -όχι απαραίτητως και γραμμικά όμως- ηλεκτρικά μέρη που ως όλον σχηματίζουν έναν πλήρη τοπολογικό βρόχο. Η έννοια του δικτύου γενικεύει κατά φυσικό τρόπο την έννοια μιας ηλεκτρικής κυκλωματικής διάταξης, ενώ η αντίστοιχη ορολογία που προκύπτει είναι εμφανώς πιο ευέλικτη. Άμεσο αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας επαναδιατύπωσης καθιστά πιο εύκολους τους εκάστοτε υπολογισμούς σε μια ενδεχόμενη ανάλυση. Και υπό το πρίσμα αυτό, οι δύο γνωστοί νόμοι του Kirchhoff δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι απ'ευθείας συνέπειες της εφαρμογής μερικών απλών γραφοθεωρητικών τεχνασμάτων.

Ένα δεύτερο παράδειγμα από την ηλεκτρολογία είναι το εξής: τα τμήματα ενός δικτύου που τυπώνονται στο ένα μέρος μιας κατάλληλα μεμονωμένης πλακέτας, θα πρέπει να αντιστοιχούν σε ένα επίπεδο γράφημα (που σημαίνει να είναι εμφυτεύσιμο στο επίπεδο έτσι ώστε οι πλευρές του να μην τέμνονται), καθώς τα καλώδια δεν μονώνονται και προς αποφυγήν βραχυκυκλώματος θα πρέπει φυσικά να μην εφάπτονται. Για ένα μεγάλο δίκτυο είναι σημαντικό να γνωρίζουμε πόσα τυπωμένα κυκλώματα απαιτούνται ώστε να συμπληρωθεί όλο το δίκτυο. Αυτό επιτυγχάνεται εύκολα με τη χρήση δύο τοπολογικών αναλλοιώτων ενός γραφήματος G : του πάχους $t(G)$ που ορίζεται ως το μικρότερο πλήθος επίπεδων υπογραφημάτων του G , τα οποία αν τα υπερθέσουμε κατά τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι αντίστοιχες κορυφές του να συμπέσουν, να πάρουμε ξανά το G και του αριθμού διασταυρώσεων $v(G)$ που είναι ο ελάχιστος αριθμός διασταυρώσεων στις διάφορες -υπό κάποιες προϋποθέσεις- σχεδιάσεις του G στο επίπεδο. Συνεπώς, το πάχος παράγει ένα μέτρο του κατά πόσο «μη-επίπεδο» είναι ένα γράφημα ενώ θα έχουμε $v(G) = 0$ αν και μόνο εάν το G είναι επίπεδο. Να σημειωθεί εδώ η χρήσιμη πρόταση πως λόγω στερεογραφικής προβολής, κάθε επίπεδο γράφημα θα είναι εμφυτεύσιμο στην S^2 και αντίστροφα και πως παραμένουν ελάχιστα αυτά που γνωρίζουμε σήμερα για τον αριθμό διασταυρώσεων διαφόρων κλάσεων γραφημάτων πέρα από κάποια άνω φράγματα. Όπως και να έχει όμως, με την πάροδο του χρόνου οι σχέσεις μεταξύ Φυσικής και θεωρίας γράφων έγιναν πιο πολλές, πιο στενές και κατ'επέκταση ακόμη πιο ισχυρές.

1.3. Το ολοκλήρωμα περιέλιξης του Gauss στον ηλεκτρομαγνητισμό και στη θεωρία κόμβων

Τον 19ο αιώνα, στις εργασίες του Gauss συναντάει κανείς ένα επίσης ενδιαφέρον φυσικό φαινόμενο το οποίο περιέχει ενδόμυχα μία παράξενη τοπολογική πληροφορία. Είναι γνωστό πως σε ένα μαγνητοστατικό πεδίο, η μαγνητική πεδιακή ένταση \mathbf{B} που παράγεται από ρεύμα I , το οποίο διαρρέει έναν κλειστό βρόχο, δίνεται από το νόμο του Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

όπου \mathbf{J} η πυκνότητα ρεύματος και από το δεύτερο νόμο του Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Σημειωτέον εδώ, πως ενδιαφερόμαστε μόνο για χρονοαμετάβλητα πεδία και κατά συνέπεια η εξίσωση νόμου συνεχείας του ρεύματος:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

δε λαμβάνεται υπ'όψιν. Ισοδύναμα, μπορεί να πει κανείς πως ο νόμος του Ampère παραμένει εν ισχύ, καθώς δεν υπάρχει ρεύμα μετατόπισης. Αξίζει επίσης να παρατηρηθεί, πως αν ολοκληρώσουμε το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής γύρω από μία κλειστή καμπύλη C που φράσσει μια επιφάνεια S θα έχουμε διαδοχικά:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

όπου στο τελευταίο βήμα υποθέσαμε ότι ο αγωγός τέμνει την S ακριβώς μία φορά. Αν όμως αυτό δε συμβαίνει, για παράδειγμα υποθέσουμε ότι ο αγωγός τέμνει την S , m φορές, τότε το παραπάνω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα περιέχει σε κάθε τομή και μία διορθωτική συνεισφορά $\mp \mu_0 I$, όπου το πρόσημο της θα καθορίζεται από τη σχέση παραλληλότητας μεταξύ του \mathbf{J} και του απειροστού $d\mathbf{s}$ στο σημείο τομής. Οπότε, αν θεωρήσουμε το αλγεβρικό

άθροισμα όλων αυτών των συνεισφορών, ο νόμος του Ampère θα πάρει την πιο γενική του μορφή:

$$\oint_C \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 m I, \quad m \in \mathbf{Z}$$

Ο ακέραιος αυτός είναι ο ίδιος που συναντά κανείς στην περίπτωση υπολογισμού του μαγνητικού πεδίου σε ένα σωληνοειδές. Επιστρέφοντας στην εργασία του Gauss[3], θα επιχειρήσουμε να αναπτύξουμε εν συντομία εδώ την πιο πιθανή μέθοδο μέσω της οποίας φαίνεται να κατέληξε στα συμπεράσματα του. Από το δεύτερο νόμο του για τον μαγνητισμό, προκύπτει ότι υπάρχει διανυσματικό πεδίο \mathbf{A} έτσι ώστε:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Φυσικά εδώ το \mathbf{A} δεν ορίζεται μονοσήμαντα, αλλά μπορούμε να προσθέσουμε και κάποιους όρους ενώ παράλληλα το νέο μαγνητικό δυναμικό θα συνεχίσει να παράγει το ίδιο πεδίο. Ο αναλλοίωτος μετασχηματισμός αυτός, γνωστός και ως *μετασχηματισμός βαθμίδας* (gauge transformation) θα μας απασχολήσει εκτενέστερα σε μετέπειτα κεφάλαιο. Εδώ, απλά θέτουμε: $\mathbf{A}' := \mathbf{A} + \mathbf{a}$ οπότε,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{a}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{a}$$

Άρα, αν είχαμε: $\hat{\mathbf{A}} := \mathbf{A} + \nabla \lambda$ τότε $\nabla \times \hat{\mathbf{A}} = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \nabla \lambda = \nabla \times \mathbf{A}$. Οπότε, αρκεί να ορίσουμε μονότιμα το $\nabla \times \hat{\mathbf{A}}$ για να καθορίσουμε αμέσως το \mathbf{A} . Ένας εύλογος περιορισμός είναι η συνθήκη βαθμίδας του Lorentz που θα μας οδηγούσε αμέσως στην εξίσωση κύματος για το \mathbf{A} . Απουσίας όμως χρονικής μεταβολής θα υπάρχει εκφυλισμός στην γνωστή και ως *βαθμίδα Coulomb*: $\nabla \times \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$. Έτσι, προκύπτει ότι:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

η οποία θα έχει λύση την:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V \subset \mathbf{R}^3} d^3 \mathbf{r}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Αν όμως ο βρόχος σχηματίζει μια καμπύλη C' , τότε ο φορέας του J αποτελείται μόνο από σημεία πάνω στον αγωγό και άρα σχετίζεται με το ρεύμα I ως εξής: $J(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' = I d\mathbf{l}'$, όπου φυσικά $d\mathbf{l}'$ το απειροστό στοιχείο μήκους στην C' . Αυτό μας επιτρέπει να εκφράσουμε πλέον το $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ως εξής:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{C'} \frac{I d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \times d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

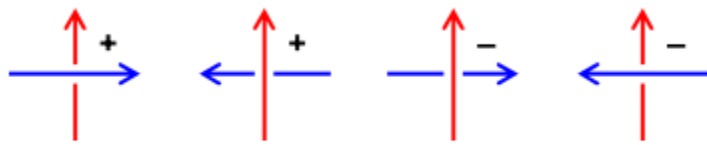
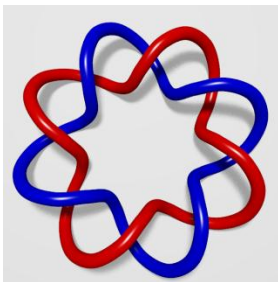
που δεν είναι άλλος από τον γνωστό νόμο των Biot-Savart.

Τι γίνεται όμως όταν εισάγουμε και μία δεύτερη καμπύλη C και ολοκληρώσουμε πάνω της το \mathbf{B} ;

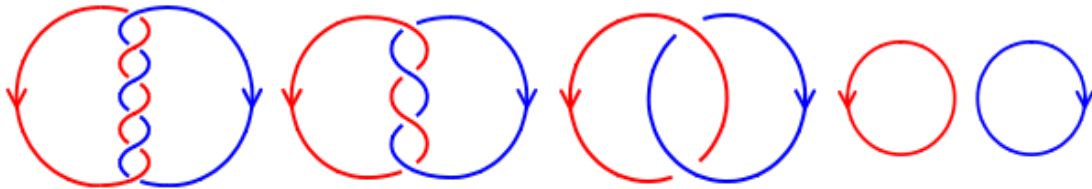
$$\oint_C \mathbf{B} d\mathbf{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \int_{C'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Δηλαδή, $m = -\frac{1}{4\pi} \int_C \int_{C'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$ ή σε Καρτεσιανές συντεταγμένες:

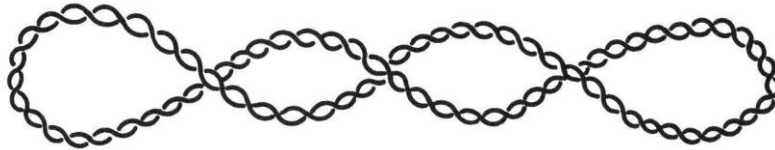
$$m = -\frac{1}{4\pi} \int_C \int_{C'} \frac{(x' - x)(dydz' - dzdy') + (y' - y)(dzdx' - dxdz') + (z' - z)(dxdy' - dydx')}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$



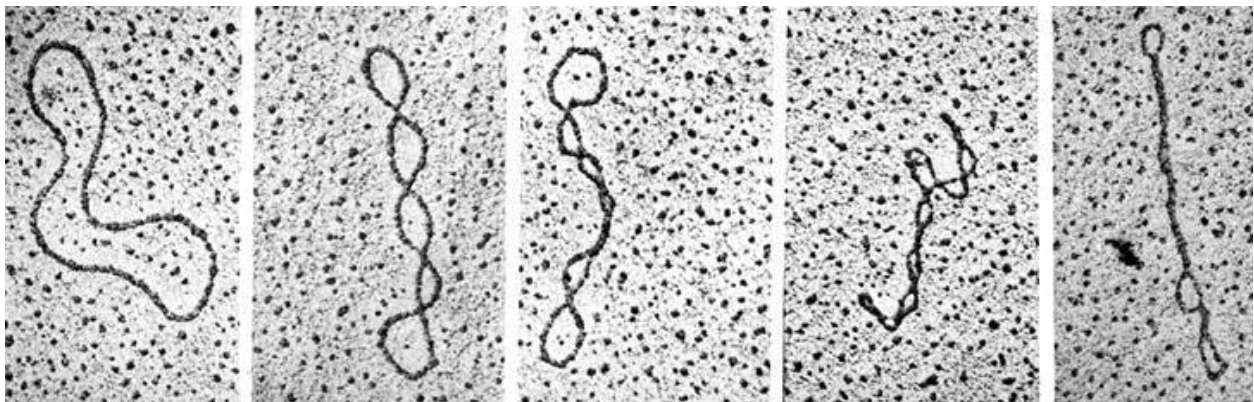
$$\text{linking number} = \frac{n_1 + n_2 - n_3 - n_4}{2}$$



Αυτό είναι και το ολοκλήρωμα στο οποίο κατέληξε ο Gauss το 1833, ο οποίος κατάλαβε γρήγορα πως το αποτέλεσμα του ήταν καθαρά τοπολογικής φύσεως, καθώς δεν αναφερόταν διόλου σε ηλεκτρομαγνητικές ποσότητες. Επισήμανε μάλιστα το γεγονός πως η ανάγκη για έρευνα προς αυτή την κατεύθυνση (τη Γεωμετρία της Θέσης όπως θα την αποκαλούσε αργότερα ο Maxwell) είναι επιτακτική για το μέλλον.

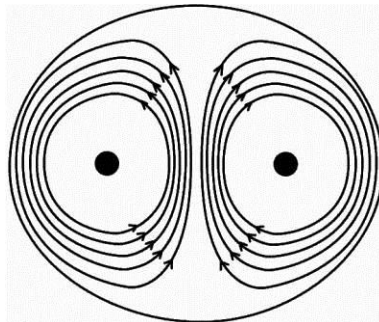


Εδώ το m ονομάζεται "αριθμός περιέλιξης" των δύο καμπυλών και αποτελεί μία πολύ σημαντική αριθμητική αναλλοίωτη για τη σημερινή θεωρία κόμβων. Εν γένει, εκφράζει το πλήθος των φορών για το οποίο μία κλειστή καμπύλη τυλίγεται γύρω από μία άλλη στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο. Ο αριθμός αυτός είναι θετικός ή αρνητικός αντίστοιχα ανάλογα με τον προσανατολισμό των δύο καμπυλών. Επομένως, παρατηρεί κανείς πως η ηλεκτρομαγνητική θεωρία κληροδότησε στα μαθηματικά από πολύ νωρίς έναν κλειστό αναλυτικό τύπο για αυτόν τον αριθμό. Μάλιστα, ο αριθμός περιέλιξης αποτελεί τόσο εξέχουσα έννοια που έχει σχεδόν καθολικές εφαρμογές πέρα από τα μαθηματικά, για παράδειγμα στην Κβαντομηχανική ως ένας τοπολογικός κβαντικός αριθμός που σχετίζεται με το μη-τοπικό φαινόμενο του κβαντικού εναγκαλισμού, τη μελέτη της υπερσυσπείρωσης του DNA στη Μοριακή Βιολογία, την αναδίπλωση διαφόρων πρωτεϊνικών δομών στη Βιοχημεία αλλά και τις πρόσφατες εξελίξεις στον τομέα της νεοδημιουργηθείσας Τοποβιολογίας.

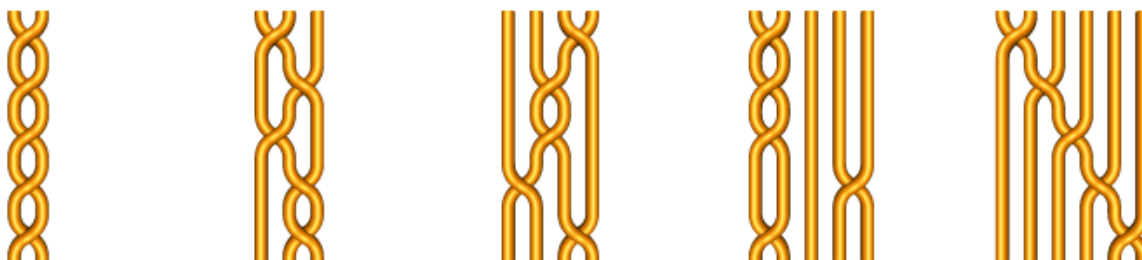


1.4. Θεωρία πλεξίδων και δινώδης ατομική θεωρία

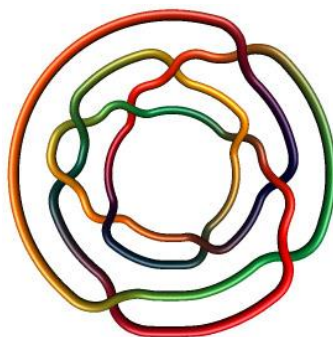
Έμελλε να γίνει ακόμη μία σχετική συζήτηση τον 19ο αιώνα και αυτή τη φορά η αλληλεπίδραση βρισκόταν ανάμεσα στη θεωρία πλεξίδων και την ατομική θεωρία. Δυστυχώς, μετά από αυτό το σημείο και έπειτα, το ενδιαφέρον των φυσικών για την τοπολογία χάθηκε ολοτελώς και επανήλθε στο προσκήνιο των εξελίξεων αρκετά αργότερα. Ειδικότερα, ο λόρδος Kelvin (W. H. Thomson) το 1867^[4] κατέγραψε διάφορες ιδέες του μέσω των οποίων περιέγραφε τα άτομα ως δακτυλίους συζευγμένων δινών. Ίσως επηρεασμένος από το έργο του Riemann για τη δομή μιγαδικών υπερεπιφανειών αλλά και του Helmholtz, συνέλαβε τη σκέψη πως η ευστάθεια των ατόμων θα μπορούσε να εξηγηθεί με όρους παραμόρφωσης διαφόρων τοπολογικών τύπων κόμβων. Επιπρόσθετα, οι ταλαντώσεις των κόμβων αυτών θα αποτελούσαν μια εξήγηση για τον μηχανισμό των ατομικών φασματικών γραμμών. Η θεώρηση αυτή παρέμεινε γνωστή κυρίως ως *δινώδης ατομική θεωρία*.



Λίγο αργότερα ο Tait^[5] θα συγκεντρώσει πολλά είδη διαφορετικών τέτοιων κόμβων διατυπώνοντας πάμπολλα ερωτήματα για τη δομή τους και λόγω του ότι παρέμειναν για αρκετά χρόνια άλυτα πήραν σταδιακά το όνομα *εικασίες Tait*. Ευτυχώς όμως οι περισσότερες από αυτές θα βρουν την τελική τους λύση από τον Jones^[6] σχεδόν 100 χρόνια αργότερα, ο οποίος μέσω της θεωρίας αλγεβρών Hecke εισήγαγε μία πολύ ισχυρή πολυωνυμική αναλλοίωτη ισοτοπίας κόμβων, με την οποία θα ασχοληθούμε αναλυτικότερα σε επόμενο κεφάλαιο κάνοντας λόγο για τις εφαρμογές που βρήκε αυτή στη σύγχρονη θεωρητική φυσική μετά τις εργασίες των Kauffman, Atiyah και Witten. Για παράδειγμα στο *κβαντικό μοντέλο γραφημάτων* (μία ανεξάρτητη του υποβάθρου υποψήφια κβαντική θεωρία της βαρύτητας) σωματίδια όπως τα *πρεόνια*, αναδύονται κατά φυσικό τρόπο από αμιγώς τοπολογικές δομές όπως είναι πλεξίδες και οι κόμβοι.

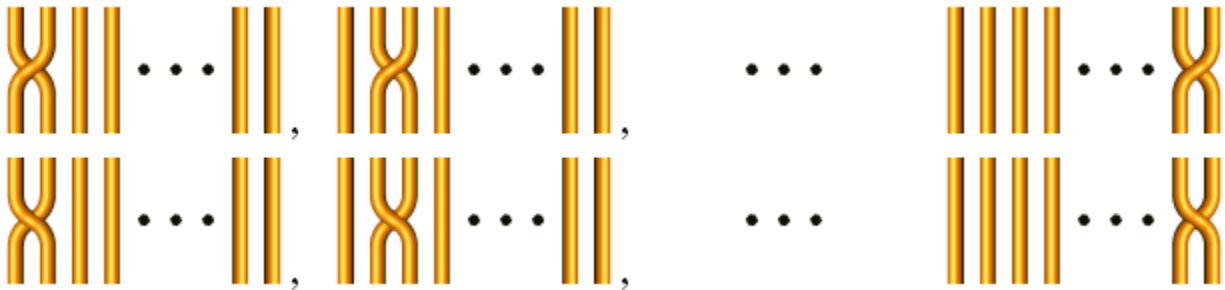


Η θεωρία πλεξίδων είναι μια αφηρημένη γεωμετρική θεωρία η οποία ανακαλύφθηκε το 1925 από τον Emil Artin και αναπτύχθηκε σχεδόν ανεξάρτητα από τη θεωρία κόμβων. Είναι γεγονός πως πλεξίδες συναντάμε καθημερινά στη ζωή μας. Γενικεύοντας την έννοια τους όμως, δύναται να φανταστεί κανείς χονδρικά μια πλεξίδα ως έναν ειδικό τύπο κομβικού διαγράμματος, στο οποίο υπάρχουν N ισαπέχοντα σημεία ενωμένα μέσω N δεσμών από ένα δεύτερο ισοπληθές σύνολο σημείων. Μια επιπλέον προϋπόθεση είναι οι δεσμοί αυτοί που μοιάζουν με βοστρύχους να λαμβάνουν χώρα μονοτονικά φθίνοντας. Οι πλεξίδες αυτές μπορούν να οργανωθούν σε μια δομή κυκλικής ομάδας εισάγοντας απλά μια πράξη σύνθεσης, ενώ η επιλογή των γεννητόρων θα γίνει με την ίδια λογική που επιλέχθησαν και για τις πεπερασμένες παραγόμενες ελεύθερες Αβελιανές ομάδες συμπλεγμάτων κελιών CW στην αλγεβρική τοπολογία.



Αυτές οι ομάδες πλεξίδων επιδέχονται πολύ βαθιά μαθηματική ερμηνεία, για παράδειγμα μπορούν να παίξουν τον ρόλο της θεμελιώδους ομοτοπικής ομάδας π_1 συγκεκριμένων χώρων διαμορφώσεων, όπως είναι ο χώρος φάσεων ενός φυσικού συστήματος. Ο Alexander -που εισήγαγε πρώτος την έννοια ενός αναλλοίωτου πολυωνύμου $\Delta_L(t)$ -, έδειξε πως οποιοσδήποτε κρίκος μπορεί να δημιουργηθεί από μια πλεξίδα ενώ βέβαια είναι δυνατόν διαφορετικές πλεξίδες να δώσουν τον ίδιο κρίκο. Ένα σημαντικό θεώρημα του Markov το οποίο περιγράφει σε διαγράμματα πλεξιδών δύο από τις

κινήσεις οι οποίες επάγουν ισοδύναμες κλειστές (δηλαδή με τα αντίστοιχα άκρα τους να συνδέονται κατά ζεύγη) πλεξίδες, παρουσιάστηκε τροποποιημένο το 1997 περιγράφοντας μία μόνο κίνηση από τους Lambropoulou-Rourke [7].



1.5. Μετρική Schwarzschild και η τοπολογική δομή των χωροχρονικών ανωμαλιών

Στις απαρχές του 20ου αιώνα, ο κλάδος της φυσικής γνώρισε δύο τεράστιες, δίδυμες επαναστάσεις: την κβαντική μηχανική για την περιγραφή της μικροσκοπικής κλίμακας της ύλης και τη γενική σχετικότητα για την περιγραφή του μακροκόσμου που μας περιβάλλει αντίστοιχα. Οι δύο αυτοί νέοι τρόποι σκέψης, είχαν ως άμεσο αποτέλεσμα τη δημιουργία και την εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών στη Φυσική σε αντιδιαστολή δυστυχώς με την τοπολογία, η οποία δεν έπαιξε κανέναν ενεργό ρόλο σε αυτή την ιστορία. Παρ'όλα αυτά όμως, δύο εργασίες της περιόδου εκείνης είχαν ξεκάθαρο και ουσιώδες τοπολογικό περιεχόμενο. Η μία ήταν του Schwarzschild[8] το 1916 περί της ύπαρξης λύσεων στις πεδιακές εξισώσεις του Einstein και η άλλη του Dirac[9] το 1931 βασισμένη στην ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων. Θα αναφερθούμε εν τάχυ πρώτα στην εργασία του Schwarzschild, καθώς οι ιδέες του Dirac όντας τρόπον τινά πιο ριζοσπαστικές εκ φύσεως ενέμπνευσαν περισσότερο τη σημερινή φυσική δραστηριότητα και αξίζουν μια εκτενέστερη ανάλυση με την παράλληλη μεταχείριση εννοιών από τη *θεωρία βαθμίδας* (gauge theory).

Το 1931 λοιπόν, ο Chandrasekhar[10] μελέτησε τις συνέπειες μιας απλής ιδέας. Σκέφτηκε πως για ένα ουράνιο σώμα με επαρκώς μεγάλη μάζα, όπως είναι ένας αστέρας, η ελκτική δύναμη της βαρύτητας δύναται να είναι τόσο ισχυρή που θα το ανάγκαζε να συσταλλεί ως προς τον ίδιο του τον εαυτό. Για

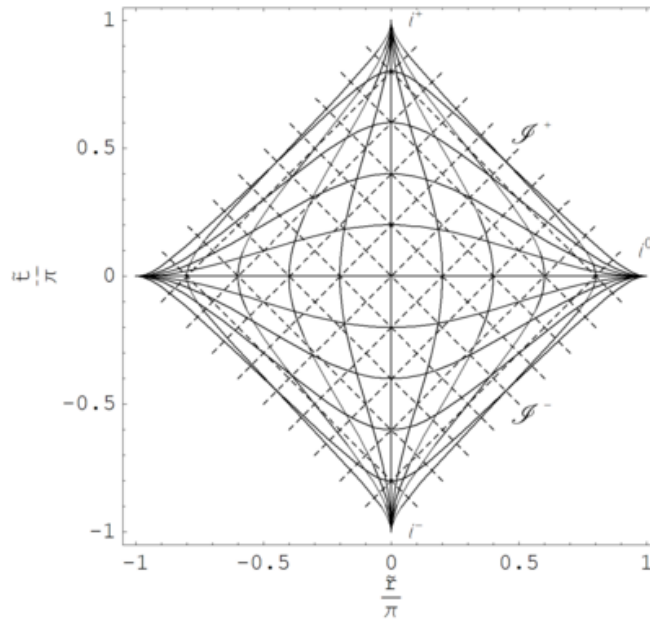
παράδειγμα, για ένα νεαρής ηλικίας αστέρι, η καύση των πυρηνικών καυσίμων του έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας εξωτερικής πίεσης η οποία αντισταθμίζει όλη την βαρυτική δύναμη προς το εσωτερικό του. Όταν όμως τα καύσιμα αυτά εξαντληθούν, η βαρύτητα τείνει να αποκτήσει εξ'ολοκλήρου τα ηνία απόφανσης για το μέλλον της κατάστασης του άστρου, συστέλλοντας το συνεχώς. Τα σχετικιστικά αέρια θα ψύχονται βαθμιαία υπακούοντας τη στατιστική των Fermi-Dirac έως ότου τελικώς το άστρο καταλήξει σε μια χωροχρονική ανωμαλία. Την κατάσταση αυτή την επ'ονόμασε *βαρυτική κατάρρευση* (gravitational collapse). Πράγματι, ο Chandrasekhar υπολόγισε πως η πίεση δεν μπορεί να αντισταθεί στη βαρύτητα εάν η μάζα M ήταν μεγαλύτερη από 1.4 ηλιακές μάζες, γεγονός που ισχύει για το τεράστιο πλήθος βαρέων αστέρων που παρατηρούν σήμερα οι κοσμολόγοι. Σε αντίθετη περίπτωση βέβαια, το άστρο ναι μεν θα ψυχθεί αλλά θα καταλήξει συστέλλόμενο σε ένα λευκό νάνο. Έτσι, οι αστροφυσικοί εξήγησαν τα τεράστια ενεργειακά αποθέματα των κβάζαρ υποθέτοντας πως προέρχονται από μια τέτοια βαρυτική κατάρρευση ενώ θεώρησαν τους αστέρες νετρονίων (άστρα τόσο πυκνά που τα πρωτόνια και τα ηλεκτρόνια έχουν συνδυαστεί μεταξύ τους ώστε να σχηματίσουν νετρόνια) ως αποτέλεσμα μιας παρόμοιας ψύξης με αυτή που υφίστανται οι λευκοί νάνοι.

Αυτό που αξίζει να παρατηρηθεί εδώ είναι ότι οι λύσεις που έδωσε ο Chandrasekhar, εμπειρείχαν ένα μεγάλο βαθμό συμμετρίας, μια συμμετρία που δεν αναμενόταν στο Σύμπαν μας, αίροντας έτσι σοβαρά ερωτηματικά για την ύπαρξη τους. Όμως, οι εργασίες των Oppenheimer, Snyder[11] έδειξαν πως προϋποθέτοντας μια σφαιρική συμμετρία γύρω από το υπό μελέτη σώμα, το αποτέλεσμα της βαρυτικής κατάρρευσης ενός νέφους κοσμικής σκόνης θα οδηγήσει στην τελική αποκοπή του από οποιαδήποτε εξωτερική παρατήρηση, καθώς το ίδιο θα διαπερνούσε μια συγκεκριμένη κρίσιμη ακτίνα, γνωστή και ως ακτίνα Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Αυτή η (μερικώς) σφαιρικά συμμετρική μετρική, εκφρασμένη σε πολικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) και τις φυσικές μονάδες $G = c = 1$ είναι αυτή που καθορίζει και τις μη-περιστρεφόμενες μαύρες οπές. Παρατηρεί κανείς αμέσως τις ιδιάζουσες ανωμαλίες στα σημεία $r = 0$ και $r = 2M$ (ακτίνα Schwarzschild). Όπως απέδειξαν όμως οι Kruskal-Szekeres το 1960 (αν και ο

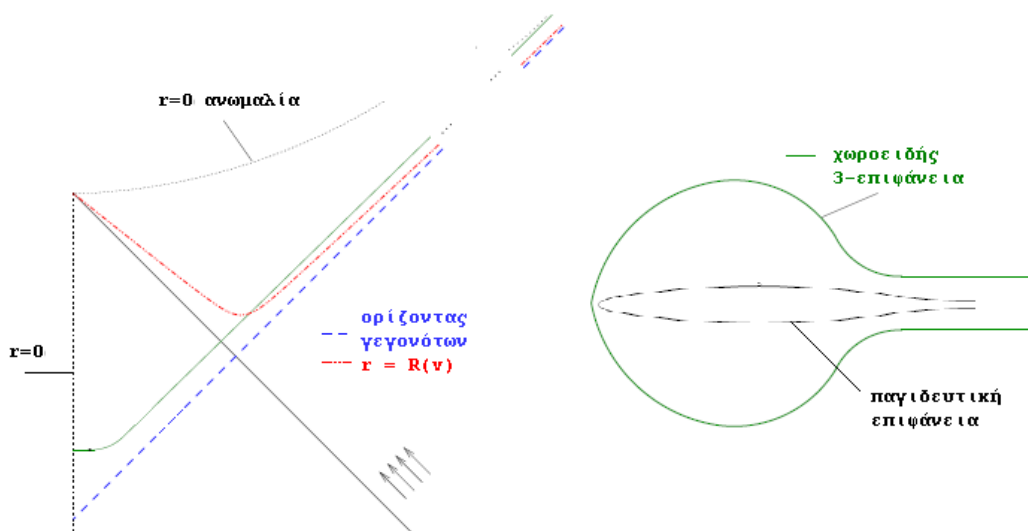
Lemaitre το είχε παρατηρήσει ήδη από το 1933 και οι Eddington-Finkelstein είχαν δώσει μια μερική λύση) η ανωμαλία στην υπερεπιφάνεια $r = 2M$ είναι απλά φαινομενική και απαλείφεται επιτυχώς με την κατάλληλη επιλογή ενός συστήματος συντεταγμένων. Δυστυχώς όμως η ανωμαλία $r = 0$ δεν αίρεται γεγονός που την καθιστά πραγματική, με αποτέλεσμα στο σημείο αυτό ο τανυστής καμπυλότητας του Riemann, για παράδειγμα, να αποκλείει. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι για $r > 2M$ η υπερεπιφάνεια είναι χρονοειδής, ενώ για $r < 2M$ είναι χωροειδής. Είναι ξεκάθαρο επομένως πως κάτι παράξενο συμβαίνει στην ακτίνα αυτή που καλείται *ορίζοντας γεγονότων* (event horizon), καθώς η γεωμετρία αλλάζει σημαντικά όταν την διαπερνά κανείς.



