

Εισαγωγή

Η Θεωρία Κόμβων ξεκίνησε με τις εργασίες του C. F. Gauss, ο οποίος εισήγαγε ένα ολοκλήρωμα για τον υπολογισμό του αριθμού συνέλιξης δύο κλειστών καμπυλών στο χώρο. Το ενδιαφέρον για τη Θεωρία Κόμβων προήλθε όμως ουσιαστικά από τον κλάδο της Χημείας. Στα τέλη του 19ου αιώνα, υπήρχε η πεποίθηση ότι όλος ο φυσικός χώρος περιείχε ύλη, η οποία ονομαζόταν *αιθέρας*. Ο Λόρδος Kelvin προσπαθώντας να ταξινομήσει όλα τα στοιχεία της φύσης, υπέθεσε ότι τα άτομα κινούνταν σε τροχιές κόμβων μέσα στον αιθέρα και ότι διαφορετικοί κόμβοι αντιστοιχούσαν σε διαφορετικά άτομα. Οι Tait και Little εργάστηκαν στην ταξινόμηση των κόμβων σε μία προσπάθεια ταξινόμησης των στοιχείων. Μετά από την ανακάλυψη της δομής των μορίων, οι χημικοί έπαψαν να ενδιαφέρονται για τη Θεωρία Κόμβων, η οποία και έγινε αντικείμενο των τοπολόγων στις αρχές του 20ου αιώνα. (Dehn, Reidemeister, Seifert, Poincare, Alexander).

Το βασικό πρόβλημα στη Θεωρία Κόμβων, το οποίο παραμένει ανοικτό, είναι η ταξινόμηση των κόμβων ως προς σχέση ισοδυναμίας την ισοτοπία τους στο χώρο. Για τον σκοπό αυτό απαιτείται η εύρεση μίας πλήρους αναλλοίωτης κόμβων, δηλαδή μίας «συνάρτησης» η οποία σε διαφορετικούς κόμβους θα αντιστοιχεί διαφορετικές τιμές. Τα τελευταία χρόνια, η ανακάλυψη μιας ισχυρής αναλλοίωτης, του πολυωνύμου Jones (1984) έχει δώσει νέα ώθηση στο πρόβλημα της ταξινόμησης.

Η Θεωρία Γραφημάτων θεωρείται ότι αρχίζει με το άρθρο του L. Euler "Οι

επτά γέφυρες του Koenigsberg", το οποίο δημοσιεύτηκε το 1736. Η χαρακτηριστική του Euler, η οποία συνδέει τον αριθμό των κορυφών, των πλευρών και των τριγώνων σε ένα κυρτό πολύεδρο, μελετήθηκε και γενικεύτηκε από τους Cauchy και L' Huillier και βρίσκεται στη βάση της Τοπολογίας. Περίπου έναν αιώνα αργότερα, ο Cayley ασχολήθηκε με τη μελέτη μίας ειδικής κατηγορίας γραφημάτων, τα δένδρα. Τα αποτελέσματα του Cayley συνδέθηκαν με την μελέτη της χημικής σύνθεσης. Έτσι, αρκετοί από τους όρους που χρησιμοποιούνται στη Θεωρία Γραφημάτων προέρχονται από αυτή την σύνδεση των Μαθηματικών και της Χημείας. Αργότερα, στα μισά του 19ου αιώνα, η μελέτη της Τοπολογίας έδωσε νέα ώθηση στη Θεωρία Γραφημάτων μέσα από τις εργασίες των Jordan, Kuratowski και Whitney.

Οι δύο αυτοί τομείς των μαθηματικών είχαν στην ανάπτυξή τους μικρή σχέση μεταξύ τους. Σχετικά πρόσφατα αναπτύχθηκε μία νέα περιοχή έρευνας, η οποία τις συνδέει. Το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα διατυπώθηκε από τον Conway και αποδείχθηκε από τους Conway και Gordon το 1983, και αφορά στην ύπαρξη κρίκων και κόμβων στα πλήρη γραφήματα K_6 και K_7 (Θεώρημα 2.10). Έκτοτε διατυπώθηκαν αρκετά αποτελέσματα που σχετίζονται με το βασικό αυτό θεώρημα. Τα παραπάνω έχουν βρει σημαντικές και ενδιαφέρουσες εφαρμογές στην Στερεοχημική Τοπολογία.

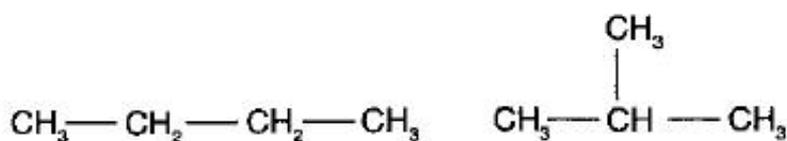
Ο Walba εισήγαγε το 1983 τον όρο Στερεοχημική Τοπολογία για να αναφερθεί στη σύνθεση, τον χαρακτηρισμό και την ανάλυση μοριακών δομών οι οποίες είναι τοπολογικά σύνθετες. Δύο ερωτήματα που προκύπτουν από την Στερεοχημική Τοπολογία και ενδιαφέρουν την Τοπολογία είναι τα εξής:

1. πότε μια εμφύτευση ενός γραφήματος δεν μπορεί να ισοτοπηθεί σε μία άλλη εμφύτευση του ίδιου γραφήματος,
2. η εύρεση εκείνων των ιδιοτήτων των εμφυτευμένων γραφημάτων, οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες μετά από ισοτοπίες του γραφήματος.

Για ένα συγκεκριμένο μόριο οι χημικοί ενδιαφέρονται για την εύρεση άλλων

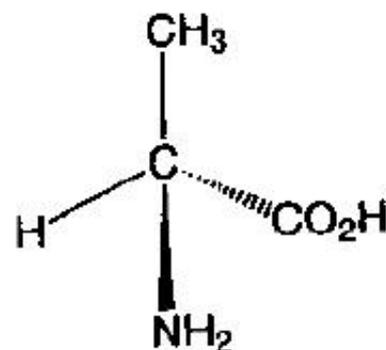
μορίων τα οποία σχετίζονται δομικά με το αρχικό. Τέτοια μόρια ονομάζονται *ισομερή* του αρχικού. Υπάρχουν τρεις κατηγορίες ισομερών από την χημική, γεωμετρική και τοπολογική άποψη:

- *Δομικά ισομερή (structural isomers)* είναι δύο μόρια τα οποία έχουν τον ίδιο μοριακό τύπο αλλά αναπαρίστανται από διαφορετικό μοριακό γράφημα. Στο σχήμα βλέπουμε δύο ισομερή αυτής της κατηγορίας, το βουτάνιο και το ισοβουτάνιο.



Σχήμα 1: Παράδειγμα δομικών ισομερών

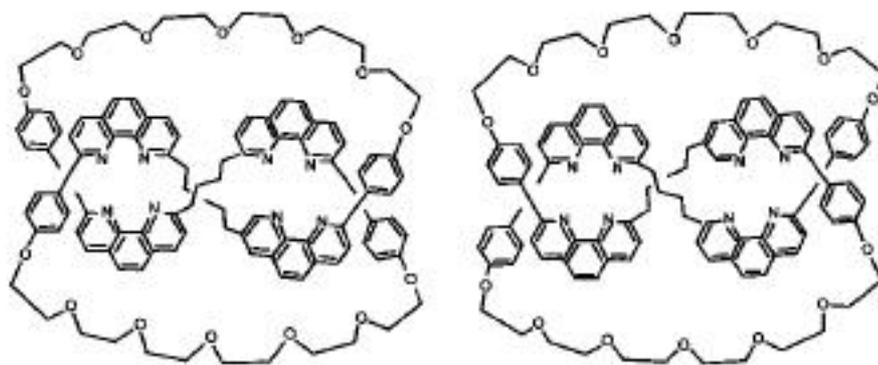
- *Γεωμετρικά (rigid) στερεοί* ίδιο αφηρημένο γράφημα, αλλά να υπερτεθεί επί του άλλου



Σχήμα 2: Παράδειγμα γεωμετρικών ισομερών

Στο σχήμα απεικονίζεται ένα ζεύγος γεωμετρικών ισομερών: το μόριο *L*-αλανίνη (στο αριστερό μέρος) και το μόριο *D*-αλανίνη. Το ένα μόριο αποτελεί κατοπτρική εικόνα του άλλου, και στον τρισδιάστατο χώρο οι κορυφές των γραφημάτων αντιστοιχούν στις κορυφές ενός κανονικού τετραέδρου. Στο σχήμα, τα γραμμοσκιασμένα τμήματα δηλώνουν τις πλευρές του γραφήματος που βρίσκονται στο πίσω μέρος του επιπέδου,

τα μαύρα τμήματα τις πλευρές που βρίσκονται στο εμπρός μέρος του και οι απλές πλευρές αντιστοιχούν στις πλευρές που βρίσκονται στο επίπεδο. Παρατηρούμε ότι, αν τα γραφήματα αυτά ήταν «ελαστικά» το ένα θα



Σχήμα 3: Παράδειγμα τοπολογικών στερεοϊσομερών

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Τα τοπολογικά στερεοϊσομερή ενός μορίου είναι υποσύνολο των γεωμετρικών στερεοϊσομερών: αν ένα γράφημα δεν μπορεί να μετασχηματιστεί ώστε να προκύψει ένα άλλο, τότε προφανώς δεν μπορεί να υπερτεθεί επί του άλλου. Πολλοί χημικοί δεν διαχωρίζουν τα δύο αυτά είδη ισομερών. Έτσι, ορίζουν ένα ζευγάρι μορίων να αποτελούν *στερεοϊσομερή*, αν έχουν ίδιο αφηρημένο γράφημα αλλά το ένα δεν μπορεί να αλλάξει χημικά ώστε να προκύψει το άλλο.

Μία αξιοσημείωτη περίπτωση στερεοϊσομερών μπορεί να προκύψει από ένα ζευγάρι εμφυτευμένων γραφημάτων, τα οποία αποτελούν το ένα κατοπτρική εικόνα του άλλου. Ένα μόριο το οποίο είναι διαφορετικό από την κατοπτρική του εικόνα ονομάζεται *μη αμφίχειρο (chiral)*, ενώ στην αντίθετη περίπτωση *αμφίχειρο (achiral)*. Ένα ζεύγος μη αμφίχειρων μορίων που το ένα αποτελεί κατοπτρική εικόνα του άλλου ονομάζονται *εναντιομερή*.

Πρώτος ο Pasteur εισήγαγε την ιδέα της μοριακής αμφιχειρίας. Το 1848 παρατήρησε ότι οι κατοπτρικές εικόνες των κρυστάλλων ταρταρικού οξέος έστρεφαν το πολωμένο φως σε διαφορετικές διευθύνσεις. Τα κύματα μίας μη πολωμένης δέσμης φωτός δεν κινούνται όλα στο ίδιο επίπεδο. Αν μιά δέσμη φωτός όμως περάσει μέσα από ένα φίλτρο πόλωσης, όλα τα κύματα της δέσμης κινούνται σε παράλληλα επίπεδα. Όταν πολωμένο φως περάσει μέσα από ένα διάλυμα που περιέχει το ένα μόνο εναντιομερές ενός μη αμφίχειρου μορίου, τα επίπεδα των κυμάτων του φωτός θα στραφούν όλα προς τα δεξιά ή όλα προς τα αριστερά. Αν το ένα εναντιομερές στρέφει πάντα το πολωμένο φως προς τα δεξιά, κάτω από τις ίδιες πειραματικές συνθήκες, το άλλο εναντιομερές θα στρέφει το πολωμένο φως προς τα αριστερά. Για παράδειγμα, τα μόρια *L*-αλανίνη και *D*-αλανίνη αποτελούν εναντιομερή.

Για τη Χημεία αυτός ο τύπος στερεοϊσομερών είναι ιδιαίτερα σημαντικός. Γενικά δύο εναντιομερή αντιδρούν με παρόμοιο τρόπο με ένα άλλο αμφίχειρο μόριο, αλλά διαφορετικά με ένα τρίτο μη αμφίχειρο μόριο. Επίσης έχουν διαφορετικές φυσικές ιδιότητες. Οι περισσότεροι οργανισμοί δείχνουν μία «προτίμηση» στον τύπο της αμφιχειρίας. Για παράδειγμα, τα περισσότερα ελικοειδή κοχύλια στρέφονται δεξιόστροφα. Τα περισσότερα αμινοξέα των πρωτεϊνών σε ζωντανούς οργανισμούς είναι μη αμφίχειρα μόρια. Αυτό σημαίνει ότι ο ανθρώπινος οργανισμός αντιδρά διαφορετικά στο ένα εναντιομερές έναντι του άλλου. Συνήθως, μόνο το ένα εναντιομερές μίας φαρμακευτικής ουσίας έχει το επιθυμητό αποτέλεσμα ενώ το άλλο περνά μέσα από το ανθρώπινο σώμα χωρίς να το επηρεάζει. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις κατά τις οποίες το δεύτερο εναντιομερές προκαλεί σοβαρά προβλήματα. Παράδειγμα αποτελεί το φάρμακο Thalidomide που χρησιμοποιήθηκε στην δεκαετία του '60 για την καταπολέμηση της ναυτίας κατά την εγκυμοσύνη. Το ένα εναντιομερές είχε τα επιθυμητά αποτελέσματα, ενώ το άλλο προκαλούσε προβλήματα στο έμβρυο.

Επειδή, η σύνθεση χημικών μορίων είναι χρονοβόρα και δαπανηρή διαδικασί-

α, είναι σημαντικό να υπάρχουν θεωρητικά αποτελέσματα, για το πότε κάποια μοριακά γραφήματα μπορούν να έχουν στεροϊσομερή και πότε όχι. Σχετικά αποτελέσματα υπάρχουν για μη αμφίχειρα μοριακά γραφήματα, για τις μοριακές σκάλες Moebius και για πλήρη γραφήματα. Μερικά από αυτά τα αποτελέσματα θα παρουσιαστούν σε αυτή την εργασία.

Η δομή της εργασίας αυτής είναι η εξής:

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται εισαγωγή του αναγνώστη στην Θεωρία Κόμβων. Παρουσιάζονται αρχικά βασικές έννοιες όπως η έννοια της ισοτοπίας κόμβων, οι κινήσεις Reidemeister, η έννοια της αναλλοιώτου και μία αναλλοίωτη κρίκων, ο αριθμός συνέλιξης (linking number). Στην Παράγραφο 1.4 παρουσιάζονται τα πολυώνυμα Alexander και Conway και δίνεται ένας ορισμός της αναλλοιώτου Arf. Τέλος, παρουσιάζουμε τις επιφάνειες Seifert με τη χρήση των οποίων δίνουμε έναν ισοδύναμο ορισμό της αναλλοιώτου Arf.

Στο Κεφάλαιο 2 διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το Θεώρημα των Conway και Gordon. Εισάγουμε την κίνηση ΔY σε ένα γράφημα, την έννοια των εγγενώς linked και knotted γραφημάτων, έναν χαρακτηρισμό των εγγενώς linked γραφημάτων καθώς και σχετικά αποτελέσματα για τα εγγενώς knotted γραφήματα.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε τις εφαρμογές του Θεωρήματος των Conway και Gordon στην Στερεοχημική Τοπολογία. Αποδεικνύουμε αρχικά ότι τα μόρια των οποίων το μοριακό γράφημα περιέχει το πλήρες γράφημα K_6 , έχουν πάντα ένα τοπολογικό στεροϊσομερές. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι οι μοριακές σκάλες Moebius με περιττό αριθμό συνδέσεων είναι εγγενώς μη αμφίχειρες και, τέλος, αποδεικνύουμε την εγγενή μη αμφιχειρία των πλήρων γραφημάτων με $4n + 3$ το πλήθος κορυφές.

Θα ήθελα, τέλος, να ευχαριστήσω την κυρία Σοφία Λαμπροπούλου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια ΕΜΠ, για τον πολύτιμο χρόνο της που μου αφιέρωσε και τις

πολύτιμες παρατηρήσεις της σε όλη την διάρκεια της εργασίας.