Ο Penrose[12] το 1965 έκανε μια εκπληκτική ανακάλυψη όσον αφορά τη φύση της βαρυτικής κατάρρευσης. Απέδειξε ένα θεώρημα που εγκαθιστούσε τις ανωμαλίες ενός βαρυτικού πεδίου ως σύμφυτες, εγγενείς **τοπολογικές** ιδιότητες της βαρυτικής του κατάρρευσης. Και με αυτό τον τρόπο κατέδειξε πως εσωτερικά του ορίζοντα γεγονότων εντός μιας μαύρης τρύπας υπάρχει μια επιφάνεια της οποίας η έκταση περιορίζεται κατά μήκος των ακτίνων φωτός που είναι αρχικά κάθετες επάνω της, ανακαλύπτοντας έτσι μια πληρέστερη μαθηματική περιγραφή της μετρικής Schwarzschild.

Η τοπολογική σημασία του θεωρήματος του Penrose είναι πως η βαρυτική κατάρρευση ενός άστρου σε μια χωροχρονική ανωμαλία δε

βρισκόταν σε καμία συνθήκη εξάρτησης με την επιπλέον ιδιότητα της σφαιρικής συμμετρίας όπως συνήθιζαν να πιστεύουν οι κοσμολόγοι μέχρι τότε (για παράδειγμα η γωνιακή στροφορμή του άστρου δεν ήταν ανάγκη να είναι μηδενική). Και έτσι, η τελική δημιουργία ανωμαλιών ήταν μια απλή συνέπεια αυτού που ο ίδιος ονόμασε *παγιδευτική επιφάνεια* (*trapped surface*). Κατ'αρχάς είναι σημαντικό να υπάρξει ένας αποδεκτός ορισμός για μια ανωμαλία, τόσο από αφηρημένης μαθηματικής άποψης όσο και από πραγματιστικής φυσικής διαίσθησης, καθώς ο απειρισμός της καμπυλότητας ως χαρακτηρισμός δεν ανταποκρίνεται επαρκώς στο τι συνεπάγονται τα θεωρήματα για τις ανωμαλίες. Το σημαντικότερο μέρος αυτού του ορισμού λοιπόν θα πρέπει να είναι η πληρότητα μιας γεωδαισιακής πάνω σε μια πολλαπλότητα M (ουσιαστικά μία μη-συμπαγής υπερεπιφάνεια Cauchy) που αναπαριστά τον χωρόχρονο, καθώς χωρίς αυτή την πληρότητα ένα σωματίδιο που ταξιδεύει πάνω σε μια χρονοειδής γεωδαισιακή θα μπορούσε να εξαφανιστεί απροσδόκητα από το M και μάλιστα σε πεπερασμένο χρόνο. Τότε, η παγιδευτική επιφάνεια δε θα είναι τίποτε άλλο παρά μια κλειστή, συμπαγής, χωροειδής σφαίρα S^2 με τη σημαντική ιδιότητα της ορθογώνιας σύγκλισης στο μέλλον των μηδενικών γεωδαισιακών που την τέμνουν. Σε αυτή την επιφάνεια λοιπόν θα κείται η ύλη όταν πλέον διαπεράσει την ακτίνα Schwarzschild.



Το επιχείρημα του Penrose στηρίζεται στον υπολογισμό του τοπολογικού βαθμού μιας απεικόνισης, η τιμή του οποίου εξασφαλίζει ότι η πληρότητα των μηδενικών γεωδαισιακών συνεπάγεται αμέσως ότι το μέλλον της παγιδευτικής επιφάνειας είναι συμπαγές. Αυτό όμως αποτελεί καθαρή

αντίφαση, καθώς η αρχική υπερεπιφάνεια Cauchy είναι μη-συμπαγής και επομένως η συνεχόμενη συστολή εξαναγκάζει το M να έχει μια ανωμαλία. Μία σημαντική συνέπεια που αναδεικνύεται από τις εργασίες των Hawking και Ellis[13] είναι ότι το σύνολο των λύσεων για το γενικό σχετικιστικό υπερβολικό πρόβλημα Cauchy στα πλαίσια του οποίου είναι καταδικασμένες να καταλήξουν σε ανωμαλίες, αποτελεί ένα σύνολο θετικού μέτρου θεωρούμενο σε μία κατάλληλη τοπολογία. Αν και λόγω αρχικών συνθηκών και αστάθειας λευκές οπές που θα συμπεριφέρονται ακριβώς αντίστροφα από ότι οι μαύρες, είναι σχεδόν απίθανες στο Σύμπαν μας, παρ'όλα αυτά είναι πολύ πιθανόν το σημερινό Σύμπαν στο οποίο ζούμε να ξεκίνησε από μια τέτοια πραγματικά αρχέγονη χωροχρονική ανωμαλία, που υπάρχει από την αρχή ενός άπειρου, πρακτικά κενού Σύμπαντος. Η δυνατότητα αυτή ωστόσο, συνεπάγεται ότι υπάρχουν στο Σύμπαν σύνολα γεγονότων απείρου έκτασης, τα οποία θα μας είναι για πάντα απρόσιτα με αποτέλεσμα να μη μπορούμε ούτε να τα παρατηρήσουμε αλλά ούτε και να τα επηρεάσουμε. Τέλος, δεν είναι υπερβολή να υποστηρίξει κανείς πως χωρίς τη χρήση τοπολογικών μεθόδων για τη βαθύτερη κατανόηση των ανωμαλιών αυτών, η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης συμπεριλαμβανομένων των -μέχρι τη στιγμή που πρωτοδιατυπώθηκε- πειραματικών ενδείξεων, να μην απολάμβανε την ευρέα αποδοχή της επιστημονικής κοινότητας.

Όπως, η τοπολογία βοήθησε στην ανάπτυξη της γενικής σχετικότητας, έτσι και οι Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας διατυπωμένες με κατάλληλους γεωμετρικούς όρους (ή αντίστοιχα οι μη-Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας γνωστές και ως θεωρίες Yang-Mills) έπαιξαν εξέχοντα ρόλο στην κβαντική θεωρία και συγκεκριμένα στον κλάδο των στοιχειωδών σωματιδίων. Και είναι αυτή η αλληλεπίδραση, μεταξύ τοπολογίας και Φυσικής που θα αποτελέσει το κεντρικό θέμα των επόμενων κεφαλαίων.

2. Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας

Στο παρόν κεφάλαιο θα κάνουμε μία εισαγωγή σε ένα πολύ σημαντικό κομμάτι της διαφορικής γεωμετρίας γνωστό ως θεωρία των ινώδων δεσμών. Κίνητρο για μια τέτοια μελέτη αποτελεί το γεγονός ότι η θεωρία αυτή αποτελεί το πιο βασικό πλαίσιο περιγραφής διαφόρων τοπολογικών αναλλοιώτων πολλαπλοτήτων όπως είναι οι χαρακτηριστικές κλάσεις συνομολογίας (για παράδειγμα η κλάση Chern, η κλάση Pontryagin, η κλάση Stiefel-Whitney κτλ). Ειδικότερα όμως, οι κλάσεις αυτές μπορούν να διατυπωθούν συνάμα και μέσα από όρους τοπικής γεωμετρίας (με τη βοήθεια επιπλέον διαφορικών εννοιών όπως είναι οι μορφές συνοχής και η καμπυλότητα αυτών) με αποτέλεσμα να συνιστούν ένα πλήρες μαθηματικό **ισοδύναμο** των θεωριών βαθμίδας (είτε Αβελιανές είτε Yang-Mills) που συναντάει κανείς σε κάθε επαρκώς ανεπτυγμένο κλάδο της Φυσικής σήμερα. Όπως θα δούμε αργότερα, αυτός ο συνδυασμός διαφορικής τοπολογίας και Φυσικής μας παρέχει νέα εννοιολογικά εργαλεία που με τη σειρά τους θα ρίξουν άπλετο φως σε ένα εύρος προβλημάτων που απασχολούσαν τη Φυσική για αρκετό καιρό αλλά και θα αποτελέσουν πρόδρομο πολλών νέων προσεγγίσεων σε κάποια ζητήματα που αφορούν τα Μαθηματικά.

2.1. Ινώδεις δέσμες

Ορισμός: Καλούμε *ίνωση* (fibration) μία τετράδα (P, M, F, π) όπου P, M διαφορίσιμες πολλαπλότητες που ονομάζονται *ολικός χώρος* (total space) και *χώρος βάσης* (base space) αντίστοιχα, F ένας τοπολογικός χώρος που θα καλείται στο εξής *ίνα* (fibre) και $\pi: P \rightarrow M$ μία συνεχής επιρριπτική απεικόνιση που θα ονομάζεται *προβολή* (projection). Επίσης, το $F_x = \pi^{-1}(\{x\}) \subset P$ θα καλείται *ίνα πάνω από το $x \in M$* και θα πρέπει να ισχύει $F_x \cong F$, για κάθε $x \in M$.

Ορισμός: Κάθε απεικόνιση $s: M \rightarrow P$ έτσι ώστε $\pi \circ s = id_M$ θα ονομάζεται *εγκάρσια τομή* (cross section) της P . Συμβολίζουμε με $\Gamma^\infty(M, P)$ το διανυσματικό χώρο όλων των C^∞ τομών της P .

Πλέον, δυνάμεθα να ορίσουμε ως *ινώδη δέσμη* (fibre bundle) μία ίνωση (P, M, F, π) για την οποία ισχύει η λεγόμενη *τοπικής τετριμμενοποίησης* (local trivialization condition):

Για κάθε $x \in M$ υπάρχει $U = U(x) = U_x$ ανοικτή περιοχή του x και $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ ομοιομορφισμός έτσι ώστε:

$$\pi(\varphi^{-1}(y, z)) = y, \quad \forall y \in U, \forall z \in F$$

Μάλιστα, στην περίπτωση που ο χώρος F είναι διανυσματικός χώρος, η δέσμη θα ονομάζεται *διανυσματική δέσμη* (vector bundle), ενώ αν αποτελεί ομάδα Lie τότε θα καλείται *κύρια ίνωση* (principal fibration). Να σημειωθεί εδώ, πως υπό το πρίσμα της παραπάνω συνθήκης τετριμμενοποίησης, είναι εύλογο κάθε δέσμη της μορφής $(M \times F, M, pr_1, F)$ να ονομάζεται *τετριμμένη δέσμη* (trivial bundle).

Μερικά παραδείγματα διανυσματικών δεσμών είναι τα εξής:

- Η *εφαπτόμενη δέσμη* (tangent bundle) $TM = \cup_x T_x M$ είναι όντως διανυσματική δέσμη και μάλιστα κάθε διανυσματικό πεδίο στην M μπορεί πλέον να θεωρηθεί ως μία εγκάρσια τομή στην εφαπτόμενη αυτή δέσμη
Όμοια, διανυσματική δέσμη αποτελεί και η *συνεφαπτόμενη δέσμη* T^*M όπου πλέον οι εγκάρσιες τομές αυτής της δέσμης θα είναι οι 1-μορφές.
- Η *εξωτερική δέσμη* (exterior bundle) $\Lambda^p(M)$ για την οποία η

$$\Lambda^p(T_x^*(M)) = T_x^*(M) \wedge \dots \wedge T_x^*(M)$$

είναι διανυσματική δέσμη και οι εγκάρσιες τομές της $\Lambda^p(M)$ θα είναι οι εξωτερικές p -μορφές $\Omega^p(M)$.

- Η *τανυστική δέσμη* (tensor bundle) $T_s^r(M)$ που ορίζεται από τανυστές τύπου (r, s) είναι διανυσματική δέσμη

Ορισμός: Έστω (P, M, F, π) και (P', M', F, π') ινώδεις δέσμες. Λέμε πως το ζεύγος (f, g) θα είναι ένας *μορφισμός* ανάμεσα στις δύο ινώδεις δέσμες εάν ισχύει $\pi' \circ g = f \circ \pi$. Δηλαδή, το παρακάτω διάγραμμα πρέπει να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi} & M \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ P' & \xrightarrow{\pi'} & M' \end{array}$$

Έτσι, μία ινώδης δέσμη (P, M, F, π) θα είναι τετριμμενοποιήσιμη εάν υπάρχει μεταξύ αυτής και της τετριμμένης δέσμης ένας μορφισμός (f, g) με $f = id_M$. Είναι εύκολο να δει κανείς πως κάθε διανυσματική δέσμη έχει εγκάρσια τομή (για παράδειγμα την μηδενική τομή), κάτι το οποίο δεν είναι εν γένει αληθές για μία κύρια ίνωση.

Ορισμός: Ονομάζουμε *κύρια ινώδη δέσμη* ή *G-δέσμη* (principal fibre bundle ή G-bundle) την τετράδα (P, M, G, π) με P, M, π όπως προηγουμένως και ίνα G μία ομάδα Lie η οποία δρα ελεύθερα από τα δεξιά στην P (π.χ αν $pg = p$ τότε $g = e_G$) και επιπρόσθετα ισχύουν για την $\pi: P \rightarrow M$ τα εξής:

Για κάθε $x \in M$ υπάρχει $U = U(x) = U_x$ ανοικτή περιοχή του x και $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ ομοιομορφισμός έτσι ώστε:

$$\pi(\varphi^{-1}(y, g)) = y, \quad \forall y \in U, \forall g \in G$$

και επιπλέον,

$$\varphi^{-1}(y, g \cdot g') = \varphi^{-1}(y, g) \cdot g', \quad \forall g, g' \in G$$

Τότε, έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση: $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ εάν και μόνο εάν $\exists g \in G$ έτσι ώστε $p_1 = p_2 g$

Απόδειξη: Έστω $\pi(p_1) = \pi(p_2) = x$. Τότε, τοπικά στο U_x θα έχουμε $\pi = \varphi^{-1}(x, g_i)$, $i = 1, 2$. Επομένως, $p_1 = \varphi^{-1}(x, g_1) = \varphi^{-1}(x, g_2)g_2^{-1}g_1$ άρα $p_1 = p_2 g$. Αντίστροφα τώρα, έστω $p_1 = p_2 g$. Τότε, $p_2 g = \varphi^{-1}(x, g_2)g = \varphi^{-1}(x, g_2 g) = p_1$. Άρα, $\pi(p_1) = x$ και $p_1 = \varphi^{-1}(x, g_1)$ με $g_1 = g_2 g$, δηλαδή $g = g_2^{-1}g_1$. Ειδικότερα το g είναι μοναδικό και $\pi(p_1) = \pi(p_2)$. ■

Παρατηρούμε εδώ ότι τοπικά η κύρια ινώδης δέσμη μπορεί να ανακτηθεί από τη μηδενική εγκάρσια τομή μέσω της δράσης της G . Δηλαδή, $\forall p \in$

$\pi^{-1}(U_x), \exists (y, g) \in U_x \times G : p = \varphi^{-1}(y, e_G)g$. Επομένως, η γενίκευση της παραπάνω πρότασης είναι άμεση:

Πρόταση: Μία κύρια ινώδης δέσμη είναι τετριμμενοποιήσιμη εάν και μόνο εάν διαθέτει ολική εγκάρσια τομή που είναι παντού καλά ορισμένη και λεία.

Απόδειξη: Ορίζουμε $\varphi_s: (P, M, G, \pi) \rightarrow (M \times G, M, G, pr_1)$ με $\varphi_s^{-1}(x, g) = s(x)g$. Τότε αυτή θα είναι μία αμφιμονοσήμαντη και λεία τετριμμενοποίηση. Μάλιστα, αν $\pi(p) = x, \forall p \in P$ τότε $\pi(p) = \pi(s(x))$ και $\exists! g \in G: p = s(x)g$. ■

Έστω τώρα (P, M, G, π) κύρια ινώδης δέσμη, $r: G \rightarrow GL(V)$ μία αναπαράσταση του διανυσματικού χώρου V και $P \times V$ μία δράση $(p, v)g = (pg, r(g^{-1})v)$. Αν συμβολίσουμε με $E = (P \times V)_{/G}$ τον χώρο των τροχιών και θεωρήσουμε την προβολή $\tilde{\pi}(p, v) = \pi(p)$ τότε η διανυσματική δέσμη $(E, M, \tilde{\pi})$ θα λέγεται ότι *συνάπτεται* με την αντίστοιχη κύρια ινώδη δέσμη. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η $(E, M, \tilde{\pi})$ είναι τοπικά τετριμμενοποιήσιμη με τις περιοχές να της να δίνονται ως το Καρτεσιανό γινόμενο $U \times V$ και η ίνα της να είναι ισομορφική με τον διανυσματικό χώρο V . Επίσης, αν υπάρχει ένα μεγιστικό σύνολο από γραμμικώς ανεξάρτητες εγκάρσιες τομές (τόσες όσες και η διάσταση της ίνας) τότε και η κύρια ινώδης δέσμη θα είναι τετριμμενοποιήσιμη. Πιο αναλυτικά:

Η προβολή $\tilde{\pi}$ με $\tilde{\pi}(\overline{(p, v)}) = \pi(p)$ ικανοποιεί τα εξής:

- $\tilde{\pi}$ καλά ορισμένη απεικόνιση: αφού $(p_1, v_1) \in \overline{(p, v)}$ έπεται ότι $\exists g \in G : (p_1, v_1) = (p, v)g = (pg, r(g^{-1})v)$. Άρα, $\pi(p_1) = \pi(pg) = \pi(p)$.
- Η $\tilde{\pi}$ είναι όντως προβολή: προφανές αφού η π είναι προβολή. Για παράδειγμα, $\forall x \in M, \exists p \in P : \pi(p) = x$ άρα $\tilde{\pi}(\overline{(p, 0)}) = x$.

Τώρα, όσον αφορά την τοπική τετριμμενοποίηση της $(E, M, \tilde{\pi}) = \psi$, μπορεί να κατασκευαστεί από την φ ως εξής:

$$\psi: \tilde{\pi}^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times V \text{ με}$$

$$\psi(\overline{(p, v)}) = (\pi(p), r(g)v)$$

Τότε,

- Η ψ είναι καλά ορισμένη επειδή: $(p_1, v_1) = (p, v)g' = (pg', r(g'^{-1})(v))$
Αυτό όμως σημαίνει ότι $\pi(p_1) = \pi(pg') = \pi(p)$. Επίσης, αφού $p_1 = pg'$
[π.χ $\varphi^{-1}(\pi(p_1), g_1) = \varphi^{-1}(\pi(p), g)g' = \varphi^{-1}(\pi(p), gg')$] έπεται ότι
 $r(g_1)(v_1) = r(g_1)r(g'^{-1})(v) = r(g_1g'^{-1})(v) = f(g)v$ και άρα
 $g_1 = gg'$.
- Η ψ είναι αμφιμονοσήμαντη: Η $(\pi(p), r(g)v) = (\pi(p_1), r(g_1)v_1)$
συνεπάγεται ότι $\pi(p) = \pi(p_1)$ και $r(g)v = r(g_1)v_1$. Δηλαδή, $p_1 = pg'$
και $v_1 = r(g_1^{-1}g)v$. Όμως, τα g και g_1 δεν είναι τυχαία: $p =$
 $\varphi^{-1}(\pi(p), g)$ και $p_1 = \varphi^{-1}(\pi(p), g_1) = pg' = \varphi^{-1}(\pi(p), gg')$.
Επομένως, $g' = g^{-1}g_1$ και άρα $(p_1, v_1) = (p, v)g'$ ή ισοδύναμα
 $\overline{(p_1, v_1)} = \overline{(p, v)}$.
- Η ψ είναι επιρριπτική: $\forall (y, v) \in U_x \times V$ αν $p = \varphi^{-1}(y, e_G)$ τότε
 $\psi(\overline{(p, v)}) = (\pi(p), r(e_G)v) = (y, v)$

Τέλος, δεν είναι δύσκολο να δει κανείς πως οι ίνες θα είναι ισομορφικές με το διανυσματικό χώρο V , δηλαδή $\forall x \in M, \tilde{\pi}^{-1}(x) \cong V$. Αρκεί να περιορίσουμε την $\psi: \pi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times V$ στο x και τότε η απεικόνιση $\sigma: \pi^{-1}(\{x\}) \rightarrow V$ με $\sigma(\overline{(p, v)}) = r(g)v$ θα είναι καλά ορισμένη και μάλιστα αφού η ψ είναι ισομορφισμός έπεται ότι θα είναι και η ίδια.

Παράδειγμα: Η κύρια ίνωση βαθμίδας $(M_4 \times SU(N), M_4, SU(N), pr_1)$ όπου N η διάσταση της αναπαράστασης του διανυσματικού χώρου των isospin. Η μαθηματική δομή πάνω στην οποία θεμελιώνεται κατά φυσικό τρόπο μία θεωρία βαθμίδας είναι η συναπτόμενη διανυσματική δέσμη (E, M_4, pr_1) όπου $E = (M_4 \times SU(N) \times V)_{/SU(N)}$. Έτσι, τα στοιχεία αυτού του χώρου τροχιών θα αντιστοιχούν σε φυσικά διανύσματα τα οποία μάλιστα θα θεωρούνται ισοδύναμα (θα ανήκουν στην ίδια κλάση τροχιάς) και θα ορίζουν ένα μοναδικό διάνυσμα της E αν διαφέρουν κατά έναν μετασχηματισμό βαθμίδας. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει, πως η διαδικασία του να σταθεροποιήσουμε μία βαθμίδα στη Φυσική αντιστοιχεί στη γλώσσα των Μαθηματικών στο να

επιλεγεί μία κανονική αναπαράσταση για κάθε μία από αυτές τις κλάσεις ισοδυναμίας των στοιχείων της E , όπως για παράδειγμα να δώσουμε μία έννοια συντεταγμένων στη διανυσματική δέσμη. Αυτό επιτυγχάνεται φυσικά με την εισαγωγή τοπικών χαρτών.

Έστω $\{U_i\}_{i \in I}$ άτλας της πολλαπλότητας M έτσι ώστε για κάθε γειτονιά U_i να υπάρχει μία τοπική τετριμμενοποίηση της P . Έστω επίσης $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ και οι αντίστοιχες τοπικές τετριμμενοποιήσεις:

$$\varphi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F_i$$

$$\varphi_j: \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F_j$$

Θεωρώντας τώρα $\varphi_{ij}: (U_i \cap U_j) \times F_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ ορίζουμε την εξής απεικονίσεις που ονομάζονται *συναρτήσεις μετάβασης*:

$$\psi_{ji} \triangleq \varphi_{ij} \circ \varphi_{ji}^{-1}: (U_i \cap U_j) \times F_i \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F_j$$

$$\text{με } \psi_{ji}(x, z) \rightarrow (x, f_{ji}(x, z)) \text{ όπου } \forall x \in M, \forall z \in F_i \text{ και } f_{ji}(x): F_i \rightarrow F_j$$

Οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν την λεγόμενη *συνθήκη συν-κύκλου*: (cocycle condition):

$$\psi_{ji} = \psi_{jk} \circ \psi_{ki}$$

Έτσι, στην ειδική περίπτωση μιας κύριας δέσμης ($F_i = F_j = G$), θα έχουμε τις τοπικές εγκάρσιες τομές:

$$s_i: U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$$

$$s_i(x) = \varphi_i^{-1}(x, e_G)$$

$$s_j: U_j \rightarrow \pi^{-1}(U_j)$$

$$s_j(x) = \varphi_j^{-1}(x, e_G)$$

Οπότε, οι συναρτήσεις μετάβασης θα δίνονται από τις:

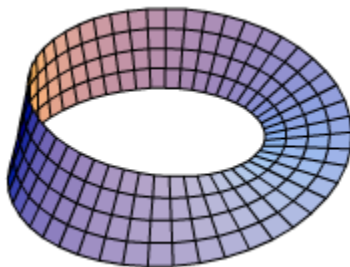
$$g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$$

$$s_j(x) = s_i(x)g_{ij}(x)$$

Παρατήρηση: Μία υποομάδα G της ομάδας των αντίστροφων γραμμικών απεικονίσεων $GL(n, \mathbf{R})$ θα ονομάζεται *δομική ομάδα* (structure group) εάν υπάρχει άτλας από χάρτες της δέσμης έτσι ώστε όλες οι απεικονίσεις μετάβασης να παίρνουν τιμές στην G .

Ας δούμε τώρα μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα ινωδών δεσμών:

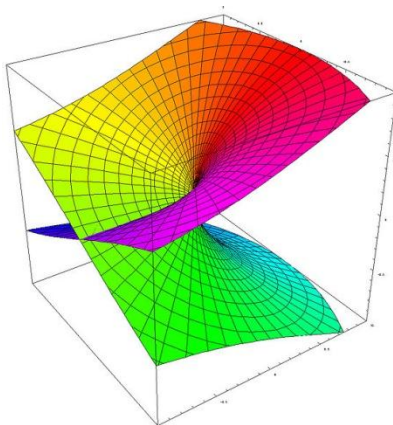
Γνωρίζουμε ότι ο κύλινδρος C γράφεται ως Καρτεσιανό γινόμενο δύο χώρων, συγκεκριμένα ενός ευθυγράμμου τμήματος $I \subset \mathbf{R}$ και ενός κύκλου S^1 τόσο τοπικά όσο και ολικά. Είδαμε πως η θεωρία ινωδών δεσμών διεκδικεί να μελετήσει και να περιγράψει χώρους οι οποίοι «μοιάζουν» με το Καρτεσιανό γινόμενο δύο χώρων μόνο τοπικά και όχι ολικά. Στην περίπτωση που δεν ισχύει αυτό αναφέρθηκε πως ναι μεν έχουμε ινώδεις δέσμες αλλά τις θεωρούμε τετριμμένες. Το απλούστερο παράδειγμα μη-τετριμμένης δέσμης είναι η λωρίδα του Möbius.



Πράγματι, η λωρίδα αυτή γράφεται τοπικά ως $S^1 \times [-1,1]$ (όπως ακριβώς και ο κύλινδρος με τον κύκλο να παίζει το ρόλο του βασικού χώρου και το ευθύγραμμο τμήμα το ρόλο της ίνας) αλλά ολικά ο χώρος δεν μοιάζει με γινόμενο καθώς ο ολικός χώρος P δεν είναι καν ομοιομορφικός με αυτόν. Πιο αναλυτικά, μία περιοχή U ενός σημείου $x \in M$ θα είναι ένα τόξο, του οποίου η αντίστροφη εικόνα $\pi^{-1}(U)$ θα αποτελεί ένα λεπτό τεμάχιο (τέσσερα τετράγωνα κατά πλάτος και ένα τετράγωνο κατά μήκος στην παραπάνω εικόνα) το οποίο θα είναι ελαφρώς συστραμμένο. Ο ομοιομορφισμός φ θα αντιστοιχεί την αντίστροφη εικόνα του U σε ένα κομμάτι κυλίνδρου το οποίο ναι μεν είναι καμπυλωμένο αλλά όχι και συστραμμένο. Εδώ ακριβώς έγκειται και η δύναμη της θεωρίας. Επομένως, ενώ η αντίστοιχη τετριμμένη δέσμη $M \times F$ θα αποτελούσε κύλινδρο, η λωρίδα του Möbius θα έχει μία επιπλέον συστροφή που θα την καθιστά μη-τετριμμένη. Σημειωτέον βέβαια, πως το

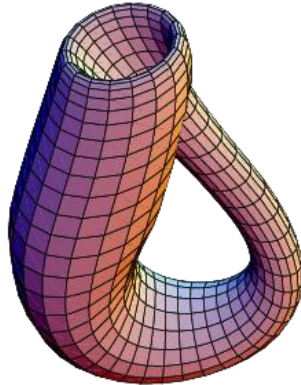
‘στρίψιμο’ αυτό είναι ορατό μόνο ολικά καθώς τοπικά η λωρίδα και ο κύλινδρος δεν διαφέρουν από τοπολογική άποψη.

Μπορούμε όμως να προχωρήσουμε παραπέρα; Η απάντηση είναι καταφατική. Το σύνορο της λωρίδας του Möbius είναι ένα πολύ καλό παράδειγμα μη-τετριμμένης **κύριας \mathbf{Z}_2 -δέσμης**. Πράγματι, αν T το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με $|z| = 1$ και $\pi : T \rightarrow T$ η απεικόνιση που στέλνει το z στο z^2 συνεπάγεται ότι η ίνα $\pi^{-1}(z^2) = \{\pm z\}$ θα αποτελείται από δύο σημεία.



Επομένως, μία εγκάρσια τομή θα αντιστοιχούσε στο να επιλέξει κανείς μία υπόριζη (αλλά λεία στον μοναδιαίο κύκλο) συνάρτηση, η οποία εύκολα προκύπτει πως δεν υπάρχει αφού κάθε συνάρτηση της μορφής $z^{\frac{1}{2}}$ ως πλειότιμη συνάρτηση θα αποτελείται από *σημεία διακλάδωσης* (branch cut points) και άρα θα περιέχει ασυνέχειες από την απαρχή των αξόνων έως το σημείο στο άπειρο (βλ. εικόνα). Άρα, αυτός είναι ένας ακόμη λόγος για τον οποίο η δέσμη δεν μπορεί να είναι τετριμμένη (καθώς αν ήταν, ο ολικός χώρος θα ήταν μη-συνεκτικός ως γινόμενο από δύο πανομοιότυπους κύκλους, ενώ ξέρουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει, αφού φαίνεται εύκολα πως το σύνορο της λωρίδας είναι όντως συνεκτικό). Επομένως, αν έχουμε μία κάλυψη από δύο αλληλοεπικαλυπτόμενα ανοικτά σύνολα U_1, U_2 και πάρουμε τις συναρτήσεις μετάβασης $g_i: U_i \rightarrow \mathbf{Z}_2, \forall i = 1, 2$ παρατηρούμε τα εξής: πρώτον αφού η \mathbf{Z}_2 είναι διακριτή ομάδα και τα U_1, U_2 συνεκτικά έπεται αμέσως ότι οι συναρτήσεις μετάβασης θα είναι σταθερές και δεύτερον, δεν υπάρχουν τριπλές αλληλοεπικαλύψεις οπότε κατά συνέπεια η συνθήκη συν-κύκλου που αναφέραμε πιο πάνω ικανοποιείται αυτομάτως. Τελικά, η δέσμη θα είναι τετριμμένη εάν και μόνο εάν $g_1 = g_2$.

Ένα δεύτερο παράδειγμα, αποτελεί η φιάλη του Klein της οποίας η απεικόνιση εδώ δεν είναι ρεαλιστική, καθώς η πολλαπλότητα αυτή δεν δύναται να εμφυτευθεί στον συνήθη Ευκλείδειο τρισδιάστατο χώρο έτσι ώστε να διαφαίνονται πλήρως όλες οι ιδιότητες τις.



Παρ'όλα αυτά είναι και αυτή μία μη-τετριμμένη δέσμη που μπορεί να ιδωθεί με παρόμοια συλλογιστική ως μία δέσμη $S^1 \times S^1$.

Κλείνουμε τα παραδείγματα εδώ, αναφέροντας πως ακόμα και ένας χώρος κάλυψης (covering space) μπορεί να θεωρηθεί ινώδης δέσμη εφόσον η προβολή της δέσμης είναι ένας τοπικός ομοιομορφισμός. Στην περίπτωση αυτή, δεν είναι δύσκολο να δει κανείς πως η ίνα θα είναι ένας διακριτός χώρος.

2.2. Μορφές συνοχής σε διανυσματικές δέσμες

Έστω (E, M, π) τυχαία διανυσματική δέσμη με τις ίνες τις όλες ισομορφικές με τον \mathbf{R}^n και M κάποια n -διάστατη πολλαπλότητα. Αν θεωρήσουμε ως $L^p(TM)$ τη δέσμη των p -διαφορικών μορφών στον εφαπτομενικό χώρο της M τότε θα έχουμε τον εξής ορισμό για μια γενικευμένη μορφή της συναλλοίωτης παραγώγου:

Ορισμός: Η απεικόνιση $\nabla: \Gamma^\infty(M, E \otimes \Lambda^p(TM)) \rightarrow \Gamma^\infty(M, E \otimes \Lambda^{p+1}(TM))$ ονομάζεται *μορφή συνοχής* (connection form) και ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. Γραμμικότητα

$$\nabla(a_1 s_1 + a_2 s_2) = a_1 \nabla s_1 + a_2 \nabla s_2 \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbf{R}$$

2. Κανόνας Leibniz

$$\nabla(s \otimes \omega) = s \otimes d\omega + \nabla s \wedge \omega$$

όπου d ο τελεστής εξωτερικής παραγώγισης και \wedge το εξωτερικό γινόμενο. Ειδικότερα, αν $p = 0$ και f λεία συνάρτηση, θα έχουμε:

$$\nabla(sf) = s \otimes df + (\nabla s)f$$

Δοθείσης μία τοπικής τετριμμενοποίησης στο $U \times \mathbf{R}^m$ με τοπικές συντεταγμένες $\{x^k\}_{k=1}^n$ στο $U \in M$ και $\{s_i\}_{i=1}^m$ γραμμικώς ανεξάρτητες εγκάρσιες τομές στο U , τότε:

$$\nabla s_i = \sum_{j=1}^m s_j \otimes \omega_i^j \quad \text{όπου } \omega_i^j \in T^*M$$

Ως πίνακας αυτή η 1-μορφή συνοχής ω στο U θα παίρνει τιμές από μία άλγεβρα Lie και άρα σε μορφή Chern θα είναι αντίστοιχα:

$$\nabla s = s \otimes \omega, \quad \text{όπου } s = (s_1, \dots, s_m) \text{ και } \omega = (\omega_i^j)$$

Αξίζει να δούμε εδώ πώς αλλάζει αυτή η μορφή κάτω από έναν γραμμικό μετασχηματισμό εγκαρσίων τομών, ο οποίος μπορεί να γραφτεί τοπικά ως:

$$s'(x) = s(x)g(x)$$

όπου $g(x) \in GL(n, \mathbf{R})$ και οι συνιστώσες της $g(x)$ είναι λείες συναρτήσεις του $x \in M$. Αν E είναι ο διανυσματικός χώρος που συνάπτεται στην κύρια ινώδη δέσμη μέσω μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης $r: G \rightarrow GL(m, \mathbf{R})$, τότε η $g(x)$ θα είναι μία τοπική εγκάρσια τομή στην κύρια ινώδη δέσμη. Επομένως, σε ένα καινούργιο σύστημα συντεταγμένων θα έχουμε:

$$\nabla s' = s' \otimes \omega'$$

Δηλαδή,

$$\nabla(sg) = s \otimes dg + (\nabla s)g = s \otimes (dg + \omega g) = s \otimes g\omega'$$

Όμως, $g\omega' = dg + \omega g$ επομένως καταλήγουμε ότι: $\omega' = g^{-1}dg + g^{-1}\omega g$.

Ας θεωρήσουμε τώρα μία επανάληψη του τελεστή συναλλοίωτης παραγώγισης ∇ πάνω στις τομές, θα έχουμε διαδοχικά:

$$\nabla(\nabla s) = \nabla(s \otimes \omega) = s \otimes d\omega + \nabla s \wedge \omega = s \otimes (d\omega + \omega \wedge \omega) = s \otimes \Omega$$

και επομένως προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός: Ο τελεστής $\nabla(\nabla s) = s \otimes \Omega$, $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ θα ονομάζεται *μορφή καμπυλότητας*.

Οι συνιστώσες Ω_i^j του Ω θα είναι 2-μορφές με τιμές σε μία άλγεβρα Lie:

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j + \omega_k^j \wedge \omega_i^k$$

Έτσι, κάτω από τον μετασχηματισμό s' που αναφέραμε παραπάνω η Ω θα μετασχηματίζεται ως:

$$\begin{aligned} \Omega' &= d\omega' + \omega' \wedge \omega' \\ &= d(g^{-1}dg + g^{-1}\omega g) + (g^{-1}dg + g^{-1}\omega g) \wedge (g^{-1}dg + g^{-1}\omega g) = \\ &= -g^{-1}dgg^{-1} \wedge dg + g^{-1}d^2g - g^{-1}dgg^{-1} \wedge \omega g + g^{-1}d\omega g - g^{-1}\omega \wedge dg \\ &\quad + g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg + g^{-1}dg \wedge g^{-1}\omega g + g^{-1}\omega g \wedge g^{-1}dg + g^{-1}\omega g \\ &\quad \wedge g^{-1}\omega g \end{aligned}$$

Άρα,

$$\Omega' = g^{-1}(d\omega + \omega \wedge \omega)g = g^{-1}\Omega g$$

Δηλαδή, μία 2-μορφή καμπυλότητας μετασχηματίζεται ως ένας τανυστής κάτω από έναν τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας.

Γνωρίζουμε ότι η συναλλοίωτη παράγωγος για διανύσματα, 1-μορφές και τανυστές έχει τη μορφή των ακολούθων εκφράσεων αντίστοιχα:

$$\nabla_i v^j = \partial_i v^j + \Gamma_{ik}^j v^k$$

$$\nabla_i v_j = \partial_i v_j - \Gamma_{ij}^k v_k$$

$$\nabla_i t_k^j = \partial_i t_k^j + \Gamma_{ih}^j t_k^h - \Gamma_{ik}^h t_h^j$$

όπου Γ_{jk}^i τα σύμβολα Christoffel της μορφής συνοχής της πολλαπλότητας με μετρικό τανυστή η_{ij} :

$$\Gamma_{jk}^i(\eta) = \frac{1}{2} \eta^{il} \left(\frac{\partial \eta_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial \eta_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \eta_{jk}}{\partial x^l} \right)$$

Έστω τώρα,

$$\omega_i^j = dx^k \Gamma_{ki}^j$$

$$d = dx^k \partial_k$$

$$\nabla = dx^k \nabla_k$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις σχέσεις πιο πάνω για 1-μορφές, 2-μορφές θ^j και ξ_i^j αντίστοιχα, ορίζεται η εξωτερική συναλλοιώτη παράγωγος:

$$D\theta^j = d\theta^j + \omega_k^j \wedge \theta^k$$

$$D\xi_i^j = d\xi_i^j + \omega_k^j \wedge \xi_i^k - \omega_i^k \wedge \xi_k^j = d\xi_i^j + \omega_k^j \wedge \xi_i^k - \xi_k^j \wedge \omega_i^k$$

Ενώ, σε μορφή πινάκων θα έχουμε:

$$D\theta = d\theta + \omega \wedge \theta$$

$$D\xi = d\xi + \omega \wedge \xi - \xi \wedge \omega$$

Ειδικότερα, για την 1-μορφή συνοχής και την 2-μορφή καμπυλότητας θα έχουμε αντίστοιχα:

$$D\omega = d\omega + \omega \wedge \omega = \Omega$$

$$D\Omega = d\Omega + \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega = D(D\omega)$$

Τέλος, αναφέρουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα, γνωστό και ως 2^η ταυτότητα του *Bianchi*.

Θεώρημα: $D\Omega = 0$

Απόδειξη: Αφού,

$$d\Omega_i^j = d^2\omega_i^j + d\omega_k^j \wedge \omega_i^k - \omega_k^j \wedge d\omega_i^k$$

$$\omega_k^j \wedge \Omega_i^k = \omega_k^j \wedge d\omega_i^k - \omega_k^j \wedge \omega_h^k \wedge \omega_i^h$$

$$\Omega_k^j \wedge \omega_i^k = d\omega_k^j \wedge \omega_i^k - \omega_h^j \wedge \omega_k^h \wedge \omega_i^k$$

έπεται ότι,

$$D\Omega_i^j = d\Omega_i^j + \omega_k^j \wedge \Omega_i^k - \Omega_k^j \wedge \omega_i^k = d\omega_k^j \wedge \omega_i^k - \omega_k^j \wedge d\omega_i^k + \omega_k^j \wedge d\omega_i^k - \omega_k^j \wedge \omega_h^k \wedge \omega_i^h - d\omega_k^j \wedge \omega_i^k + \omega_h^j \wedge \omega_k^h \wedge \omega_i^k = 0$$

■

2.3. Μορφές συνοχής σε κύριες δέσμες

Έστω (P, M, G, π) μία κύρια ινώδης δέσμη. Τότε, ορίζουμε μια μορφή συνοχής της κύριας δέσμης μία λεία οικογένεια από διανυσματικούς υποχώρους H_p του T_pP (που ο καθένας ονομάζεται *οριζόντιος*) για την οποία:

1. $H \in C^\infty(P, H_p)$ να είναι κατανομή
2. $H_{p \cdot g} = H_p \cdot g = R_{g^*}H_p, \forall g \in G$ (για παράδειγμα η οικογένεια οριζόντιων υποχώρων να μετασχηματίζεται κατά φυσικό τρόπο κάτω από τη δεξιά δράση της G)
3. $\forall p \in P, T_pP = H_p \oplus V_p$, όπου V_p ο εφαπτόμενος χώρος στην ίνα πάνω από το $\pi(p)$ (για αυτό και ονομάζεται *κάθετος* υπόχωρος)
4. $\pi_*H_p = T_{\pi(p)}M$, όπου H_p η προβολή πάνω στην εφαπτόμενη δέσμη του M και $*$ η Ιακωβιανή απεικόνιση

Έτσι, αν η M έχει διάσταση n και η G έχει m παραμέτρους ($\dim \mathfrak{g} = m$) τότε:

$$\dim T_p P = n + m$$

$$V_p = \text{Ker } \pi_* \cong \mathfrak{g}$$

Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε να ορίσουμε ισοδυνάμως ως μορφή συνοχής μιας κύριας δέσμης μία λεία οικογένεια από μορφισμούς:

$$\Gamma_p: T_x M \rightarrow T_p P, \forall p \in \pi^{-1}(x) = F_x$$

για την οποία θα ισχύει ότι:

1. $\Gamma \in C^\infty(P, \Gamma_p)$
2. $\Gamma_p \cdot g = R_{g^*} \Gamma_p$
3. $\pi_* \circ \Gamma_p = id_{T_x M}$

Το πλεονέκτημα με αυτόν τον ορισμό είναι ότι φαίνεται εύκολα πως, πλέον έχουμε την εξής ανάλυση:

$$H_p = \Gamma_p(T_x M)$$

$$V_p = T_p(F_x)$$

Τις περισσότερες φορές θα μας χρειαστούν οι εξής απεικονίσεις:

$$v: T_p P \rightarrow T_p(F_x) \text{ με } X = X_h + X_v \rightarrow X_v$$

$$h: T_p P \rightarrow H_p \text{ με } X \rightarrow X_H$$

$$i: T_p(F_x) \rightarrow \mathfrak{g}$$

Ο δυϊκός ορισμός της παραπάνω μορφής συνοχής θα δίνεται ως μία λεία οικογένεια από 1-μορφές ω_p (μορφές συνοχής Ehresmann) που παίρνουν τιμές στην άλγεβρα Lie \mathfrak{g} . Δηλαδή,

$$\omega_p: T_p P \rightarrow \mathfrak{g} \text{ με } \omega_p(X) \rightarrow i(X_v) = i \circ v$$

έτσι ώστε,

1. $\omega(X)$ κάθετο (δηλαδή, $\forall X \in T_p P, \omega(X) = \omega(X_v) = X_v \in \mathfrak{g}$ άρα $\omega(X) = 0$ αν $X \in H_p$)
2. $(R_g^* \omega)(X) = \omega(R_g X) = (Ad g^{-1})\omega(X), \forall g \in G, X \in TP$ όπου $Ad: G \rightarrow \mathfrak{g}$ η ανάστροφη αναπαράσταση

Οπότε, έχουμε $H_p = Ker \omega_p$. Γενικά, κάτω από πολύ γενικές συνθήκες υπάρχει ένα μεγάλο πλήθος μορφών συνοχής που ορίζονται πάνω σε μία κύρια ινώδη δέσμη.

Ορίζουμε τώρα, ως εξωτερικό τελεστή συναλλοίωτης παραγώγου την απεικόνιση:

$$D: V \otimes \Lambda^p(TP) \rightarrow V \otimes \Lambda^{p+1}(TP)$$

$$(D\omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) = d\omega(hX_1, \dots, hX_{p+1})$$

Επί παραδείγματι, θα έχουμε: $D\omega = d\omega \circ h$, όπου $h: T_p P \rightarrow H_p$ η οριζόντια προβολή που ορίσαμε πιο πάνω. Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν, ο V θα είναι ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος κάποιας αναπαράστασης r της G ενώ τα ω θα είναι 1-μορφές συνοχής με τιμές στον V έτσι ώστε $R_g^* \omega = r(g^{-1})\omega$.

Και πάλι εδώ, για μία 2-μορφή καμπυλότητας Ω , θα έχουμε:

$$\Omega = D\omega = d\omega \circ h$$

Επομένως,

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

Από το γεγονός ότι, $D\Omega = d\Omega + \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega$ μπορεί να αποδειχθεί πως η ταυτότητα του Bianchi $D\Omega = 0$ ισχύει ακόμα και σε αυτή την πιο γενική περίπτωση.

Και φτάνουμε έτσι στον συνήθη ορισμό της Φυσικής για τον ορισμό μιας μορφής συνοχής σε τοπικές συντεταγμένες. Έστω, U_i, U_j τοπικοί χάρτες στην M και $\mathfrak{g} = GL(m, \mathbf{R})$. Τότε, για διανυσματικές δέσμες θα έχουμε:

$$\omega_{U_i} = g_{ij}^{-1} dg_{ij} + g_{ij}^{-1} \omega_{U_j} g_{ij}$$

όπου το $g_{ij}(x)$ θα εξαρτάται κατά διαφορίσιμο τρόπο από το $x \in U_i \cap U_j$.
Ακόμα πιο γενικά, για μία 1-μορφή συνοχής ω με τιμές στην \mathfrak{g} θα έχουμε:

$$\omega_{U_i} = g_{ij}^{-1} dg_{ij} + Ad(g_{ij}^{-1})\omega_{U_j}$$

Έτσι, μία μορφή συνοχής θα είναι μία οικογένεια από 1-μορφές ω_{U_i} με τιμές στην άλγεβρα Lie \mathfrak{g} , προσαρμοσμένες στο κάλυμμα $\{U_i\}_{i \in I}$ της M και που λόγω της παραπάνω εξίσωσης θα εξαρτώνται από τις τομές $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Θα κλείσουμε, με μία παρατήρηση για τις επίπεδες μορφές συνοχής σε κύριες δέσμες. Έστω $P = M \times G$ μία τετριμμένη κύρια ινώδης δέσμη. Τότε, η $M \times \{g\}$ θα είναι μία υποπολλαπλότητα της P για κάθε $g \in G$ και η $M \times \{e\}$ θα είναι μία υποδέσμη της P (αφού η $\{e\}$ είναι φυσικά ομάδα Lie). Τότε, η επίπεδη μορφή συνοχής στην P (θεωρούμενη ως $H_p = T_p(M \times \{g\})$ με $p = (x, g)$) θα ανάγεται σε μία μοναδική μορφή συνοχής στο $M \times \{e\}$. Οπότε, μία μορφή συνοχής σε μία κύρια δέσμη (P, M, G, π) θα καλείται *επίπεδη* αν $\forall x \in M, \exists U_x$ έτσι ώστε η επαγόμενη μορφή συνοχής στην $\pi^{-1}(U_x)$ να είναι ισομορφική με την επίπεδη μορφή συνοχής στην $U_x \times G$. Μπορεί να αποδειχθεί μάλιστα, πως μία μορφή συνοχής ω είναι επίπεδη εάν και μόνο εάν η 2-μορφή καμπυλότητας Ω είναι μηδενική.

2.4. Παράλληλη μεταφορά και η ομάδα ολονομίας

Έστω (P, M, G, π) μία κύρια ινώδης δέσμη με μία 1-μορφή συνοχής ω (πίνακας των 1-μορφών του T^*M με τιμές στη \mathfrak{g}). Για μία τοπική τετριμμενοποίηση $U \times G$ με (x, g) τοπικές συντεταγμένες, το ω θα δίνεται από την σχέση:

$$A(x) = A_\mu^a(x) \frac{\lambda_a}{2i} dx^\mu$$

όπου $x^\mu, \mu = 1, 2, \dots, n$ τοπικές συντεταγμένες στο $U \subset M$ και $\lambda_a, a = 1, 2, \dots, m$ σταθεροί πίνακες που παράγουν την άλγεβρα \mathfrak{g} . Έστω τώρα $x(t), 0 \leq t \leq 1$ κατά τμήματα C^1 καμπύλη στη M . Μία *οριζόντια ανύψωση*

(lift) της $x(t)$ θα είναι μία άλλη καμπύλη $p(t)$ στην P , έτσι ώστε $\pi(p(t)) = x(t)$, $0 \leq t \leq 1$ και κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης αυτής είναι οριζόντιο. Μπορεί να αποδειχθεί ότι για δοθέν $x(t)$ και ένα σημείο $p_0 \in P$ με $\pi(p_0) = x_0 = x(0)$ υπάρχει μοναδική οριζόντια ανύψωση $p(t)$ με $p(0) = p_0$.

Η παράλληλη μεταφορά ινών μπορεί να οριστεί ως εξής: όταν το p_0 μεταβάλλεται πάνω στην ίνα $\pi^{-1}(x_0)$ τότε έχει κανείς $p_1 = p(1)$ έτσι ώστε $\pi(p_1) = x_1 = x(1)$. Δηλαδή, μία απεικόνιση της μορφής $\pi^{-1}(x_0) \rightarrow \pi^{-1}(x_1)$ που θα αποτελεί μάλιστα ισομορφισμό μεταξύ των ινών. Στην ειδική περίπτωση που η καμπύλη είναι κλειστή $x_0 = x_1$ θα έχουμε έναν αυτομορφισμό της ίνας $\pi^{-1}(x_0)$. Επομένως, θα έχουμε έναν τέτοιο αυτομορφισμό για κάθε κλειστή καμπύλη με τα ίδια άκρα. Κάτω από την πράξη της σύνθεσης αυτοί οι αυτομορφισμοί θα αποτελούν ομάδα (μάλιστα υποομάδα της G) που ονομάζεται *ομάδα ολονομίας* της μορφής συνοχής με σημείο αναφοράς το σημείο x_0 . Σε περίπτωση που περιοριστούμε στην παράλληλη μεταφορά βρόχων γύρω από το x_0 (που είναι μηδενικά ομοτοπικές) θα έχουμε αντίστοιχα την *περιορισμένη ομάδα ολονομίας*, η οποία θα είναι επίσης υποομάδα της G .

Επιστρέφοντας στην τοπική τετριμενονικοποίηση που θεωρήσαμε πριν, η εγκάρσια τομή $g_{ij}(t)$ θα είναι εξ'ορισμού παράλληλα μεταφερόμενη κατά μήκος της καμπύλης $x(t)$ αν και μόνο εάν:

$$g'_{ij} A_{\mu ik}(x) \dot{x}^\mu g_{kj} = 0$$

αφού λόγω παράλληλης μεταφοράς είναι:

$$\dot{x}^\mu (\theta_\mu z^i + \Gamma_{\mu\kappa}^i z^\kappa) = 0$$

Παραγωγίζοντας κατά μήκος της ανυψωμένης καμπύλης έχουμε:

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + g'_{ij} \frac{\partial}{\partial g_{ij}}$$

και αφού πρόκειται για παράλληλη ανύψωση:

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2i} A_\mu^a(x) (\lambda_a)_{ik} g_{kj} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \right) = \dot{x}^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_\mu^a(x) R_a \right) = \dot{x}^\mu D_\mu$$

όπου η συναλλοίωτη παράγωγος θα ορίζεται ως εξής:

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_\mu^a(x)R_a, \quad R_a = \text{tr}\left(\frac{1}{2i}\lambda_a g \frac{\partial}{\partial g^T}\right)$$

με την οικογένεια $\{R_a\}$ να είναι δεξιά-αναλλοίωτη βάση του εφαπτομενικού χώρου της G που ικανοποιούν την:

$$[R_a, R_b] = -f_{abc}R_c$$

με f_{abc} οι δομικές σταθερές της \mathfrak{g} . Η διάσπαση του $T_p P$ σε οριζόντιο και κάθετο μέρος $T_p P = H_p \oplus V_p$ θα δίνεται πλέον ως:

$$(D_\mu, R_a)$$

Επομένως η καμπυλότητα (η οποία θα ορίζεται ως ο μεταθέτης της βάσης για τον οριζόντιο υπόχωρο T_p), θα έχει μόνο κάθετες συνιστώσες. Συγκεκριμένα,

$$[D_\mu, D_\nu] = -F_{\mu\nu}^a R_a, \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{abc}A_\mu^b A_\nu^c$$

ενώ στην δυϊκή προσέγγιση, η μορφή συνοχής ω θα είναι μία 1-μορφή στον T^*P με τιμές στη \mathfrak{g} , της οποίας η κάθετη συνιστώσα θα είναι η μορφή Maurer-Cartan $g^{-1}dg$, δηλαδή:

$$\omega = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$$

Όπως θα περίμενε κανείς, η ω καταστρέφεται στα οριζόντια διανύσματα ενώ είναι σταθερή στα αντίστοιχα κάθετα, δηλαδή:

$$\langle \omega, D_\mu \rangle = 0$$

$$\langle \omega, R_a \rangle = \frac{1}{2i}\lambda_a$$

Η μορφή Maurer-Cartan είναι αναλλοίωτη κάτω από την αριστερή δράση $g \rightarrow g_0 g$ με $g_0 \in G$ σταθερό:

$$(g_0 g)^{-1}d(g_0 g) = g^{-1}dg$$

και μπορεί να αναλυθεί ως:

$$g^{-1}dg = \frac{1}{2i}\theta_a\lambda_a$$

με $\frac{1}{2i}\lambda_a \in \mathfrak{g}$ σταθεροί πίνακες και θ_a μία βάση για τις αριστερά αναλλοίωτες 1-μορφές. Από τη σχέση, $d(g^{-1}dg) + g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg = 0$ έπεται ότι η θ_a υπακούει στην εξίσωση Maurer-Cartan:

$$\theta_a + \frac{1}{2}f_{abc}\theta_b \wedge \theta_c = 0$$

Η δυϊκή της θ_a θα είναι:

$$L_a = \text{tr} \left(\frac{1}{2i} g \lambda_a \frac{\partial}{\partial g^T} \right) = \frac{1}{2i} g_{ik} (\lambda_a)_{kj} \frac{\partial}{\partial g_{ij}}$$

που με τη σειρά της υπακούει στις σχέσεις:

$$\langle \theta_a, L_b \rangle = \delta_{ab}$$

$$[L_a, L_b] = f_{abc} L_c$$

Από την άλλη πλευρά, η ω μετασχηματίζεται σε έναν τανυστή κάτω από τη δεξιά δράση $g \rightarrow gg_0$, με $g_0 \in G$ σταθερό. Δηλαδή,

$$\omega \rightarrow g_0^{-1}\omega g_0$$

Ενώ γενικότερα, για $g \rightarrow gg_1$ με g_1 όχι σταθερό θα είναι:

$$\omega \rightarrow g_1^{-1}\omega g_1 + g_1^{-1}dg_1$$

Τέλος, για την 2-μορφή καμπυλότητας θα έχουμε:

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = g^{-1}Fg$$

$$\text{όπου } F = dA + A \wedge A = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a \frac{1}{2i} \lambda_a dx^\mu \wedge dx^\nu$$

άρα ικανοποιεί την ταυτότητα Bianchi: $D\Omega + \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega = 0$ και μετασχηματίζεται ως τανυστής: $\Omega \rightarrow g_1^{-1}\Omega g_1, \forall g_1 \in G$ όπως αναμενόταν.

3. Φυσικά φαινόμενα πολυπλοκότερης τοπολογικής φύσεως

3.1. Τα μαγνητικά μονόπολα του Dirac

Τα μαγνητικά μονόπολα αποτελούν ένα πολύ σημαντικό κεφάλαιο της θεωρητικής φυσικής σήμερα, το οποίο καλύπτει μια τεράστια ποικιλία από αναπάντεχα αποτελέσματα. Πρώτος ο Dirac [9], στην εργασία του το 1931, παρατήρησε πως υπάρχει μια ασυμμετρία στις εξισώσεις του Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό. Συγκεκριμένα, οι ομογενείς εξισώσεις:

$$\nabla \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

δεν εμπεριέχουν κανέναν όρο πηγής (άρα έχουμε κλειστές συνεχείς μαγνητικές γραμμές) και κατ'επέκταση η πρώτη εξίσωση απαγορεύει την ύπαρξη μαγνητικών φορτίων στη Φύση. Για τον ίδιο τον Dirac, δεν υπήρχε κάποιος εγγενής λόγος για τον οποίο θα έπρεπε να συμβαίνει αυτό. Έτσι, εισήγαγε την έννοια του μαγνητικού μονοπόλου ως ένα σημειακό μαγνητικό φορτίο με σκοπό η θεωρία πλέον να μετατραπεί σε συμμετρική. Δηλαδή,

$$\nabla \mathbf{B} = \mu_0 c \rho_m$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 c \mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Έπειτα εξέτασε λεπτομερειακά τις συνέπειες που ενδεχομένως θα προέκυπταν από την ύπαρξη τέτοιων μαγνητικών πόλων, καταλήγοντας σε μία αναπάντεχη εξήγηση της κβάντωσης του ηλεκτρικού φορτίου.

3.1.1. Φαινομενικές ανωμαλίες και χορδές Dirac

Είναι σημαντικό να ξεκινήσουμε πρώτα από μία εκπληκτική σύλληψη του Dirac, η οποία όπως θα δούμε συνετέλεσε τα μέγιστα στην μετέπειτα ανάπτυξη της θεωρίας βαθμίδος για τον Ηλεκτρομαγνητισμό και κατ'επέκταση στην κβαντική θεμελίωση του (γνωστή και ως Κβαντική Ηλεκτροδυναμική) από τον Feynman. Πράγματι, το γεγονός ότι η ομάδα βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητισμού καθίσταται η $U(1)$ με το φωτόνιο ως το αντίστοιχο μποζόνιο βαθμίδας σχετίζεται άμεσα με τη φάση μιας κυματοσυνάρτησης ενός σωματιδίου, θα το εκμεταλλευτεί εξ'ολοκλήρου ο Feynman αργότερα για να γενικεύσει την έννοια της δράσης και της αρχής ελαχιστοποίησης της μέσω ολοκληρωμάτων τροχιάς στην κβαντομηχανική.

Για παράδειγμα, έστω πως η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου είναι $\psi = Ae^{i\gamma}$. Τότε, η ορθοκανονικοποίηση της ψ επιτρέπει με κάποια ελευθερία την επιλογή της φάσης γ (π.χ να προσθέσουμε έναν όρο σε αυτήν χωρίς να μεταβληθεί η φυσική που διέπει το σωματίδιο). Ο Dirac, θέλοντας να δώσει μια φυσική ερμηνεία σε αυτό, υπέθεσε πως η φάση δεν έχει μία καθορισμένη τιμή σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου και πως μόνο η διαφορά φάσεων οφείλει να έχει φυσικό νόημα. Μάλιστα, μπορούμε πιο γενικά να υποθέσουμε πως η διαφορά αυτή έχει η ίδια καθορισμένη τιμή μόνο εάν τα διαφορετικά σημεία είναι γειτονικά μεταξύ τους, καθώς για τα απομακρυσμένα σημεία του χώρου η διαφορά φάσης θα έχει καθορισμένη τιμή μόνο ως προς μία καμπύλη που τα ενώνει και άρα διαφορετικές καμπύλες, θα δίνουν διαφορετικές διαφορές φάσεων ενώ η αλλαγή ολικής φάσης γύρω από μία κλειστή καμπύλη δεν είναι ανάγκη να μηδενίζεται. Υπολογίζοντας αυτή τη διαφορά φάσης πάνω σε μία τέτοια κλειστή καμπύλη, είναι ανάγκη να υποθέσουμε πως η τιμή αυτή πρέπει να λαμβάνεται από κάθε δυνατή κυματοσυνάρτηση. Αφού για μια κυματοσυνάρτηση σε 3 χωρικές διαστάσεις, η ροή ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (που βέβαια ταυτίζεται εδώ με την αλλαγή φάσης) είναι το ίδιο το μαγνητικό πεδίο συμπεραίνουμε πως αν η ψ μηδενίζεται προς κάποια κατεύθυνση, η φάση της δεν θα έχει κανένα απολύτως νόημα. Όμως, η κυματοσυνάρτηση είναι εν γένει μιγαδική συνάρτηση και άρα χρήζει επαλήθευσης δύο συνθηκών προς το μηδενισμό

της. Δηλαδή, τα σημεία στα οποία μηδενίζεται θα κείτονται επί μίας ευθείας που σήμερα καλείται από τους φυσικούς κομβώδης γραμμή ή πιο απλά “χορδή Dirac”.

Αν τώρα γίνει μια εξασθένιση της παραπάνω απαίτησης πως κάθε κυματοσυνάρτηση πρέπει να παίρνει την ίδια τιμή διαφοράς φάσης γύρω από μία κλειστή καμπύλη (π.χ για δύο διαφορετικές κυματοσυναρτήσεις να υπάρχει διαφορά στην τιμή μόνο κατά ακέραια πολλαπλάσια του 2π) και υπολογίσουμε τη ροή του μαγνητικού πεδίου \mathbf{B} σε μία κλειστή επιφάνεια S , όπου κάθε χορδή Dirac βρίσκεται εξ'ολοκλήρου μέσα στην S απαριθμημένη από έναν ακέραιο n_i όπως προκύπτει από την ολοκλήρωση της γύρω από μία κλειστή καμπύλη, τότε βρίσκουμε ότι για τη μαγνητική ροή ισχύει:

$$\sum_i 2\pi n_i + \frac{e}{\hbar c} \int_S \mathbf{B} ds = 0$$

Το δεύτερο μέλος είναι μηδέν καθώς αποτελεί το όριο της αλλαγής φάσης γύρω από μία κλειστή καμπύλη C η οποία τείνει στο μηδέν, αναγκάζοντας και την επιφάνεια S την οποία φράσσει να γίνει κλειστή όταν η C έχει συρρικνωθεί πλήρως. Αν οι χορδές εσωτερικά της S τυγχάνει να είναι και κλειστές, τότε έπεται ότι θα τέμνουν την S άρτιο πλήθος φορές και άρα λαμβάνοντας υπόψιν το εναλλάξ πρόσημο εισερχομένων και εξερχομένων χορδών στην S , ο πρώτος όρος στα αριστερά της παραπάνω εξίσωσης δεν πρόκειται να δεχθεί καμία συνεισφορά από αυτές. Επομένως, είναι μη-μηδενικός μόνο για εκείνες τις χορδές των οποίων τα άκρα ανήκουν στο εσωτερικό της S . Περικλείοντας λοιπόν, ένα μόνο από αυτά τα άκρα με μία μικρή επιφάνεια, παίρνουμε αυτόματα βάση της παραπάνω εξίσωσης ότι η μαγνητική ροή πηγάζει ακριβώς από εκεί, δηλαδή από μία ανωμαλία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και επομένως πρέπει να αποτελεί αναγκαστικά και τη θέση ενός μαγνητικού μονοπόλου.