Περιεχόμενα

1	Στοιχεία από την Θεωρία Κόμβων	1
1.1	Τοπολογία Κόμβων και Κρίκων	1
1.2	Πράξεις Κόμβων και Ειδικές Περιπτώσεις Κόμβων	5
1.3	Αναλλοίωτες Κόμβων	9
1.4	Τα Πολυώνυμα Alexander και Conway	12
1.4.1	Οι συντελεστές του πολυωνύμου Conway και η αναλλοίωτη Arf	17
1.5	Επιφάνειες και Κόμβοι	24
1.5.1	Επιφάνειες	24
1.5.2	Επιφάνειες Seifert	27
1.5.3	Pass-equivalence και αναλλοίωτη Arf	29
2	Κόμβοι και κρίκοι σε γραφήματα	34
2.1	Στοιχεία από την Θεωρία Γραφημάτων	34
2.2	Το Θεώρημα Conway και Gordon	36
2.3	Ελαχιστότητα και χαρακτηρισμός των εγγενώς linked γραφημάτων	47
2.4	Εγγενώς knotted γραφήματα	52
3	Εφαρμογές στην Στεροχημική Τοπολογία	57
3.1	Εισαγωγή	57
3.2	Τοπολογικά στερεοϊσομερή	59

3.3	Μη αμφιχειρία (chirality)	65
3.4	Μη αμφιχειρία των ταινιών Moebius	66
3.5	Εγγενής μη αμφιχειρία σε πλήρη γραφήματα	75

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία από την Θεωρία Κόμβων

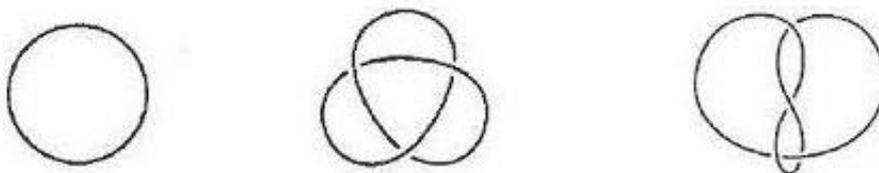
Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε αρχικά την έννοια του κόμβου, του κρίκου και της ισοτοπίας και θα εισάγουμε τις επιφάνειες Seifert. Στη συνέχεια θα ορίσουμε αναλλοίωτες ισοτοπίας: τον αριθμό συνέλιξης, τα πολυώνυμα Alexander και Conway και την αναλλοίωτη Arf, οι οποίες βοηθούν στην ταξινόμηση των κόμβων και κρίκων.

1.1 Τοπολογία Κόμβων και Κρίκων

Μπορούμε να φανταστούμε έναν κόμβο σαν ένα μπλεγμένο κουβάρι στον χώρο του οποίου οι άκρες είναι ενωμένες. Όμοια, ένας κρίκος μπορεί να νοηθεί σαν ένα πλήθος από μπλεγμένα κουβάρια με ενωμένες άκρες τα οποία μπορεί να είναι και μπλεγμένα μεταξύ τους. Αν θεωρήσουμε ότι το κουβάρι έχει πολύ μικρό πάχος και σκεφτούμε ότι δεν υπάρχει τρόπος να το ξεμπερδέψουμε χωρίς να το κόψουμε, έχουμε έναν διαισθητικό ορισμό της έννοιας του κόμβου. Για να ορίσουμε με μαθηματικό τρόπο έναν κόμβο θα χρειαστούμε την έννοια του ομοιομορφισμού.

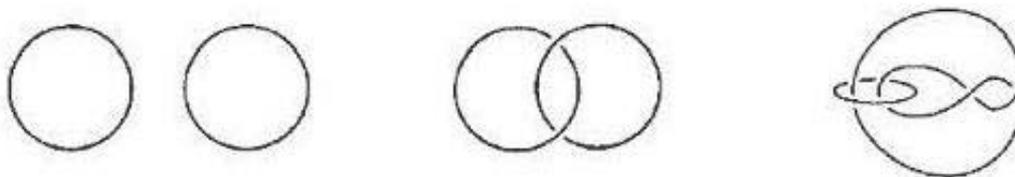
Ορισμός 1.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ και έστω $h : A \rightarrow B$ μία συνάρτηση. Η h καλείται *ομοιομορφισμός* αν είναι συνεχής, 1-1 και έχει συνεχή αντίστροφη συνάρτηση. Τότε, λέμε ότι τα A, B είναι *ομοιομορφικά*. Αν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ τ.ω. $h(A) = B$ θα γράφουμε $h : (\mathbb{R}^n, A) \rightarrow (\mathbb{R}^n, B)$.

Ορισμός 1.2. Ένας *κόμβος* K είναι η εμφύτευση του κύκλου S^1 στον χώρο \mathbb{R}^3 . Με τον όρο *εμφύτευση* εννοούμε την εικόνα του κύκλου S^1 στον \mathbb{R}^3 μέσω ενός ομοιομορφισμού $h : (\mathbb{R}^3, S^1) \rightarrow (\mathbb{R}^3, K)$.



Σχήμα 1.1: Παραδείγματα κόμβων

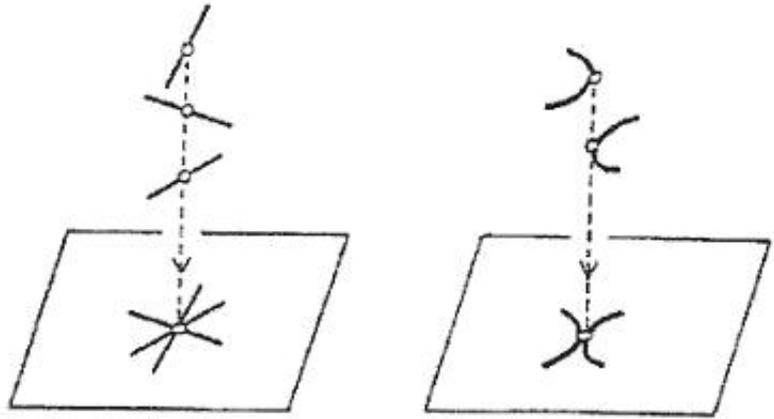
Ένας *κρίκος* L με n συνιστώσες L_i είναι η εμφύτευση n το πλήθος κύκλων S^1 στον χώρο \mathbb{R}^3 . Συμβολικά γράφουμε $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$.



Σχήμα 1.2: Παραδείγματα κρίκων

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε για ευκολία τον όρο *κόμβος* συμπεριλαμβάνοντας και την έννοια του *κρίκου*. Όταν υπάρχει πιθανότητα σύγχυσης ή όταν διατυπώνουμε αποτελέσματα τα οποία αφορούν μόνο κόμβους ή μόνο κρίκους θα το επισημαίνουμε.

Από τον ορισμό ενός κόμβου προκύπτει ότι οι κόμβοι «ζούν» στις τρεις διαστάσεις. Για τη μελέτη τους όμως είναι βολικό να χρησιμοποιούμε την κάθετη προβολή τους σε ένα επίπεδο. Προκειμένου να μην υπάρξει σύγχυση για την



Σχήμα 1.3: Απαγορευμένες καταστάσεις

- λονται πάνω σε ευθείες του επιπέδου προβολής (δηλαδή οι προβολές των επαπτομένων δεν εκφυλίζονται ποτέ σε σημείο),
2. Δεν πρέπει παραπάνω από δύο διαφορετικά σημεία του κόμβου να προβάλλονται σε ένα και μοναδικό σημείο του επιπέδου,
 3. Δύο διαφορετικά σημεία του κόμβου μπορούν να προβληθούν στο ίδιο σημείο του επιπέδου μόνο εάν οι προβολές των δύο επαπτόμενων δεν συμπίπτουν,
 4. Το σύνολο των σημείων διασταύρωσης (crossings), στα οποία προβάλλονται δύο και μόνο σημεία είναι πεπερασμένο.

Για παράδειγμα, οι δύο καταστάσεις που φαίνονται στο Σχήμα 1.3 δεν επιτρέπονται.

Ορισμός 1.3. Μία προβολή κόμβου στο επίπεδο, η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες, ονομάζεται *διάγραμμα*.¹

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Πάντα μπορεί να βρεθεί κατάλληλο επίπεδο προβολής ενός κόμβου έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες 1-4. Έτσι, αν το αρχικό επίπεδο προβολής που έχουμε επιλέξει παρουσιάζει κάποιες απαγορευμένες καταστάσεις, με μικρές στρέψεις του επιπέδου μπορούμε να εξασφαλίσουμε την

¹Ενδεχομένως να ταυτίζουμε σε κάποιες περιπτώσεις τις έννοιες κόμβος και διάγραμμα κόμβου για ευκολία.

ικανοποίηση των τεσσάρων αυτών συνθηκών.

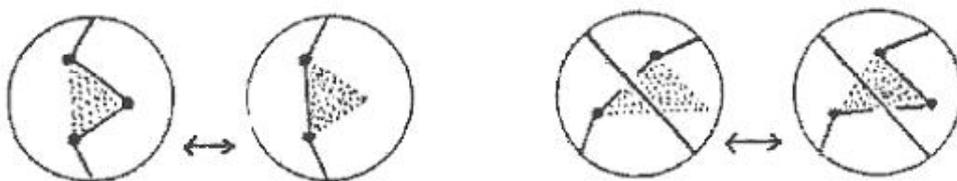
Δύο κόμβοι K και K' θεωρούνται ίδιοι, αν μπορεί να προκύψει ο ένας από τον άλλον μέσω μίας συνεχούς παραμόρφωσης του χώρου. Τέτοιοι κόμβοι θα λέγονται *ισοτοπικοί*.

Ορισμός 1.4. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ και $h : A \rightarrow B, g : A \rightarrow B$ ομοιομορφισμοί. Οι h και g λέγονται *ισοτοπικοί* αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $F : A \times I \rightarrow B, I = [0, 1]$ τ.ω. για κάθε $t \in I$ η συνάρτηση $F(x, t)$ να είναι ένας ομοιομορφισμός, $F(x, 0) = h(x)$ και $F(x, 1) = g(x)$. Η συνάρτηση F ονομάζεται *ισοτοπία*.

Ορισμός 1.5. Δύο κόμβοι K και K' θα ονομάζονται *ισοτοπικοί*, αν υπάρχει ισοτοπία $F(x, t) : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ τ.ω. $F(K, 0) = K$ και $F(K, 1) = K'$. Συμβολίζουμε $K \sim K'$.

Αν η παράμετρος t αναπαριστά τον χρόνο από το μηδέν στο ένα, μπορούμε να αντιληφθούμε την ισοτοπία κόμβων ως την συνεχή παραμόρφωση στον χώρο ώστε από τον έναν κόμβο να προκύψει ο δεύτερος, όπως αναφέραμε προηγουμένως. Στο εξής θα ταυτίζουμε την έννοια της παραμόρφωσης με την μαθηματική έννοια της ισοτοπίας.

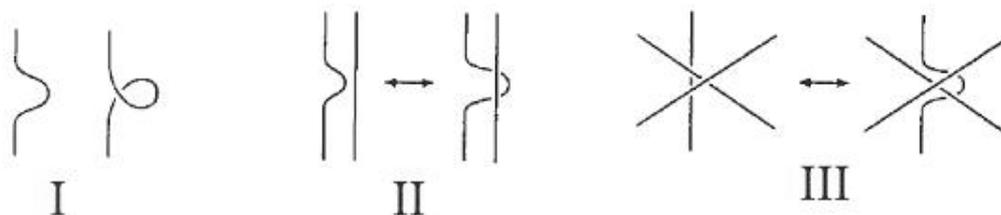
Ορισμός 1.6. *Κινήσεις ισοτοπίας επιπέδου* θα ονομάζονται μόνο οι κινήσεις



Σχήμα 1.4: Κινήσεις ισοτοπίας επιπέδου

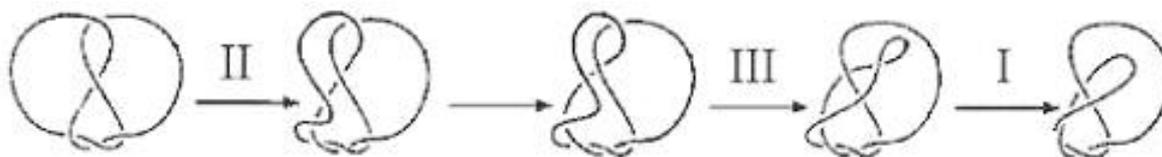
Οι κινήσεις αυτές έχουν το χαρακτηριστικό ότι διατηρούν τα υπάρχοντα σημεία διασταύρωσης και επιπλέον δεν δημιουργούν κανένα καινούργιο.

Ο γερμανός μαθηματικός Kurt Reidemeister (1926) εισήγαγε τρεις κινήσεις



Σχήμα 1.5: Κινήσεις Reidemeister

Θεώρημα 1.7. (K.Reidemeister, 1926) Δύο διαγράμματα κόμβων αντιστοιχούν σε ισοτοπικούς κόμβους αν και μόνο αν το ένα μπορεί να προκύψει από το άλλο μετά από πεπερασμένη ακολουθία κινήσεων Reidemeister και ισοτοπιών επιπέδου.



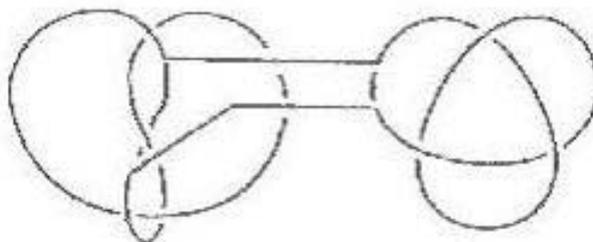
Σχήμα 1.6: Ισοτοπικοί κόμβοι

1.2 Πράξεις Κόμβων και Ειδικές Περιπτώσεις Κόμβων

Έστω δύο κόμβοι K_1, K_2 . Θα ορίσουμε μία πράξη στο σύνολο των κόμβων.

Ορισμός 1.8. Συνδετικό άθροισμα των K_1 και K_2 ονομάζουμε τον κόμβο \mathcal{K} , συμβ. $\mathcal{K} = K_1 \# K_2$, ο οποίος δημιουργείται αφαιρώντας ένα μικρό τόξο από καθέναν και ενώνοντας τα τέσσερα σημεία με δύο νέα τόξα.

Προϋποθέτουμε κατ' αρχάς ότι οι K_1 και K_2 διαχωρίζονται από δύο μπάλες στον χώρο. Τα δύο τόξα αφαιρούνται από μία περιοχή στο εξωτερικό των διαχωρισμάτων, η οποία δεν περιλαμβάνει καμία διασταύρωση. Τα δύο νέα τόξα



Σχήμα 1.7: Ανεπιθύμητες διασταυρώσεις στο συνδετικό άθροισμα

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Η πράξη $\#$ στο σύνολο των (κλάσεων ισοτοπίας) κόμβων είναι προσεταιριστική, αντιμεταθετική (οι κόμβοι $K_1\#K_2$ και $K_2\#K_1$ είναι ισοτοπικοί) και υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο (ο τετριμμένος κόμβος). Δεν υπάρχει όμως αντίθετο στοιχείο.

Ορισμός 1.9. Ένας κόμβος ονομάζεται *σύνθετος*, αν μπορεί να εκφραστεί ως το συνδετικό άθροισμα δύο κόμβων, κανέναν από τους οποίους δεν είναι ο τετριμμένος. Στην αντίθετη περίπτωση θα λέγεται *πρώτος* (*prime*).

Θα παραθέσουμε τώρα κάποιους βασικούς ορισμούς από την Θεωρία Κόμβων, τους οποίους θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 1.10. Ένας *προσανατολισμός* σε ένα διάγραμμα κόμβου ορίζεται η επιλογή μίας διεύθυνσης με την οποία κινούμαστε πάνω στο διάγραμμα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο κόμβος είναι *προσανατολισμένος*.

Λήμμα 1.11. Κάθε διάγραμμα κόμβου μπορεί να καταλήξει στο διάγραμμα του τετριμμένου κόμβου μετά από πεπερασμένο το πλήθος αλλαγών διασταυρώσεων.

ΣΧΕΔΙΟ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ Έστω κόμβος K και ένα διάγραμά του. Επιλέγουμε σημείο εκκίνησης στον κόμβο K και βαδίζουμε κατά μήκος του K σύμφωνα με τον προσανατολισμό του. Κάθε φορά που συναντάμε μία διασταύρωση

για πρώτη φορά, αν βρεθούμε από κάτω την αλλάζουμε, ενώ αν βρεθούμε από πάνω την αφήνουμε ως έχει. Όταν θα επιστρέψουμε στο σημείο εκκίνησης θα έχουμε ένα διάγραμμα, το οποίο θα είναι ισοτοπικό του τετριμμένου. ■

Ορισμός 1.12. Ένας προσανατολισμένος κόμβος K ονομάζεται *αντιστρέψιμος* (*invertible*), όταν υπάρχει ισοτοπία που απεικονίζει τον K στον εαυτό του με αντίθετο όμως προσανατολισμό. Ο κόμβος K' που προκύπτει ονομάζεται *αντίστροφος* του K .

Ορισμός 1.13. Ένας κρίκος ονομάζεται *διαχωρίσιμος* (*splittable*), αν είναι ισοτοπικός με μία ένωση κρίκων οι οποίοι να περιέχονται σε ξένες μεταξύ τους σφαίρες στον τρισδιάστατο χώρο (ή σε ξένες περιοχές του επιπέδου προβολής).

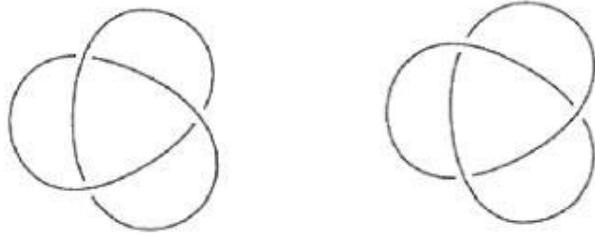
Ορισμός 1.14. Η *κατοπτρική εικόνα* (*mirror image*) K^* ενός κόμβου K προκύπτει με αλλαγή όλων των διασταυρώσεων σε ένα διάγραμμά του. Ένας κόμβος ο οποίος είναι ισοτοπικός με την κατοπτρική του εικόνα ονομάζεται *αμφίχειρας* (*achiral*).

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα στην Τοπολογία είναι ότι κάθε ομοιομορφισμός $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι ισοτοπικός με την ταυτοτική ή την κατοπτρική (reflection) απεικόνιση. Ορίζουμε τους δύο αυτούς τύπους ομοιομορφισμών.

Ορισμός 1.15. Έστω $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ομοιομορφισμός. Αν ο h είναι ισοτοπικός με την ταυτοτική απεικόνιση, τότε ο h λέμε ότι διατηρεί τον προσανατολισμό του χώρου, ενώ αν είναι ισοτοπικός της κατοπτρικής απεικόνισης λέμε ότι αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου.

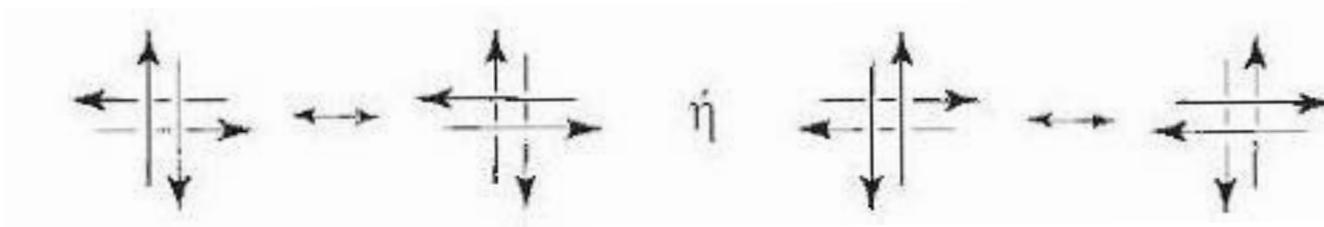
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Μπορούμε τώρα να επαναδιατυπώσουμε τον ορισμό του αμφίχειρα κόμβου: Ένας κόμβος K θα ονομάζεται *αμφίχειρας*, αν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : (\mathbb{R}^3, K) \rightarrow (\mathbb{R}^3, K)$ που αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου.

Για παράδειγμα, ο δεξιόστροφος και αριστερόστροφος trefoil δεν είναι ισοτοπικοί, άρα ο trefoil δεν είναι αμφίχειρας.



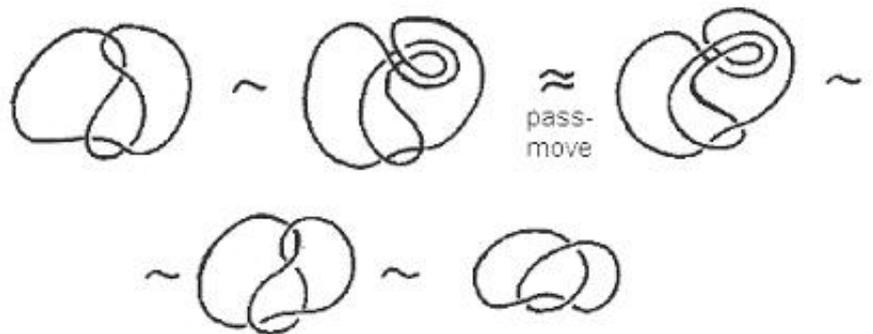
Σχήμα 1.8: Δεξιόστροφος και Αριστερόστροφος trefoil

Θα εισάγουμε τώρα ένα νέο είδος «κίνησης» στο διάγραμμα ενός κόμβου.



Σχήμα 1.9: Οι δύο τύποι Pass-move

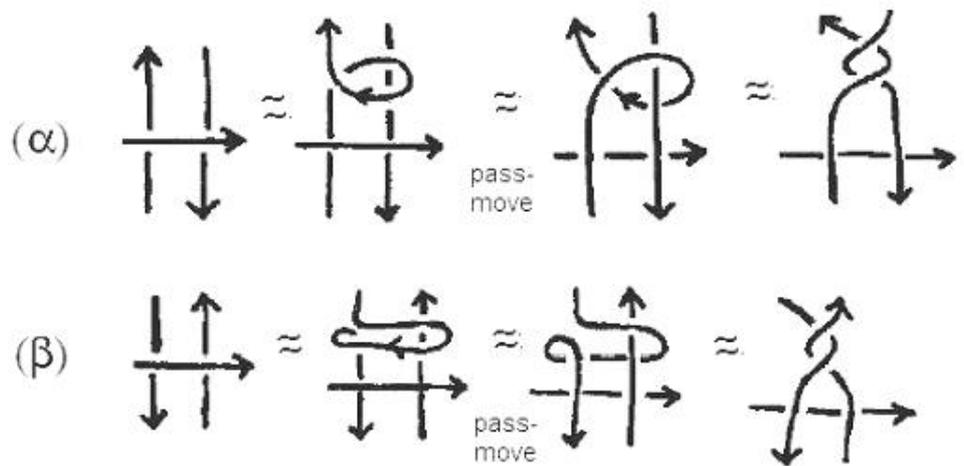
Ορισμός 1.16. Δύο κόμβοι K και K' ονομάζονται *pass-equivalent*, αν ο ένας προκύπτει από τον άλλον μέσω κινήσεων ισοτοπίας και αλλαγής τεσσάρων



Σχήμα 1.10: Pass-equivalent κόμβοι

Λήμμα 1.17. Όταν ένα τόξο κόμβου περνά κάτω από δύο άλλα τόξα με αντίθετο προσανατολισμό (όπως σε μία *pass-move*) προκαλεί στροφή 360° των δύο τόξων μεταξύ τους:

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η απόδειξη γίνεται διαγραμματικά. Βλ. Σχήμα 1.11 .



Σχήμα 1.11: Απόδειξη του Λήμματος 1.17

1.3 Αναλλοίωτες Κόμβων

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε την έννοια της αναλλοίωτης κόμβων, καθώς και μία αναλλοίωτη κρίκων, τον αριθμό συνέλιξης.

Ορισμός 1.18. Μία συνάρτηση $I: \{\text{κόμβοι}\} \rightarrow \mathcal{L}$, όπου το σύνολο \mathcal{L} μπορεί να αποτελείται από σύμβολα, αριθμούς, πολυώνυμα κλπ, λέγεται *αναλλοίωτη κόμβων* αν ισχύει:

$$K_1 \sim K_2 \Rightarrow I(K_1) = I(K_2)$$

δηλαδή αν η τιμή της I είναι ίδια για ισοτοπικούς κόμβους.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Μία αναλλοίωτη κόμβων είναι καλά ορισμένη σε κλάσεις ισοτοπίας κόμβων.

Ορισμός 1.19. Μία αναλλοίωτη κόμβων θα ονομάζεται *πλήρης αναλλοίωτη* αν επιπλέον ισχύει $K_1 \approx K_2 \Rightarrow I(K_1) \neq I(K_2)$.

Για να δείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι αναλλοίωτη ισοτοπίας αρκεί να δείξουμε ότι η τιμή της δεν αλλάζει όταν εκτελούμε σε ένα διάγραμμα κόμβους τους τρεις τύπους κινήσεων Reidemeister.

Θα εισάγουμε τώρα μία αναλλοίωτη στο σύνολο των κρίκων.

Ορισμός 1.20. Έστω ένας κρίκος L και έστω δύο συνιστώσες του L_i, L_j . Επιλέγουμε έναν προσανατολισμό σε κάθε μία συνιστώσα του L . Σε κάθε

διασταύρωση μεταξύ διαφορετικών συνιστωσών του κρίκου αντιστοιχούμε τον αριθμό (είση) ± 1 ή -1 ανάλογα με την εικόνα του διαγράμματος σε μια μικρό



Σχήμα 1.12: Πρόσημα διασταυρώσεων

Ο αριθμός συνέλιξης (*linking number*) των L_i, L_j ορίζεται ως:

$$lk(L_i, L_j) = (1/2)\Sigma sign(L_i, L_j) \quad (1.21)$$

όπου η άθροιση γίνεται πάνω σε όλες τις διασταυρώσεις μεταξύ των συνιστωσών L_i και L_j του διαγράμματος.

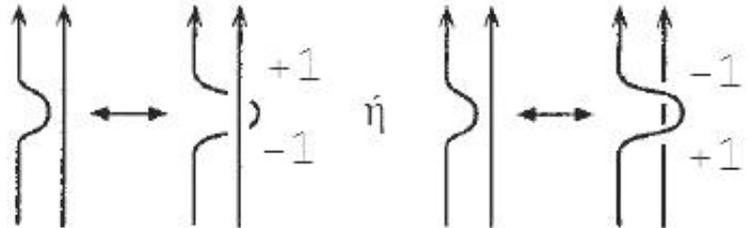
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αν με δεδομένους κάποιους προσανατολισμούς των L_i, L_j η τιμή του αριθμού συνέλιξης είναι lk , τότε αλλάζοντας τον προσανατολισμό της μίας από τις δύο συνιστώσες, ο αριθμός συνέλιξης γίνεται $-lk$. Η απόλυτη τιμή όμως του αριθμού συνέλιξης είναι ανεξάρτητη από τον προσανατολισμό των συνιστωσών.

Πρόταση 1.22. Ο αριθμός συνέλιξης ενός κρίκου $lk(L_i, L_j)$ είναι αναλλοίωτη ιστοπίας του κρίκου L , για κάθε ζεύγος συνιστωσών L_i, L_j .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ένας κρίκος L και έστω δύο συνιστώσες του L_1, L_2 . Θα εξετάσουμε την επίδραση κάθε κίνησης Reidemeister στην τιμή του αριθμού συνέλιξης πάνω σε ένα διάγραμμα του L .

- Η κίνηση Reidemeister I δημιουργεί ή εξαλείφει μία διασταύρωση μεταξύ μίας συνιστώσας του κρίκου και του εαυτού της. Άρα η τιμή του αριθμού συνέλιξης δεν αλλάζει.

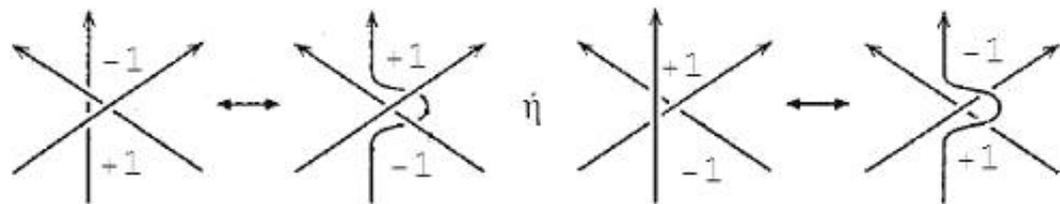
• Έστω τώρα ότι εκτελούμε μία κίνηση Reidemeister II και έστω ότι έχουμε επιλέξει προσανατολισμούς των συνιστωσών του κρίκου, όπως στο Σχήμα 1.13. (Υποθέτουμε ότι τα δύο τόξα αντιστοιχούν σε διαφορετικές συνιστώσες.



Σχήμα 1.13: Κίνηση Reidemeister II και αριθμός συνέλιξης

συνεισφέρει +1 στο άθροισμα και η άλλη διασταύρωση -1 , οπότε ο αριθμός συνέλιξης δεν θα μεταβληθεί.

• Τέλος, αν εφαρμόσουμε μία κίνηση Reidemeister III, μεταξύ τόξων τουλάχιστον δύο διαφορετικών συνιστωσών, και έχοντας επιλέξει προσανατολισμούς για κάθε συνιστώσα, παρατηρούμε ότι το πλήθος των ± 1 δεν αλλάζει. Άρα και



Σχήμα 1.14: Κίνηση Reidemeister III και αριθμός συνέλιξης

(Δεν θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις που προκύπτουν αλλάζοντας τους προσανατολισμούς σε κάθε συνιστώσα ή τους τύπους διασταυρώσεων κατά την εκτέλεση των κινήσεων Reidemeister, καθώς αντιμετωπίζονται με όμοιο τρόπο.) ■

1.4 Τα Πολυώνυμα Alexander και Conway

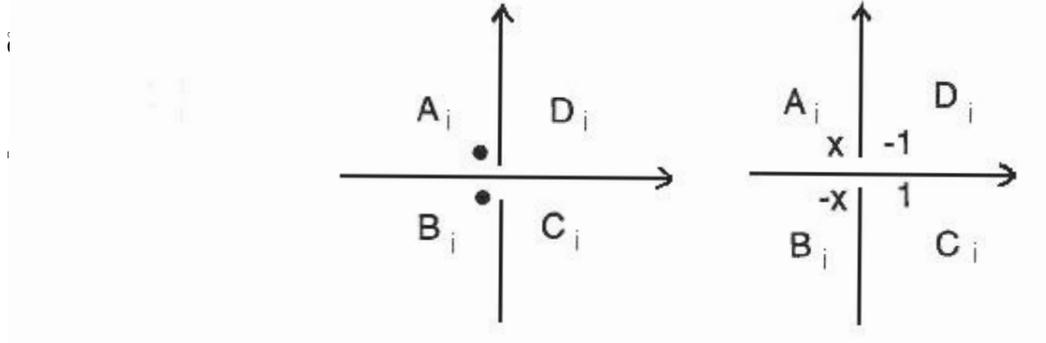
Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τα πολυώνυμα Alexander και Conway, τα οποία αποτελούν ισχυρότερες αναλλοίωτες κρίκων από τον αριθμό συνέλιξης.

Το Πολυώνυμο Alexander

Θα δώσουμε μία σύντομη περιγραφή του πολυωνύμου Alexander ενός κόμβου όπως ορίστηκε από τον J. W. Alexander το 1928.

Προκειμένου να υπολογίσουμε το πολυώνυμο Alexander ενός κόμβου K ξεκινάμε από ένα προσανατολισμένο διάγραμμα του και αριθμούμε τις διασταύρωσεις. Θα δημιουργήσουμε έναν πίνακα, ο οποίος σχετίζεται με το διάγραμμα.

Σε κάθε διασταύρωση τοποθετούμε δύο τελείες στα αριστερά του κάτω μέρους της διασταύρωσης, μία στο πάνω μέρος και μία στο κάτω μέρος της



Σχήμα 1.15: $x A_i - x B_i + C_i - D_i = 0$

Τα σύμβολα αυτά τοποθετούνται με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού γύρω από την διασταύρωση, ξεκινώντας από την τελεία που βρίσκεται στο πάνω μέρος. Στα A_i, B_i, C_i, D_i αντιστοιχούμε τους συντελεστές $x, -x, 1, -1$ (Βλ. Σχήμα 1.15). Κάθε i -διασταύρωση του διαγράμματος θα δώσει μία εξίσωση της μορφής:

$$x A_i - x B_i + C_i - D_i = 0.$$

Ορίζουμε έναν πίνακα M_K του οποίου οι γραμμές αντιστοιχούν στις διασταυρώσεις του διαγράμματος και οι στήλες στις περιοχές του. Οι συντελεστές της εξίσωσης τοποθετούνται στον πίνακα M_K στη γραμμή που αντιστοιχεί στην εν λόγω διασταύρωση, και έτσι ώστε οι συντελεστές κάθε περιοχής να βρίσκονται κάτω από την αντίστοιχη στήλη. Θα συμβολίζουμε με $M_K(R, R')$ τον πίνακα που προκύπτει από τον M_K διαγράφοντας τις στήλες που αντιστοιχούν σε γειτονικές περιοχές R και R' .