3.1.2. Συνθήκη κβάντωσης

Ας δούμε όμως τώρα μέσα σε λίγες γραμμές μία πιο αναλυτική μέθοδο που θα αναδείξει τα παραπάνω αποτελέσματα με πιο αυστηρό μαθηματικό τρόπο αποσκοπώντας να τα γενικεύσουμε αργότερα και να προσπαθήσουμε να αντλήσουμε από αυτά τοπολογικές πληροφορίες μέσω της θεωρίας των ινωδών δεσμών.

Έστω ένα βαρύ (μη-σχετικιστικό) μονόπολο, μαγνητικού φορτίου g τοποθετημένο στην απαρχή των αξόνων του \mathbf{R}^3 , στη θέση $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Τότε, θα είχαμε:

$$\nabla \mathbf{B} = 4\pi g \delta^3(\mathbf{r})$$

Επειδή, $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r})$ και $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$, η λύση της παραπάνω εξίσωσης θα είναι: $\mathbf{B} = \frac{g\mathbf{r}}{r^3}$. Και άρα θεωρώντας μία Γκαουσιανή επιφάνεια S ακτίνας r' , η μαγνητική ροή προκύπτει ίση με:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 4\pi g$$

Αν τώρα ορίσουμε το διανυσματικό δυναμικό που παράγει το εν λόγω μαγνητικό πεδίο να είναι το:

$$\mathbf{A}^N = \left(-\frac{gy}{r(r+z)}, -\frac{gx}{r(r-z)}, 0\right)$$

τότε επαληθεύεται εύκολα ότι ισχύει: $\nabla \times \mathbf{A}^N = \frac{g\mathbf{r}}{r^3} + 4\pi g \delta(x)\delta(y)\theta(-z)$. Άρα, υπάρχει μια ανωμαλία κατά μήκος του θετικού άξονα z (όπου $\theta = \pi$) που εδώ δεν είναι τίποτε άλλο παρά αυτό που πιο πάνω ορίστηκε ως χορδή Dirac. Όμως, η ανωμαλία αυτή δεν οφείλεται παρά σε μία λανθασμένη επιλογή του συστήματος συντεταγμένων, πρόκειται δηλαδή όπως προαναφέρθηκε για μια φαινομενική μόνο ανωμαλία, ακριβώς όπως και στην περίπτωση $r = 2M$ για την ακτίνα Schwarzschild. Πράγματι, αν αντίθετα ορίζαμε:

$$\mathbf{A}^S = \left(\frac{gy}{r(r-z)}, -\frac{gx}{r(r-z)}, 0\right)$$

θα είχαμε αυτή τη φορά παντού $\nabla \times \mathbf{A}^S - \mathbf{B} = 0$ πλην του θετικού άξονα z (όπου $\theta = 0$). Η εμφάνιση τέτοιου είδους ανωμαλιών είναι φυσική συνέπεια του γεγονότος ότι $\Phi = 4\pi g$. Πράγματι, αν υπήρχε διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} έτσι ώστε $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ και χωρίς κάποια ιδιομορφία, τότε θα είχαμε:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \text{ και με εφαρμογή του νόμου του Gauss:}$$

$$\Phi = \iiint_V \text{div}(\text{curl}\mathbf{A}) \, dV = 0$$

Οι Wu και Yang, το 1974 ανακάλυψαν πως το πρόβλημα αυτό αποφεύγεται μόνο αν εγκαταλείψει κανείς τη χρήση ενός μόνου διανυσματικού δυναμικού για την περιγραφή ενός μονοπόλου. Για παράδειγμα, παρατήρησαν πως οι ανωμαλίες μπορούν να εξαλειφθούν ολοτελώς αν θεωρήσουμε δύο διανυσματικά δυναμικά αντί για ένα (εδώ σε πολικές συντεταγμένες)

$$\mathbf{A}^N(\mathbf{r}) = \frac{g(1 - \cos\theta)}{r \sin\theta} \widetilde{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\mathbf{A}^S(\mathbf{r}) = -\frac{g(1 + \cos\theta)}{r \sin\theta} \widetilde{\mathbf{e}}_\phi$$

Όπου, $\widetilde{\mathbf{e}}_\phi = -\sin\phi \widetilde{\mathbf{e}}_x + \cos\phi \widetilde{\mathbf{e}}_y$, ως το βόρειο και νότιο ημισφαίριο αντίστοιχα που περικλείουν το υπό μελέτη μονόπολο, τα οποία συνδυασμένα παράγουν ξανά το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = \frac{g\mathbf{r}}{r^3}$, το οποίο όμως αυτή τη φορά είναι παντού μη-ιδιάζων. Τότε, μπορεί κανείς να συσχετίσει τα δύο αυτά δυναμικά πάνω στο σύνορο που εξισώνει τα δύο αυτά ημισφαίρια μέσω ενός μετασχηματισμού βαθμίδας, έστω $\mathbf{A}^N - \mathbf{A}^S = \text{grad}\Lambda$. Επειδή όμως, $\mathbf{A}^N - \mathbf{A}^S = \frac{2g}{r \sin\theta} \widetilde{\mathbf{e}}_\phi = \text{grad}(2g\phi)$, όπου:

$$\text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r} \widetilde{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \widetilde{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \widetilde{\mathbf{e}}_\phi$$

προκύπτει ότι: $\Lambda = 2g\phi$. Να σημειωθεί εδώ πως το Λ δεν είναι καλώς ορισμένο για τις τιμές $\theta = 0$ και $\theta = \pi$, ακριβώς όπως προηγουμένως. Όμως, καθώς ο μετασχηματισμός βαθμίδας εκτελείται μόνο στο $\theta = \frac{\pi}{2}$, αυτές οι

ανωμαλίες δεν πρόκειται να εμφανιστούν στην ανάλυση μας. Έτσι, η μαγνητική ροή θα είναι:

$\Phi = \oint_S \nabla \times \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_{U_N} \nabla \times \mathbf{A}^N d\mathbf{S} + \int_{U_S} \nabla \times \mathbf{A}^S d\mathbf{S}$ και από το θεώρημα *Stokes* προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_{equator} \mathbf{A}^N ds - \oint_{equator} \mathbf{A}^S ds \\ &= \oint_{equator} (\mathbf{A}^N - \mathbf{A}^S) ds \\ &= \oint_{equator} grad(2g\phi) ds\end{aligned}$$

άρα $\Phi = 4g\pi$, σε πλήρη συμφωνία με πριν.

Ας υποθέσουμε τώρα πως έχουμε ένα σημειακό σωματίδιο με ηλεκτρικό φορτίο e και μάζα m που κινείται διαμέσου ενός πεδίου που δημιουργείται από ένα μαγνητικό μονόπολο φορτίου g . Η χρονοανεξάρτητη εξίσωση του *Schrödinger* για το εν λόγω σωματίδιο θα έχει τη μορφή:

$$\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

Παρατηρεί λοιπόν κανείς πως κάτω από τον μετασχηματισμό βαθμίδας:

$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + grad\Lambda$, η κυματοσυνάρτηση μετασχηματίζεται ως $\psi \rightarrow \exp\left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right) \psi$ ενώ εμείς γνωρίζουμε ότι $\mathbf{A}^N - \mathbf{A}^S = grad(2g\phi)$. Οπότε, αν ψ^N, ψ^S είναι οι κυματοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στα ημισφαίρια U_N, U_S αντίστοιχα, τότε θα έχουμε: $\psi^S(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right) \psi^N(\mathbf{r})$. Για $\theta = \frac{\pi}{2}$ λοιπόν η συμπεριφορά των κυματοσυναρτήσεων, καθώς το ϕ διατρέχει το εξισωτικό σύνορο από 0 μέχρι 2π , αναγκάζει την κυματοσυνάρτηση να είναι μονότιμη και άρα θα πρέπει αναγκαστικά: $eg = 2\pi n$, όπου θέσαμε ξανά $\hbar = c = 1$ και $n \in \mathbf{Z}$. Η σχέση αυτή γνωστή και ως “*συνθήκη κβάντωσης του Dirac*” για μαγνητικά φορτία μας λέει ότι: αν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα, τότε το μαγνητικό φορτίο τους θα πρέπει να παίρνει διακριτές μόνο τιμές και κατ’επέκταση η ύπαρξη ενός και μόνο μονοπόλου στο Σύμπαν συνεπάγεται την αυτόματη κβάντωση όλων των ηλεκτρικών φορτίων. Μάλιστα, όπως μπορεί να

διακρίνει κανείς, το θεμελιώδες ($n = 1$) κβάντο για το μαγνητικό φορτίο g θα πρέπει να είναι αντιστρόφως ανάλογο από το αντίστοιχο ηλεκτρικό φορτίο e . Πέρα όμως από την εξαιρετική σημασία που έχει αυτή η συνθήκη για τη φυσική, καθώς μέχρι τότε δεν υπήρχε άλλη εξήγηση για την κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου (λόγω του ότι το ηλεκτρικό φορτίο δεν είναι η ιδιοτιμή κανενός απλού τελεστή) μπορούμε να διαπιστώσουμε και μία σημαντική μαθηματική πληροφορία: η κβάντωση του μαγνητικού φορτίου δεν οφείλεται στη διακριτότητα του φάσματος ενός τελεστή σε έναν χώρο Hilbert, αλλά σε ξεκάθαρα τοπολογικά αίτια.

3.1.3. Δυόνια

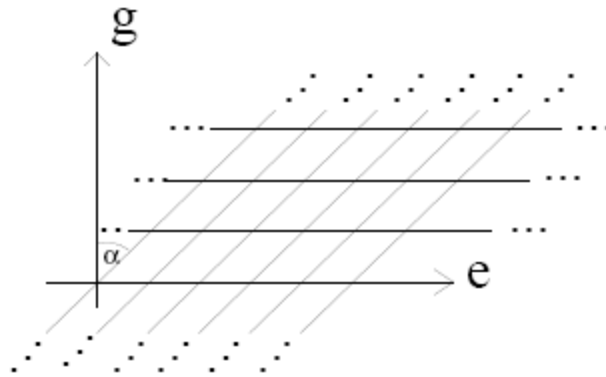
Αν ένα ηλεκτρικό φορτίο παράγει ένα ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} τότε όπως είναι γνωστό, γύρω από μία μικρή επιφάνεια S που το περικλείει θα έχουμε:

$$q = \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{E} ds$$

κατ'αναλογία λοιπόν για το μαγνητικό φορτίο g ενός μαγνητικού μονοπόλου ορίζουμε:

$$g = \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{B} ds$$

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε σωματίδια που είναι ταυτόχρονα και ηλεκτρικά αλλά και μαγνητικά φορτισμένα. Τα σωματίδια αυτά καλούνται *δυόνια* και το σύνολο όλων των δυνατών ηλεκτρικών και μαγνητικών φορτίων συνθέτουν ένα στρεβλό πλέγμα που καλύπτει ολόκληρο το επίπεδο. Βέβαια, τα δυόνια έχουν μια πολυπλοκότερη συνθήκη κβάντωσης εν συγκρίσει με τα απλά, συνηθισμένα σωματίδια που φέρουν μόνο ένα είδος φορτίου.



Στο παραπάνω σχήμα, αν η γωνία α είναι μηδενική τότε ο σύνδεσμος από στρεβλός γίνεται ορθογώνιος. Αυτό είναι συνέπεια της CP -συμμετρίας (συμμετρία φορτίου-ισοτιμίας) και επομένως η α παίζει το ρόλο ενός μέτρου για την αυθόρμητη ρήξη της. Γενικά, τα μαγνητικά μονόπολα που προέρχονται από μη-Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας επιβάλλεται να φέρουν μαζί τους και ένα συγκεκριμένο τοπολογικό μηχανισμό ρήξης αυτής της συνδυασμένης συμμετρίας. Θα επανέλθουμε όμως στο θέμα των δυονίων προς το τέλος της εργασίας αυτής, κάνοντας μια παρουσίαση των δυϊκότητων της θεωρίας Υπερχορδών και θα αναζητήσουμε έναν τοπολογικό μηχανισμό για τη ρήξη της CP -συμμετρίας, καθώς το σπάσιμο της χρήζει της ύπαρξης ενός μη-Αβελιανού μονοπόλου.

3.1.4. Η τοπολογία των μαγνητικών μονοπόλων

Ήρθε η στιγμή να χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρία της θεωρίας βαθμίδας για να εξάγουμε τα παραπάνω αποτελέσματα έτσι ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα τα τοπολογικά τους αίτια. Θυμόμαστε ότι πλέον τον ρόλο του δυναμικού βαθμίδας θα τον παίζει μία τοπική έκφραση μιας μορφής συνοχής πάνω σε μία κύρια δέσμη ενώ, την ισχύ ενός πεδίου Yang-Mills θα την παίζει μία αντίστοιχη τοπική έκφραση της καμπυλότητας της εν λόγω συνοχής. Όπως αναφέρθηκε ήδη πιο πάνω, στον ηλεκτρομαγνητισμό θεωρούμε ως δομική ομάδα G για τις ίνες την $U(1)$, η οποία είναι Αβελιανή και άρα οι δομικές σταθερές της f_{ab}^Y μηδενίζονται.

Έστω λοιπόν, M ο τετραδιάστατος επίπεδος χωρόχρονος εφοδιασμένος με τη μετρική Minkowski και P μία $U(1)$ -δέσμη. Αφού ο M δύναται να συσταλλεί σε ένα σημείο του, το P θα είναι μία τετριμμένη δέσμη οπότε $P = \mathbf{R}^4 \times U(1)$ και άρα χρειαζόμαστε μόνο μία τοπική τετριμμενοποίηση. Στον ηλεκτρομαγνητισμό, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο αποτελούν τις συνιστώσες του τανυστικού πεδίου Maxwell $F_{\mu\nu}$ όπου κάτω από τη σύμβαση άθροισης του Einstein, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ E_i &= F_{i0} \\ B_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk} \end{aligned}$$

όπου ϵ είναι το σύμβολο Levi-Civita και $\partial_i \triangleq \frac{\partial}{\partial x^i}$. Γεωμετρικά, τα στοιχεία αυτά του τανυστή $F_{\mu\nu}$ αποτελούν επίσης και τις συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας για το δυναμικό βαθμίδας A_μ . Δηλαδή,

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Αυτό μας υποχρεώνει να χρησιμοποιήσουμε την 2-μορφή καμπυλότητας F και την 1-μορφή συνοχής A , για τις οποίες ξέρουμε ότι:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ A &= A_\mu dx^\mu \\ F &= dA \end{aligned}$$

Υπόψιν, ότι η F ικανοποιεί την ταυτότητα Bianchi: $dF = F \wedge A - A \wedge F = 0$, καθώς είναι τοπικά ακριβής (άρα και ολικά ακριβής λόγω του λήμματος **Poincaré**) οπότε και κλειστή, δηλαδή $dF = d^2A = 0$. Σε συνιστώσες αυτό γράφεται ως:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0$$

Επειδή το μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} εκφράζεται (σε αντίθεση με το ηλεκτρικό \mathbf{E}) ως στροβιλισμός είναι λογικό να το αντιστοιχίσουμε με μία 2-μορφή. Δηλαδή,

$$E = E_i dx^i$$

$$B = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

Αυτό σημαίνει ότι η 2-μορφή καμπυλότητας F θα εκφράζεται ως:

$$F = dx^0 \wedge E + B$$

όπου dx^0 η χρονική συντεταγμένη. Τότε οι δύο ομογενείς εξισώσεις του Maxwell που μας ενδιαφέρουν θα εκφράζονται ως η κλειστότητα του Hodge δυϊκού της F , δηλαδή:

$$d * F = 0$$

Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι οι δύο εξισώσεις του Maxwell που μας ενδιαφέρουν είναι “γεωμετρικές” παρά “δυναμικές”. Για να βρούμε τη δυναμική πρέπει πρώτα να ορίσουμε μία δράση:

$$S_M[A] = -\frac{1}{4} \int_{R^4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x$$

Αν εδώ θέσουμε $*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} F^{\kappa\lambda}$, και παρατηρήσουμε ότι

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$$

$$F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$$

τότε προκύπτει: $S_M[A] = -\frac{1}{4} \int_{R^4} F \wedge * F$. Από την αρχή ελαχίστης δράσης θα είναι $\delta S_M[A_\mu] = 0$ άρα $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ και αυτή θα είναι η εξίσωση κίνησης, που αντιστοιχεί στις υπόλοιπες δύο εξισώσεις Maxwell (νόμος Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο και νόμος Ampère).

Θα δείξουμε τώρα ότι τα μαγνητικά μονόπολα Dirac οφείλονται στην ύπαρξη μιας $U(1)$ -δέσμης πάνω σε έναν μη-τετριμμένο χώρο βάσης (π.χ $P \rightarrow M = S^2$ και $G = U(1) = S^1$). Πράγματι, έστω $P(S^2, U(1))$ μια κύρια

δέσμη και υποθέτουμε ότι οι \mathbf{R}^3 , S^2 να είναι του ίδιου ομοτοπικού τύπου. Έστω επίσης ένα ανοικτό κάλυμμα $\{U_N, U_S\}$ για την S^2 με τους χάρτες:

$$U_N = \{(\theta, \varphi): \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right], 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

$$U_S = \{(\theta, \varphi): \theta \in \left[\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \pi\right], 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

Αν θεωρήσουμε ω μια μορφή συνοχής Ehresmann στο P και σ_N, σ_S τα τοπικά τμήματα στα U_N, U_S αντίστοιχα, τότε ορίζουμε:

$$A_N = \sigma_N^* \omega$$

$$A_S = \sigma_S^* \omega$$

όπου τα A_N, A_S θα βρίσκονται ξανά στη μορφή Wu-Yang, δηλαδή:

$$A_N = +ig(1 - \cos\theta)d\varphi$$

$$A_S = -ig(1 + \cos\theta)d\varphi$$

Έστω τώρα $t_{NS}: U_N \cap U_S \rightarrow U(1)$ η συνάρτηση μετάβασης. Επειδή το εξισωτικό σύνορο $U_N \cap U_S$ θα είναι ίσο με κάποια S^1 και $\pi_1(U(1)) = \mathbf{Z}$, προκύπτει ότι: $t_{NS}(\varphi) = e^{i\varphi}$, όπου $\varphi: S^1 \rightarrow \mathbf{R}$. Άρα,

$$A_N = t_{NS}^{-1} A_S t_{NS} + t_{NS}^{-1} dt_{NS} = A_S + id\varphi$$

Οπότε, $d\varphi = -i(A_N - A_S) = 2gd\phi$.

Για $0 \leq \phi \leq 2\pi$ στη S^1 λοιπόν θα έχουμε: $\Delta\varphi = \int d\varphi = \int_0^{2\pi} 2gd\phi = 4\pi g$

Λόγω μοναδικότητας της t_{NS} θα πρέπει να ισχύει $\Delta\varphi = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, δηλαδή η γνωστή από πριν συνθήκη κβάντωσης Dirac. Όμως, πλέον φαίνεται ότι ο ακέραιος $\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = n = 2g$ όχι μόνο αναπαριστά, αλλά και χαρακτηρίζει την κλάση ομοτοπίας στην οποία ανήκει η δέσμη. Αν $n = 0$, τότε $G \ni t_{NS} = \{e_{U(1)}\}$ και άρα η $P_0 = S^2 \times S^1$ θα είναι τετριμμένη δέσμη. Αν όμως, $n \neq 0$, η $U(1)$ -δέσμη P_n θα είναι συστραμμένη. Έτσι, αν $F_N = dA_N$ και $F_S = dA_S$ η τιμή της ολικής μαγνητικής ροής θα υπολογίζεται ξανά ως:

$$\Phi = \int_{S^2} \mathbf{B} ds = \int_{U_N} dA_N + \int_{U_S} dA_S = \int_{S^1} A_N - \int_{S^1} A_S = 2g \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi g$$

και άρα η καμπυλότητα των dA_N, dA_S θα χαρακτηρίζει αυτή τη συστροφή της δέσμης. Αφού, η $U(1)$ είναι Αβελιανή, η δεξιά δράση της πάνω στις ίνες της δέσμης θα μετατίθεται με την αριστερή δράση, οπότε οι δράσεις είναι ισοδύναμες. Αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε πλέον μία εξ'αυτών ως το μετασχηματισμό βαθμίδας και να συμπεράνουμε πως πράγματι ο ακέραιος n που αντιστοιχεί σε μία κλάση της $\pi_1(U(1))$, θα χαρακτηρίζει και τον τρόπο με τον οποίο δύο τοπικά τμήματα ενώνονται μεταξύ τους πάνω στο εξισωτικό σύνορο για να δώσουν μία αμιγώς τοπολογική δομή στην ινώδη δέσμη.

Βέβαια, τη δομή αυτή μπορούμε να την συνάγουμε και με διαφορετικό τρόπο και συγκεκριμένα με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών κλάσεων. Υπενθυμίζουμε ότι βρισκόμαστε πάντα σε χρονοανεξάρτητο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, η εξίσωση:

$$F = dx^0 \wedge E + B$$

μας πληροφορεί πως αν ο χρόνος απουσιάσει (ή για παράδειγμα είναι σταθερός) τότε η μορφή F γίνεται "pull-back" σε μία 2-μορφή (το μαγνητικό πεδίο) στον \mathbf{R}^3 , δηλαδή $F|_{\mathbf{R}^3} = B$ η οποία θα δηλώνει την καμπυλότητα στο $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$. Όμως, δεν ισχύει το ίδιο και για το ηλεκτρικό πεδίο οπότε ουσιαστικά για ένα στατικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, το μαγνητικό και το ηλεκτρικό πεδίο είναι πολύ διαφορετικά από γεωμετρική άποψη. Επειδή η μορφή συνοχής που αντιστοιχεί στην καμπυλότητα $A_i dx^i$ είναι αναλλοίωτη κατά βαθμίδα $A \rightarrow A + df$ (όπου f συνάρτηση στον $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ και $G = U(1)$) προκύπτει πως θα υπάρχει μια μορφή συνοχής σε μία $U(1)$ -δέσμη P πάνω στον $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\} = S^2 \times \mathbf{R}^+$. Άρα, από την ιδιότητα του αναλλοιώτου κατά ομοτοπίας, μπορούμε να θεώρησουμε την P ως μία $U(1)$ -δέσμη πάνω στην S^2 . Η δέσμη αυτή θα έχει ως 1^η κλάση Chern:

$$c_1(P) = \int_{S^2} \frac{F}{2\pi} \in \mathbf{Z}$$

Έτσι, σε πολικές συντεταγμένες (r, θ, φ) αν $A = \frac{C}{2}(1 - \cos\theta)d\varphi$ τότε η καμπυλότητα της μορφής προκύπτει ίση με:

$$F = \frac{C}{2} \sin\theta d\theta \wedge d\varphi \triangleq \frac{C}{r^3} \epsilon_{ijk} x^i dx^j \wedge dx^k$$

Όμως, $F = B = F|_{R^3}$ άρα,

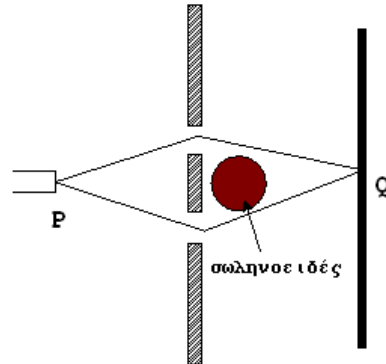
$$\int_{S^2} \frac{c}{4\pi} \sin\theta d\theta \wedge d\phi = n \in \mathbf{Z}.$$

Δηλαδή, $C = n$ και άρα η P υπάρχει. Το αποτέλεσμα αυτό, αποτελεί μία άλλη θεώρηση της πραγματικής αιτίας που το μαγνητικό φορτίο ενός μονοπόλου Dirac είναι κβαντισμένο.

3.2. Το φαινόμενο Ehrenberg-Siday-Aharonov-Bohm

Στην κβαντομηχανική θεώρηση του ηλεκτρομαγνητισμού, αναδύεται ένα εντυπωσιακό φαινόμενο κατά το οποίο ένα φορτισμένο σωματίδιο επηρεάζεται από το τετραδιάνυσμα ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού σε περιοχές που όμως τόσο το μαγνητικό όσο και το ηλεκτρικό πεδίο καθ'εαυτά είναι μηδενικά. Κατά αυτόν τον τρόπο, τα διανυσματικά πεδία \mathbf{E}, \mathbf{B} απορρέουν από το \mathbf{A} όχι όμως και το αντίστροφο. Το γεγονός αυτό, θεωρούμενο κλασικά είναι αδιανόητο, καθώς οι δύο περιγραφές είναι ισοδύναμες. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει πως το \mathbf{A} είναι πιο θεμελιώδης έννοια από τα \mathbf{E}, \mathbf{B} και για αυτό υποχρεούται να δίνει μια πληρέστερη περιγραφή για τον ηλεκτρομαγνητισμό. Αυτό σημαίνει χονδρικά με τη σειρά τού πως, η γνώση για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (δηλαδή τον τανυστή $F_{\mu\nu}$) που δρα τοπικά πάνω σε ένα σωματίδιο δεν επαρκεί για την πρόβλεψη της κβαντομηχανικής του συμπεριφοράς, εκτός και αν γνωρίζουμε το δυναμικό $\mathbf{A}_\mu = (\bar{\mathbf{A}}, \varphi = A_0)$. Την κατάσταση αυτή διέβλεψαν για πρώτη φορά οι Ehrenberg-Siday το 1949 [14], ενώ επανακαλύφθηκαν παρομοίου αλλά και λείαν διαφορετικού τύπου φαινόμενα λίγο αργότερα το 1959 από τους Aharonov-Bohm [15]. Έκτοτε μάλιστα, το φαινόμενο αυτό για την μαγνητική περίπτωση είναι ευρύτερα γνωστό με τα ονόματα τους. Αν και έχουν γίνει διάφορες προβλέψεις για την επανεμφάνιση του φαινομένου και σε ηλεκτρικά πεδία, δεν υπάρχει ακόμα πειραματική επιβεβαίωση. Το 1998, ο Aharonov μοιράστηκε το βραβείο Wolf στη Φυσική για τις τοπολογικές αυτές εργασίες του και την έρευνα του στο φαινόμενο της μη-τοπικότητας με τον Berry, ο οποίος συνέβαλε και αυτός με την ανακάλυψη κβαντικών τοπολογικών και γεωμετρικών φάσεων που θα εξεταστούν λεπτομερέστερα

στο επόμενο υποκεφάλαιο. Προς το παρόν, ας εντρυφήσουμε σε κάποιες λεπτομέρειες που αφορούν το φαινόμενο αυτό. Η μαγνητική περίπτωση για το φαινόμενο Aharonov-Bohm μπορεί να ιδωθεί ως απόρροια της βασικής μας απαίτησης ότι η κβαντική φυσική πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από την επιλογή βαθμίδας για το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό, μέσα στο οποίο παίζει ρόλο και το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό.



Γνωρίζουμε ότι ένα σωματίδιο με ηλεκτρικό φορτίο q που ταξιδεύει πάνω σε μια τροχιά P επί μιας περιοχής με μηδενικό μαγνητικό πεδίο, αλλά μη-μηδενικό διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} (δηλαδή, $\mathbf{0} = \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) αποκτά μία αλλαγή φάσης:

$$\varphi = \frac{q}{\hbar} \int_P \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$$

Οπότε, σωματίδια τα οποία έχουν τα ίδια σημεία εκκίνησης και πέρατος αλλά ταξιδεύουν σε δύο διαφορετικές διαδρομές, θα αποκτήσουν μια διαφορά φάσης $\Delta\varphi$ που θα καθορίζεται από την μαγνητική ροή Φ ανάμεσα στην περιοχή που ορίζουν οι δύο αυτές διαδρομές. Οπότε, από το θεώρημα του Stokes θα έχουμε:

$$\Delta\varphi = \frac{q\Phi}{\hbar}$$

Λόγω της άθροισης ιστοριών, ένα σωματίδιο στην κβαντομηχανική μπορεί να ταξιδέψει μεταξύ δύο σημείων μέσω μιας ποικιλίας διαδρομών. Επομένως, αυτή η αλλαγή φάσης μπορεί να παρατηρηθεί τοποθετώντας ένα σωληνοειδές στις δύο οπές του πειράματος της διπλής σχισμής του Young ή

άλλων παρόμοιων ισοδυνάμων κατασκευών. Προσθέτοντας ένα ιδανικό σωληνοειδές που εσωτερικά του περικλείει μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} (ενώ εξωτερικά του μηδενίζεται) είναι δυνατόν να παρατηρήσουμε πως κάθε φορτισμένο σωματίδιο (π.χ ένα ηλεκτρόνιο) που το διαπερνά εξωτερικά δεν επηρεάζεται διόλου από αυτό, δεν διαισθάνεται δηλαδή κανένα μαγνητικό πεδίο. Το ερώτημα που προκύπτει είναι: τι γίνεται με το A_μ ;

Πράγματι, υπάρχει ένα αστρόβιλο διανυσματικό πεδίο \mathbf{A} έξω από το σωληνοειδές με μία περικλείουσα μαγνητική ροή και άρα η σχετική φάση των σωματιδίων που διαπερνούν τη μία ή την άλλη σχισμή τροποποιείται στιγμιαία ανάλογα με την ενεργοποίηση του ρεύματος στο σωληνοειδές. Αυτό ισοδυναμεί με μία δυνατή παρατηρησιακά αλλαγή στους κροσσούς συμβολής στην απέναντι επίπεδη οθόνη παρατήρησης. Για να το δει αυτό κανείς αναλυτικότερα, ας υποθέσουμε αρχικά προς χάριν απλότητας ότι η ακτίνα του (απείρου μήκους) σωληνοειδούς είναι απειροστά μικρή έτσι ώστε: $\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \text{σταθ}$. Αν $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (-\frac{y\Phi}{2\pi r^2}, \frac{x\Phi}{2\pi r^2}, 0)$ και $A_0 = 0$ τότε:

$$\int \nabla \times \mathbf{A} d\mathbf{S} = \Phi$$

Οπότε, το \mathbf{A} είναι αστρόβιλο για $r \neq 0$ και επομένως μη-μηδενικό έξω από το σωληνοειδές. Κλασικά, το σωληνοειδές δεν επηρεάζει τα ηλεκτρόνια καθώς η δύναμη Lorentz $F_L = e(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ μηδενίζεται κατά την τροχιά των ηλεκτρονίων, κβαντομηχανικά όμως θα έχουμε:

$$H = -\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu \right)^2 + V(\mathbf{r})$$

Αν τώρα μεταφερθούμε νοητά στην ημικλασική περίπτωση, για $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ θα είναι $\psi_1 \neq \psi_2$ και άρα $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ενώ αν $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ θα έχουμε:

$$\psi_i^A(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r}) e^{ie \int_p^r A(\mathbf{r}) dr}, \text{ για } i = 1, 2$$

Οπότε, στην υπέρθεση τους έτσι ώστε $\psi_1^A(P) = \psi_2^A(P)$ θα είναι:

$$\begin{aligned}
\psi_1^A(Q) + \psi_2^A(Q) &= \psi_1(Q)\exp[ie \int_{\gamma_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}')d \mathbf{r}'] + \psi_2(Q)\exp[ie \int_{\gamma_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'] \\
&= \exp\left[ie \int_{\gamma_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'\right] \left\{ \exp[ie \oint_{\gamma=\gamma_1-\gamma_2} \mathbf{A}d\mathbf{r}'] \psi_1(Q) + \psi_2(Q) \right\}
\end{aligned}$$

Άρα, ακόμα και αν το μαγνητικό πεδίο είναι μηδενικό, η κυματοσυνάρτηση εξαρτάται από το διανυσματικό δυναμικό.