Ορισμός 1.23. Το πολυώνυμο *Alexander* του κόμβου K ορίζεται ως:

$$\Delta_K(x) \doteq \det(M_K[R, R']). \quad (1.24)$$

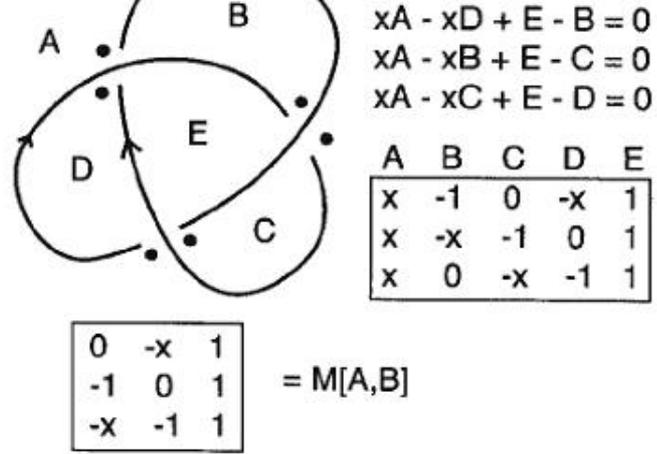
Ο συμβολισμός $A \doteq B$ σημαίνει ότι $A = \pm x^n B$, για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$.

Θεώρημα 1.25. (*Alexander, 1928*) Το πολυώνυμο $\Delta_K(x)$ ενός κόμβου K το οποίο υπολογίζεται από ένα προσανατολισμένο διάγραμμά του με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω, είναι καλά ορισμένο, ανεξάρτητο από την επιλογή των γειτονικών περιοχών R και R' και αποτελεί αναλλοίωτη ισοτοπίας, στο βαθμό \doteq .

Παραλείπουμε την απόδειξη του Θεωρήματος Alexander.

Παράδειγμα 2 Προκειμένου να γίνει κατανοητός ο υπολογισμός του πολυωνύμου Alexander θα υπολογίσουμε το πολυώνυμο $\Delta_{\mathcal{K}}(x)$, όπου \mathcal{K} ο κόμβος trefoil.

Στο Σχήμα 1.16 βλέπουμε ένα διάγραμμα του trefoil, τις περιοχές του διαγράμματος, τον πίνακα $M_{\mathcal{K}}(x)$ και τον πίνακα $M_{\mathcal{K}}(A, B)$ ο οποίος προκύπτει με διαγραφή των στηλών που αντιστοιχούν στις περιοχές A, B . Υπολογίζοντας την $\det M_{\mathcal{K}}(A, B)$, βρίσκουμε ότι: $\Delta_{trefoil}(x) \doteq x^2 - x + 1$.



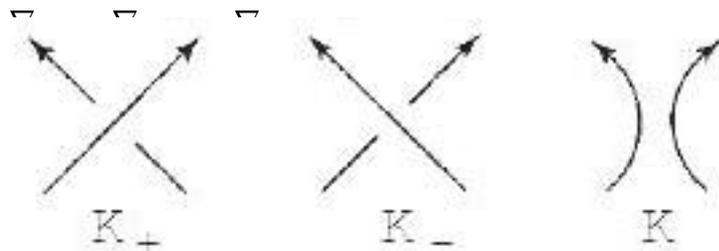
Σχήμα 1.16: Υπολογισμός του πολυωνύμου Alexander για τον trefoil

Το πολυώνυμο Conway

Θα παρουσιάσουμε τώρα το πολυώνυμο Conway (ή Conway-Alexander) ενός κόμβου K , συμβ. $\nabla_K(z)$, το οποίο σχετίζεται με το πολυώνυμο $\Delta_K(x)$ και μπορεί να υπολογιστεί απευθείας (χωρίς τον υπολογισμό πινάκων και οριζουσών) από το διάγραμμα ενός κόμβου, με τη χρήση τριών αξιωμάτων.

Αξιώματα του πολυωνύμου Conway

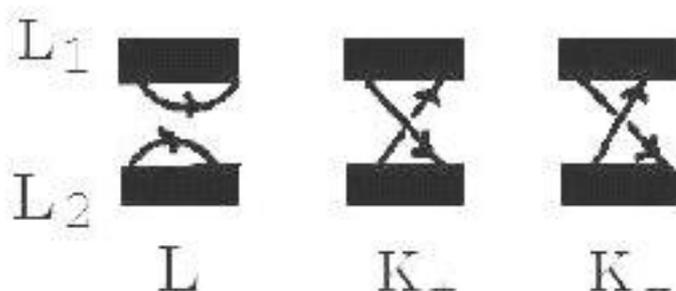
1. Σε κάθε προσανατολισμένο κόμβο αντιστοιχούμε ένα πολυώνυμο $\nabla_K(z)$, τ.ω. ισοτοπικοί κόμβοι να έχουν ταυτόσημα πολυώνυμα.
2. Αν K είναι ο τετρήμενος κόμβος, τότε $\nabla_K(z) = 1$.
3. Έστω τρεις κόμβοι K_+ , K_- και K οι οποίοι ταυτίζονται εκτός μίας περιοχής στην οποία έχουν τη μορφή του Σχήματος 1.17. Τότε τα πολυώνυμά τους συνδέονται μέσω της σχέσης skein:



Σχήμα 1.17: Σχέση skein για το πολυώνυμο Conway

Η αντικατάσταση μίας διασταύρωσης στο διάγραμμα ενός κόμβου με δύο τόξα τα οποία δεν διασταυρώνονται (όπως στο Σχήμα 1.17) ονομάζεται *εξομάλυνση (smoothing)*.

Λήμμα 1.26. Έστω L διαχωρίσιμος κρίκος με n συνιστώσες. Τότε, ισχύει $\nabla_L = 0$.



Σχήμα 1.18: Διαχωρίσιμος κρίκος κατά την εξομάλυνση

Εφαρμόζοντας τη σχέση skein στο διάγραμμα του L προκύπτουν οι κόμβοι (με μία συνιστώσα) K_+ και K_- . Αυτοί οι κόμβοι είναι ισοτοπικοί, αφού ο ένας προκύπτει από τον άλλον με μία στροφή στο χώρο κατά 2π . Λόγω του αξιώματος 1 θα ισχύει $\nabla_{K_+} = \nabla_{K_-}$ και από την σχέση skein έχουμε:

$$z\nabla_L = \nabla_{K_+} - \nabla_{K_-} = 0, \text{ δηλαδή } \nabla_L = 0. \blacksquare$$

Λήμμα 1.27. Κάθε κόμβος έχει μία «αποσύνθεση», σύμφωνα με τη σχέση skein, σε τετριμμένους κόμβους και κρίκους. Άρα, το πολυώνυμο Conway μπορεί να υπολογιστεί επαγωγικά από τα αξιώματα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στον αριθμό των διασταυρώσεων n . Έστω κόμβος K με $n = 1$. Τότε ο κόμβος αυτός είναι ο τετριμμένος και από το αξίωμα 2, $\nabla_K = 1$.

Έστω τώρα ότι κάθε κόμβος με n διασταυρώσεις έχει μία αποσύνθεση σε τετριμμένους κόμβους, και έστω K κόμβος με $n + 1$ διασταυρώσεις. Από το Λήμμα 1.11, γνωρίζουμε ότι υπάρχει πεπερασμένος αριθμός αλλαγών διασταυρώσεων οι οποίες μετατρέπουν τον K στον τετριμμένο. Άρα, υπάρχει μία ακολουθία κόμβων $K = K, K_1, \dots, K_n$ τ.ω. ο κόμβος K_{i+1} να προκύπτει από τον K_i με αλλαγή της i -διασταύρωσης και ο K_n να είναι ο τετριμμένος κόμ-

βος. Εφαρμόζοντας διαδοχικά την σχέση skein έχουμε:

$$\nabla_K = \nabla_{K_1} \pm z\nabla_{K_1'}$$

$$\nabla_{K_1} = \nabla_{K_2} \pm z\nabla_{K_2'}$$

⋮

$$\nabla_{K_{n-1}} = \nabla_{K_n} \pm z\nabla_{K_n'}$$

όπου ο $K_{i'}$ προκύπτει από τον K_{i-1} και τον K_i με εξομάλυνση της i -διασταύρωσης. Έχουμε έτσι μία αποσύνθεση του K στους κόμβους K_i και $K_{i'}$ για $i, i' = 1, \dots, n$. Επειδή οι κόμβοι $K_{i'}$ έχουν μία λιγότερη διασταύρωση από τον K , από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει αποσύνθεση τους σε τετριμμένους κόμβους, άρα υπάρχει και αποσύνθεση του K . ■

Θεώρημα 1.28. Τα πολυώνυμα Conway και Alexander για έναν κόμβο K συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\nabla_K(x - x^{-1}) \doteq \Delta(x^2) \tag{1.29}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.28 παραλείπεται.

Παράδειγμα 3 Υπολογίζοντας το πολυώνυμο Conway για τον κόμβο trefoil σύμφωνα με τα αξιώματα του πολυωνύμου Conway προκύπτει $\nabla_{trefoil}(x) = 1 + x^2$. Στο Παράδειγμα 2 είχαμε υπολογίσει $\Delta_{trefoil}(x) \doteq x^2 - x + 1$ οπότε επαληθεύεται η σχέση (1.29):

$$\Delta_{trefoil}(x^2) = x^2 \cdot \nabla_{trefoil}(x - x^{-1}) = x^4 - x^2 + 1.$$

Πρόταση 1.30. 1. Ισχύει $\nabla_{K_1 \# K_2} = \nabla_{K_1} \cdot \nabla_{K_2}$.
2. Ισχύει $\nabla_{K'} = \nabla_K$, όπου K' ο αντίστροφος του K .



Σχήμα 1.19: Εφαρμογή της σχέσης skein σε μία διασταύρωση του trefoil

3. Ισχύει $\nabla_{K^*}(z) = \nabla_K(-z)$, όπου K^* η κατοπτρική εικόνα του K .
4. Έστω L κρίκος με n συνιστώσες. Τότε $\nabla_L(-z) = (-1)^{n+1}\nabla_L(z)$. Άρα, $\nabla_{L^*} = (-1)^{n+1}\nabla_L$.

Θα παραλείψουμε την απόδειξη της Πρότασης 1.30, καθώς είναι όμοια με την απόδειξη του Λήμματος 1.27.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Από το 4 της Πρότασης 1.30, προκύπτει ότι κάθε κρίκος με άρτιο αριθμό συνιστωσών και μη μηδενικό πολυώνυμο Conway δεν μπορεί να είναι αμφίχειρας.

1.4.1 Οι συντελεστές του πολυωνύμου Conway και η αναλλοίωτη Arf

Έστω κόμβος K με πολυώνυμο $\nabla_K(z) = a_0(K) + a_1(K)z + \dots + a_n(K)z^n$. Οι συντελεστές $a_0(K), \dots, a_n(K)$ αποτελούν, προφανώς, αναλλοίωτες ιστοτοπίας. Θα συμβολίζουμε με $S_i K$ τον κόμβο που προκύπτει με αλλαγή της i -διασταύρωσης του K , $E_i K$ τον κόμβο που προκύπτει με εξομάλυνση της και $I_i K$ το πρόσημο της i - διασταύρωσης σύμφωνα με το Σχήμα 1.12.

Πόρισμα 1.31. Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς που εισάγαμε, η σχέση skein εκφράζεται ως:

$$\nabla_K - \nabla_{S_i K} = I_i K \cdot z \nabla_{E_i K} \quad (1.32)$$

οπότε οι συντελεστές του πολυωνύμου θα ικανοποιούν τις σχέσεις

$$a_{n+1}(K) - a_{n-1}(S_i K) = I_i K \cdot a_n(E_i K). \quad (1.33)$$

Θα προχωρήσουμε τώρα στην απόδειξη τριών αποτελεσμάτων, που αφορούν τους συντελεστές του πολυωνύμου Conway.

Λήμμα 1.34. Για τον συντελεστή a_0 του πολυωνύμου Conway ισχύει:

$$a_0(K) = \begin{cases} 1 & \text{αν ο } K \text{ έχει μία συνιστώσα,} \\ 0 & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Πρώτη Περίπτωση: Έστω ότι ο K έχει μία συνιστώσα και καταλήγει στον τετριμμένο κόμβο με την αλλαγή m το πλήθος διασταυρώσεων. Τότε ισχύει:

$$a_0(K) = a_0(S_i K) = \dots = a_0(S_m \dots S_1 K) = a_0(O) = 1,$$

αφού ο σταθερός όρος $a_0(K)$ του πολυωνύμου του K συμπίπτει κάθε φορά με το σταθερό όρο του πολυωνύμου του κόμβου που προκύπτει με αλλαγή μίας διασταύρωσης στο διάγραμμα του K και $\nabla_O = 1$, όπου O δηλώνει τον τετριμμένο κόμβο.

Δεύτερη Περίπτωση: Έστω ότι ο K έχει n το πλήθος συνιστώσες και έστω m ο αριθμός των διασταυρώσεων που πρέπει να αλλάξουμε για να καταλήξουμε σε έναν διαχωρίσιμο κρίκο. Τότε, όπως και στην πρώτη περίπτωση, έχουμε:

$$a_0(K) = a_0(S_i K) = \dots = a_0(S_m \dots S_1 K) = 0,$$

αφού $\nabla_L = 0$ για κάθε διαχωρίσιμο κρίκο L . ■

Λήμμα 1.35. Για τον συντελεστή a_1 ισχύει:

$$a_1(K) = \begin{cases} lk(K) & \text{αν ο } K \text{ έχει δύο συνιστώσες,} \\ 0 & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση.} \end{cases}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Πρώτη Περίπτωση: Έστω κρίκος K με δύο συνιστώσες K_1 και K_2 .

- Αν ο K είναι διαχωρίσιμος, τότε $\nabla_K = 0$, οπότε $a_1(K) = 0 = lk(K)$.
- Έστω ότι ο K δεν είναι διαχωρίσιμος, έστω n το πλήθος των διασταυρώσεων του, και έστω $m \leq n$ ο αριθμός των διασταυρώσεων μεταξύ των δύο συνιστωσών τις οποίες πρέπει να αλλάξουμε για να καταλήξουμε σε έναν διαχωρίσιμο κρίκο. Από την σχέση (1.33) για $n = 0$ έχουμε:

$$a_1(K) - a_1(S_i K) = I_i K \cdot a_0(E_i K) \quad (1.36)$$

Θα εφαρμόσουμε την σχέση (1.36) διαδοχικά για κάθε $i = 1, \dots, m, \dots, n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(K) - a_1(S_1 K) = I_1(K) \cdot a_0(E_1 K) \\ a_1(S_1 K) - a_1(S_2 S_1 K) = I_2(S_1 K) \cdot a_0(E_2 S_1 K) \\ \vdots \\ a_1(S_{m-1} \dots S_1 K) - a_1(S_m S_{m-1} \dots S_1 K) = I_m(S_{m-1} \dots S_1 K) \cdot a_0(E_m S_{m-1} \dots S_1 K) \\ a_1(S_m \dots S_1 K) - a_1(S_{m+1} \dots S_1 K) = I_{m+1}(S_m \dots S_1 K) \cdot a_0(E_{m+1} S_m \dots S_1 K) \\ \vdots \\ a_1(S_{n-1} \dots S_1 K) - a_1(S_n \dots S_1 K) = I_n(S_{n-1} \dots S_1 K) \cdot a_0(E_n S_{n-1} \dots S_1 K) \end{array} \right. \quad (1.37)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι το πρόσημο της i -διασταύρωσης δεν μεταβάλλεται με την αλλαγή των διασταυρώσεων $1, \dots, i-1$. Άρα, θα ισχύει:

$$I_2(S_1 K) = I_2(K), \dots, I_n(S_{n-1} \dots S_1 K) = I_n(K)$$

Όταν κάνουμε εξομάλυνση σε μία από τις διασταυρώσεις 1 έως m , συνδέουμε τις δύο συνιστώσες με δύο τόξα, οπότε δημιουργούμε κόμβο με μία συνιστώσα και από το Λήμμα 1.34 ισχύει:

$$a_0(E_1 K) = \dots = a_0(E_m S_{m-1} \dots S_1 K) = 1$$

Οι $m+1, \dots, n$ διασταυρώσεις είναι μεταξύ κάποιας συνιστώσας και του εαυτού της, οπότε με την εξομάλυνση είτε δημιουργούμε μία επιπλέον συνιστώσα είτε

όχι (αλλά ήδη έχουμε δύο συνιστώσες), οπότε πάλι από το Λήμμα 1.34 έχουμε:

$$a_0(E_{m+1} \dots S_1 K) = \dots = a_0(E_n S_{n-1} \dots S_1 K) = 0$$

Έτσι, το σύνολο των σχέσεων (1.37) απλοποιείται ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(K) - a_1(S_1 K) = I_1(K) \\ a_1(S_1 K) - a_1(S_2 S_1 K) = I_2(K) \\ \vdots \\ a_1(S_{m-1} \dots S_1 K) - a_1(S_m S_{m-1} \dots S_1 K) = I_m(K) \\ a_1(S_m \dots S_1 K) - a_1(S_{m+1} \dots S_1 K) = 0 \\ \vdots \\ a_1(S_{n-1} \dots S_1 K) - a_1(S_n \dots S_1 K) = 0 \end{array} \right. \quad (1.38)$$

Με πρόσθεση όλων των εξισώσεων (1.38) προκύπτει:

$$a_1(K) - a_1(S_n \dots S_1 K) = \sum_{i=1}^m I_i(K) \quad (1.39)$$

Ο κόμβος $S_n \dots S_1 K$ προκύπτει από τον K με αλλαγή όλων των διασταυρώσεων του K , είναι δηλαδή η κατοπτρική του εικόνα K^* . Άρα, η σχέση (1.39) γίνεται:

$$a_1(K) - a_1(K^*) = \sum_{i=1}^m I_i(K) \quad (1.40)$$

Από το αποτέλεσμα 3 της Πρότασης 1.30 έχουμε $\nabla_{K^*}(z) = \nabla_K(-z)$, δηλαδή $a_1(K^*) = -a_1(K)$. Έτσι, η σχέση (1.40) γίνεται:

$$2a_1(K) = \sum_{i=1}^m I_i(K) \quad (1.41)$$

που ισοδυναμεί με $a_1(K) = lk(K)$.

Δεύτερη περίπτωση: Έστω ότι ο K έχει τουλάχιστον τρεις συνιστώσες και n το πλήθος διασταυρώσεις. Τότε με την εξομάλυνση μιας οποιαδήποτε διασταύρωσης του K θα προκύψουν τουλάχιστον δύο συνιστώσες, οπότε

$a_0(K) = a_0(E_i K)$. Ακολουθώντας όμοια διαδικασία με αυτή που περιγράφηκε στην πρώτη περίπτωση καταλήγουμε ότι $a_1(K) = 0$.

Τρίτη Περίπτωση: Έστω ότι ο K είναι κόμβος με μία συνιστώσα και έστω ότι ο K καταλήγει στον τετριμμένο κόμβο με την αλλαγή n το πλήθος διασταυρώσεων. Με διαδοχική εφαρμογή της σχέσης (1.33) προκύπτει:

$$\begin{cases} a_1(K) - a_1(S_1 K) = I_1(K) \cdot a_0(E_1 K) \\ a_1(S_1 K) - a_1(S_2 S_1 K) = I_2(K) \cdot a_0(E_2 S_1 K) \\ \vdots \\ a_1(S_{n-1} \dots S_1 K) - a_1(S_n S_{n-1} \dots S_1 K) = I_n(K) \cdot a_0(E_n S_{n-1} \dots S_1 K) \end{cases} \quad (1.42)$$

Ο κόμβος $S_n S_{n-1} \dots S_1 K$ υποθέσαμε ότι είναι ο τετριμμένος, οπότε $a_1(S_n S_{n-1} \dots S_1 K) = 0$. Ο κόμβος $S_{n-1} \dots S_1 K$ έχει διαφορετικό από τον K πρόσημο σε όλες τις διασταυρώσεις εκτός από την n -διασταύρωση, δηλαδή είναι ισοτοπικός του $S_n K^*$. Άρα, η τελευταία εξίσωση των σχέσεων (1.42) γίνεται:

$$a_1(S_n K^*) = I_n(K) \cdot a_0(E_n S_{n-1} \dots S_1 K) \quad (1.43)$$

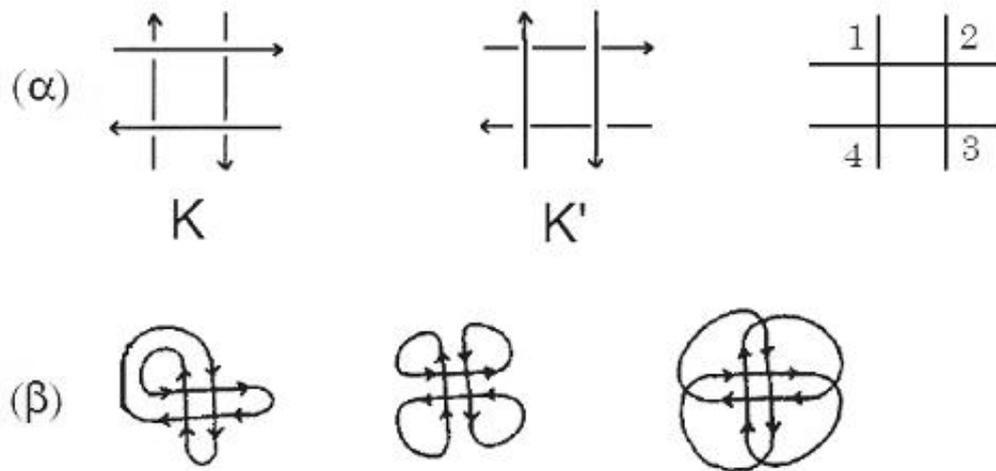
Παρατηρούμε ακόμη ότι ο κόμβος $E_n S_{n-1} \dots S_1 K$ προκύπτει από τον K με αλλαγή όλων των διασταυρώσεων 1 έως n και με εξομάλυνση της n -διασταύρωσης, είναι δηλαδή ισοτοπικός του κόμβου $E_n K^*$. Άρα, όσες συνιστώσες έχει ο $E_n K^*$ θα έχει και ο κόμβος $E_n K$, και άρα ισχύει:

$$a_0(E_n S_{n-1} \dots S_1 K) = a_0(E_n K^*) = a_0(E_n K) \quad (1.44)$$

Εφαρμόζουμε, τέλος, την σχέση (1.33) στην n -διασταύρωση και συνδυάζοντας την με τις σχέσεις (1.43) και (1.44) προκύπτει:

$$\begin{aligned} a_1(K) - a_1(S_n K) &= I_n(K) \cdot a_0(E_n K) = \\ a_1(S_n K^*) &= a_1((S_n K)^*) = -a_1(S_n K) \end{aligned} \quad (1.45)$$

Άρα, $a_1(K) = 0$. ■



Σχήμα 1.20: Το Θεώρημα 1.46

Έστω τώρα οι κόμβοι: $Q_1 = E_1K, Q_2 = E_2S_1K, Q_3 = E_3S_2S_1K, Q_4 = E_4S_3S_2S_1K$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά την σχέση skein προκύπτει:

$$\nabla_K - \nabla_{K'} = z(\nabla_{Q_1} - \nabla_{Q_2} + \nabla_{Q_3} - \nabla_{Q_4}) \quad (1.47)$$

Συγκεκριμένα έχουμε:

$$a_2(K) - a_2(K') = a_1(Q_1) - a_1(Q_2) + a_1(Q_3) - a_1(Q_4) \quad (1.48)$$

Άρα, το πρόβλημα υπολογισμού της διαφοράς των συντελεστών $a_2(K), a_2(K')$ του πολυωνύμου για τους δύο κόμβους ανάγεται στον υπολογισμό των αριθμών συνέλιξης των κόμβων Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 . Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι να συνδέσουμε τα τόξα των διασταυρώσεων 1, 2, 3, 4 έτσι ώστε να συμφωνούν οι προσανατολισμοί των συνδεόμενων τόξων και να προκύψει κόμβος με μία συνιστώσα. Οι τρόποι αυτοί φαίνονται στο Σχήμα 1.20β. Τέλος, υπολογίζοντας τους αριθμούς συνέλιξης των κόμβων Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 επαληθεύουμε εύκολα την σχέση (1.48). ■

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό μίας άλλης αναλλοίωτης κόμβων.

Ορισμός 1.49. Η αναλλοίωτη Arf ενός κόμβου K με μία συνιστώσα, συμβ. $A(K)$, είναι η τιμή του συντελεστή $a_2(K)$ του πολυωνύμου Conway του K υπολογισμένη modulo 2, δηλαδή:

$$A(K) \equiv a_2(K) \pmod{2}.$$

Λήμμα 1.50. Έστω K , $S_i K$ και $E_i K$ κόμβοι όπως περιγράφονται στο αξίωμα 3 του πολυωνύμου Conway. Ισχύει η σχέση:

$$A(K) - A(S_i K) = I_i \cdot lk(E_i K) \quad (1.51)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Εφαρμόζουμε την σχέση (1.33) για $n = 1$:

$$a_2(K) - a_2(S_i K) = I_i K \cdot a_1(E_i K) \quad (1.52)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.35 και το Θεώρημα 1.46 προκύπτει το ζητούμενο. ■

1.5 Επιφάνειες και Κόμβοι

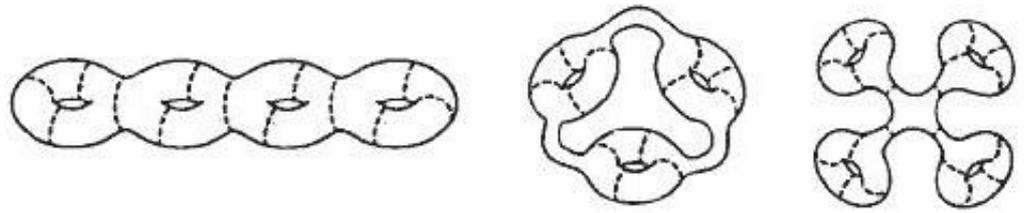
Στην παράγραφο αυτή θα εισάγουμε την έννοια των επιφανειών Seifert, θα δώσουμε έναν ορισμό της αναλλοίωτης Arf χρησιμοποιώντας την σχέση pass-equivalence δύο κόμβων και θα αποδείξουμε την ισοδυναμία του ορισμού αυτού με τον Ορισμό 1.49. Αρχίζουμε με μερικές έννοιες οι οποίες αφορούν τις επιφάνειες.

1.5.1 Επιφάνειες

Ορισμός 1.53. Μία επιφάνεια S (χωρίς σύνορο) είναι μία διδιάστατη πολλαπλότητα, δηλαδή ένας τοπολογικός χώρος, του οποίου κάθε σημείο περιέχεται σε μία ανοικτή περιοχή ομοιομορφική του \mathbb{R}^2 .

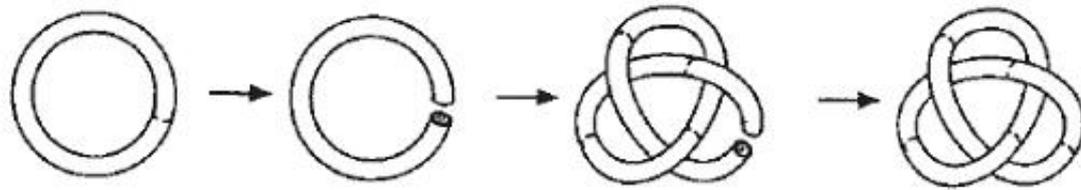
Ορισμός 1.54. Δύο επιφάνειες S_1, S_2 είναι ισοτοπικές, αν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : (\mathbb{R}^3, S_1) \rightarrow (\mathbb{R}^3, S_2)$ τ.ω. $h(S_1) = S_2$.

Για να μελετήσουμε τις επιφάνειες τις τριγωνοποιούμε, δηλαδή τις χωρίζουμε σε τρήγωνα, όχι κατ' ανάγκη επίπεδα και με ευθείες ακμές, τέτοια ώστε να μην τέμνονται στο εσωτερικό τους, να εφάπτονται κατά μήκος ολόκληρων ακμών και να καλύπτουν όλη την επιφάνεια.



Σχήμα 1.21: Ισοτοπικές Επιφάνειες

Ορισμός 1.55. Δύο επιφάνειες S_1 και S_2 ονομάζονται *ομοιομορφικές*, όταν μία τριγωνοποίηση της S_1 μπορεί να δώσει την S_2 κόβοντας και επανασυνδέοντας



Σχήμα 1.22: Ομοιομορφικές Επιφάνειες

Ορισμός 1.56. Μία επιφάνεια ονομάζεται *κλειστή*, αν μπορεί να τριγωνοποιηθεί από πεπερασμένο αριθμό τριγώνων, δηλαδή αν είναι συμπαγής και δεν έχει σύνορο. Ο αριθμός των οπών μίας κλειστής επιφάνειας ονομάζεται *γένος* της επιφάνειας.

Ορισμός 1.57. Έστω επιφάνεια S και έστω $T(S)$ μία τριγωνοποίησή της. Η *χαρακτηριστική Euler* $\chi(S)$ της S ορίζεται ως: $\chi(S) = V - E + F$, όπου V ο αριθμός των κορυφών στην τριγωνοποίηση, E ο αριθμός των πλευρών και F ο αριθμός των τριγώνων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αποδεικνύεται ότι η χαρακτηριστική Euler δεν εξαρτάται από την τριγωνοποίηση.

Θεώρημα 1.58. Η *χαρακτηριστική Euler* χαρακτηρίζει την κλάση ομοιομορφίας μίας επιφάνειας, είναι δηλαδή πλήρης αναλλοίωτη των κλειστών επιφανειών χωρίς σύνορο.

Η χαρακτηριστική Euler και το γένος μίας επιφάνειας συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\chi(S) = 2 - 2g$$

όπου g το γένος της επιφάνειας. Άρα, και το γένος είναι πλήρως αναλλοίωτη.

Ορισμός 1.59. Μία επιφάνεια με σύνορο S προκύπτει από μία κλειστή επιφάνεια αφαιρώντας πεπερασμένο πλήθος δίσκων. Τα σύνορα που δημιουργούνται με αυτόν τον τρόπο ονομάζονται *συνοριακές συνιστώσες (boundary components)* της S .

Το γένος μίας τέτοιας επιφάνειας ορίζεται να είναι το γένος της αντίστοιχης κλειστής.

Ορισμός 1.60. Μία επιφάνεια ονομάζεται *προσανατολίσιμη* αν έχει δύο πλευρές οι οποίες να μπορούν να χρωματιστούν με διαφορετικά χρώματα, έτσι ώστε τα χρώματα να μην συναντώνται παρά μόνο κατά μήκος του συνόρου.

Στο Σχήμα 1.23 απεικονίζονται δύο επιφάνειες, μία προσανατολίσιμη και



Σχήμα 1.23: Προσανατολισμός Επιφανειών

Πρόταση 1.61. (*Χαρακτηρισμός μη προσανατολίσιμων επιφανειών*) Μία επιφάνεια είναι μη προσανατολίσιμη αν και μόνο αν περιέχει μία ταινία Moebius με περιττό αριθμό στροφών.

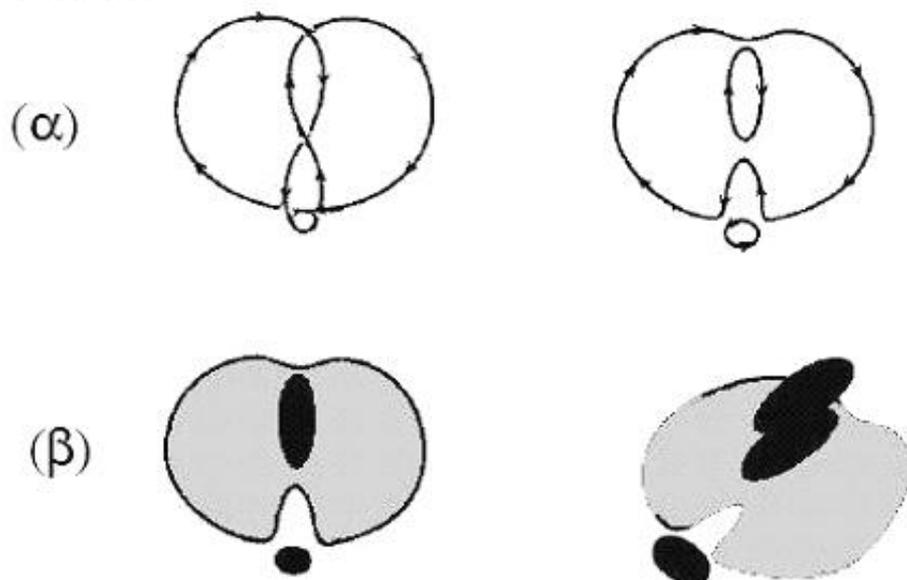
Για να συνοψίσουμε, προκειμένου να προσδιορίσουμε πλήρως μία δοθείσα επιφάνεια S , πρέπει να γνωρίζουμε: αν είναι προσανατολίσιμη, τον αριθμό των συνοριακών συνιστωσών της και την χαρακτηριστική της Euler.