Το μαγνητικό φαινόμενο Aharonov-Bohm συσχετίζεται επίσης και με την συνθήκη κβάντωσης του Dirac που διατυπώθηκε πιο πάνω, για τα μαγνητικά και ηλεκτρικά φορτία. Πράγματι, ένα μαγνητικό μονόπολο συνεπάγεται μια μαθηματική ανωμαλία στο διανυσματικό δυναμικό, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως μια χορδή Dirac απειροστά μικρής διαμέτρου που περιέχει μέσα της όλη την ισοδύναμη πληροφορία για τη ροή $4\pi g$ του μαγνητικού “φορτίου” g . Επειδή ακριβώς μια χορδή Dirac όχι μόνο ξεκινά αλλά και τελειώνει σε ένα μαγνητικό μονόπολο, η απαίτηση μιας μονότιμης κυματοσυνάρτησης όπως και πριν, οδηγεί αναγκαστικά στην κβάντωση φορτίου. Έτσι, η ποσότητα $2 \frac{eg}{\hbar c}$ επιβάλλεται να είναι ένας ακέραιος αριθμός. Παράλληλα μάλιστα με την χορδή Dirac που δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας καθώς κινείται γύρω από τα σταθεροποιημένα άκρα της, το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό βαθμίδας \mathbf{A} δεν είναι εν γένει ένα απ’ευθείας μετρήσιμο μέγεθος. Όμως, μέσα από το φαινόμενο Aharonov-Bohm πληροφορούμαστε ότι η μη-τετριμμενικοποιησιμότητα τού καθιστά δυνατή τη μέτρηση ακόμα και εάν η καμπυλότητα του πεδίου βαθμίδας \mathbf{F} είναι μηδενική. Αυτό αντανακλά τέλεια την τοπολογική φύση του φαινομένου και αναζητώντας μία τοπολογική αναλλοίωτη οδηγείται κανείς ξανά κατά φυσικό τρόπο στην ανάγκη μιας μοντέρνας προσέγγισης μέσω της διαφορικής γεωμετρίας, όπου θα γίνει και περισσότερο κατανοητό το υπό μελέτη φαινόμενο, θεωρούμενο αυτή τη φορά με όρους δράσης της ομάδας μονοδρομίας σε μία επίπεδη και μιγαδική ευθύγραμμη δέσμη. Εδώ πλέον, τον ρόλο της $U(1)$ -μορφής συνοχής της ευθύγραμμης αυτής δέσμης θα τον παίζει το τέτρα-δυναμικό \mathbf{A} θεωρούμενο ως μία 1-μορφή (όπου $D = d + \mathbf{A}$ με d να αναπαριστά τη μερική παραγωγή στον χωρόχρονο Minkowski). Τότε, η μορφή καμπυλότητας αυτής της συνοχής θα είναι κατά τα γνωστά $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$. Με αυτά τα δεδομένα, η ολονομία της μορφής συνοχής $e^{i \int_{\gamma} \mathbf{A}}$ γύρω από μία κλειστή καμπύλη γ , θα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος Stokes και άρα

θα καθορίζεται από τη μαγνητική ροή που διαρρέει την επιφάνεια που περικλείει η καμπύλη. Δηλαδή,

$$\oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{A} d\mathbf{r}' = \int_S \nabla \times \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi$$

Οπότε, πράγματι συνδέοντας τις παραπάνω σχέσεις μεταξύ τους προκύπτει η κβάντωση: $e(\Phi_\alpha - \Phi_\beta) = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Μάλιστα, η εικόνα συμβολής στην παρατηρησιακή οθόνη είναι η ίδια και για τις δύο ροές. Το σημαντικό βέβαια εδώ είναι ότι εξωτερικά του αγωγού έχουμε $\mathbf{F} = 0$ που σημαίνει ότι η μορφή συνοχής είναι πράγματι επίπεδη και η ολονομία της καμπύλης εκεί που δεν υφίσταται μαγνητικό πεδίο εξαρτάται μόνο από τον αριθμό περιέλιξης ο οποίος είναι εξ'ορισμού η μονοδρομία της επίπεδης μορφής συνοχής. Ας δούμε όμως καλύτερα αυτή την υποκρύπτουσα γεωμετρία.

Έστω $M = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ με το σωληνοειδές να βρίσκεται στην απαρχή των αξόνων. Έστω επίσης $P(M, U(1))$ μία κύρια δέσμη με ολικό χώρο $E = P \times \mathbf{C}$ (δηλαδή, ο E θα είναι μιγαδική ευθύγραμμη δέσμη επί του M με τμήμα την κυματοσυνάρτηση ψ). Αν τώρα έχουμε στη διάθεση μας μία τοπική 1-μορφή συνοχής $A = A_\mu dx^\mu$ εφοδιασμένη με την συναλλοίωτη παράγωγο που δόθηκε πριν θα έχουμε ότι $\mathbf{F} = d\mathbf{A} = 0$ και άρα πρόκειται για τοπικά επίπεδη μορφή συνοχής. Αν θεωρήσουμε τώρα έναν κύκλο S^1 γύρω από το σωληνοειδές, τότε η μορφή αυτή συνοχής πάνω του ($r = 1$) θα είναι: $\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi} d\theta$ και απαιτώντας η κυματοσυνάρτηση να μεταφέρεται παράλληλα δια μέσου του S^1 ως προς την τοπική αυτή μορφή συνοχής θα έχουμε:

$$D\psi(\theta) = \left(d + \frac{\Phi}{2\pi} d\theta \right) \psi(\theta) = 0$$

η οποία θα έχει ως λύση την: $\psi(\theta) = e^{-i\Phi\frac{\theta}{2\pi}}$. Και είναι αυτό ακριβώς το τμήμα της δέσμης, το οποίο εμποδίζει τα σωματίδια να εισέλθουν στο μαγνητικό πεδίο.

Όπως και στην προηγούμενη υποενότητα, αξίζει να δει κανείς το φαινόμενο αυτό από μία διαφορετική σκοπιά μέσω των χαρακτηριστικών κλάσεων. Αναφέρθηκε ήδη πως το φαινόμενο Aharonov-Bohm είναι τέτοιο έτσι ώστε η μη-τετριμμενοποίηση του πεδίου βαθμίδας A να είναι φυσικώς μετρήσιμη ακόμα και εάν η καμπυλότητα F είναι μηδενική. Οπότε, η βαθειά

τοπολογική φύση του φαινομένου μπορεί να εκφραστεί με έναν τοπολογικό αριθμό n που θα είναι ταυτοχρόνως και τοπολογική αναλλοίωτη.

Έστω λοιπόν Ω ένα χωρίο, όχι κατ'ανάγκη απλά συνεκτικό, με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $F = 0$. Πάλι λοιπόν θα έχουμε,

$$F = dA, \quad A = A_\mu dx^\mu$$

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Αφού η εικόνα συμβολής στο πείραμα φαίνεται να αλλάζει κατά την εκτέλεση του πειράματος, όταν τοποθετήσουμε το σωληνοειδές η κατάσταση αλλάζει και τα ηλεκτρόνια διασχίζουν πάντα το χώρο με το πεδίο F να είναι μηδενικό. Αυτό χονδρικά σημαίνει πως μία μορφή συνοχής (ή ένα πεδίο βαθμίδας γενικότερα) είναι πιο θεμελιώδης έννοια από την καμπυλότητα F (το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο) και η τοπολογική εξήγηση ξεκινά υποχρεωτικά από την έννοια της παράλληλης μεταφοράς γύρω από κλειστές καμπύλες. Οι παράλληλες μεταφορές πολυγραμμικών αντικειμένων (όπως για παράδειγμα τανυστών, σπινόρων, εγκαρσίων τομών δεσμών κ.τ.λ) γίνεται μέσω του τελεστή:

$$PT(C) = e^{\int_C A}$$

όπου στο πείραμα μας θα έχουμε $C = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Είναι όμως ο τελεστής αυτός μη-τετριμμένος; Ναι, γιατί έχουμε $F = dA$ και $F = 0$ οπότε τοπικά θα έχουμε: $A = df$. Άρα, ο A καθορίζει μία κλάση συνομολογίας deRham $[A] \in H_{dR}^1(\Omega; \mathbf{R})$. Επίσης, ξανά από το θεώρημα Stokes το $\int_C A$ θα εξαρτάται μόνο από την κλάση ομοτοπίας του βρόχου C ο οποίος με τη σειρά του καθορίζει μία κλάση ομολογίας $[C] \in H_1(\Omega; \mathbf{R})$. Οπότε τελικά, θα έχουμε το παρακάτω δυϊκό ζεύγος συνομολογίας-ομολογίας:

$$([A], [C]) = \int_C A = n \in \mathbf{Z}$$

Και άρα, το σωληνοειδές μπορεί πλέον να θεωρηθεί μαθηματικά ως ένας κύλινδρος L έτσι ώστε:

$$H^1(\Omega; \mathbf{R}) = H^1(\mathbf{R}^3 \setminus L; \mathbf{R}) = \mathbf{Z}$$

Τέλος, να σημειωθεί πως ο τελεστής $PT(C)$ δεν είναι παρά στοιχείο της ομάδας ολονομίας που έχουμε αναφέρει πιο πάνω και θα τον συναντήσουμε ξανά αμέσως τώρα, στη μελέτη αδιαβατικών περιοδικών αλλαγών των παραμέτρων ενός κβαντικού συστήματος, όπου το φαινόμενο είναι γνωστό ως φάση Berry.

3.3. Ο γεωμετρικός φασικός χώρος των Pancharatnam-Berry

Έστω M μία πολλαπλότητα που αναπαριστά τον χώρο φάσης ενός φυσικού κβαντικού συστήματος όπου σε κάθε τοπική συντεταγμένη της $\mathbf{R} = (R^1, \dots, R^k)$ θεωρούμε τη n -οστή κανονικοποιημένη (δηλ. $\langle n; \mathbf{R} | n; \mathbf{R} \rangle = 1$) ιδιοκατάσταση της Χαμιλτονιανής $H(\mathbf{R})$. Υποθέτοντας ότι η αντίστοιχη ιδιοτιμή είναι μη-εκφυλισμένη θα έχουμε φυσικά: $H(\mathbf{R})|n; \mathbf{R}\rangle = E_n(\mathbf{R})|n; \mathbf{R}\rangle$. Όμως, αφού μια κβαντική κατάσταση $|n; \mathbf{R}\rangle$ δεν μπορεί να διακριθεί από την $e^{i\varphi}|n; \mathbf{R}\rangle$, κάθε φυσική κατάσταση του υπό μελέτη συστήματος δύναται να εκφραστεί από μία κλάση ισοδυναμίας: $[|\mathbf{R}\rangle] = \{g|\mathbf{R}\rangle / g \in U(1)\}$. Σε κάθε σημείο \mathbf{R} λοιπόν θα έχουμε $U(1)$ βαθμό ελευθερίας και μία $U(1)$ -δέσμη πάνω στον παραμετρικό χώρο M , ήτοι $P(M, U(1))$ με προβολή $\pi(g|\mathbf{R}\rangle) = \mathbf{R}$. Αντί να σταθεροποιήσουμε τη φάση για κάθε $|\mathbf{R}\rangle$, μπορούμε ισοδυνάμως να επιλέξουμε ένα τοπικό τμήμα της δέσμης πάνω από έναν χάρτη U , έστω $\sigma(\mathbf{R}) = |\mathbf{R}\rangle$. Τότε, οι κανονικές τοπικές τετριμμενοποιήσεις θα δίνονται ως $\varphi^{-1}(|\mathbf{R}\rangle) = (\mathbf{R}, e)$ ενώ η δεξιά δράση θα δίνει $\varphi^{-1}(|\mathbf{R}\rangle g) = (\mathbf{R}, e)g = (\mathbf{R}, g)$. Μένει να ορίσουμε μία μορφή συνοχής στην δέσμη που μόλις κατασκευάσαμε. Έστω, U_i, U_j αλληλοεπικαλυπτόμενοι χάρτες στο M . Τότε, τα αντίστοιχα τοπικά τους τμήματα θα συνδέονταν ως:

$$|\mathbf{R}\rangle_j = \sigma_j(\mathbf{R}) = \sigma_i t_{ij}(\mathbf{R}) = |\mathbf{R}\rangle_i t_{ij}(\mathbf{R})$$

Οπότε, αν $d \triangleq \frac{\partial}{\partial R^\mu} d\mathbf{R}^\mu$ η εξωτερική παράγωγος στον \mathbf{R} -χώρο, θα έχουμε: $A_j(\mathbf{R}) = \langle \mathbf{R} | d | \mathbf{R} \rangle = t_{ij}^{-1}(\mathbf{R}) \langle \mathbf{R} | [d | \mathbf{R} \rangle + |\mathbf{R}\rangle dt_{ij}(\mathbf{R})] = A_i(\mathbf{R}) + t_{ij}^{-1}(\mathbf{R}) dt_{ij}(\mathbf{R})$. Το σύνολο όλων αυτών των $A_i(\mathbf{R})$ θα αποτελεί ξανά μία μορφή συνοχής Ehresmann και άρα ορίζουμε ως “μορφή συνοχής Berry” την:

$$A = A_\mu d\mathbf{R}^\mu := \langle \mathbf{R} | (d | \mathbf{R} \rangle) = -(d \langle \mathbf{R} |) | \mathbf{R} \rangle$$

η οποία θα είναι και αντι-Ερμιτιανή καθώς ισχύει:

$$0 = d(\langle \mathbf{R} | \mathbf{R} \rangle) = (d\langle \mathbf{R} |) | \mathbf{R} \rangle + \langle \mathbf{R} | d | \mathbf{R} \rangle = \langle \mathbf{R} | d | \mathbf{R} \rangle^+ + \langle \mathbf{R} | d | \mathbf{R} \rangle$$

ενώ η ισχύς F του πεδίου A (καμπυλότητα Berry) θα είναι:

$$F = dA = (d\langle \mathbf{R} |) \wedge (d | \mathbf{R} \rangle) = \left(\frac{\partial \langle \mathbf{R} |}{\partial \mathbf{R}^\mu} \right) \left(\frac{\partial | \mathbf{R} \rangle}{\partial \mathbf{R}^\nu} d\mathbf{R}^\mu d\mathbf{R}^\nu \right)$$

Αν υποθέσουμε πως το \mathbf{R} διατρέχει μια κλειστή καμπύλη $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ στον παραμετρικό χώρο με $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(1)$ και επιπλέον η εκάστοτε μεταβολή στην τιμή του γίνεται κατά έναν αδιαβατικό τρόπο έτσι ώστε να κατάσταση του συστήματος να παραμένει πάντοτε στην n -οστή ιδιοκατάσταση, τότε γύρω από έναν κλειστό βρόχο γ , η κατάσταση του συστήματος θα έχει αποκομίσει έναν επιπλέον παράγοντα φάσης:

$$\eta_n = i \oint_\gamma \langle n; \mathbf{R} | \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}^\mu} | n; \mathbf{R} \rangle d\mathbf{R}^\mu$$

που ονομάζεται φάση των Pancharatnam-Berry, η απλά *φάση Berry* και ενέχει μέσα της μια βαθειά γεωμετρική και τοπολογική ερμηνεία, καθώς η ύπαρξη τής οφείλεται ουσιαστικά στην *ολονομία* εσωτερικά του παραμετρικού χώρου. Εφαρμογές της φάσης αυτής συναντάει κανείς στην κλασική μηχανική, στην ατομική φυσική και συγκεκριμένα στην κβαντομηχανική, όπως για παράδειγμα στην κβαντική παραλλαγή του (ακέραιου και σχετικιστικά ημι-ακέραιου) φαινομένου Hall, όπου οι ακέραιοι που εμφανίζονται εκεί παίζουν τον ρόλο τοπολογικών κβαντικών αριθμών.

4. Θεωρία βαθμίδας στις 4 διαστάσεις

4.1. d-instantons

Όπως είδαμε ένας σημαντικός παράγοντας για την ανάπτυξη της τοπολογίας στη φυσική είναι ο εξέχων ρόλος των θεωριών βαθμίδας. Πράγματι, μετά τη θεμελίωση των θεωριών βαθμίδας υπό όρους ινωδών δεσμών, πολλά σημαντικά συνομολογιακά δεδομένα αυτών των δεσμών ήταν πλέον διαθέσιμα για τους φυσικούς. Ακόμη περισσότερη πρόοδος έγινε με τη δημοσίευση του Belavin^[16] για τις τοπολογικώς μη-τετριμμένες λύσεις των Ευκλειδείων εξισώσεων Yang-Mills στις 4 διαστάσεις. Αυτές ακριβώς οι λύσεις ονομάστηκαν αρχικά ψευδοσωματίδια και αργότερα *instantons*. Η Ευκλείδεια εκδοχή της κβαντικής θεωρίας πεδίου προκύπτει από την αντίστοιχη εκδοχή του χωροχρόνου Minkowski αντικαθιστώντας τον χρόνο t με τον φανταστικό χρόνο it , δηλαδή χονδρικά την περιστροφή κατά Wick. Μετά την Ευκλειδαιοποίηση αυτή, η σχέση μεταξύ των δύο θεωριών βασίζεται στην αναλυτική συνέχεια (που αποδεικνύεται πως υπάρχει) των αναλλοιώτων κατά Lorentz μιγαδικών εσωτερικών γινομένων $x_\mu y^\mu$. Αυτό που κάνει τα instantons τόσο ξεχωριστά είναι ότι ναι μεν έχουν τοπολογική φύση αλλά ταυτόχρονα είναι και μη-διαταραγμένα (από τη σκοπιά της θεωρίας διαταραχών).

Η έννοια ενός instanton δύναται να γενικευτεί άμεσα και να αναφέρεται πια σε ένα κρίσιμο σημείο μιας πεπερασμένης Ευκλείδειας δράσης σε οποιοδήποτε κβαντική θεωρία πεδίου. Αυτές οι λύσεις των εξισώσεων κίνησης (εξ ου και η ονομασία κρίσιμο σημείο) σχετίζονται με κβαντομηχανικά φαινόμενα σήραγγας. Ο υπολογισμός των πλατών μετάβασης σε τέτοια φαινόμενα με μη-διαταραγμένο τρόπο αποτέλεσε μία πραγματική επανάσταση, ενώ η τοπολογία αποδείχτηκε για ακόμη μία φορά το κλειδί για την εξερεύνηση αυτών των φαινομένων στην κβαντική θεωρία πεδίου και μέσω αυτής στην θεωρία των ισχυρών αλληλεπιδράσεων: την κβαντική χρωμοδυναμική. Ας δούμε όπως τώρα πιο αναλυτικά τις ιδιότητες ενός instanton υπό το πρίσμα των εξισώσεων Yang-Mills. Στο εξής, το εσωτερικό γινόμενο $\langle \omega, \eta \rangle$ μεταξύ των p -μορφών ω (με τιμές στην άλγεβρα Lie) και το η (με τιμές στην πολλαπλότητα Riemann) θα συμβολίζεται ως συνήθως: $\langle \omega, \eta \rangle = - \int_M tr(\omega \wedge * \eta)$

Έστω G μία μη-Αβελιανή, συμπαγής, απλή ομάδα Lie και M μία κλειστή, τετραδιάστατη, προσανατολισίμη, Riemann-πολλαπλότητα. Ορίζουμε τη δράση:

$$S \triangleq S(A) = \|F\|^2 = - \int_M \text{tr}(F \wedge * F)$$

ενώ θεωρούμε το δυϊκό κατά Hodge πάντα ως προς τη Ρημάνεια μετρική στο M . Επιδιώκουμε να καταλήξουμε στις εξισώσεις κίνησης Euler-Lagrange, που θα είναι και οι εξισώσεις των κρίσιμων σημείων. Θεωρούμε λοιπόν A μία τυχαία μορφή συνοχής από την οποία διέρχεται μία οικογένεια μορφών συνοχής $A_t = A + ta$ και αναπτύσσουμε γύρω από το σημείο $t = 0$:

$$S(A_t) = \langle F(A), F(A) \rangle + t \frac{d}{dt} \langle F(A_t), F(A_t) \rangle |_{t=0} + \dots$$

και

$$F(A_t) = F(A) + t(da + A \wedge a + a \wedge A) + t^2 a \wedge a = F(A) + td_A a + t^2 a \wedge a$$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως, } S(A_t) &= \|F(A)\|^2 + t\{\langle d_A a, F(A) \rangle + \langle F(A), d_A a \rangle\} + \dots \\ &= S(A) + 2t \langle F(A), d_A a \rangle + \dots \end{aligned}$$

Το A θα είναι κρίσιμο σημείο αν $\frac{dS(A_t)}{dt} |_{t=0} = 0$ δηλαδή αν $\langle F(A), d_A a \rangle = 0$
 Οπότε προκύπτει $\langle d_A^* F(A), a \rangle = 0$ και αφού το a είναι τυχαίο:

$$d_A^* F(A) = 0$$

Όμως, η $F(A) = dA + A \wedge A$ ικανοποιεί επίσης την ταυτότητα Bianchi $d_A F(A) = 0$ και έτσι οδηγούμαστε στο ζεύγος εξισώσεων:

$$\begin{aligned} d_A F(A) &= 0 \\ d_A^* F(A) &= 0 \end{aligned}$$

κατ'αναλογία με τη διπλή συνθήκη που χρειάζεται να ικανοποιεί μία διαφορική n -μορφή ώστε να είναι αρμονική, δηλαδή:

$$\begin{aligned} d\omega &= 0 \\ d^* \omega &= 0 \end{aligned}$$

Να σημειωθεί εδώ βέβαια πως οι εξισώσεις Yang-Mills είναι μη-γραμμικές και άρα ουσιαστικά πρόκειται για μία διπλή μη-γραμμική αρμονική συνθήκη.

Η πιο σημαντική κλάση λύσεων για τις εξισώσεις Yang-Mills $d_A^* F(A) = 0$ είναι αυτή που αποτελείται από όλες αυτές τις μορφές συνοχής που η καμπυλότητα τους είναι αυτο-δυϊκή ή αντι-αυτο-δυϊκή. Πράγματι, αυτό συμβαίνει διότι αν η d_A^* έχει (ως προς το εσωτερικό γινόμενο στις 2-μορφές) την ιδιότητα $d_A^* = - * d_A *$ τότε οι εξισώσεις Yang-Mills γίνονται:

$$d_A * F(A) = 0$$

Άρα, αν $F = \mp * F$ οι ταυτότητες Bianchi συνεπάγονται αμέσως ότι υπάρχει λύση στις εξισώσεις Yang-Mills και επομένως κατορθώσαμε να λύσουμε μία μη-γραμμική δευτεροτάξια μερική διαφορική εξίσωση λύνοντας απλά μία μη-γραμμική πρωτοβάθμια συνήθη.

Γίνεται εύκολα επίσης φανερό ότι τα κρίσιμα αυτά σημεία είναι όλα ελάχιστα της δράσης S . Πράγματι, αναλύοντας ορθογώνια την F στα αυτο-δυϊκά και αντί-αυτο-δυϊκά μέρη της αντίστοιχα θα έχουμε:

$$F = \frac{1}{2}(F + * F) + \frac{1}{2}(F - * F) = F^+ + F^-$$

και άρα προκύπτει ότι:

$$S = \|(F^+ + F^-)\|^2 = \|F^+\|^2 + \|F^-\|^2$$

Ο τοπολογικός τύπος αυτού του instanton κατηγοριοποιείται από τη δεύτερη κλάση Chern $c_2(F) \in H^2(M; \mathbf{Z})$ της δέσμης επί της οποίας ορίζεται η μορφή συνοχής A . Αν $G = SU(n)$ τότε έχουμε $c_2(F)[M] = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}(F \wedge F) \in \mathbf{Z}$.

Έτσι, ο αριθμός instanton $d \in \mathbf{Z}$ (ήτοι d-instanton) ορίζεται ως το αρνητικό αυτής της ποσότητας, δηλαδή:

$$d = -\frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}(F \wedge F)$$

όπου αναπτύσσοντας την παράσταση περαιτέρω, θα έχουμε:

$$d = -\frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}\{(F^+ + F^-) \wedge (F^+ + F^-)\} = \frac{1}{8\pi^2} (\|F^+\|^2 - \|F^-\|^2)$$

Από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι για κάθε d , τα ολικά (απόλυτα) ελάχιστα της S θα πετυχαίνονται όταν $S = 8\pi^2|d|$ γεγονός που αντιστοιχεί στο $F^\mp = 0$ και ισοδύναμα στο:

$$F = \mp * F$$

Οι συνθήκες αυτές ονομάζονται αυτο-δυϊκές/αντι-αυτό-δυϊκές και η εναλλαγή μεταξύ F^+/F^- γίνεται αλλάζοντας τον προσανατολισμό της πολλαπλότητας M . Φυσικά μέχρι τώρα θεωρήσαμε σιωπηλά ότι η σταθερά σύζευξης ήταν ίση με την μονάδα. Αυτό δε συμβαίνει σε οποιοδήποτε φαινόμενο που είναι κατά βάση μη-διαταραγμένης φύσης, οπότε συμβολίζοντας με g αυτή τη σταθερά θα καταλήγαμε αντίστοιχα στην εξής δράση:

$$S \triangleq S(A) = \frac{1}{g^2} \|F\|^2 = -\frac{1}{g^2} \int_M \text{tr}(F \wedge * F)$$

όπου αν το A ήταν instanton θα είχαμε απ'ευθείας ότι:

$$S(A) = \frac{8\pi^2|d|}{g^2}$$

και άρα το κβαντομηχανικό πλάτος θα ήταν:

$$e^{-S} = e^{-S(A)} = \exp\left[-\frac{8\pi^2|d|}{g^2}\right]$$

δηλαδή μία αντίστροφη δυναμοσειρά ως προς g^2 . Και σε αυτό το σημείο, η τοπολογία έχει τον πρώτο λόγο καθώς για να υπάρξει αυτή η σειρά ο αριθμός instanton d επιβάλλεται να είναι μη-μηδενικός.

Επιστρέφοντας στα μονόπολα, το 1971 οι 't Hooft[17] και Polyakov[18] εισήγαγαν ανεξάρτητα την έννοια του πρώτου μαγνητικού μονοπόλου σε μη-Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας, που πλέον φέρει και το όνομα τους:

μονόπολο 't Hooft-Polyakov. Το μονόπολο αυτό “ζει” όπως και το μονόπολο Dirac στον \mathbf{R}^3 και έχει επίσης κβαντισμένο μαγνητικό φορτίο, όμως ταυτόχρονα διαφέρει σημαντικά από αυτό καθώς δεν παρουσιάζει καμία ανωμαλία στην απαρχή των αξόνων ενώ είναι κανονικό σε ολόκληρο τον χώρο. Έτσι, αποφεύγεται η αναφορά σε χορδές Dirac. Οι εργασίες τους στηρίχθηκαν σε προηγούμενες ιδέες, όπως αυτές του Nielsen και του Olesen που παρατήρησαν πως οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές σε υπεραγωγούς συμπεριφέρονται από λίγο έως πολύ σαν τη χορδή Nambu. Ακριβώς αυτές οι ιδέες (μαζί με την απόδειξη επανακονικοποιησιμότητας των μη-Αβελιανών θεωριών βαθμίδας) ήταν αυτές που οδήγησαν γοργά στην μετέπειτα έρευνα της τοπολογίας των συνοριακών συνθηκών ενός μονοπόλου και γενικότερα στην εμβάθυνση των εξισώσεων Yang-Mills. Δεν είναι υπερβολή να ειπωθεί εδώ πως τότε ακριβώς το Καθιερωμένο Μοντέλο των στοιχειωδών σωματιδίων επανέκτησε το παλαιόθεν κύρος του και έτσι βαθμιαία μαζί με την ομάδα βαθμίδας $SU(2) \times U(1)$ της ήδη ενοποιημένης ηλεκτρασθενούς δυνάμεως προστέθηκε και το μοντέλο $SU(3)$ της ισχυρής πυρηνικής που οφειλόταν στη συμπεριφορά των quarks.

Τα μονόπολα γενικά είναι στατικά, πεπερασμένης ενέργειας αντικείμενα που δίνουν τα κρίσιμα σημεία του συναρτησοειδούς ενέργειας Dirichlet ενός καθορισμένου συστήματος από πεδία που ορίζονται σε μία μη-συμπαγή, τρισδιάστατη πολλαπλότητα M . Πολλές φορές, η πολλαπλότητα αυτή δύναται να είναι και Ρημάνεια υπό κάποιες επιπλέον προϋποθέσεις. Αν λοιπόν έχουμε μία G -μορφή συνοχής Yang-Mills A με αντίστοιχη καμπυλότητα F , ένα βαθμωτό πεδίο Higgs φ που μετασχηματίζει σύμφωνα με την Adj αναπαράσταση της ομάδας G και η Hodge δυϊκότητα $*$ να λαμβάνεται κατά τα γνωστά ως προς την μετρική στην M , τότε η ενέργεια του συστήματος θα δίνεται ως (με $|\varphi|^2 = -2tr(\varphi^2)$):

$$E = \frac{1}{2} \int_M \{-tr(F \wedge * F) - tr(d_A \varphi \wedge * d_A \varphi) + \lambda * (|\varphi|^2 - C^2)^2\}$$

όπου $d_A \varphi$ θα είναι η συναλλοίωτη εξωτερική παράγωγος του πεδίου Higgs και το ίχνος θα δρα πάνω στην άλγεβρα Lie \mathfrak{g} της G . Όμως, οι εξισώσεις πεδίου για τα κρίσιμα σημεία αυτού του συστήματος είναι δύσκολο να επιλυθούν αναλυτικά. Κάποιες λύσεις (αν και περισσότερες είναι αριθμητικές στη φύση) είναι γνωστές ως το όριο των Prasad-Sommerfield όπου εκεί το βαθμωτό δυναμικό μηδενίζεται. Σε αυτό το όριο για παράδειγμα θα έχουμε:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} E(A, \varphi) = -\frac{1}{2} \int_M \{tr(F \wedge * F) + tr(d_A \varphi \wedge * d_A \varphi)\}$$

Άρα,

$$E = \frac{1}{2} \{\|F\|^2 + \|d_A \varphi\|^2\} = \frac{1}{2} \{\|F \mp * d_A \varphi\|^2 \pm 2\langle F, * d_A \varphi \rangle\}$$

Οπότε, τα απόλυτα ελάχιστα της E θα πετυχαίνονται όταν για το ζεύγος (A, φ) ικανοποιεί την: $F = \mp * d_A \varphi$ που ονομάζεται εξίσωση *Bogomolny*.

Το ελάχιστο αυτό θα είναι τότε το:

$$\langle F, * d_A \varphi \rangle = - \int_M tr(F \wedge d_A \varphi)$$

το οποίο μοιάζει πολύ με **τοπολογικό φορτίο**. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στον \mathbf{R}^3 με την Ευκλείδεια μετρική και ομάδα βαθμίδας είναι η $G = SU(2)$ παρατηρούμε πως για να έχουμε ένα καλά-τοποθετημένο πρόβλημα κατά Hadamard (για την εξίσωση πεδίου) θα πρέπει η ενέργεια E να συγκλίνει. Αυτό μας οδηγεί στο να καθορίσουμε τις συνοριακές συνθήκες στο άπειρο για την φ . Για παράδειγμα, αν r η απόσταση από την αρχή των αξόνων, τότε θέτουμε:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\varphi| \rightarrow C + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Υπό αυτή τη συνθήκη, το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι μη-μηδενικό και έχει μια τοπολογική ερμηνεία, που το εξαναγκάζει να πάρει διακριτές μόνο τιμές. Δηλαδή,

$$\frac{1}{4\pi C} \langle F, * d_A \varphi \rangle = k \in \mathbf{Z}$$

Ο ακέραιος αυτός δε θα είναι τίποτε άλλο, παρά το μαγνητικό φορτίο και όπως έγινε στην Αβελιανή περίπτωση, μπορεί να θεωρηθεί ως η κλάση Chern μίας $U(1)$ -δέσμης πάνω στην S_∞^2 (την 2-σφαίρα στο άπειρο). Για $C = 1$ το θεώρημα Stokes δίνει:

$$k = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} tr(F \wedge d_A \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty^2} tr(F \varphi)$$

Η συνθήκη $|\varphi| = 1$ στο σύνορο όταν υπολογισθεί στο άπειρο ορίζει μία S^2 μέσα στην άλγεβρα Lie $\mathfrak{su}(2)$ ενώ το (F, φ) γίνεται η $U(1)$ -καμπυλότητα μιας δέσμης πάνω στην S^2_∞ με το k να είναι η κλάση Chern της. Φυσικά, εδώ το k μπορεί να ιδωθεί ως ο τοπολογικός βαθμός μιας απεικόνισης $\varphi': S^2_\infty \rightarrow S^2_{\mathfrak{su}(2)}$ με $x \rightarrow \varphi'(x) = \frac{\varphi}{|\varphi|}$ και ο ακέραιος $k = -\frac{1}{2\pi} \int_{S^2_\infty} \text{tr}(\varphi' d\varphi' \wedge d\varphi')$ θα είναι τότε μία τοπολογική αναλλοίωτη (αφού η δέσμη $SU(2)$ πάνω στον \mathbf{R}^3 θα είναι τοπολογικά τετριμμένη) για το υπό μελέτη σύστημα μαγνητικού μονοπόλου.

Έχοντας πλέον μία πρώτη γεύση για την τοπολογική φύση των μορφών συνοχής στη θεωρία Yang-Mills και της σημαντικής δομής των ινωδών δεσμών καθώς και την πληροφορία που φέρουν αυτές μέσω των συνομολογιακών χαρακτηριστικών ομάδων (π.χ Chern) συνειδητοποιεί κανείς πως οι αριθμητικές αναλλοιώτες (όπως ο αριθμός instanton k) πρέπει να αντιμετωπιστούν περισσότερο από μία μαθηματική σκοπιά. Αυτό είναι αναγκαίο, γιατί ένα instanton A υπολογίζεται ευκολότερα από μία μη-γραμμική μερική διαφορική εξίσωση τύπου $F = *F$. Πράγματι, η τελευταία αυτο-δυϊκή εξίσωση αναλύεται ως:

$$\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + igf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (\partial^\alpha A^{\beta\gamma} - \partial^\beta A^{\alpha\gamma} + igf^{abc} A^{b\alpha} A^{c\beta})$$

Αυτή ακριβώς η απομάκρυνση από τις διαφορικές εξισώσεις αποτέλεσε σημαντική αλλαγή στον κλάδο της θεωρητικής φυσικής τα τέλη της δεκαετίας του '70. Πλέον, η πληροφορία των αυτο-δυϊκών πεδίων βαθμίδας μπορούσε τρόπον τινά να κωδικοποιηθεί στη δομή (π.χ τις συναρτήσεις μετάβασης) συγκεκριμένων μιγαδικών διανυσματικών δεσμών. Ήταν εκείνη ακριβώς την εποχή που ο Penrose ανέπτυξε τη *θεωρία των συστροφών* (twistors) ως ένα Yang-Mills ανάλογο της κατασκευής μη-γραμμικών γκραβιτονίων από τις αυτο-δυϊκές εξισώσεις πεδίου του Einstein για το κενό. Ήταν λοιπόν πλέον ξεκάθαρο πως τα μεγαλύτερα προβλήματα της φυσικής εκείνη τη δεκαετία είχαν μια αξιοσημείωτη μαθηματική χροιά. Και πράγματι, σπουδαίοι μαθηματικοί όπως οι Atiyah, Drinfeld, Hitchin, Singer και Mannin μεταφέροντας το πλαίσιο του προβλήματος στην αλγεβρική γεωμετρία και εισάγοντας την έννοια των *χώρων moduli* ως χώρους λύσεων από d-instantons, έδωσαν πλήρεις λύσεις για $M = S^4$. Και όπως μάλλον είναι αναμενόμενο, η επόμενη μεγάλη ανακάλυψη έμελλε να γίνει αυτή τη φορά στα Μαθηματικά από τους Freedman, Donaldson, Seiberg και Witten.

4.2. Η θεωρία Donaldson για τις 4-πολλαπλότητες

Η θεωρία Donaldson μελετά τις λείες 4-πολλαπλότητες (4-πολλαπλότητα) χρησιμοποιώντας κυρίως εργαλεία και μεθόδους από τη θεωρία βαθμίδας. Ο Donaldson^[19] με το περίφημο θεώρημα του το 1983, κατάφερε να περιορίσει το πλήθος των δυνατών τετραγωνικών μορφών στη δεύτερη ομάδα συνομολογίας μιας συμπαγούς και απλά συνεκτικής διαφορίσιμης (και όχι τοπολογικής) 4-πολλαπλότητας. Έτσι, κατάφερε να αναδείξει με έναν πολύ βαθύ τρόπο ένα ακόμη ενθαρρυντικό στοιχείο για τη στενή σχέση που έχουν τα Μαθηματικά με τη Φυσική. Πριν δούμε όμως τη σχέση της τοπολογίας 4-πολλαπλοτήτων με το υπόστρωμα της τοπολογικής κβαντικής θεωρίας πεδίου, θα πρέπει να εισάγουμε μερικές έννοιες από την αλγεβρική γεωμετρία: τους χώρους moduli και τον αριθμό τομής.

Χονδρικά, ένας χώρος moduli είναι ένας γεωμετρικός χώρος του οποίου τα σημεία αναπαριστούν ισομορφικές κλάσεις κάποιων ενδιαφέρουσων αλγεβρο-γεωμετρικών αντικειμένων (π.χ λείες αλγεβρικές καμπύλες γένους g , schemes, αλγεβρικές στοίβες κτλ). Οι χώροι αυτοί, εμφανίζονται συχνά κατά φυσικό τρόπο ως χώροι λύσεων σε διάφορα προβλήματα κατηγοριοποίησης. Για παράδειγμα, στην περίπτωση μας η τοπολογία αυτού του χώρου θα μας βοηθήσει στο πρόβλημα κατηγοριοποίησης 4-πολλαπλοτήτων. Το όνομα «moduli» το οφείλουν σε μία παλαιότερη αντιμετώπιση τους, ως χώροι συναρτήσεων κάποιας παραμέτρου (modulus), παρά ως χώροι αποτελούμενοι αυστηρά από αντικείμενα. Λόγω της γενικότητας τους και κατ'επέκταση των διαφόρων ορισμών ανάλογα με το εκάστοτε πλαίσιο αντιμετώπισης τους, είναι δύσκολο να δοθεί εδώ κάποιος ακριβής ορισμός. Όμως, μπορεί να ειπωθεί πως ένας χώρος M είναι *fine moduli χώρος* εάν κάθε σημείο του $m \in M$ αντιστοιχεί σε ένα αλγεβρογεωμετρικό αντικείμενο T_m και αντίστροφα. Πράγματι, τότε μπορούμε να συγκεντρώσουμε όλα αυτά τα αντικείμενα σε μία ενιαία οικογένεια T , η οποία μάλιστα θα ονομάζεται «καθολική» αν κάθε υποοικογένεια της πάνω σε ένα χώρο βάσης B παίζει το ρόλο μιας pull-back συνάρτησης της T επί μιας μοναδικής απεικόνισης $B \rightarrow M$.

Μερικά προφανή παραδείγματα τέτοιων χώρων είναι: ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbf{R}P^n$ που μπορεί να ιδωθεί ως ο χώρος των ευθειών στον \mathbf{R}^{n+1} που διέρχονται από την απαρχή των αξόνων, η Γκρασμανιανή $G_k(V)$ επί κάποιου σώματος F ως ο χώρος όλων των γραμμικών υποχώρων του διανυσματικού χώρου V με $\dim V = k$ και το Hilbert scheme $Hilb(X)$ του

οποίου κάθε κλειστό σημείο αντιστοιχεί σε ένα κλειστό subscheme και αντίστροφα.

Γεγονός όμως είναι πως στην παρούσα εργασία, θα μας απασχολήσουν μόνο χώροι moduli από διανυσματικές δέσμες. Το πρόβλημα ουσιαστικά είναι η κατανόηση της γεωμετρικής τοπολογίας των διαφόρων υποστοιβών του $M = Vect_n(X)$, δηλαδή του χώρου όλων των διανυσματικών δεσμών τάξεως n , με X κάποια αλγεβρική ποικιλότητα. Η περίπτωση $n = \dim X = 1$ έχει μελετηθεί επαρκώς και έχει βρεθεί πως εδώ ο (ασθενής) χώρος moduli είναι η γενίκευση μιας Ιακωβιανής ποικιλότητας, γνωστή και ως ομάδα Picard:

$$Pic(X) = H^1(X, O_X^*)$$

Έναντι χώρων moduli από διανυσματικές δέσμες, μπορούμε βέβαια να θεωρήσουμε και χώρους από κύριες G -δέσμες. Πράγματι, αυτό θα μας οδηγήσει μέσω της θεωρίας βαθμίδας (και κάποιας συνομολογιακής θεωρίας πεδίου) στο να εκφράσουμε μέσω ολοκληρωμάτων τροχιάς κατά Feynman τους αριθμούς τομής αυτών των χώρων που ορίζονται πάνω σε μία 4-πολλαπλότητα. Τι είναι όμως αυτοί οι αριθμοί τομής;

Η θεωρία τομής στην αλγεβρική γεωμετρία γενικεύει κατά μία έννοια την διαισθητική τακτική του να μετρά κανείς το πλήθος των φορών που δύο καμπύλες τέμνονται (πχ θεώρημα Bezout), αλλά σε περισσότερες διαστάσεις. Αυτός ο αριθμός, αντανακλά πολλές πληροφορίες για την τοπολογία των 4-πολλαπλοτήτων και συγκεκριμένα για την ενδεχόμενη ύπαρξη λείων δομών πάνω τους.

Έστω για παράδειγμα, X μία επιφάνεια Riemann. Τότε, για κάθε κλειστή και λεία καμπύλη $C: S^1 \rightarrow X$ μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μία διαφορική μορφή η_C . Έτσι, ολοκληρώματα κατά μήκος της C μπορούν πλέον να υπολογιστούν με ολοκληρώματα επί του X . Δηλαδή, για κάθε 1-διαφορική μορφή a :

$$\int_C a = - \int \int_X a \wedge \eta_C = (a, * \eta_C)$$

Ορίζουμε λοιπόν, *αριθμό τομής*, δύο κλειστών καμπυλών a, b στον X την ποσότητα:

$$a \cdot b = \int \int_X \eta_a \wedge \eta_b = (\eta_a, - * \eta_b) = - \int_b \eta_a$$

Έστω τώρα M να είναι μια απλά συνεκτική, προσανατολίσιμη και συμπαγής διαφορίσιμη 4-πολλαπλότητα. Επιλέγουμε, τη λεία περίπτωση καθώς υπάρχουν ποικίλλης φύσεως εμπόδια στο να αποδείξουμε την ύπαρξη κατά-τμήματα γραμμικών (PL) και διαφορικών (DIFF) δομών σε μία τοπολογική πολλαπλότητα στη διάσταση $n = 4$. Τότε λοιπόν, θα έχουμε απ'ευθείας ότι:

$$\begin{aligned} H_1(M; \mathbf{Z}) &= 0 \\ H_3(M; \mathbf{Z}) &= 0 \end{aligned}$$

Οπότε και θα αναζητήσουμε μη-τετριμμένη ομολογική πληροφορία στην $H_2(M; \mathbf{Z})$ χρησιμοποιώντας φυσικά την έννοια του αριθμού τομής που ορίσαμε πιο πάνω:

$$q: H^2(M; \mathbf{Z}) \times H^2(M; \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$$

$$q(a, b) = \langle (a \cup b), [M] \rangle \quad \forall a, b \in H_2(M; \mathbf{Z})$$

όπου με \cup εδώ συμβολίζουμε το γινόμενο-cup για τους γεννήτορες κύκλους της $H_2(M; \mathbf{Z})$. Εκφράζοντας τώρα, την δυϊκότητα του **Poincaré**:

$$b_r(M) = b_{n-r}(M)$$

με όρους ομολογίας παρά με όρους αριθμών Betti, έπεται ότι ο ακέραιος που θα πάρουμε ως αριθμό τομής θα είναι πάντα μη-εκφυλισμένος στο \mathbf{Z} και άρα θα έχουμε: $\det = \mp 1$. Σε αυτήν την περίπτωση ο q θα ονομάζεται unimodular. Σημειωτέον δε, πως κάθε θετικά ορισμένη, συμμετρική, διγραμμική και unimodular τετραγωνική μορφή προκύπτει ως ο αριθμός τομής κάποιας 4-πολλαπλότητας που δεν έχει διαφορίσιμη δομή. Επίσης, ο q θα θεωρείται άρτιος αν όλα τα διαγώνια στοιχεία του είναι άρτια και ως περιττός αντίστοιχα. Όμως, σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθούμε σε ένα πολύ δυνατό αποτέλεσμα του Freedman[20] που θα μας χρειαστεί αργότερα:

Θεώρημα: Κάθε απλά συνεκτική 4-πολλαπλότητα M η οποία έχει q άρτιο ανήκει σε μία και μοναδική κλάση ομοιομορφισμού. Αν πάλι, ο q είναι περιττός τότε υπάρχουν ακριβώς δύο μη-ομοιομορφικές πολλαπλότητες με τον q ως αριθμό τομής τους.

Η ισχύς του παραπάνω θεωρήματος διαφαίνεται αμέσως, καθώς μπορούμε να το επικαλεστούμε για να αποδείξουμε μια ειδική περίπτωση της πασίγνωστης εικασίας του **Poincaré** στη διάσταση $n = 4$. (Η περίπτωση $n \geq 5$ αποδείχτηκε από τον Smale ενώ η $n = 3$ σχετικά πρόσφατα από τον Perelman χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική ροή Ricci-Hamilton $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$ για την καμπυλότητα της μετρικής Riemann). Πράγματι, θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε ομοτοπικά ισοδύναμη 4-σφαίρα S_h^4 είναι ουσιαστικά ομοιομορφική με τη συνήθη σφαίρα S^4 (το αντίστροφο ισχύει πάντα). Αφού, $H^2(S^4; \mathbf{Z}) = 0$ άρα $q = \emptyset$ συμβολίζοντας έτσι τη μηδενική τετραγωνική μορφή. Όμως, η S_h^4 είναι της ίδιας ομοτοπίας με την S^4 και άρα θα έχει την ίδια συνομολογία με αυτήν. Άρα, και κάθε S_h^4 θα έχει επίσης $q = \emptyset$. Από θεώρημα Freedman τώρα, για κάθε απλά συνεκτική 4-πολλαπλότητα M με άρτιο q , υπάρχει μόνο μία κλάση ομοιομορφισμού για το M . Επομένως, η S_h^4 είναι ομοιομορφική με την S^4 και τελειώσαμε. ■

Είναι καιρός όμως να επιστρέψουμε στην εργασία του Donaldson, όπου εδώ πλέον θα μας αφορά επίσης και το κατά πόσο μια 4-πολλαπλότητα είναι λεία. Γνωρίζουμε πως όταν το q είναι μία τυχαία τετραγωνική μορφή, τότε μία κατάλληλη επιλογή προσανατολισμού μπορεί να το μετατρέψει σε μία θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή. Έχοντας αυτό κατά νου, φτάνουμε στο θεώρημα Donaldson:

Θεώρημα: Έστω M μία λεία, απλά συνεκτική 4-πολλαπλότητα με q θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή αριθμού τομής. Τότε, η q είναι πάντα διαγωνιοποιήσιμη επί του \mathbf{Z} στον I . π.χ $q = \text{diag}(1,1, \dots, 1)$

Ένα άμεσο πόρισμα εδώ θα είναι ότι δεν υπάρχει απλά συνεκτική 4-πολλαπλότητα για την οποία το q είναι άρτια και θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή, η οποία δύναται να μετατραπεί σε λεία. Έστω για παράδειγμα ο πίνακας Cartan για την εξαιρετέα (exceptional) άλγεβρα Lie e_8 ($a = -1$):

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 2 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Άρα, από το θεώρημα Freedman, εξασφαλίζεται η ύπαρξη μιας πολλαπλότητας M με $q = E_8 \oplus E_8$. Από την άλλη όμως, το θεώρημα Donaldson απαγορεύει την ύπαρξη μιας τέτοιας πολλαπλότητας και άρα κάθε προσπάθεια κατασκευής (μέσω χειρουργικών μεθόδων) μιας λείας πολλαπλότητας M με τέτοιο q είναι καταδικασμένη να αποτύχει. Έτσι, σε αντίθεση πάντα με το θεώρημα Freedman που επιτρέπει σε όλες τις unimodular τετραγωνικές μορφές να προκύψουν ως μορφές τομής κάποιας τοπολογικής πολλαπλότητας, το θεώρημα Donaldson μας πληροφορεί πως στην περίπτωση μιας θετικά ορισμένης μορφής (και M λεία) μόνο μία τετραγωνική μορφή επιτρέπεται: η μοναδιαία I . Ο λόγος που αγνοήσαμε την φαινομενικά απλούστερη περίπτωση $q = E_8$, είναι γιατί αντιστοιχεί σε μία μη-λεία πολλαπλότητα. Το θεώρημα Rokhlin[21] δίνει μία αναγκαία συνθήκη για τη λειότητα αλλά χωρίς και την ικανή συνθήκη το θεώρημα δεν είναι εύχρηστο.

Τέλος, ας δούμε πως περίπου χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Yang-Mills σε μία σκιαγράφιση της απόδειξης του θεωρήματος Donaldson: Έστω F μία μορφή συνοχής σε μία κύρια $SU(2)$ -δέσμη πάνω σε μία απλά συνεκτική 4-πολλαπλότητα M η οποία έχει θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή αριθμού τομής. Αν S είναι η συνήθης Ευκλείδεια YM δράση τότε:

$$S = \|F\|^2 = - \int_M tr(F \wedge * F)$$

Αφού λοιπόν ένα instanton A ελαχιστοποιεί την S , μπορούμε να προκαλέσουμε μία διαταραχή γύρω από το A έτσι ώστε να βρούμε περισσότερα instantons. Τότε, συγκεντρώνουμε όλα αυτά τα instantons σε ένα χώρο ο οποίος θα αποτελέσει έναν ολικό χώρο moduli πεπερασμένης διάστασης. Παραδείγματος χάριν, για το instanton με $k = 1$ που αντιστοιχεί στο απόλυτο ελάχιστο της S έχουμε το χώρο moduli \mathbf{M}_1 , που ας υποθέσουμε χάριν απλότητας εδώ ότι είναι ένας μη-συμπαγής χώρος με διάσταση 5 και περιέχει ιδιομορφίες. Το κρίσιμο σημείο εδώ που αντιλήφθηκε ο Donaldson και εκμεταλλεύτηκε στη συνέχεια είναι ότι υπάρχουν πολύ στενές σχέσεις μεταξύ της M και του \mathbf{M}_1 . Για παράδειγμα, έστω ότι το q είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ με ακριβώς $\#p$ μοναδιαίες ιδιοτιμές, όπου προφανώς $p \leq n$. Τότε, ο \mathbf{M}_1 έχει ακριβώς p ιδιάζουσα σημεία τα οποία θα μοιάζουν με κώνους στον μιγαδικό προβολικό χώρο CP^2 . Άρα, η 4-πολλαπλότητα M θα έχει την ίδια τοπολογική «υπογραφή» $Sign(M)$ με αυτήν που έχουν οι $\#p$ αντιγραφές του CP^2 . Όμως, αυτές με τη σειρά τους

έχουν υπογραφή $\alpha - \beta$ (όπου οι $\# \alpha, \# \beta$ έχουν αντίθετους προσανατολισμούς στο $\mathbf{C}P^2$) άρα τελικά $Sign(M) = \alpha - \beta$. Εξ'ορισμού το $Sign(M)$ είναι η υπογραφή $\sigma(q)$ της τετραγωνικής μορφής αριθμού τομής q της M . Όμως, εξ'υποθέσεως αυτή είναι ένας θετικά ορισμένος τετραγωνικός πίνακας, άρα: $\sigma(q) = n = Sign(M)$. Έτσι, $n = \alpha - \beta$ και αφού $p = \alpha + \beta \leq n$ έπεται ότι $n \leq p \leq n$ δηλαδή $p = n$, που δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο ισχυρισμός του θεωρήματος Donaldson. ■

5. Τοπολογική Κβαντική Θεωρία Πεδίου

5.1. Συναρτησιακά ολοκληρώματα τροχιάς Feynman

Η κινητήριος δύναμη για την Κβαντική Θεωρία Πεδίου είναι το ολοκλήρωμα τροχιάς κατά Feynman. Υπάρχουν τρεις διαφορετικές μορφές αυτού του συναρτησιακού ολοκληρώματος, ονομαστικά:

- Άθροιση ιστοριών που αναπτύχθηκε από τον Feynman για μία εναλλακτική περιγραφή της Κβαντομηχανικής.
- Άθροιση πεδίων για την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική την οποία βελτίωσαν κατά πολύ αργότερα οι Faddeev-Popov.
- Άθροιση γεωμετριών/τοπολογιών για την Κβαντική Βαρύτητα που αναπτύχθηκε κυρίως από τον Hawking και χρησιμοποιείται κατά κόρον στη θεωρία Αιτιώδη Δυναμικού Τριγωνισμού.

Και στις τρεις εκδοχές όμως, υπάρχει κοινός ο φορμαλισμός της δράσης-πλάτους που αποτελείται από δύο συνιστώσες:

Πρώτον, ένα πραγματικό, κλασικό συναρτησοειδές δράσης Hamilton:

$$S[\Phi] = \int_{t_i}^{t_f} L[\Phi] dt$$

όπου η Λαγκρανζιανή συνάρτηση ενέργειας ορίζεται πάνω στην Λαγκρανζιανή πυκνότητα, δηλαδή:

$$L[\Phi] = \int d^n x \mathbf{L}(\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \mu})$$

Το συναρτησοειδές δράσης υπακούει φυσικά στην Αρχή Ελαχίστης Δράσης του Hamilton $\delta S[\Phi] = 0$ που δίνει τις γνωστές μεταβολικές εξισώσεις Euler-Lagrange για την ελάχιστη τροχιά, το ακρότατο πεδίο και τη γεωμετρία μιας ελαχιστικής επιφάνειας χωρίς σπές για κάθε εκδοχή αντίστοιχα. Δεύτερον, ένα κβαντικό πλάτος μετάβασης με μιγαδικές τιμές:

$$\langle Out_{t_f}, In_{t_i} \rangle = \int_{\Omega} D[\Phi] e^{iS[\Phi]}$$

όπου $D[\Phi]$ ένα κατάλληλο μέτρο τύπου Lebesgue, που όπως θα δούμε ορίζεται ως:

$$D[\Phi] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{s=1}^N \phi_s^i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Πριν αναφερθεί οποιαδήποτε τοπολογική ιδιότητα, ας παρατηρήσουμε αναλυτικότερα τη μέθοδο με την οποία κατέληξε ο Feynman στο περίφημο ολοκλήρωμα τροχιάς. Υπάρχουν τρεις βασικές «εικόνες» στην Κβαντομηχανική. Του Schrödinger, του Heisenberg και του Dirac. Ας δούμε κάθε μία ξεχωριστά.

Στην εικόνα του Schrödinger, έχουμε ανεξαρτησία της Χαμιλτονιανής H από τον χρόνο ενώ η κυματοσυνάρτηση $|\psi\rangle$ παραμένει ουσιαστικά εξαρτημένη. Οπότε, το πλάτος μετάβασης από τη μία κατάσταση στην άλλη θα δίνεται ως:

$$U = U(t_1, t_2) = \theta(t_1 - t_2) e^{-\frac{i}{\hbar}(t_1 - t_2)H}$$

Άρα,

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} - H \right) U(t_1, t_2) = i\hbar \delta(t_1 - t_2)$$

και έτσι ο τελεστής U ως συνάρτηση Green θα αποτελεί τον μεταδότη της εξισώσεως Schrödinger. Έτσι, θα είναι:

$$X_s |x\rangle = x|x\rangle \rightarrow \langle x_1 | U(t_1, t_2) |x_2\rangle_s = U(t_1, x_1; t_2, x_2)$$

$$\psi(x_1, t_1) = \int dx_2 U(t_1, x_1; t_2, x_2) \psi(x_2, t_2)$$

Γίνεται έτσι προφανές ότι σε αυτή την εικόνα, δεν υπάρχει εξάρτηση από τις τιμές των ενδιάμεσων καταστάσεων.

Αντίστροφα, στην εικόνα του Heisenberg, έχουμε εξάρτηση την Χαμιλτονιανής από τον χρόνο αλλά ανεξαρτησία της κυματοσυνάρτησης. Οπότε,

$$|\psi\rangle_H = |\psi(t=0)\rangle_S = |\psi(t=0)\rangle \rightarrow |\psi\rangle_H = e^{\frac{i}{\hbar}tH}|\psi(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(t)\rangle_S$$

Άρα,

$$X_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}tH}X_S e^{-\frac{i}{\hbar}tH} \rightarrow X_H(t)|x, t\rangle_H$$

$$\text{Οπότε, } \forall t_1, t_2 \text{ θα είναι: } {}_H\langle x_1, t_1 | x_2, t_2 \rangle_H = \langle x_1 | e^{-\frac{i}{\hbar}t_1 H} e^{\frac{i}{\hbar}t_2 H} | x_2 \rangle$$

$$= \langle x_1 | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_1-t_2)H} | x_2 \rangle = \langle x_1 | U(t_1, t_2) | x_2 \rangle = U(t_1, x_1; t_2, x_2)$$

Έτσι, ο τελεστής πλάτους μετάβασης θα δίνεται ως ένας τελεστής χρονικής εξέλιξης σε μορφή πίνακα, όπου τα στοιχεία του θα αποτελούν τα πλάτη μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων των συντεταγμένων της βάσης.

Στην εικόνα Dirac (γνωστή και ως εικόνα αλληλεπίδρασης) τόσο η Χαμιλτονιανή όσο και η κυματοσυνάρτηση θα εξαρτώνται από τον χρόνο ενώ ο υπολογισμός του πλάτους μετάβασης θα γίνεται κατά παρόμοιο τρόπο.

Έστω τώρα $t_f > t_i$ και $U = U(t_f, x_f; t_i, x_i) = {}_H\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_H$
 Κάνουμε μία διαμέριση του χρόνου $\forall n = 1, \dots, N-1$, $t_n = t_i + n\varepsilon$ με $\varepsilon = \frac{t_f-t_i}{N}$. Τότε,

$$U = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int dx_1 \dots \int dx_{N-1} {}_H\langle x_f, t_f | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle_H {}_H\langle x_{N-1}, t_{N-1} | x_{N-2}, t_{N-2} \rangle_H \dots {}_H\langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle_H$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } & {}_H\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle_H = \langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar}t_n H} e^{\frac{i}{\hbar}t_{n-1} H} | x_{n-1} \rangle \\ & = \langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_n-t_{n-1})H} | x_{n-1} \rangle = \langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H} | x_{n-1} \rangle \end{aligned}$$

και από τον τύπο Baker-Campbell-Hausdorff και τη διάταξη κατά Weyl θα έχουμε:

$$\int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}[p_n(x_n-x_{n-1}) - \varepsilon H(\frac{x_n+x_{n-1}}{2}, p_n)]}$$

Επομένως, για $x_0 = x_i$ και $x_N = x_f$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} & U(t_f, x_f; t_i, x_i) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int dx_1 \dots \int dx_{N-1} \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N [p_n(x_n-x_{n-1}) - \varepsilon H(\frac{x_n+x_{n-1}}{2}, p_n)]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Για } \varepsilon \rightarrow 0: & \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N [p_n(x_n - x_{n-1}) - \varepsilon H(\frac{x_n+x_{n-1}}{2}, p_n)] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{n=1}^N [p_n(x_n - x_{n-1}) - H(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}, p_n)] \end{aligned}$$

Και άρα για τετραγωνικές ως προς την ορμή Λαγκρανζιανές (και κατ' επέκταση Χαμιλτονιανές $H = H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$) θα έχουμε:

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int_{t_i}^{t_f} dt (p \frac{dx}{dt} - H(x, p)) = i/\hbar \int_{t_i}^{t_f} dt L$$

Άρα, καταλήγουμε στην παράσταση: $e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L}$

Οπότε, επιστρέφοντας στην αρχική ποσότητα φέρνουμε το ολοκλήρωμα σε μορφή Γκαουσιανής:

$$\begin{aligned} & U(t_f, x_f; t_i, x_i) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int dx_1 \dots \int dx_{N-1} \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{n=1}^N [p_n(x_n-x_{n-1}) - \frac{p_n^2}{2m} - V(\frac{x_n+x_{n-1}}{2})]} \end{aligned}$$

Όμως,

$$\int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar} [\frac{p_n^2}{2m} - p_n(x_n-x_{n-1})]} =$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i\varepsilon}{2\hbar m}[p_n^2 - 2mp_n(x_n - x_{n-1})]} = \\
& \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left[\left(p_n - \frac{m}{\varepsilon}(x_n - x_{n-1}) \right)^2 - \left(\frac{m(x_n - x_{n-1})}{\varepsilon} \right)^2 \right]} = \\
& \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\pi m\hbar}{\varepsilon}} \exp\left[\frac{im\varepsilon}{2\hbar} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon} \right)^2 \right] = \\
& \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}} \exp\left[\frac{im\varepsilon}{2\hbar} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } U = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int dx_1 \dots \int dx_{N-1} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon} \right)^2 - V \left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right) \right]}$$

$$\text{και ισοδύναμα: } U = A \int Dx e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right]} = A \int Dx e^{\frac{i}{\hbar} S[x]}$$

Ο τελευταίος αυτός τύπος θα δίνει και το πλάτος μετάβασης, όπου παρατηρούμε πως το σύστημα «αθροίζει» όλες τις δυνατές διαδρομές από τη μία κατάσταση στην άλλη και λόγω φάσης αλληλοαναιρούνται όλες εκτός από μία, που θα είναι η συνήθης κλασική τροχιά ($\hbar \rightarrow 0$ και $\frac{\delta S[x]}{\delta x[t]} = 0$) που θα ακολουθήσει το σύστημα. Σημειωτέον, πως οι τροχιές αυτές είναι συνεχείς αλλά όχι κατ'ανάγκη διαφορίσιμες.

5.2. Πολυωνυμικές αναλλοίωτες και θεωρία Seiberg-Witten

Η θεωρία βαθμίδας των Seiberg-Witten είναι ένα σύνολο εξισώσεων που καθορίζουν τη φυσική των χαμηλών ενεργειών κάποιου κβαντικού συστήματος. Ειδικότερα, χρησιμοποιώντας την έννοια ενός χώρου moduli, δύναται να καθορίσουμε τις μάζες ηλεκτρικά και μαγνητικά φορτισμένων υπερσυμμετρικών σωματιδίων. Αυτός ο υπολογισμός είναι μη-τετριμμένος γιατί στη θεωρία βαθμίδας με $N = 2$ επεκτεταμένη υπερσυμμετρία, οι

διάφοροι παράμετροι της Λαγκρανζιανής είναι ολομορφικές συναρτήσεις. Η κομψότητα της θεωρίας οφείλεται στο γεγονός πως κωδικοποιεί πολύ χρήσιμες πληροφορίες σε μερικά αναλλοίωτα πολυώνυμα. Θα δούμε αργότερα, πως η θεωρία Donaldson-Witten είναι μια ειδική (αλλά μάλλον πιο δύσκολη) περίπτωση αυτής της γενικότερης θεωρίας.