1.5.2 Επιφάνειες Seifert

Το 1934 ο γερμανός μαθηματικός Herbert Seifert απέδειξε το παρακάτω θεώρημα, το οποίο αφορά προσανατολισμένες επιφάνειες με σύνορο κάποιον δοθέντα κόμβο.

Θεώρημα 1.62. *Για κάθε κόμβο (ή κρίκο) K μπορεί να κατασκευαστεί μία προσανατολισμένη επιφάνεια με σύνορο τον K . Μία τέτοια επιφάνεια λέγεται επιφάνεια Seifert.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η απόδειξη είναι ουσιαστικά ο αλγόριθμος του Seifert για την κατασκευή μίας τέτοιας επιφάνειας.

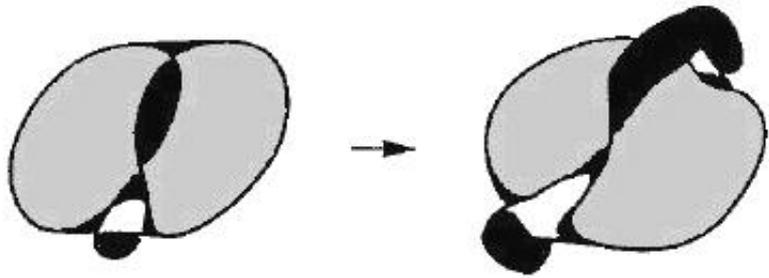


Σχήμα 1.24: Κύκλοι Seifert

στρίψει μία φορά και η στροφή είναι σύμφωνα με την διασταύρωση.

Καταλήξαμε σε μία επιφάνεια με σύνορο τον αρχικό κόμβο. (Σχήμα 1.25)

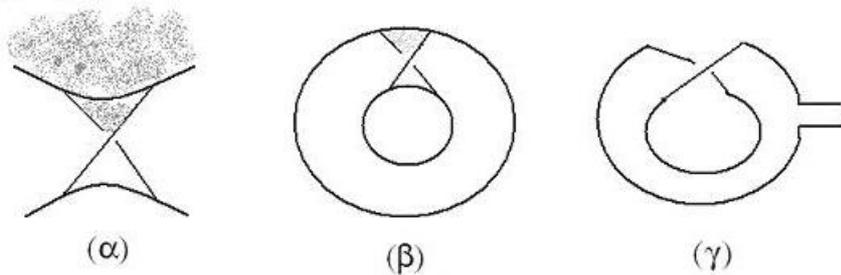
Θα δείξουμε τώρα ότι η επιφάνεια που δημιουργήσαμε είναι προσανατολισμένη. Σε κάθε κύκλο Seifert δίνουμε τον προσανατολισμό που επάγεται σε αυτόν από τον προσανατολισμό του K . Για κάθε κύκλο με προσανατολισμό σύμφωνα (αντίστοιχα αντίθετα) με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, χρωματίζουμε το



Σχήμα 1.25: Επιφάνεια Seifert

πάνω (αντίστ. κάτω) μέρος του δίσκου του άσπρο και το κάτω (αντίστ. πάνω) μέρος μαύρο. Θα δείξουμε ότι προσθέτοντας τις κορδέλες, η επιφάνεια την οποία δημιουργήσαμε παραμένει προσανατολισίμη.

Πράγματι, κάθε κορδέλα είναι προσανατολισμένη. Την συνδέουμε έτσι ώστε να συμφωνεί με την άσπρη επιφάνεια του ενός δίσκου. Αρκεί να δείξουμε ότι στρέφοντας την κατά μισή στροφή και συνδέοντάς την με τον άλλο δίσκο, οι



Σχήμα 1.26: Διατήρηση προσανατολισμού επιφανειών και προσθήκη μίας ταινίας Moebius.

Αν οι προσανατολισμοί των δίσκων είναι αντίθετοι, έχουμε την κατάσταση του Σχήματος 1.26α, οπότε η επιφάνεια που προκύπτει είναι προσανατολισίμη. Αν οι προσανατολισμοί των δίσκων συμφωνούν, πάλι η επιφάνεια που προκύπτει είναι προσανατολισίμη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.26β. ■

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 1. Ο αλγόριθμος του Seifert μπορεί να παράγει διαφορετικές επιφάνειες με σύνορο τον ίδιο κόμβο, αν εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο σε διαφορετικά διαγράμματα του κόμβου.

2. Γενικά, υπάρχουν προσανατολισίμες επιφάνειες με σύνορα κόμβους, οι

οποίες δεν προέρχονται από τον αλγόριθμο του Seifert.

3. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο μπορούμε πάντα να δημιουργήσουμε για έναν κόμβο K και μία μη προσανατολίσιμη επιφάνεια με σύνορο τον K ως εξής: εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Seifert σε ένα διάγραμμα του K και επισυνάπτουμε σε κάποιο σημείο της επιφάνειας που δημιουργείται μία ταινία Moebius, με τρόπο ανάλογο του συνδυαστικού άθροισματος των κόμβων (Σχήμα 1.26γ). (Το μόνο που αλλάζει στο διάγραμμα του κόμβου είναι η προσθήκη μίας νέας διασταύρωσης η οποία εξαλείφεται με μία κίνηση Reidemeister I.)

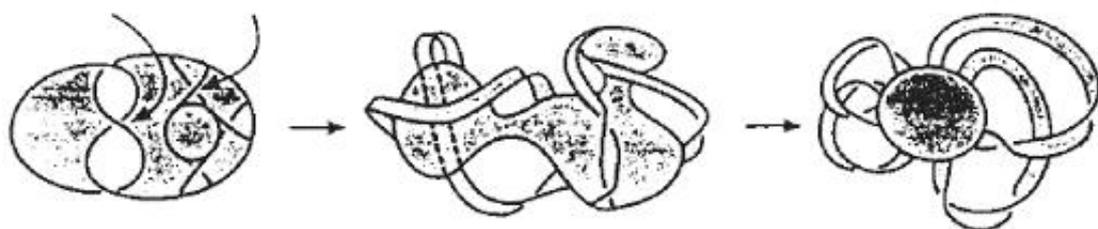
1.5.3 Pass-equivalence και αναλλοίωτη Arf

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε έναν ισοδύναμο Ορισμό του (1.49) της αναλλοιώτου Arf σε όρους pass-equivalence.

Θεώρημα 1.63. *Κάθε κόμβος K με μία συνιστώσα είναι pass-equivalent είτε του τετριμμένου κόμβου είτε του κόμβου trefoil.*

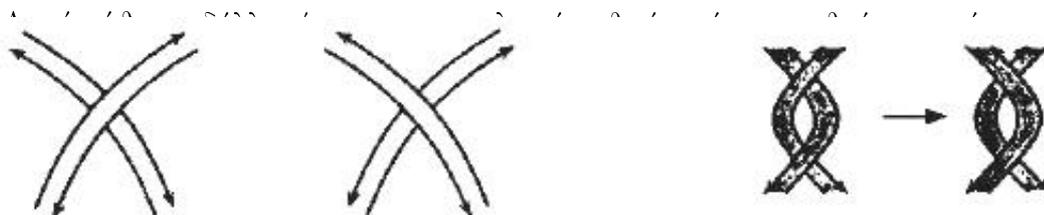
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα. Θα δείξουμε αρχικά ότι μία επιφάνεια Seifert του K μπορεί να πάρει την μορφή ενός δίσκου με προσαρμοσμένες κορδέλλες, καθεμία από τις οποίες έχει το πολύ μία συστροφή (curl). Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι αυτές οι κορδέλλες μπορούν να δημιουργήσουν ζεύγη και ότι κάθε κόμβος είναι pass-equivalent με το συνδυαστικό άθροισμα πεπερασμένου το πλήθος κόμβων trefoil και τετριμμένων κόμβων. Τέλος, θα δείξουμε ότι το άθροισμα αυτό ανάγεται χρησιμοποιώντας πάλι τη σχέση pass-equivalence, σε έναν τετριμμένο κόμβο ή στον trefoil.

- Έστω ένας κόμβος K και ένα διάγραμμά του. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Seifert προκύπτει μία προσανατολισμένη επιφάνεια με σύνορο τον K . Η επιφάνεια αυτή αποτελείται, όπως είδαμε, από ένα σύνολο δίσκων με προσαρμοσμένες κορδέλλες οι οποίες έχουν υποστεί κάποιες στροφές (twists). Επιλέγουμε μερικές από τις κορδέλλες αυτές να «ξεστρίψουν» και να πλατύνουν έτσι ώστε η επιφάνεια να μοιάζει με έναν μόνο δίσκο με προσαρμοσμένες κο-



Σχήμα 1.27: Η επιφάνεια Seifert: δίσκος με κορδέλλες

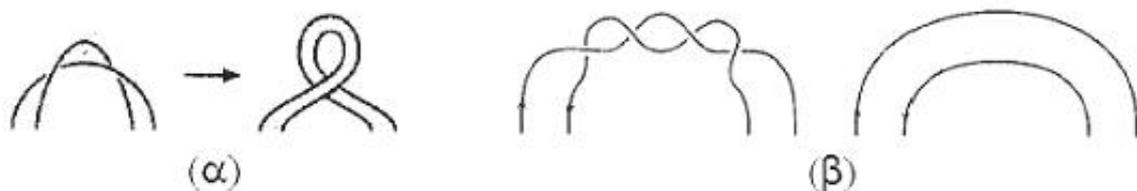
και η ίδια προσανατολισμένη, και τα σύνορά της θα έχουν αντίθετο προσανατολισμό. Περνώντας έτσι μία κορδέλλα πάνω ή κάτω από μία άλλη, κάνουμε ουσιαστικά μία pass-move στον κόμβο. Με τον τρόπο αυτό, μπορούμε να διαχωρίσουμε κορδέλλες οι οποίες είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους (linked). Επίσης, δημιουργούμε έναν νέο κόμβο K' , ο οποίος είναι pass-equivalent του αρχικού, καθώς και μία επιφάνεια Seifert του K' .



Σχήμα 1.28: Pass-move σε κορδέλλες

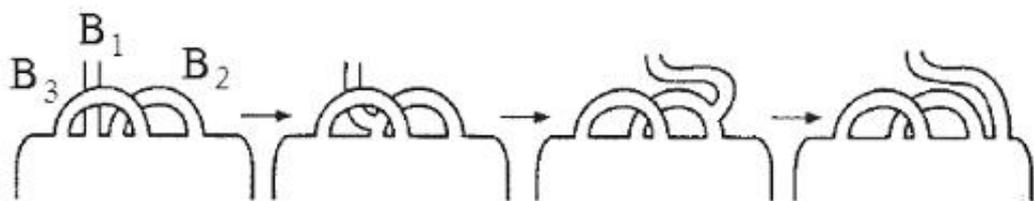
(half-twists). Κάθε δύο στροφές μπορούν να αντικατασταθούν από μία συστροφή (curl), όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.29α. Έστω ότι μία κορδέλλα έχει τέσσερις στροφές οι οποίες ανά δύο θα αντικατασταθούν από μία συστροφή. Χρησιμοποιώντας μία pass-move, είναι δυνατόν να καταργήσουμε τις δύο συστροφές (Σχήμα 1.29β). Τελικά, η επιφάνεια Seifert θα μοιάζει με έναν δίσκο με προσαρμοσμένες κορδέλλες, κάθε μία από τις οποίες έχει το πολύ μία συστροφή.

- Έστω τώρα ότι έχουμε δύο κορδέλλες B_1 και B_2 και το ένα άκρο κάθε μίας βρίσκεται ανάμεσα στα δύο άκρα μίας άλλης κορδέλλας B_3 . Όπως φαίνεται στο



Σχήμα 1.29: Στροφές στις κορδέλλες

Σχήμα 1.30, μετακινώντας το άκρο της B_1 κατά μήκος του συνόρου, μπορούμε να διατάξουμε τις κορδέλλες κατά τέτοιο τρόπο ώστε ακριβώς ένα άκρο μίας κορδέλας να βρίσκεται ανάμεσα στα δύο άκρα μίας οποιασδήποτε άλλης κορδέ-

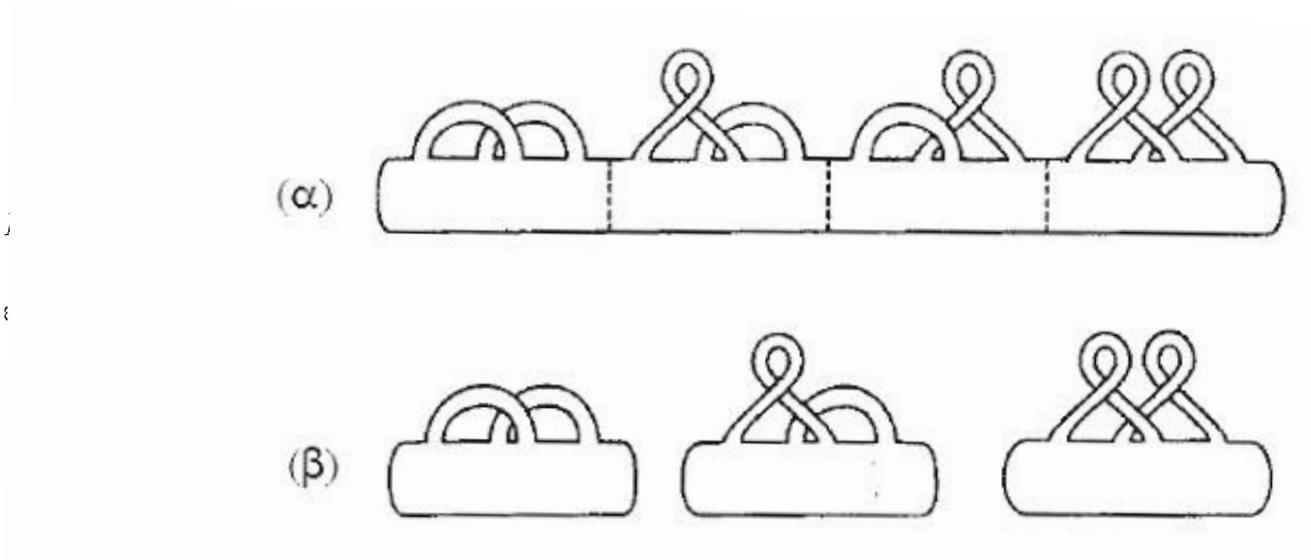


Σχήμα 1.30: Κάθε κορδέλλα έχει ακριβώς ένα άλλο άκρο στο εσωτερικό της την κατάσταση που φαίνεται στο Σχήμα 1.31: η εξωτερική κορδέλα μπορεί να κινηθεί κατά μήκος του συνόρου και να δημιουργηθούν δύο επιπλέον συνριακές συνιστώσες.)



Σχήμα 1.31: Εμφάνιση δύο επιπλέον συνιστωσών του K

- Διασπάμε τώρα την επιφάνεια Seifert σε κομμάτια, το καθένα από τα οποία έχει προσαρμοσμένες δύο κορδέλλες. Άρα, ο αρχικός κόμβος διασπάται σε ένα σύνολο παραγόντων. Το σύνολο των δύο πρώτων επιφανειών του Σχήματος 1.32β είναι ο τετριμμένος κόμβος, ενώ το σύνολο της τρίτης απεικονιζόμενης



Σχήμα 1.32: Μία διαφορετική μορφή της επιφάνειας Seifert

Άρα, μέχρι στιγμής έχουμε δείξει, ότι ο κόμβος K με τον οποίο ξεκινήσαμε, είναι pass-equivalent του συνδυαστικού αθροίσματος ενός πεπερασμένου το πλήθος τετριμμένων κόμβων και trefoils (δεξιόστροφων και αριστερόστροφων).



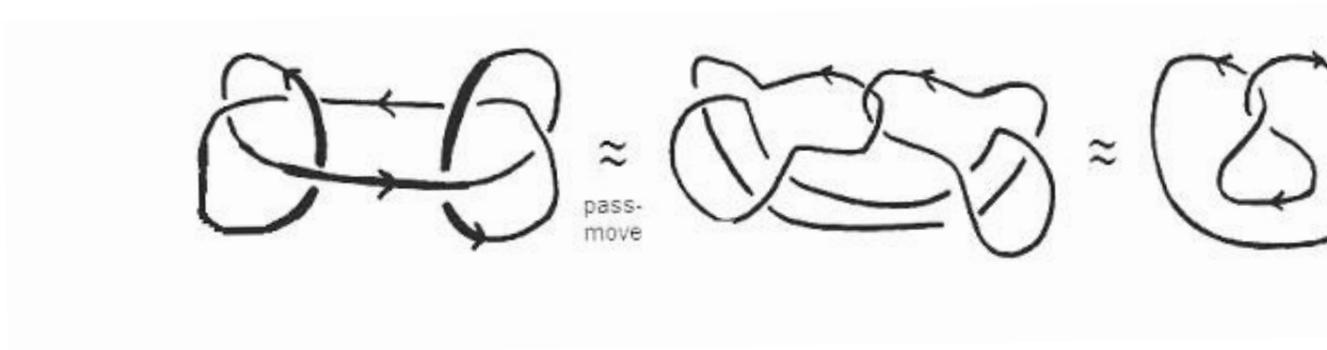
Σχήμα 1.33: Επιφάνειες Seifert του δεξιόστροφου και αριστερόστροφου trefoil

equivalent με τον τετριμμένο κόμβο. Παρατηρούμε ότι ο κόμβος trefoil είναι pass-equivalent της κατοπτρικής του εικόνας (Σχήμα 1.33).

Έστω τώρα ότι έχουμε το συνδυαστικό άθροισμα $K \# K'$ δύο κόμβων trefoil. Αντικαθιστούμε τον K' με μία pass-move από την κατοπτρική του εικόνα K^* , οπότε έχουμε το συνδυαστικό άθροισμα $K \# K^*$. Ο κόμβος αυτός είναι pass-equivalent του τετριμμένου κόμβου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.34, όπου έχουμε εφαρμόσει το Λήμμα 1.17.

Τελικά, αν το πλήθος των κόμβων trefoil στο συνδυαστικό άθροισμα του K είναι άρτιος αριθμός τότε ο K είναι pass-equivalent του τετριμμένου ενώ αν είναι περιττός, ο K είναι pass-equivalent του trefoil.

Απομένει να δείξουμε ότι ο τετριμμένος κόμβος και ο trefoil δεν είναι pass-equivalent. Αυτό προκύπτει εύκολα με την χρήση του πολυνύμου Conway και



Σχήμα 1.34: Σύνθεση δύο κόμβων trefoil

του Θεωρήματος 1.46, αφού υπολογίσαμε ότι $a_2(\text{trefoil}) = 1$ και $a_2(O) = 0$.

■

Ορισμός 1.64. Ορίζουμε την *αναλλοιώτη Arf* ενός κόμβου K με μία συνιστώσα, συμβ. $Arf(K)$, να ισούται με την μονάδα, αν ο K είναι pass-equivalent του trefoil και με το μηδέν, αν ο K είναι pass-equivalent του τετριμμένου κόμβου.

Θα δείξουμε ότι οι Ορισμοί 1.49 και 1.64 είναι ισοδύναμοι. Αρχίζουμε με ένα θεώρημα το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1.65. Έστω K και K' κόμβοι οι οποίοι διαφέρουν στην αλλαγή μίας διασταύρωσης και έστω L ο κρίκος που δημιουργείται με εξομάλυνση της διασταύρωσης. Έστω ακόμα $lk(L)$ ο αριθμός συνέλιξης του. Τότε οι αναλλοιώτες Arf των K, K' συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$Arf(K) - Arf(K') \equiv lk(L) \pmod{2} \quad (1.66)$$

Πόρισμα 1.67. Έστω ένας κόμβος K και έστω $A(K) = a_2(K) \pmod{2}$ η αναλλοιώτη Arf του K όπως ορίστηκε στον Ορισμό 1.49. Τότε $A(K) = Arf(K)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω κόμβοι K και K' όπως στο Θεώρημα 1.65. Από το Λήμμα 1.50 έχουμε: (υποθέτοντας χ.β.γ. ότι ο K έχει την θετική διασταύρωση): $A(K) - A(K') = lk(L)$. Η εξίσωση αυτή αρκεί για τον υπολογισμό της $A(K)$ ενός κόμβου γνωρίζοντας την τιμή της στον τετριμμένο κόμβο. Η αναλλοιώτη Arf όπως ορίστηκε στον Ορισμό 1.64 ικανοποιεί μία ταυτόσημη εξίσωση (σχέση (1.66)). Εφόσον οι δύο αναλλοιώτες έχουν την ίδια τιμή στον τετριμμένο κόμβο, η τιμή τους θα είναι ίδια για κάθε κόμβο. ■

Κεφάλαιο 2

Κόμβοι και κρίκοι σε γραφήματα

2.1 Στοιχεία από την Θεωρία Γραφημάτων

Ορισμός 2.1. Ένα γράφημα G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος δύο ζένων μεταξύ τους συνόλων $V \neq \emptyset$ και E , όπου το E είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των μη διατεταγμένων ζευγών του V .

Τα στοιχεία του συνόλου V ονομάζονται *κορυφές* του γραφήματος G , ενώ τα στοιχεία του συνόλου E ονομάζονται *πλευρές*. Τα σύνολα V και E θεωρούνται πεπερασμένα. Σύμφωνα με τον ορισμό, ένα γράφημα δεν περιέχει πλευρά που να συνδέει μια κορυφή με τον εαυτό της, ούτε δύο ή περισσότερες πλευρές που να έχουν τα ίδια άκρα.

Ορισμός 2.2. Δύο κορυφές ενός γραφήματος ονομάζονται *γειτονικές* αν υπάρχει πλευρά που να τις συνδέει.

Ορισμός 2.3. Ο *βαθμός* της κορυφής V ενός γραφήματος G , συμβ. $d(V)$, είναι ο αριθμός των πλευρών που διέρχονται από αυτή.

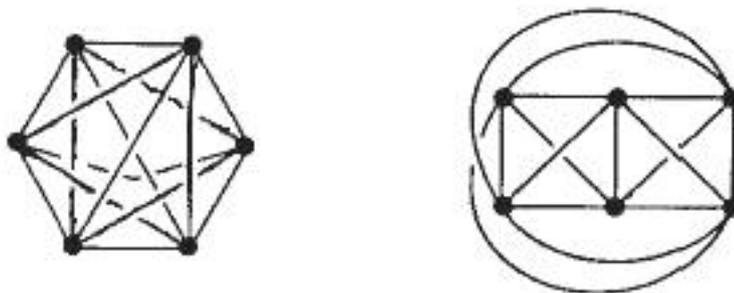
Ενδιαφερόμαστε για ομοιομορφισμούς στον \mathbb{R}^3 που αντιστοιχούν γραφήματα στον εαυτό τους. Αν G είναι ένα γράφημα, λέμε ότι ο h είναι ένας ομοιομορφισμός του (\mathbb{R}^3, G) , συμβ. $h : (\mathbb{R}^3, G) \rightarrow (\mathbb{R}^3, G)$ αν $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $h(G) = G$ και ο h αντιστοιχεί κορυφές σε κορυφές και πλευρές σε πλευρές.

Ορισμός 2.4. Ένα εμφυτευμένο γράφημα είναι η εικόνα ενός γραφήματος στον τρισδιάστατο χώρο μέσω ενός ομοιομορφισμού ενώ ένα αφηρημένο γράφημα θεωρείται ανεξάρτητο από οποιαδήποτε συγκεκριμένη εμφύτευσή του στο χώρο.

Ορισμός 2.5. Ένα γράφημα G ονομάζεται επίπεδο όταν μπορεί να εμφυτευθεί στο επίπεδο έτσι ώστε οι πλευρές του να μην τέμνονται.

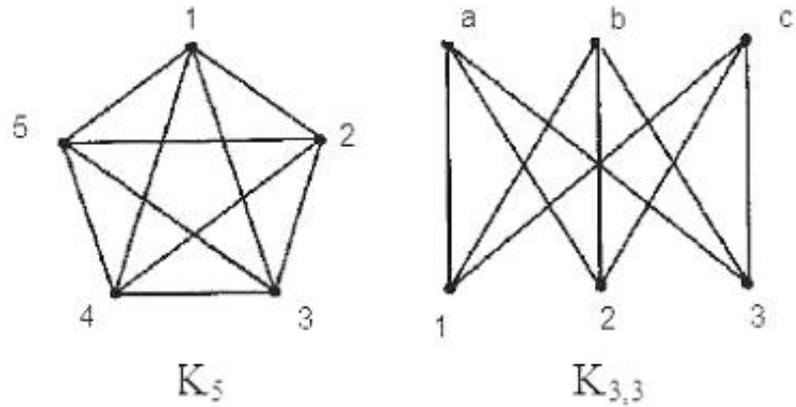
Ορισμός 2.6. Το γράφημα $G' = (V', E')$ λέμε ότι είναι υπογράφημα του $G = (V, E)$ αν $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$.

Ορισμός 2.7. Ένα πλήρες γράφημα με n κορυφές, συμβολικά K_n , ορίζεται ως ένα γράφημα τέτοιο ώστε κάθε κορυφή του να συνδέεται με κάθε άλλη κορυφή ακριβώς με μία πλευρά. Ένα πλήρες διμερές γράφημα με $n + m$ το πλήθος κορυφές, συμβ. $K_{n,m}$, ορίζεται το γράφημα που αποτελείται από δύο σύνολα κορυφών V_1 και V_2 με n και m το πλήθος κορυφές αντίστοιχα τ.ω.



Σχήμα 2.1: Δύο διαφορετικές εμφυτεύσεις του γραφήματος K_6

Παραθέτουμε στο σημείο αυτό ένα σημαντικό αποτέλεσμα της Θεωρίας Γραφημάτων το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.



Σχήμα 2.2: Τα γραφήματα $K_{3,3}$ και K_5

- Ορισμός 2.9.** 1. Ένας κύκλος σε ένα γράφημα G θεωρείται μία πεπερασμένη ακολουθία στην οποία εναλλάσσονται κορυφές και πλευρές του G με τις ακόλουθες ιδιότητες : η ακολουθία αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή, κάθε πλευρά που περιέχεται στην ακολουθία προσπίπτει στην κορυφή που προηγείται και στην κορυφή που έπεται και κάθε πλευρά και κορυφή εμφανίζονται ακριβώς μία φορά.
2. Ένας κύκλος *Hamilton* είναι ένας κύκλος που διέρχεται από όλες τις κορυφές του G (όχι όμως υποχρεωτικά και από όλες τις πλευρές του).

2.2 Το Θεώρημα Conway και Gordon

Στην παράγραφο αυτή θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το βασικό Θεώρημα των Conway και Gordon.

- Θεώρημα 2.10.** (Conway και Gordon, 1983) 1. Κάθε εμφύτευση του γραφήματος K_6 στον χώρο περιέχει έναν μη τετριμμένο κρίκο.
2. Κάθε εμφύτευση του γραφήματος K_7 στον χώρο περιέχει έναν μη τετριμμένο κόμβο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.10 προκύπτουν, όπως θα δούμε στη συνέχεια, πιο συγκεκριμένα αποτελέσματα : κάθε εμφύτευση

του K_6 περιέχει ένα ζεύγος κύκλων με περιττό αριθμό συνέλιξης και κάθε εμφύτευση του K_7 περιέχει έναν κύκλο Hamilton με μη μηδενική αναλλοίωτη Arf.

Η ιδέα της απόδειξης είναι ίδια για τα δύο μέρη του θεωρήματος. Θεωρούμε μία συγκεκριμένη εμφύτευση του εκάστοτε γραφήματος που να ικανοποιεί το συμπέρασμα. Στη συνέχεια θεωρούμε αναλλοίωτη ισοτοπίας η οποία είναι μη τετριμμένη στην εμφύτευση αυτή. Δείχνουμε ότι η τιμή της αναλλοίωτης δεν μεταβάλλεται υπό αλλαγή διασταυρώσεων το οποίο σημαίνει ότι η τιμή της αναλλοίωτης ισοτοπίας είναι ίδια σε κάθε εμφύτευση. Άρα, η αναλλοίωτη είναι μη τετριμμένη για κάθε εμφύτευση και επομένως κάθε εμφύτευση ικανοποιεί το συμπέρασμα. Θα προχωρήσουμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 2.10

Απόδειξη του 1. Ένα τρίγωνο σε μία εμφύτευση του K_6 ορίζεται ως ένας κύκλος ο οποίος αποτελείται από 3 διαδοχικές πλευρές του που έχουν τη μορφή τριγώνου στο γράφημα.

Παρατηρούμε ότι επιλέγοντας 3 κορυφές του γραφήματος μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα τρίγωνο από τις πλευρές που τις ενώνουν και ένα τρίγωνο από τις υπόλοιπες 3 κορυφές του. Δημιουργείται έτσι ένα ζεύγος ξένων (disjoint) μεταξύ τους τριγώνων.

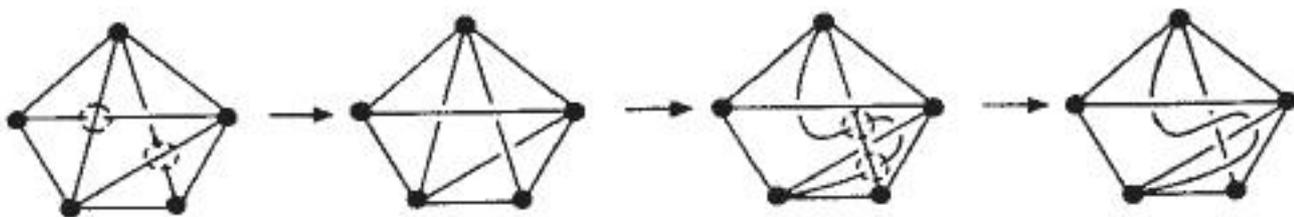
Ο αριθμός των επιλογών κορυφών για να δημιουργήσουμε ένα τρίγωνο στο γράφημα K_6 είναι $120 = 6 \cdot 5 \cdot 4$. Επειδή όμως δε λαμβάνουμε υπόψη τη σειρά επιλογής των κορυφών (το τρίγωνο $\{1, 2, 3\}$ είναι το ίδιο με το τρίγωνο $\{2, 1, 3\}$) θα πρέπει να διαιρέσουμε τον αριθμό επιλογών με τον αριθμό των δυνατών μεταθέσεων τριών αριθμών $|S_3| = 3! = 6$, δηλαδή έχουμε 20 επιλογές τριγώνων. Τέλος, κάθε τριάδα κορυφών καθορίζει και το δεύτερο τρίγωνο που σχηματίζεται από τις υπόλοιπες κορυφές, που σημαίνει ότι ο αριθμός των διαφορετικών ζευγών τριγώνων θα είναι $20 \div 2$. Άρα, σε κάθε εμφύτευση του

γραφήματος K_6 υπάρχουν 10 ζεύγη ξένων μεταξύ τους τριγώνων.

Έστω τώρα μία συγκεκριμένη εμφύτευση του K_6 . Ορίζουμε ως $U \in \mathbb{Z}^+$ το άθροισμα των απολύτων τιμών των αριθμών συνέλιξης για όλα τα 10 ζεύγη τριγώνων στην εμφύτευση και ορίζουμε V ως το ισοϋπόλοιπο του U modulo 2. Αν ισοτοπήσουμε το γράφημα στο χώρο, τότε ο αριθμός συνέλιξης των ζευγών τριγώνων δεν αλλάζει, όπως αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 1. Συνεπώς οι τιμές των U και V παραμένουν αμετάβλητες ως προς την ισοτοπία.

Για να περάσουμε τώρα σε μία άλλη εμφύτευση του K_6 , αρκεί να επιτρέψουμε την αλλαγή των διασταυρώσεων μεταξύ ξένων πλευρών αλλά και μεταξύ τμημάτων της ίδιας πλευράς καθώς και να θεωρήσουμε τις πλευρές «ελαστικές» ώστε να μπορούν να παραμορφώνονται. Με αυτόν τον τρόπο, όσο περίπλοκη κι αν είναι η εμφύτευση που αρχικά θεωρήσαμε, μπορούμε με διαδοχικές και πεπερασμένες το πλήθος αλλαγές διασταυρώσεων να καταλήξουμε στην αρχική εμφύτευση του γραφήματος K_6 .