Το 1990 ο Donaldson απέδειξε ένα δεύτερο θεώρημα χρησιμοποιώντας εξισώσεις από τη θεωρία βαθμίδας και μέσω των εξισώσεων YM βρήκε πολυωνυμικές αναλλοίωτες για τις 4-πολλαπλότητες.

Είδαμε, προηγουμένως πως ο χώρος moduli M_1 αποτελούμενος μόνο από 1-instantons ($d = 1$) αποδείχθηκε αναγκαίος για την απόδειξη αποτελεσμάτων σχετικά με το κατά πόσο λεία είναι μία 4-πολλαπλότητα. Χρησιμοποιώντας όμως όλες τις τιμές $d = 1, 2, \dots$ σε μία Rημάνεια πολλαπλότητα έχουμε αντίστοιχα και άλλους χώρους moduli M_d με d -instantons. Οι πολυωνυμικές αναλλοίωτες που βρήκε μετέπειτα ο Donaldson μέσω όλων αυτών των χώρων έμελλε να αποτελέσουν πολύ ισχυρές αναλλοίωτες της διαφορικής τοπολογίας για τις απλά συνεκτικές 4-πολλαπλότητες. Έτσι, με τη βοήθεια των εξισώσεων YM ανοίξε οριστικά και ο δρόμος προς την κατηγοριοποίηση όλων των λείων 4-πολλαπλοτήτων. Οι χώροι moduli θα είναι πεπερασμένης διάστασης και ουσιαστικά θα αποτελούνται από μορφές συνοχής για τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις YM. Αναμφισβήτητα λοιπόν, οι εξισώσεις αυτές θα εξαρτώνται από την ελλειπτική γεωμετρία της M . Όμως, σε ομολογικό επίπεδο βρίσκουμε ιδιότητες των M_d που δεν αλλάζουν όταν η μετρική τροποποιηθεί κατά συνεχή τρόπο. Και αφού οποιεσδήποτε δύο μετρικές μπορούν να ενωθούν από μία συνεχή διαδρομή, οι ιδιότητες αυτές θα εξαρτώνται κατ'επέκταση μόνο από την τοπολογία της M . Χρησιμοποιώντας λοιπόν, άπειρες οικογένειες από χώρους moduli (άρα και άπειρο πλήθος πολυωνυμικών αναλλοιώτων για μία μόνο πολλαπλότητα!) και $b_2^+ = \text{rank}(q^+)$ περιττό μεγαλύτερο της μονάδας, βρίσκουμε διακεκριμένες μεταξύ τους αναλλοίωτες ως στοιχεία στον δακτύλιο συνομολογίας πολυωνύμων $S^*(H^2(M))$ για τα οποία όμως, είναι άγνωστο αν και κατά πιο βαθμό παραμένουν ανεξάρτητα μεταξύ τους. Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα:

Έστω M μία λεία, απλά συνεκτική, προσανατολίσιμη, 4-πολλαπλότητα Riemann χωρίς σύνορο και A μία $SU(2)$ μορφή συνοχής η οποία είναι αντί-αυτοδυϊκή έτσι ώστε $F = - * F$. Τότε, θα έχουμε:

$$\dim M_k = 8k - 3(1 + b_2^+)$$

Ορίζουμε μία αναλλοίωτη κατά Donaldson $q_d(M)$ να είναι ένα ακέραιο, συμμετρικό πολυώνυμο βαθμού d στην $H_2(M; \mathbf{Z})$:

$$q_d(M): \prod_{i=1}^d H_2(M) \rightarrow \mathbf{Z}$$

Αν πάρουμε μία απεικόνιση $m: H_2(M) \rightarrow H^2(\mathbf{M}_k)$ τότε μπορούμε να εκφράσουμε το $q_d(M)$ μέσω διαφορικών μορφών στη συνομολογία deRham. Δηλαδή, για $d = \frac{\dim(\mathbf{M}_k)}{2}$ ορίζουμε (όπου \mathbf{M}_k' μια συμπαγοποίηση του χώρου moduli):

$$q_d(M): \prod_{i=1}^d H_2(M) \rightarrow \mathbf{Z}$$

$$\text{με } a_1 \times \dots \times a_d \rightarrow \int_{\mathbf{M}'_k} m(a_1) \wedge \dots \wedge m(a_d)$$

Παρατηρούμε εδώ ότι: $q_d(M) \in \text{Sym}^d(H_2(M)) \subset S^*(H(M))$, όπου $\text{Sym}(\cdot)$ το σύνολο των συμμετρικών, ακέραιων πολυωνύμων με $\text{deg} = d$ στη $2^{\text{η}}$ ομάδα συνομολογίας της M . Άρα θα έχουμε, $d = \frac{8k-3(1+b_2^+)}{2}$ και έτσι η απαίτηση ο b_2^+ να είναι περιττός γίνεται ξεκάθαρη (π.χ θεώρημα Donaldson). Εκ των προτέρων όμως, τα πολυώνυμα Donaldson είναι δυσκόλως υπολογίσιμα για το λόγο ότι χρήζουν λεπτομερέστατης περιγραφής των χώρων moduli. Όμως, αν για παράδειγμα η M είναι μία μιγαδική αλγεβρική επιφάνεια, τότε ισχύει ότι: $\exists d_0 \in \mathbf{Z} : q_d(M) \neq 0, \forall d \geq d_0$. Δηλαδή, για επαρκώς μεγάλο d , τα πολυώνυμα $q_d(M)$ είναι μη-μηδενικά. Αντίστροφα τώρα, αν το M γράφεται ως το συνεκτικό άθροισμα $M = M_1 \# M_2$ δύο πολλαπλοτήτων με $b_2^+(M_i) > 0, \forall i = 1, 2$ τότε $q_d(M) = 0, \forall d$.

Τα $q_d(M)$ είναι αναλλοίωτες διαφορικής τοπολογικής φύσης και όχι απλά τοπολογικές αναλλοίωτες. Η διαφορά αυτή είναι σημαντική, καθώς σημαίνει πως δύναται να διακρίνουν ομοιομορφικές πολλαπλότητες που όμως έχουν διαφορετικές διαφορομορφικές δομές. Δηλαδή, πολλαπλότητες που είναι μεν ομοιομορφικές μεταξύ τους αλλά όχι και διαφορομορφικές. Παράδειγμα μιας τέτοιας πολλαπλότητας είναι η εξωτερική σφαίρα του Milnor στις επτά διαστάσεις, που προκύπτει ως μία S^3 -δέσμη επί της S^4 . Παράλληλα, ο ίδιος έδειξε πως στη σφαίρα αυτή υπάρχουν τουλάχιστον επτά

διαφορετικές διαφορικές δομές ενώ αργότερα ο Kervaire απέδειξε πως ο συνολικός αριθμός τους είναι 28.

Η θεωρία Seiberg-Witten μας παρέχει όπως προείπαμε μία δυνατότητα υπολογισμού των Donaldson αναλλοιώτων. Συγκεκριμένα, στη θεωρία αυτή κατασκευάζεται μία δυϊκότητα που καταλήγει να εξισώνει το ισχυρό όριο σύζευξης μιας $N = 2$ (συστραμμένης όπως θα δούμε παρακάτω) υπερσυμμετρικής YM θεωρίας με το ασθενές όριο σύζευξης μιας θεωρίας Αβελιανών μονοπόλων, στην οποία μάλιστα οι υπολογισμοί θα είναι και σημαντικά ευκολότεροι από μαθηματική σκοπιά.

Έστω πάλι M μία απλά συνεκτική, κλειστή, συμπαγής, προσανατολίσιμη Riemann πολλαπλότητα, A μια Αβελιανή $U(1)$ -μορφή συνοχής (άρα $F = dA$) σε μία ευθύγραμμη δέσμη L πάνω στο M και ψ ένα τοπικό πεδίο σπινόρων. Το πεδίο πρέπει να είναι αναγκαστικά τοπικό καθώς ενδέχεται να μην υπάρχουν απαραίτητα ολικοί σπίνορες στο M . Ισχύει όμως λόγω προσανατολισιμότητας ότι υπάρχει τουλάχιστον μία $spin_c$ δομή με το ψ να είναι η κατάλληλη μορφή τμήματος για αυτή τη δομή. Κάτω από αυτή την παρατήρηση, οι εξισώσεις Seiberg-Witten θα είναι οι εξής:

$$\begin{cases} \not{\partial}_A \psi = 0 \\ F_A^+ = -\frac{1}{2} \psi^* \Gamma \psi \end{cases}$$

όπου $\not{\partial}_A$ ο τελεστής Dirac και $\Gamma = \frac{1}{2} [\Gamma_i, \Gamma_j] dx^i \wedge dx^j$ με Γ_k οι πίνακες γάμμα του Dirac. Αυτές οι εξισώσεις θα δίνουν επομένως τα απόλυτα ελάχιστα της δράσης:

$$S = \int_M \left\{ |\not{\partial}_A \psi|^2 + \frac{1}{2} |F^+|^2 + \frac{1}{2} |\psi^* \Gamma \psi|^2 \right\}$$

Από την ταυτότητα τώρα του Weitzenböck, συσχετίζουμε τη Λαπλασιανή $\nabla_A^* \nabla_A$ με το $\not{\partial}_A^* \not{\partial}_A$ συν κάποιους όρους καμπυλότητας και έχουμε διαδοχικά:

$$S = \int_M \left\{ |\not{\partial}_A \psi|^2 + \frac{1}{2} |F^+|^2 + \frac{1}{2} |\psi^* \Gamma \psi|^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M \{ |\nabla_A \psi|^2 + \frac{1}{2} |F^+|^2 + \frac{1}{8} |\psi|^4 + \frac{1}{4} R |\psi|^2 \} \\
&= \int_M \{ |\nabla_A \psi|^2 + \frac{1}{4} |F|^2 + \frac{1}{8} |\psi|^4 + \frac{1}{4} R |\psi|^2 \} + \pi^2 c_1^2(L)
\end{aligned}$$

Αυτή η δράση μοιάζει πλέον σαν μία εξίσωση μονοπόλου! Ας υποθέσουμε προς στιγμή ότι η βαθμωτή καμπυλότητα της πολλαπλότητας R είναι θετική και ότι το ζεύγος (A, ψ) είναι μία λύση των εξισώσεων S-W. Τότε, το δεξί μέλος της εξίσωσης μηδενίζεται, ενώ στο αριστερό, κάθε ολοκληρώσιμη ποσότητα είναι θετική. Άρα, θα πρέπει να ισχύει για τη λύση: $\psi = 0$ και $F^+ = 0$. Αποδεικνύεται μάλιστα, πως αν η M έχει $b_2^+ > 1$ τότε μία διαταραχή της μετρικής θα διατηρήσει μεν το θετικό πρόσημο της R , αλλά θα αλλάξει το αυτο-δυϊκό μέρος της $F^+ = 0$ σε $F = 0$. Όμως, αυτό σημαίνει πως η μορφή συνοχής A είναι επίπεδη. Επομένως, κάτω από αυτές τις συνθήκες, η λύση (A, ψ) είναι η τετριμμένη. Ορίζοντας τις αναλλοίωτες S-W ως $a_i \in \mathbf{Q}$ που σχετίζονται μέσω κάποιας πολύπλοκης σχέσης με τις αναλλοίωτες του Donaldson $q_d(M)$ μπορούμε να κωδικοποιήσουμε την παραπάνω συλλογιστική διαδικασία, στο ακόλουθο θεώρημα του Witten:

Θεώρημα: Δεν υπάρχει 4-πολλαπλότητα με $b_2^+ > 1$ και με μη-τετριμμένες αναλλοίωτες Seiberg-Witten, η οποία να έχει μετρική θετικής βαθμωτής καμπυλότητας.

Το θεώρημα αυτό βρίσκει πολλές εφαρμογές στη συμπλεκτική γεωμετρία (π.χ πολλαπλότητα Kähler-Einstein) και κατ'έπекταση στα Χαμιλτονιανά δυναμικά συστήματα. Τέλος αξίζει να μνημονευθούν εδώ και οι αναλλοίωτες Gromov-Witten οι οποίοι είναι πάλι ρητοί αριθμοί που μετρούν υπό κάποιες προϋποθέσεις ψευδο-ολομορφικές καμπύλες πάνω σε συμπλεκτικές πολλαπλότητες (συγκεκριμένα στο χώρο moduli Deligne-Mumford $\overline{M}_{g,n}$). Σχετίζονται επίσης με την κβαντική συνομολογία και τη θεωρία χορδών τύπου IIA/IIB στις οποίες δύνανται να κατηγοριοποιήσουν πολύπλοκες πολλαπλότητες που προηγουμένως ήταν αδιαχώριστες από τοπολογική άποψη.

5.3. Θεωρία Chern-Simons

Αν θεωρήσουμε τώρα ένα σύνολο από πεδία $\{\varphi_i\}$ πάνω σε μία n -διάστατη Ρημάνεια πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με μία μετρική $g_{\mu\nu}$ και ένα σύνολο από πραγματικά συναρτησοειδή σε αυτά τα πεδία $S[\varphi_i]$ που θα παίζουν τον ρόλο της δράσης σε αυτή τη θεωρία. Επίσης, θεωρούμε ένα σύνολο τελεστών $O_\alpha(\varphi_i)$ που ουσιαστικά θα είναι αυθαίρετα συναρτησοειδή των πεδίων. Τότε έχουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός: Η αναμενόμενη τιμή κενού (VEV) του γινομένου μιας οικογένειας από τέτοιους τελεστές ορίζεται ως το παρακάτω ολοκλήρωμα τροχιάς:

$$\langle O_{a_1} O_{a_2} \dots O_{a_p} \rangle = \int D[\varphi_i] O_{a_1}(\varphi_i) O_{a_2}(\varphi_i) \dots O_{a_p}(\varphi_i) e^{-S[\varphi_i]}$$

Υπό το πρίσμα του παραπάνω ορισμού, μία κβαντική θεωρία πεδίου θεωρείται *τοπολογική* αν έχει την εξής χαρακτηριστική ιδιότητα:

$$\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \langle O_{a_1} O_{a_2} \dots O_{a_p} \rangle = 0$$

Δηλαδή, αν οι αναμενόμενες τιμές ενός συνόλου επιλεγμένων τελεστών παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από τις μεταβολές της μετρικής $g_{\mu\nu}$ στο M . Στην περίπτωση αυτή, οι τελεστές καλούνται *παρατηρησιακοί*. Υπάρχουν δύο τρόποι στην οποία μπορεί να οδηγηθεί κανείς στην ικανοποίηση της παραπάνω συνθήκης. Ας τις δούμε πιο αναλυτικά:

Η πρώτη αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου τόσο η δράση S όσο και οι τελεστές O_α είναι ανεξάρτητοι της μετρικής και ονομάζεται *τοπολογική κβαντική θεωρία πεδίου τύπου-Schwarz*. Μια ειδική περίπτωση αυτής της κατηγορίας θεωριών αποτελεί και η *θεωρία βαθμίδας Chern-Simons* όπου μας βοηθά μεταξύ άλλων να κατασκευάσουμε και μία ανεξάρτητη της μετρικής δράση. Σε αυτή τη θεωρία έχουμε μία διαφορίσιμη, 3-διάστατη, συμπαγή πολλαπλότητα M , μία απλή και συμπαγή ομάδα βαθμίδας G και μία ακέραιη παράμετρο k . Τότε, η δράση που αντιστοιχεί σε μία μορφή συνοχής βαθμίδας A (ως προς την ομάδα G πάντα) θα δίνεται ως:

$$S_{CS}[A] = \int_M \text{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

Οι παρατηρησιακοί τελεστές κατασκευάζονται απλούστερα, όπως για παράδειγμα από τελεστές που δεν εμπεριέχουν την μετρική $g_{\mu\nu}$. Ένα σημαντικό σύνολο τέτοιων παρατηρησιακών τελεστών στην θεωρία αυτή αποτελείται από το ίχνος της ολονομίας μιας μορφής συνοχής βαθμίδος A , σε κάποια αναπαράσταση R γύρω από έναν 1-βρόχο γ (ο κύκλος Wilson που ορίσαμε πιο πάνω):

$$\text{tr}_R \left(\text{Hol}_\gamma(A) \right) = \text{tr}_R \text{Pexp} \int_\gamma A$$

Τότε, οι αναμενόμενες τιμές κενού θα απαριθμούνται μέσω των αναπαραστάσεων R_i και των εμφυτεύσεων $\gamma_i: S^1 \rightarrow M$. Δηλαδή,

$$\left\langle \text{tr}_{R_1} \text{P}e^{\int_{\gamma_1} A} \dots \text{tr}_{R_n} \text{P}e^{\int_{\gamma_n} A} \right\rangle = \int [DA] \text{tr}_{R_1} \text{P}e^{\int_{\gamma_1} A} \dots \text{tr}_{R_n} \text{P}e^{\int_{\gamma_n} A} e^{\frac{ik}{4\pi} S_{CS}[A]}$$

Η μη-διαταραγμένη ανάλυση της θεωρίας βαθμίδος Chern-Simons δείχνει ότι οι αναλλοίωτες των παρατηρησιακών τελεστών $O_\alpha(\varphi_i)$ είναι ουσιαστικά αναλλοίωτες κόμβων και μάλιστα πολυωνυμικού τύπου (όπως το πολυώνυμο Jones), ενώ η αντίστοιχη διαταραγμένη θεώρηση οδηγεί σε ένα πλαίσιο που σχετίζεται με τις αναλλοίωτες Vassiliev, με τις οποίες θα ασχοληθούμε και αργότερα.

Η δεύτερη περίπτωση τοπολογικής κβαντικής θεωρίας πεδίου ονομάζεται *συνομολογική θεωρία τύπου Witten*. Εδώ έχουμε την ύπαρξη μιας απειροστής συμμετρίας δ που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\delta O_\alpha(\varphi_i) = 0$$

$$T_{\mu\nu}(\varphi_i) = \delta G_{\mu\nu}(\varphi_i)$$

όπου $T_{\mu\nu}(\varphi_i)$ θα είναι ο γνωστός από την Γενική Σχετικότητα τανυστής τάσης ενέργειας-ορμής και εδώ θα δίνεται ως:

$$T_{\mu\nu}(\varphi_i) = \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} S[\varphi_i]$$

Το γεγονός ότι η δ είναι βαθμωτή και ολική συμμετρία για τις παραπάνω εξισώσεις οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι μετασχηματισμοί των πεδίων είναι τέτοιοι έτσι ώστε $\delta S[\varphi_i] = 0$ και $\delta O_{a_i}(\varphi_i) = 0$. Τότε όμως για τις αναμενόμενες τιμές κενού θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left\langle O_{a_1} O_{a_2} \dots O_{a_p} \right\rangle &= -\int D[\varphi_i] O_{a_1}(\varphi_i) O_{a_2}(\varphi_i) \dots O_{a_p}(\varphi_i) T_{\mu\nu} e^{-S[\varphi_i]} \\ &= -\int D[\varphi_i] \delta \left(O_{a_1}(\varphi_i) O_{a_2}(\varphi_i) \dots O_{a_p}(\varphi_i) G_{\mu\nu} e^{-S[\varphi_i]} \right) = 0 \end{aligned}$$

και αυτό ακριβώς το γεγονός (δεδομένου ότι το μέτρο D , η δράση S είναι δ-αναλλοίωτη και οι παρατηρησιακοί τελεστές είναι ανεξάρτητοι της μετρικής) καθιστά την θεωρία τοπολογική σύμφωνα με τον ορισμό στην αρχή της ενότητας. Επίσης, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε μια πιο ευρεία κλάση τελεστών που ικανοποιούν την εξής σχέση:

$$\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} O_\alpha(\varphi_i) = \delta O_\alpha^{\mu\nu}(\varphi_i)$$

Ο κύριος αντιπρόσωπος των θεωριών τύπου Witten, είναι η *θεωρία Donaldson-Witten*, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως μια εκδοχή συστραμμένης $N = 2$ υπερσυμμετρικής θεωρίας Yang-Mills. Οι περισσότερες από αυτές τις τοπολογικές κβαντικές θεωρίες πεδίου αυτού του συνομολογιακού τύπου, πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση:

$$S[\varphi_i] = \delta \Lambda(\varphi_i)$$

όπου Λ κάποιο συναρτησοειδές. Η σχέση αυτή σημαίνει ότι οι τοπολογικοί παρατηρησιακοί τελεστές της θεωρίας (και συγκεκριμένα η συνάρτηση

διαμερισμού καθ'εαυτή) θα είναι ανεξάρτητες της τιμής της σταθεράς συζεύξεως. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την εξής VEV:

$$\langle O_{a_1}, O_{a_2}, \dots, O_{a_p} \rangle = \int D[\varphi_i] O_{a_1}(\varphi_i) O_{a_2}(\varphi_i) \dots O_{a_p}(\varphi_i) e^{-\frac{1}{g^2} S[\varphi_i]}$$

Αν εκτελέσουμε έναν μετασχηματισμό για τη σταθερά σύζευξης, έστω:

$$\frac{1}{g^2} \rightarrow \frac{1}{g^2} - \Delta$$

Τότε, μέχρι την πρώτη τάξη του Δ , θα είναι:

$$\langle O_{a_1}, O_{a_2}, \dots, O_{a_p} \rangle = \Delta \int D[\varphi_i] \{ O_{a_1}(\varphi_i) O_{a_2}(\varphi_i) \dots O_{a_p}(\varphi_i) \Lambda(\varphi_i) e^{-\frac{1}{g^2} S[\varphi_i]} \}$$

Οπότε, οποιοσδήποτε παρατηρησιακός τελεστής δύναται να υπολογιστεί τόσο στο ασθενές όριο της σταθεράς σύζευξης $g \rightarrow 0$, όσο και στο ισχυρό $g \rightarrow \infty$.

Το 1988, ο Witten έδειξε πως μπορεί κανείς να συνάγει τα πολυώνυμα Donaldson $q_d(M)$ ως συναρτήσεις συσχετισμού (correlation functions) σε μία BRST (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin) υπερσυμμετρική τοπολογική κβαντική θεωρία πεδίου. Η δράση σε αυτή τη θεωρία θα είναι:

$$S = \int_M d^4x \sqrt{g} \operatorname{tr} \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \varphi D_\mu D^\mu \lambda + i D_\mu \psi_\nu \chi^{\mu\nu} - i \eta D_\mu \psi^\mu \right. \\ \left. - \frac{i}{8} \varphi [\chi_{\mu\nu}, \chi^{\mu\nu}] - \frac{i}{2} \lambda [\psi_\mu, \psi^\mu] - \frac{i}{2} \varphi [\eta, \eta] - \frac{1}{8} [\varphi, \lambda]^2 \right\}$$

όπου $F_{\mu\nu}$ η καμπυλότητα της μορφής συνοχής A_μ , (φ, λ) πεδία χωρίς ιδιοστροφορμή τα οποία μηδενίζονται για μη-αναγωγίμες μορφές συνοχής και $(\eta, \psi_\mu, \chi_{\mu\nu})$ τα πεδία που περιέχουν τις συνιστώσες των 0-μορφών, 1-μορφών και αυτο-δυϊκών 2-μορφών αντίστοιχα.

Η επιλογή των πεδίων είναι εξαιρετικά σημαντική καθώς η anti-instanton εκδοχή ενός ελλειπτικού instanton συμπλόκου παραμόρφωσης

(που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του $\dim \mathbf{M}_d$) συμβαίνει να περιέχει ακριβώς αυτά τα πεδία. Δηλαδή, ακόμα και αν η S περιέχει μια μετρική g , οι συναρτήσεις συσχετισμού της (όπου $\{\cdot, \cdot\}$ οι BRST μεταθέτες):

$$S = \{Q, V\}$$

$$\frac{\delta S}{\delta g} \triangleq T = \{Q, V\}$$

θα είναι ανεξάρτητες αυτής της μετρικής. Δεν είναι τυχαίο που εδώ σχετίζονται και με τον τανυστή ενέργειας-ορμής. Η ανεξαρτησία αυτή, είναι που καθιστά και την S τοπολογική ως θεωρία πεδίου. Με τη θεωρία αυτή μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτές οι συναρτήσεις συσχετισμού είναι ανεξάρτητες από τη σύζευξη βαθμίδας και άρα υπολογίσιμες σε κάποιο μικρό όριο σύζευξης στο οποίο τα συναρτησιακά ολοκληρώματα κυριαρχούνται από τα (κλασικά) ελάχιστα της S , όπου για το A_μ δεν είναι τίποτε άλλο από τα instantons: $F_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}^*$. Αναπτύσσοντας τα πεδία γύρω από τα ελάχιστα αυτά (εώς κάποιους τετραγωνικούς όρους) και εκτελώντας μερικούς υπολογισμούς Γκαουσιανών ολοκληρωμάτων, υπολογίζουμε τις συναρτήσεις συσχετισμού. Πιο αναλυτικά, εάν $\langle P \rangle = \int D\mathbf{F} e^{-S} P(\mathbf{F})$ είναι μία συνάρτηση συσχετισμού, όπου \mathbf{F} μια συλλογή από πεδία στην S και $P(\mathbf{F})$ κάποιο πολώνυμο σε αυτά τα πεδία. Τότε, οι μηδενικές καταστάσεις στο ανάπτυγμα παραπάνω θα είναι εφαπτομένες στο χώρο moduli \mathbf{M}_d ! Άρα, αν η κατά $D\mathbf{F}$ ολοκλήρωση εκφραστεί ως ολοκλήρωμα επί των καταστάσεων, όλες οι μη-μηδενικές καταστάσεις ολοκληρώνονται πρώτες αφήνοντας πίσω μία πεπερασμένη διάστασης ολοκλήρωση επί $\dim \mathbf{M}_d$. Η Γκαουσιανή ολοκλήρωση αυτή θα είναι απλά ένα πηλίκο οριζουσών μεταξύ μποζονίων/φερμιονίων που η υπερσυμμετρία αναγκάζει να είναι ∓ 1 (καθώς οι ιδιοτιμές μποζονίων και φερμιονίων είναι ίσες κατά ζεύγη). Άρα τελικά,

$$\langle P \rangle = \int_{\mathbf{M}_d} P_n$$

με P_n μία n -διαφορική μορφή στο \mathbf{M}_d με $n = \dim \mathbf{M}_d$, και έτσι οδηγούμαστε κατά φυσικό τρόπο ξανά στα πολώνυμα Donaldson.

5.4. Ομολογία Floer και πολυώνυμο Jones

Έχουμε ήδη δει στην πρώτη ενότητα για τις εφαρμογές της θεωρίας κόμβων στη Φυσική του 19^{ου} αιώνα. Κάναμε επίσης μία νύξη για το πολυώνυμο Jones $V_L(t)$ ως πολυωνυμική αναλλοίωτη κόμβων και κρίκων αλλά και για τη θριαμβευτική χρήση του προς απόδειξη των εικασιών Tait. Το πολυώνυμο αυτό οφείλει την ύπαρξη του σε συγκεκριμένες αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης αλγεβρών von Neumann A_n . Φαίνεται μάλιστα, πως οι άλγεβρες αυτές είχαν ερευνηθεί από φυσική σκοπιά πολύ πριν τον Jones, για παράδειγμα στα μοντέλα Potts (πολυώνυμο Tutte-Whitney), στα μοντέλα 6-κόμβων (ice-type model) αλλά και στην ανάδειξη τοπολογικών μοντέλων προς τη διασύνδεση στατιστικής μηχανικής και ιδιοστροφορμής μέσα σε ένα πλαίσιο της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Το τελευταίο επιτυγχάνεται με τη μελέτη *ανιονίων* (anyons) και τη μεταστοιχείωση τους (transmutation) σε επιφάνειες τύπου Dirac (πρβλ. λήμμα ελαστικής λωρίδας των Dirac-Finkelstein-Rubinstein). Όλα αυτά αποδεικνύουν περίτρανα για ακόμη μία φορά, πως η συνδυαστική δομή πολλών μοντέλων στη στατιστική μηχανική έχει τοπολογικές απαρχές.

Ο Witten το 1988 κατάφερε να γενικεύσει το πολυώνυμο Jones και να το διατυπώσει με όρους από το βαρύ οπλοστάσιο της τοπολογικής κβαντικής θεωρίας πεδίου. Σημαντικό κίνητρο για αυτή την ανακάλυψη, ήταν μία νέα αναλλοίωτη ομολογίας για 3-πολλαπλότητες από τον Floer λίγο ενωρίτερα, ο οποίος χρησιμοποίησε και αυτός instantons και θεωρία βαθμίδας. Χονδρικά, ο Floer θεώρησε τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης f (που εξαρτάται από μια $SU(2)$ μορφή συνοχής A) κοντά στα κρίσιμα σημεία της. Ουσιαστικά όμως, αυτή η f είναι απλά μία συνάρτηση Chern-Simons που προκύπτει ολοκληρώνοντας τη 2^η χαρακτηριστική κλάση c_2 πάνω σε μία κλειστή τρι-πολλαπλότητα M . Έτσι, αν A είναι ο απειροδιάστατος χώρος όλων των μορφών συνοχής A , τότε θα έχουμε:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \ni A \rightarrow f(A) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

Χρησιμοποιώντας εδώ τη θεωρία Morse για την f , ο Floer καταλήγει σε νέες ομάδες ομολογίας $HF(M)$ για τη M . Λόγω της αμφότερης σχέσης που είχαν αυτές οι ομάδες με τη Φυσική προέκυψε γρήγορα το εξής ερώτημα:

Άραγε υπάρχει κάποια σύνδεση ανάμεσα στην ομολογία Floer και το πολυώνυμο Jones;

Ο Atiyah[22] τότε διαπίστωσε τις εξής κύριες ομοιότητες:

- Και οι δύο έννοιες αποτελούν τρισδιάστατες αναλλοίωτες
- Εξαρτώνται από ομάδες Lie (π.χ εν γένει $G = SU(N)$)
- Εξαρτώνται από τον προσανατολισμό του τρισδιάστατου χώρου (ενώ για παράδειγμα το πολυώνυμο Alexander, όχι)
- Το πολυώνυμο Jones σχετίζεται στενά με την $\pi_3(S^3) = \mathbf{Z}$, τον τόπο γέννησης των d-instantons.
(ενώ το πολυώνυμο Alexander με την $\pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$)

Έτσι, ο Witten προσπαθώντας να δώσει μια φυσική ερμηνεία στα αποτελέσματα του Donaldson, απάντησε καταφατικά στο παραπάνω ερώτημα. Ας δούμε περίπου πως:

Λόγω ανεξαρτησίας της δράσης από τη μετρική σε μια ΤΚΘΠ, η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος θα έχει μόνο μηδενικές ιδιοκαταστάσεις και ο χώρος Hilbert θα είναι συνήθως πεπερασμένης διάστασης. Γνωρίζουμε επίσης πως δεν υπάρχουν κατ'εξοχήν δυνάμεις (και άρα οι συμβατικές θεωρίες δυναμικής στερούνται εδώ νοήματος) αλλά ούτε και μετρήσεις εξ'αποστάσεως. Σε αντιδιαστολή όμως με τα παραπάνω, η ύπαρξη φαινομένων σήραγγας μεταξύ κενών και ψευδοκενών, δεν είναι τετριμμένη. Έστω τώρα, A μία $SU(2)$ -μορφή συνοχής και M μία κλειστή, συμπαγής 3-πολλαπλότητα. Η δράση που επέλεξε ο Witten για να καταλήξει στο πολυώνυμο Jones δεν ήταν άλλη από τη δράση Chern-Simons, δηλαδή (όπου g η σταθερά σύζευξης):

$$S = \frac{ik}{4\pi g^2} \int_M \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right), k \in \mathbf{Z}$$

και άρα, η συνάρτηση διαμερισμού για αυτή την ΚΘΠ θα είναι:

$$Z(M) = \int DA e^{-\frac{ik}{4\pi g^2} \int_M tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)}$$

η οποία θα είναι από μόνη της αναλλοίωτη για την M και καλείται *αναλλοίωτη κατά Witten*. Για να περάσουμε τώρα στη μελέτη των κόμβων πράττουμε τα εξής: Έστω C μία κλειστή καμπύλη εμφυτευμένη στη M έτσι ώστε να σχηματίζει έναν κόμβο K . Κάνοντας τότε μια παράλληλη μεταφορά της μορφής συνοχής A γύρω από τη C , κατασκευάζουμε τον τελεστή ολονομίας $PT(C)$, όπως ακριβώς κάναμε και στο φαινόμενο Aharonov-Bohm προηγουμένως. Με τη διαφορά όμως ότι πλέον έχουμε μία μη-Αβελιανή μορφή συνοχής και άρα για να προκύψει ένας τελεστής αναλλοίωτος κατά βαθμίδα πρέπει να πάρουμε τον βρόχο Wilson για μία συγκεκριμένη αναπαράσταση R του A :

$$W(R, C) = tr P e^{\int_C A}$$

Τότε, προκύπτει κατά φυσικό τρόπο η εξής συνάρτηση συσχετισμού για τον κόμβο K :

$$\langle W(R, C) \rangle = \frac{1}{Z(M)} \int DA W(R, C) e^{-\frac{ik}{4\pi g^2} \int_M tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)}$$

η οποία αποδεικνύεται πως πράγματι καθορίζει το πολυώνυμο Jones $V_K(t)$ για τον κόμβο. Επιπρόσθετα, αν είχαμε παραπάνω από μία καμπύλη C , π.χ C_1, \dots, C_p τότε θα είχαμε μία p συνιστώσα κρίκου L , του οποίου το πολυώνυμο Jones θα καθοριζόταν από όλες εκείνες τις συναρτήσεις συσχετισμού των $\#p$ βρόχων Wilson:

$$\begin{aligned} & \langle W(R_1, C_1) \dots W(R_p, C_p) \rangle \\ &= \frac{1}{Z(M)} \int DA W(R_1, C_1) \dots W(R_p, C_p) e^{-\frac{ik}{4\pi g^2} \int_M tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)} \end{aligned}$$

Ενδιαφέρον εδώ παρουσιάζει το γεγονός, πως αν επιστρέψει κανείς στην Αβελιανή περίπτωση, μπορεί να ανακτήσει τον αριθμό περιέλιξης του

Gauss! Αν για παράδειγμα, η A είναι απλά μία $U(1)$ -μορφή συνοχής, τότε η $S(A)$ θα είναι τετραγωνική ως προς την A , δηλαδή (για $g = 1$):

$$S(A) = \frac{ik}{4\pi} \int_M \text{tr}(A \wedge dA)$$

επομένως,

$$\begin{aligned} & \langle W(R_1, C_1) \dots W(R_p, C_p) \rangle \\ &= \frac{1}{Z(M)} \int DA W(R_1, C_1) \dots W(R_p, C_p) e^{-\frac{ik}{4\pi} \int_M \text{tr}(A \wedge dA)} \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα τώρα μπορεί πλέον να γραφτεί με συμπλήρωση τετραγώνου (λόγω της εκθετικής εξάρτησης μιας «γραμμής» Wilson στο A) ως ένα Γκαουσιανό ολοκλήρωμα. Έτσι, υπολογίζοντας το συναρτησιακό αυτό ολοκλήρωμα μέσω μιας συνάρτησης Green για $M = S^3$ πλέον, παίρνουμε:

$$\langle W(R_1, C_1) \dots W(R_p, C_p) \rangle = e^{\frac{i}{4k} \epsilon_{ijk} \sum_{l,m=1}^p n_l n_m \int_{C_l} dx^i \int_{C_m} dy^j \frac{(x-y)^k}{|x-y|^3}}$$

του οποίου πράγματι ο λογάριθμος δίνει τον αριθμό περιέλιξης Gauss, αποδεικνύοντας ξανά το βαθύ φυσικό του περιεχόμενο. Από την άλλη πλευρά, στη μη-Αβελιανή περίπτωση, μελετώντας το ασθενές όριο σύζευξης g (ή ισοδύναμα το όριο μεγάλου k) καταλήγουμε ξανά σε ένα τετραγωνικό συναρτησιακό ολοκλήρωμα Feynman. Από εδώ μπορούμε πλέον να συνάγουμε μία νέα διαφορική τοπολογική αναλλοίωτη της μορφής συνοχής A στην M , γνωστή και ως *αναλυτική στρέψη Ray-Singer* ή πιο απλά R-torsion από τον Reidemeister που την χρησιμοποίησε αρχικά για να κατηγοριοποιήσει όλους τους τρισδιάστατους φακοειδής χώρους (lens spaces). Πλέον, λόγω συμπαγούς εμφύτευσης, η αναζήτηση αναλλοιώτων για 3-πολλαπλότητες θα είναι ισοδύναμη με την αναζήτηση αναλλοιώτων για κόμβους.

6. Θεωρία Morse και Θεωρία Υπερχορδών

6.1. Ανισότητες Morse

Αν έχουμε μια συμπαγή πολλαπλότητα M χωρίς σύνορο και μία λεία συνάρτηση $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ τότε ανάλογα με το είδος των κρίσιμων σημείων, η θεωρία Morse επιτυγχάνει να τα συσχετίσει με την τοπολογία της M . Αυτό έχει ως συνέπεια την εύρεση πολλών συνομολογιακών δεδομένων που δύναται να χρησιμοποιηθούν ως τοπολογικές αναλλοίωτες. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιώντας απλές συναρτήσεις για τις οποίες τα κρίσιμα σημεία μπορούν να βρεθούν, παίρνουμε πληροφορίες για την τοπολογία του M αλλά και αντίστροφα, αν η συνάρτηση f τυγχάνει να είναι πολύπλοκη και η τοπολογία της M επαρκώς κατανοήσιμη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τοπολογία για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία. Ας ρίξουμε τώρα όμως μία πιο αναλυτική ματιά: Έστω f μία συνάρτηση Morse. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κρίσιμο σημείο της είναι μη-εκφυλισμένο. Δηλαδή, υπάρχει για αυτό το σημείο ο αντίστροφος πίνακας Hesse των δευτέρων παραγώγων, δηλαδή:

$$\forall p \in K_f = \{u \in M: df = 0\} \text{ έχουμε } \det H_{f(p)} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_p \right) \neq 0$$

Κάθε τέτοιο κρίσιμο σημείο p φέρει μαζί του έναν δείκτη λ_p που ορίζεται να είναι το πλήθος των αρνητικών ιδιοτιμών του πίνακα Hesse. Τότε, αντιστοιχούμε στην f την λεγόμενη σειρά Morse:

$$M_t(f) = \sum_{\text{όλα τα } p} t^{\lambda_p} = \sum_i m_i t^i$$

ενώ η τοπολογία της M θα προκύπτει από τη σειρά **Poincaré**:

$$P_t(M) = \sum_{i=0}^n \dim H^i(M; \mathbf{R}) t^i = \sum_{i=0}^n b_i t^i$$

Τότε, το θεμελιώδες θεώρημα Morse ισχυρίζεται ότι:

$$M_t(f) \geq P_t(M)$$

Το γεγονός αυτό έχει πολλές και εκπληκτικές συνέπειες. Η απλούστερη είναι οι σχέσεις: $m_i \geq b_i, \forall i$ που είναι γνωστές και ως ανισότητες Morse. Δηλαδή, το πλήθος των κρίσιμων σημείων με δείκτη i είναι κάτω φραγμένο από τους αριθμούς Betti!

6.2. Υπερσυμμετρική Κβαντομηχανική μέσω θεωρίας Morse

Το 1982, ο Witten κατασκεύασε μία κβαντομηχανική εκδοχή της θεωρίας Morse χρησιμοποιώντας τη θεωρία ομολογίας κατά Floer και το πολυώνυμο Jones, δίνοντας έτσι μία εναλλακτική κβαντομηχανική απόδειξη των ανισοτήτων του Morse. Ας δούμε χονδρικά πως:

Έστω ότι η Χαμιλτονιανή είναι η Λαπλασιανή κατά Hodge στις μορφές:

$$H = \bigoplus_{p \geq 0} \Delta_p = \bigoplus_{p \geq 0} (dd^* + d^*d)_p$$

Τότε, τα μποζόνια και οι υπερσυμμετρικοί φερμιονικοί τους σύντροφοι θα είναι οι χώροι H^B, H^F αντίστοιχα, που δημιουργούνται από τις άρτιες και περιττές μορφές:

$$\begin{aligned} H^B &= \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^{2p}(M) \\ H^F &= \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^{2p+1}(M) \end{aligned}$$

ενώ η υπερσυμμετρική άλγεβρα θα έχει ως γεννήτορες τους τελεστές:

$$\begin{aligned} Q_1 &= d + d^* \\ Q_2 &= i(d - d^*) \end{aligned}$$

Τότε, μπορούμε να εισάγουμε μία συνάρτηση Morse f στο μοντέλο χωρίς να αλλάξει η άλγεβρα αντικαθιστώντας όπου d το συζυγές $d_t = e^{-ft} d e^{ft}$. Πλέον, η απόδειξη των ανισοτήτων του Morse βασίζεται στην ανάλυση του φάσματος της καινούργιας Χαμιλτονιανής:

$$H_t = d_t d_t^* + d_t^* d_t = \bigoplus_{p \geq 0} \Delta_p(t)$$

Για να συμβεί όμως αυτό, χρειάζεται περισσότερη “φυσική” πληροφορία. Και εδώ ακριβώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν κβαντικά φαινόμενα σήραγγας μεταξύ των κρίσιμων σημείων της f . Έπειτα, θεωρούμε το $gradf$ ως διανυσματικό πεδίο στη M και μελετάμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες του, δηλαδή τις λύσεις $\gamma(t)$ της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d}{ds} \gamma(s) = -gradf(\gamma(s))$.

Όμως, για τη γενίκευση των αποτελεσμάτων σε χώρους απείρων διαστάσεων (όπως μας επιβάλλει μια ΚΘΠ), χρειάζεται κανείς την ομολογία Floer. Έστω λοιπόν μία συνάρτηση τύπου Chern-Simons:

$$f: A \rightarrow R$$

$$A \rightarrow f(A) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_M tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

Τότε, επειδή τα κρίσιμα σημεία της f θα δίνονται μέσω της εξωτερικής παραγώγου που δρα στο χώρο A των $SU(2)$ -μορφών συνοχής στη M , έπεται ότι αν το A είναι κρίσιμο σημείο τότε:

$$A_t = A + ta$$

άρα

$$f(A_t) = f(A) - \frac{t}{4\pi^2} \int_M tr(F(A) \wedge a) + \dots$$

οπότε,

$$dF(A) = -\frac{F(A)}{4\pi^2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης είναι οι *επίπεδες* μορφές συνοχής στη M και αφού $\pi_1(M) \neq 0$, οι μορφές αυτές στη M θα είναι μη-τετριμμένες, αφού θα έχουν μη-μηδενική ολονομία γύρω από μία μη-τετριμμένη κλειστή καμπύλη. Η ολονομία κάθε επίπεδης μορφής συνοχής θα είναι επομένως ένα στοιχείο της $SU(2)$ που παραμετροποιείται από μία καμπύλη στη M . Και άρα, θα αποτελέσει μία αναπαράσταση της $\pi_1(M)$ στη $SU(2)$, ενώ ο χώρος όλων των μη-ισοδυνάμων τέτοιων αναπαραστάσεων θα είναι ο χώρος πηλίκου:

$$\text{Hom}(\pi_1(M), SU(2)) / \text{Ad}(SU(2))$$

Έχοντας βρει πλέον ένα κρίσιμο σημείο, η θεωρία Morse απαιτεί να υπολογίσουμε το δείκτη του και κατά συνέπεια πρέπει να υπολογίσουμε την Χεσσιανή της f . Όμως, επειδή βρισκόμαστε σε άπειρες διαστάσεις, ο δείκτης πιθανόν να είναι άπειρος αφού ο τελεστής θα είναι μη-φραγμένος από κάτω. Σε αυτό το σημείο, ο Floer, σκέφτηκε ότι ουσιαστικά χρειαζόμαστε μόνο έναν “σχετικό δείκτη” που μπορεί να υπολογιστεί από τη φασματική ροή και το θεώρημα δείκτη των Atiyah-Singer της θεωρίας-K.

Έστω δύο κρίσιμα σημεία A_p και A_q στο A . Τα ενώνουμε τότε με μία διαδρομή $A(t)$ μέσω της μεθόδου καθόδου: $\frac{d}{dt} A(t) = -\text{grad}f(A(t))$ όπου ο τελεστής grad θα δρα στον χώρο A . Έτσι, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ομολογικό σύμπλοκο αλλά και τις ομολογικές ομάδες $HF_p(M)$ ακολουθώντας. Όμως, η τοπολογία εδώ μας δείχνει πως ο σχετικός δείκτης Morse της f είναι καλά ορισμένος μόνο για $\text{mod}8$. Το γεγονός ότι οι $HF_p(M)$ είναι $\text{graded mod}8$ συνεπάγεται ότι υπάρχουν μόνο οκτώ ομολογιακές ομάδες με $p \in [0,7]$.

Επιστρέφοντας τώρα για λίγο στους κόμβους, αναφέρουμε πως ο Vassiliev το έτος 1990, κατασκεύασε μία τεράστια κλάση από αναλλοίωτες κόμβων χρησιμοποιώντας τη θεωρία ιδιομορφιών. Αρχικά, πρέπει να θυμηθούμε ότι ένας κόμβος είναι απλά μία λεία εμφύτευση $f: S^1 \rightarrow R^3$ και επομένως, $f \in F = \text{Map}(S^1, R^3)$. Όμως, αφού μία απεικόνιση κόμβου δεν επιτρέπεται να είναι ούτε ιδιάζουσα ούτε να τέμνει τον εαυτό της, έπεται ότι δεν είναι και κάθε στοιχείο του χώρου F κόμβος. Έστω λοιπόν, $\Sigma < F$ ο υπόχωρος που περιέχει είτε τις τομές είτε τις ιδιάζουσες αυτές απεικονίσεις. Τότε, το συμπλήρωμα $F \setminus \Sigma$ θα είναι ο υπόχωρος των κόμβων. Επειδή τώρα, κάθε στοιχείο του Σ μπορεί μέσω μίας μονοπαραμετρικής παραμόρφωσης να γίνει λείο, η Σ θα είναι μία υπερεπιφάνεια στο F η οποία ονομάζεται *διακρίνουσα*.

Άρα, η διακρίνουσα θα τέμνει το $F \setminus \Sigma$ σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες. Προφανώς, όλοι οι κόμβοι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα δύνανται να παραμορφωθούν ο ένας στον άλλο και άρα είναι *ισοτοπικοί*. Έτσι, κάτω από αυτή την έννοια ισοδυναμίας, κάθε αναλλοίωτη κόμβου ορίζεται να είναι μία συνάρτηση η οποία θα είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $F \setminus \Sigma$. Καθίσταται έτσι σαφές ότι η κατασκευή όλων των αριθμητικών αναλλοιώτων κόμβων ισοδυναμεί με την ανίχνευση όλων αυτών των συναρτήσεων στο $F \setminus \Sigma$ που έχουν την παραπάνω ιδιότητα. Όμως, λόγω

της τοπολογίας, η δεύτερη διαδικασία δεν είναι τίποτε άλλο παρά η μηδενική συνολογία της $F \setminus \Sigma$, δηλαδή:

$$H^0(F \setminus \Sigma) = \text{ο χώρος όλων των αναλλοιώτων κόμβων}$$

Έτσι, ο Vassiliev δίνει έναν τρόπο υπολογισμού των περισσοτέρων από αυτών -αν όχι όλων- σε πλαίσια στενά συνυφασμένα με τη φυσική των κβαντικών αναλλοιώτων πλεξίδων.

6.3. Δυϊκότητες, κατοπτρική συμμετρία και πολλαπλότητες Calabi-Yau

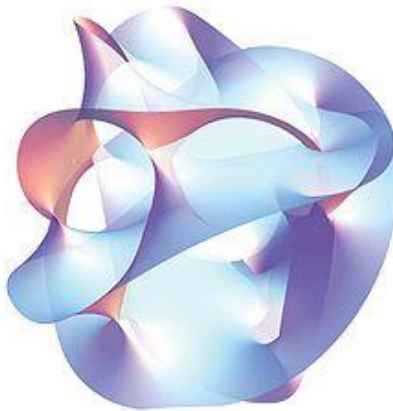
Η τοπολογία διεισδύει στη θεωρία Χορδών κατά ένα μάλλον προφανή τρόπο, καθώς μία κινούμενη χορδή “σαρώνει” στο πέρασμα της μία διδιάστατη κοσμική επιφάνεια. Συμβαίνει δε, στην κβαντομηχανική όλες αυτές οι επιφάνειες να πρέπει να προστεθούν μαζί ανεξαρτήτως της τοπολογίας τους. Αυτό οδηγεί σε μία έκφραση του Polyakov, για τη συνάρτηση διαμερισμού μιας μποζονικής χορδής (όπου ή αθροισμα γίνεται πάνω σε όλα τα γένη p των επιφανειών Riemann Σ):

$$Z = \sum_p \int_g Dg D\varphi e^{-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \langle \partial\varphi, \partial\varphi \rangle_g} = \sum_{p=0}^{\infty} Z_p$$

με $\varphi = \varphi^\mu(\chi^1, \chi^2)$, $\mu = 1, 2, \dots, d$ η θέση της χορδής ως εμφύτευση του Σ στο d -διάστατο χωρόχρονο M .

Είναι πλέον γνωστό (χάρη στην παρατήρηση του Veneziano για τη σχέση της συναρτήσεως Βήτα του Euler με το πεδίο dilaton) πως η θεωρία αυτή είναι συμμορφικά αναλλοίωτη μόνο για $d = 26$. Αν βέβαια, προστεθούν και τα φερμιόνια τότε η “κρίσιμη” αυτή διάσταση αλλάζει λόγω υπερσυμμετρίας σε $d = 10$. Η θεωρία Χορδών είναι επίσης μία διδιάστατη και συμμορφικά αναλλοίωτη θεωρία πεδίου (CFT) και από τον καιρό της αξιωματικοποίησης της από τον Segal, σχετίζεται με πολλές σημαντικές δομές από τη θεωρία αναπαραστάσεων απειροδιάστατων ομάδων όπως τις $LG = \text{Map}(S^1, G)$ και $\text{Diff}(S^1)$, τις άλγεβρες Kac-Moody και τις κβαντικές ομάδες.

Με την εισαγωγή της Υπερσυμμετρίας στις εξισώσεις της, το 1980 χάρη στις εργασίες των Green, Schwarz και Witten, η θεωρία χορδών απέκτησε μία ιδιαίτερη θέση στη σύγχρονη φυσική υποατομικών σωματιδίων. Και αυτό γιατί κατάφεραν να διακρίνουν μόλις 5 από τα απειρά δυνατά είδη θεωριών χορδών (πρόβλημα του τοπίου) μέσω ενός μηχανισμού διαγραφής ανωμαλιών βαθμίδας. Εδώ ως ανωμαλία εννοείται ένα αυθαίρετο σπάσιμο συμμετρίας βαθμίδος όταν επιχειρηθεί η σύζευξη ενός πεδίου βαθμίδας με χειρόστροφα φερμιόνια. Αυτές οι υπερσυμμετρικές, 10-διάστατες θεωρίες ονομάζονται αντίστοιχα: *I*, *IIA*, *IIB*, $E_8 \times E_8$ ετεροτική, $SO(32)$ ετεροτική. Το χαμηλό ενεργειακό όριο της θεωρίας Υπερχορδών πλέον, αυτοσκοπεύει στο να αποτελέσει μία συμβατική ΚΘΠ που θα δύναται να περιγράψει όλες τις γνωστές μέχρι τώρα αλληλεπιδράσεις του Σύμπαντος, συμπεριλαμβανομένου και της βαρύτητας (π.χ κβαντική βαρύτητα), οδηγούμενοι έτσι στη Μεγάλη Ενοποιημένη Θεωρία, κοινώς GUT. Από αυτές τις 10 διαστάσεις, μόνο οι 4 είναι άμεσα παρατηρήσιμες, ενώ οι υπόλοιπες 6 φαίνεται να αποτελούν ένα μικρό (μικρό ως προς τη κλίμακα των χορδών) και συμπαγή 6-διάστατο χώρο, έστω M_6 .



Την επιλογή για αυτόν τον χώρο αποτελεί μία 3-διάστατη μιγαδική πολλαπλότητα Calabi-Yau, η οποία είναι μία πολλαπλότητα **Kähler** με ομάδα ολονομίας που περιέχεται στην $SU(3)$. Τέτοιου είδους πολλαπλότητες, σχετίζονται άμεσα με μία σημαντική έννοια της αλγεβρικής γεωμετρίας που καλείται “κατοπτρική συμμετρία”. Η κατοπτρική συμμετρία αναφέρεται στην ιδιότητα των πολλαπλοτήτων Calabi-Yau να υπάρχουν ως δυϊκά ζεύγη, για τα οποία αρχικά δημιουργήθηκε η υπόθεση πως δίνουν αμιγώς ισοδύναμες θεωρίες χορδών. Τα ζεύγη αυτά καλούνται αντίστοιχα *κατοπτρικές πολλαπλότητες* (mirror manifolds) και η συμμετρία μεταξύ τους μπορεί να εννοηθεί εύκολα ως η διαδικασία ενός συγκεκριμένου μετασχηματισμού.

Μάλιστα, είναι δυνατόν ένα πρόβλημα (για παράδειγμα η ανεύρεση του πλήθους n καμπυλών συγκεκριμένου βαθμού d και γένους g) πάνω σε μία πολλαπλότητα Calabi-Yau, να επιλύεται ευκολότερα και ισοδυνάμως στη δυϊκή. Έστω M, N Calabi-Yau μιγαδικές πολλαπλότητες με $\dim_{\mathbb{C}} M = \dim_{\mathbb{C}} N = 3$ και αριθμούς Hodge της M :

$$h^{(p,q)}(M) = \dim H_{\bar{\partial}}^{(p,q)}(M) = \dim H^q(M; \Omega^p)$$

όπου $H_{\bar{\partial}}^{(p,q)}$ οι ομάδες συνολογίας Dolbeault και Ω^p οι ολομορφικές p -μορφές φυλλοποιήσεων στη M . Τότε, συμβαίνει να έχουμε ανάκλαση ως προς τη διαγώνιο του “διαμαντιού” Hodge που παράγεται από τους $h^{(p,q)}$, δηλαδή:

$$h^{(p,q)}(M) = h^{(n-p,q)}(M)$$

Όμως, αυτή η ανακλαστική ιδιότητα των αριθμών Hodge, δεν επαρκεί για να χαρακτηρίσουμε τα M, N δυϊκά. Πρέπει επίσης να αποδειχθεί ότι οι αντίστοιχες σύμμορφες θεωρίες πεδίου τους είναι ίδιες. Κατά το 1994, βρέθηκαν και άλλα είδη δυϊκότητων. Οι Montonen και Olive εμπνευσμένοι από την ημικλασική ανάλυση των δυονίων σε πεδία βαθμίδας, πρότειναν μία δυϊκότητα ανάμεσα στα μαγνητικά μονόπολα και στα πεδία βαθμίδας. Έστω g η σύζευξη του πεδίου βαθμίδας και V η αναμενόμενη τιμή κενού για ένα πεδίο Higgs. Τότε, ένα δυόνιο με κβαντικούς αριθμούς (n, m) θα έχει μάζα:

$$M^2 = V^2 \left(n^2 + \frac{16\pi^2}{g^4} m^2 \right)$$

Αν τώρα εκτελέσουμε τους μετασχηματισμούς:

- $g \rightarrow \frac{1}{g}$
- $n \leftrightarrow m$
- $V \rightarrow \frac{4\pi V}{g^2}$
- $G \rightarrow G^*$ (την ομάδα βαθμίδας με δυϊκό βάρος πλέγματος)

τότε η πολλαπλότητα M παράμενει αναλλοίωτη! Οι Montonen-Olive τότε είκασαν πως οι δύο ΚΘΠ αποτελούσαν απλά δυϊκές όψεις μιας ενιαίας κβαντικής θεωρίας για τα δυόνια. Αυτό ήταν πολύ ελκυστικό ως σκέψη,

καθώς η εναλλαγή μεταξύ g και $\frac{1}{g}$ είναι ουσιαστικά μια εναλλαγή ισχυρούς και ασθενούς σύζευξης. Οπότε, ο εύκολος υπολογισμός στο ασθενές όριο θα συνεπαγόταν αυτόματα την πλήρη γνώση για το αντίστοιχο ισχυρό. Έτσι, σε μία υποψήφια θεωρία όπως η $N = 2$ SUSY θεωρία βαθμίδας, το ηλεκτρικό και μαγνητικό φορτίο καθώς και η γωνία διάσπασης θ της συνδυασμένης συμμετρίας φορτίου-χωροαντιστροφής CP για το πλέγμα του δυονίου, μπορούν να συγχωνευθούν σαν μία μιγαδική μεταβλητή, ως εξής:

$$e + i\mu = e_0(n + m\tau)$$

όπου $\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2}$. Επιπροσθέτως, η γωνία θ επιτρέπει την εναλλαγή της \mathbf{Z}_2 συμμετρίας να γενικευτεί στην $SL(2, \mathbf{Z})$ με τους μετασχηματισμούς **Möbius**. Εν γένει, στη θεωρία υπερχορδών θεωρεί κανείς πως η τελευταία αυτή συμμετρία μαζί με την κατοπτρική είναι απλά εκφάνσεις χαμηλής ενέργειας μιας τρόπον τινά πλουσιότερης συμμετρίας. Συγκεκριμένα ζεύγη από τις πέντε βασικές θεωρίες Υπερχορδών υποχρεώνονται να είναι δυϊκές η μία ως προς την άλλη. Ίσως μάλιστα αυτές οι πέντε θεωρίες να αποτελούν διαφορετικές εκδοχές μιας ενιαίας 7-διάστατης θεωρίας υπερεπιφανειών d -βρανών (άρα σύνολο 11-διάστασεις), γνωστή και ως θεωρία M . Η θεωρία αυτή παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον από άποψη Μαθηματικών καθώς εδώ η τοπολογική φύση του χωροχρόνου σχετίζεται στενά με τον κλάδο της μη-μεταθετικής γεωμετρίας του Connes.

7. Επίλογος

Τον αιώνα που μας πέρασε, αμέσως μετά τις επιτυχίες της κβαντομηχανικής και της σχετικότητας, η κβαντική θεωρία πεδίου αντιμετώπισε μερικά μαθηματικά εμπόδια εξαιρετικής δυσκολίας. Η προσπάθεια της επιστημονικής κοινότητας να τα υπερβεί οδήγησε στη δημιουργία του κλάδου της αξιωματικής κβαντικής θεωρίας πεδίου. Η κεντρική ιδέα σε αυτή την κατεύθυνση ήταν να προσεγγιστεί κάθε πρόβλημα με τα πιο σύγχρονα εργαλεία που ήταν διαθέσιμα στο οπλοστάσιο των Μαθηματικών και δη και της ανάλυσης. Είναι πλέον αδιαμφισβήτητο το γεγονός πως τα προβλήματα αυτά φωτίζονται ακόμη περισσότερο αν χρησιμοποιηθούν επιπροσθέτως έννοιες της διαφορικής τοπολογίας. Ένα παράδειγμα είναι οι εφαρμογές των τοπολογικών αναλλοιώτων στις υποψήφιες θεωρίες κβαντικής βαρύτητας που ενδεχομένως να οδηγήσουν τη Φυσική σε μία Μεγάλη Ενοποιημένη Θεωρία (GUT) πέρα από το Καθιερωμένο Μοντέλο. Το πραγματικά αξιοσημείωτο όμως εδώ είναι πως δεν επωφελήθηκε μόνο η Φυσική από τα Μαθηματικά αλλά και το αντίστροφο, πράγμα σπάνιο για την ιστορικά παράλληλη πορεία των δύο κλάδων. Πράγματι, η θεωρία Yang-Mills αποτέλεσε τα τελευταία χρόνια την πηγή για μία πληθώρα αποτελεσμάτων στην τετραδιάστατη διαφορική γεωμετρία και τοπολογία. Πρέπει λοιπόν η υγειής αυτή αλληλεπίδραση προς την από κοινού επίλυση των προβλημάτων της επιστήμης να συνεχιστεί σε όλα τα επίπεδα και γιατί όχι, να είναι αυτή η συλλογική προσπάθεια σε πείσμα της εξειδίκευσης που θα παίζει τον κυρίαρχο ρόλο σε κάθε μελλοντική μας έρευνα.

Βιβλιογραφία

1. Listing J. B
Vorstudien zur Topologie, Goettinger Studien, 811-875 (1847)
2. Euler L.
Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 8, 128-140 (1736)
3. Gauss C. F
Zur mathematischen theorie der electrodynamischen Wirkungen (1833), Werke. Koeniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen, 5, p. 605, (1877)
4. Thomson W. H (Lord Kelvin)
On vortex motion, Trans. Roy. Soc. Edin., 25, 217-260 (1869)
5. Tait P. G
Scientific papers (On knots I, II, III) 273-437, Cambridge University Press, (1898)
6. Jones V. F. R
A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras,
Bull. Amer. Math. Soc. 12, 103-111 (1985)
7. Lambropoulou S., Rourke C.
Markov's Theorem for 3-manifolds, Topology and its Applications 78 (1997) 95-112
8. Schwarzschild K. Uber das Gravitationsfeld eines Masses nach der Einsteinschen Theorie,
Sitzungsberichte Koeniglich Preuss. Akad. Wiss. Physik-Math. Kl., 189-196 (1916)
9. Dirac P. A. M
Quantised singularities in the electromagnetic field, Proc. Roy. Soc. Lond. A133, 60-72 (1931)
10. Chandrasekhar S.
The maximum mass of ideal white dwarfs, Astrophys. J. 74, 81-82 (1931)
11. Oppenheimer J. R., Snyder H.
On continued gravitational contraction, Phys. Rev, 56, 455-459 (1939)
12. Penrose R.
Gravitational collapse and space-time singularities, Phys. Rev. Lett. 14, 57-59 (1965)
13. Hawking S.W, Ellis G. F. R.
The large scale structure of space-time, Cambridge University Press (1973)
14. Ehrenberg W., Siday R.E
The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics (1949)
15. Aharonov Y., Bohm D.
Significance of electromagnetic potentials in quantum theory (1959)
Further Considerations on Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory (1961)

16. Belavin A. , Polyakov M., Schwarz A., Tyupkin Y.
Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations, Phys Lett. 59B, 85-87, (1975)
17. 't Hooft G.
Magnetic monopoles in unified gauge theories, Nucl. Phys. B79, 276-284 (1974)
18. Polyakov A. M.
Spectrum of particles in the quantum field theory, JETP Lett. 20, 194-195 (1974)
19. Donaldson S. K
An application of Gauge Theory to Four Dimensional Topology, Jour. Diff. Geom. 18, 279-315 (1983)
20. Freedman M. H
The topology of 4-dimensional manifolds, Jour. Diff. Geom. 17, 357-453 (1982)
21. Rokhlin V. A
New results in the theory of 4 dimensional manifolds, Dok. Akad. Nauk USSR 84, 221-224 (1952)
22. Atiyah M.F
New invariants of 3 and 4 dimensional manifolds,
Symposium on the mathematical heritage of H.Weyl, May 1987