Φυσικά με αυτήν τη διαδικασία, το γράφημα που προκύπτει δεν είναι ισοτοπικό με το αρχικό, είναι απλά ομοιομορφικό του. Θα δείξουμε ότι οι αλλαγές διασταυρώσεων δεν επηρεάζουν τον αριθμό V , δηλαδή η τιμή του είναι ιδιότητα



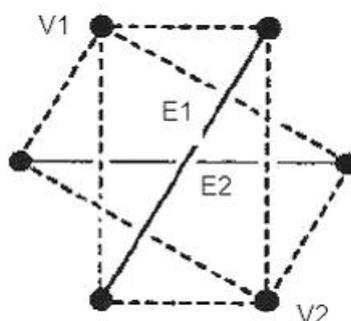
Σχήμα 2.3: Περνώντας από μία εμφύτευση σε μία άλλη

Υπάρχουν 3 τύποι διασταυρώσεων στο γράφημα : μεταξύ μίας πλευράς και του εαυτού της, μεταξύ δύο πλευρών με κοινή κορυφή και μεταξύ δύο μη διαδοχικών πλευρών. Εξετάζουμε στη συνέχεια κάθε περίπτωση χωριστά.

- Στην πρώτη περίπτωση, η διασταύρωση δεν μπορεί να είναι μεταξύ δύο ξέν-

ων τριγώνων αφού αυτά δεν μπορεί να έχουν κοινή πλευρά. Άρα το V δεν επηρεάζεται.

- Στην περίπτωση διαδοχικών κορυφών, οι δύο πλευρές δεν μπορεί να ανήκουν σε ξένα τρίγωνα, εφόσον δύο οποιαδήποτε τρίγωνα δεν έχουν κοινές κορυφές, οπότε και πάλι το V παραμένει σταθερό.
- Ενδιαφέρον παρουσιάζει η τρίτη περίπτωση, όπου έχουμε μία διασταύρωση μεταξύ μη διαδοχικών πλευρών E_1 και E_2 . Κάθε ζεύγος τριγώνων T_1 και T_2 τέτοια ώστε το T_1 να περιέχει την πλευρά E_1 και το T_2 την πλευρά E_2 θα

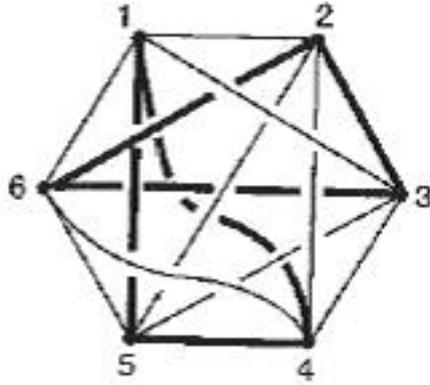


Σχήμα 2.4: Δύο μη διαδοχικές πλευρές στο K_6

σομε την κορυφή V_1 με την πλευρά E_1 ή την E_2 αντίστοιχα. Αυτά τα δύο ζεύγη είναι τα μόνα που περιέχουν τις πλευρές E_1 και E_2 . Αλλάζοντας τον τύπο της διασταύρωσης, ο αριθμός συνέλιξης κάθε ζεύγους θα αλλάξει κατά ± 1 , οπότε το U θα αλλάξει κατά ± 2 ή 0 (αν επιτρέψουμε να αλλάξουμε ταυτόχρονα και τον προσανατολισμό στα τρίγωνα). Άρα η τιμή του $V = U \bmod 2$ δε θα αλλάξει με την προσθαφαίρεση ενός άρτιου αριθμού στο U .

Αποδείξαμε ότι το V δεν επηρεάζεται από την αλλαγή του τύπου των διασταυρώσεων στην εμφύτευση του γραφήματος.

Παρατηρούμε τώρα ότι στην εμφύτευση του K_6 του Σχήματος 2.5, $U = 1$ και άρα $V = 1$. Θα ισχύει και $V = 1$ σε κάθε εμφύτευση του αφηρημένου γραφήματος K_6 . Αφού $V = 1$, δεν μπορεί να είναι $U = 0$. Συνεπώς, σε κάθε εμφύτευση του K_6 υπάρχει τουλάχιστον ένα ζεύγος ξένων μεταξύ τους



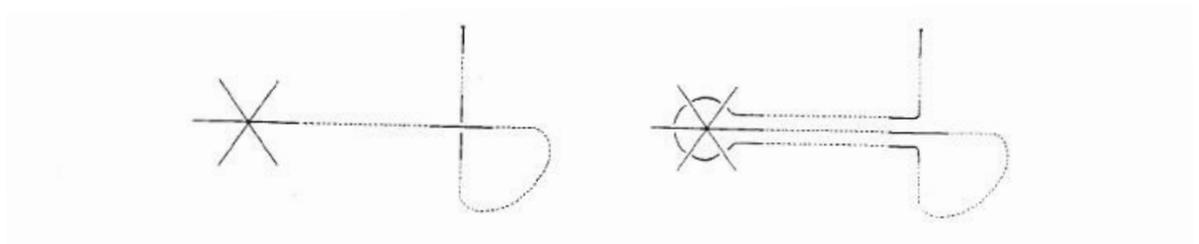
Σχήμα 2.5: Ένας κύκλος σε μία εμφύτευση του K_6

Απόδειξη του 2.

Για την απόδειξη του 2 του Θεωρήματος 2.10 χρειαζόμαστε μία πιο πολύπλοκη αναλλοίωτη από τον αριθμό συνέλιξης. Θα χρησιμοποιήσουμε την αναλλοίωτη Arf ενός κόμβου και το Λήμμα 1.50 του Κεφαλαίου 1.

Έστω μια συγκεκριμένη εμφύτευση του γραφήματος K_7 στον τρισδιάστατο χώρο. Ορίζουμε ως λ το άθροισμα των αναλλοιώτων Arf όλων των κύκλων Hamilton του γραφήματος. Οι κύκλοι αυτοί είναι $360 = \frac{1}{2} \cdot 6!$ (αφού δεν μας ενδιαφέρει η φορά του κύκλου) και στη συνέχεια ορίζουμε $\sigma = \lambda \bmod 2$. Προφανώς τα λ και σ είναι αναλλοίωτες ισοτοπίας του γραφήματος. Θα δείξουμε ότι η τιμή του σ παραμένει αναλλοίωτη με αλλαγή διασταυρώσεων, άρα ότι είναι αναλλοίωτη της εμφύτευσης του γραφήματος.

Όπως και στην περίπτωση του K_6 , θα πρέπει να εξετάσουμε τρεις περιπτώσεις διασταυρώσεων. Η αλλαγή της διασταύρωσης σε μία διασταύρωση μεταξύ μίας πλευράς με τον εαυτό της μπορεί να αντικατασταθεί με πέντε αλλαγές



Σχήμα 2.6: Αλλαγή διασταύρωσης σε μία πλευρά

Επίσης, η αλλαγή της διασταύρωσης μεταξύ πλευρών A , B με κοινή κορυφή μπορεί να γίνει ως εξής (βλ. Σχήμα 2.7): συστέλλουμε αρχικά την μία πλευρά, έστω για παράδειγμα την A , μετακινώντας τις κορυφές της προς την εν λόγω διασταύρωση παρασύροντας μαζί και το υπόλοιπο γράφημα και με τον ίδιο



Σχήμα 2.7: Αλλαγή διασταύρωσης μεταξύ διαδοχικών πλευρών

Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται βέβαια νέες διασταυρώσεις στο γράφημα, όμως αυτό που μας ενδιαφέρει είναι ότι το γράφημα του K_7 κοντά στη συγκεκριμένη διασταύρωση παίρνει τη μορφή του σχήματος (πιθανώς με αντίθετη διασταύρωση).

Όμοια, για να αλλάξουμε την διασταύρωση μεταξύ δύο διαφορετικών μη διαδοχικών πλευρών A , B μπορούμε να φέρουμε την διασταύρωση στη μορφή του Σχήματος 2.8 με το να συστέλλουμε κάθε πλευρά προς το σημείο της διασταύρωσης (πιθανώς ξανά με αντίθετη διασταύρωση). Άρα, όλα τα είδη διασταύρωσης ανάγονται στις δύο τελευταίες περιπτώσεις, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι το σ παραμένει αναλλοίωτο ως προς τα δύο αυτά είδη αλλαγής διασταυρώσεων.¹

Ας θεωρήσουμε τώρα μία από τις δύο αλλαγές διασταυρώσεων διαφορετικών πλευρών A , B . Προφανώς, το $Arf(C)$ παραμένει σταθερό, αν ο κύκλος Hamilton C δεν περιέχει και τις δύο πλευρές A , B . Έστω C κύκλος Hamilton τ.ω. $A, B \subset C$. Έστω $\epsilon(C) \in \mathbb{Z}_2$ η αλλαγή στην $Arf(C)$ που προκαλείται από την αλλαγή της διασταύρωσης. Από το Λήμμα 1.50 είναι $\epsilon(C) = lk(L_1, L_2)$,

¹Η απλοποίηση αυτή δεν είναι απολύτως απαραίτητη, διευκολύνει όμως την συνδυαστική διαδικασία στη συνέχεια της απόδειξης.



Σχήμα 2.8: Αλλαγή διασταύρωσης μεταξύ μη διαδοχικών πλευρών

όπου $L = L_1 \cup L_2$ είναι ο κρίκος που προσδιορίζεται από τον C και την αλλαγή διασταύρωσης όπως περιγράφεται στο λήμμα.

Θα εξετάσουμε χωριστά τις δύο περιπτώσεις διασταύρωσης.

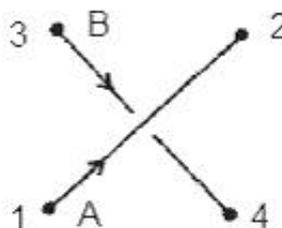
Πρώτη περίπτωση Έστω A, B διαδοχικές πλευρές με κοινή κορυφή. Τότε ο κρίκος $L = L_1 \cup L_2$ θα είναι όπως στο Σχήμα 2.7. (Επειδή οι πλευρές είναι διαδοχικές γνωρίζω ποιόν τύπο εξομάλυνσης θα έχω.) Ο κρίκος L_1 είναι ανεξάρτητος του C (αφού χρησιμοποιούμε μόνο μία πλευρά για να δημιουργήσουμε αυτή τη συνιστώσα του L). Τώρα $\epsilon(C) = lk(L_1, L_2) = \sum \omega(L_1, E)$ με την άθροιση να γίνεται πάνω σε όλες τις πλευρές $E \subset C (E \neq A, B)$. Η αλλαγή στο σ θα είναι $\sum \epsilon(C)$, με άθροιση πάνω σε όλους τους κύκλους Hamilton που περιέχουν τις A, B . Για κάθε πλευρά $E \in K_7, E \neq A, B$ ο αριθμός των κύκλων Hamilton που περιέχουν τις A, B, E είναι:

- 0, αν οι E, A, B έχουν μία κοινή κορυφή,
- 3!, αν η E είναι διαδοχική πλευρά μίας από τις A, B (αλλά όχι και των δύο)
- 12, σε κάθε άλλη περίπτωση.

Άρα, για κάθε πλευρά $E \neq A, B$ στο K_7 , το $\omega(L_1, E)$ εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορές στο άθροισμα $\sum \epsilon(C) = \sum_C \sum_E \omega(L_1, E) = \sum_E \sum_C \omega(L_1, E)$ άρα $\sum \epsilon(C) = 0$. Δηλαδή η τιμή του σ δεν μεταβάλλεται.

Δεύτερη περίπτωση Έστω A, B διαφορετικές πλευρές χωρίς κοινή κορυφή. Ο κρίκος $L = L_1 \cup L_2$ έχει τη μορφή του Σχήματος 2.8 και $\epsilon(C) = lk(L_1, L_2) = \sum \omega(E_1, E_2)$ αθροίζοντας πάνω σε όλα τα ζεύγη πλευρών $\{E_1, E_2\}$ του C με $(E_1, E_2 \neq A, B)$ τ.ω. $E_i \subset L_i, i = 1, 2$. Όμως, για κάθε ζεύγος $\{E_1, E_2\}$ πλευρών του K_7 (καμία από τις οποίες δεν είναι οι A, B), θα δείξουμε στη συνέχεια ότι ο αριθμός $\nu(E_1, E_2)$ των κύκλων Hamilton που περιέχουν τις A, B τέτοιοι ώστε $E_i \subset L_i, i = 1, 2$ (πιθανώς με επαναρίθμηση) είναι πάντα άρτιος. (Η απαίτηση $E_i \subset L_i$ είναι απαραίτητη ώστε να προκύπτει κρίκος και τα E_i να ανήκουν σε ξεχωριστές συνιστώσες του κρίκου).

Πράγματι: Ονομάζουμε τις κορυφές του K_7 με τους αριθμούς $1, 2, \dots, 7$ και συμβολίζουμε με (ij) την πλευρά με κορυφές i, j . Χωρίς βλάβη της



Σχήμα 2.9: Δεύτερη Περίπτωση

Τότε, χρησιμοποιώντας τη συμμετρία, η μόνη περίπτωση όπου $\nu(E_1, E_2) \neq 0$ είναι όταν οι E_1, E_2 αντιστοιχούν σε κάποια από τα παρακάτω ζεύγη πλευρών:

α. (23), (45) β. (23), (56) γ. (27), (45) δ. (27), (56)

Οπότε οι αντίστοιχοι κύκλοι Hamilton είναι :

α. (1234567), (1234576)

β. (1234567), (1234657), (1234756), (1234765)

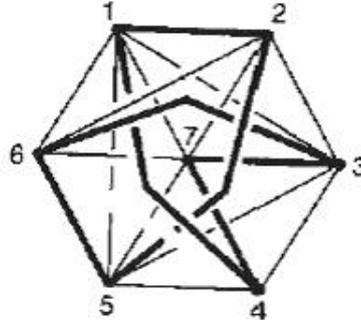
γ. (1273456), (1276345)

δ. (1273456), (1273465)

Σε κάθε άλλη περίπτωση προκύπτει κόμβος ή κρίκος με τις πλευρές E_1, E_2 να ανήκουν στην ίδια συνιστώσα.

Άρα, όπως και στην πρώτη περίπτωση, κάθε όρος $\omega(E_1, E_2)$ εμφανίζεται

άρτιο αριθμό φορών στο άθροισμα $\sum \epsilon(C)$. Δηλαδή, η τιμή του σ δεν αλλάζει.



Σχήμα 2.10: Ένας κόμβος σε μία εμφύτευση του K_7

Πόρισμα 2.11. Προφανώς, κάθε εμφύτευση ενός γραφήματος που περιέχει το K_6 σαν υπογράφημα του θα περιέχει έναν μη τετριμμένο κρίκο και αντίστοιχα, έναν μη τετριμμένο κόμβο αν έχει υπογράφημα του το K_7 . Έτσι κάθε εμφύτευση ενός πλήρους γραφήματος K_n , για κάθε $n > 6$, θα περιέχει έναν μη τετριμμένο κρίκο και έναν μη τετριμμένο κόμβο.

Καταλήγουμε έτσι στον ακόλουθο ορισμό :

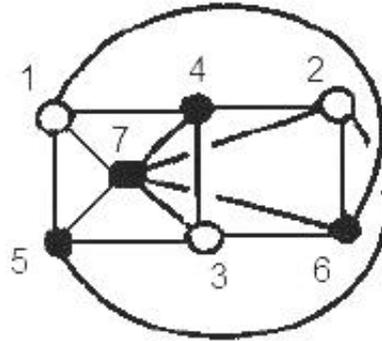
Ορισμός 2.12. Ένα γράφημα ονομάζεται εγγενώς (intrinsically) linked (knotted) αν κάθε εμφύτευσή του στο χώρο περιέχει έναν μη τετριμμένο κρίκο² (αντίστοιχα κόμβο). Η ιδιότητα δηλαδή αυτή είναι ιδιότητα του αφηρημένου γραφήματος.

Δηλαδή, στο Θεώρημα Conway και Gordon αποδείξαμε ότι το γράφημα K_6 είναι εγγενώς linked και ότι το γράφημα K_7 είναι εγγενώς knotted.

Πόρισμα 2.13. Το γράφημα $K_{3,3,1}$ είναι εγγενώς linked.

²Γενικά, ο κρίκος δεν αποτελείται κατ' ανάγκη από δύο τρίγωνα, αλλά από δύο κύκλους του γραφήματος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Το γράφημα $K_{3,3,1}$ προκύπτει από τρία σύνολα κορυφών, τα δύο από αυτά με τρεις κορυφές και το τρίτο με μία κορυφή. Όλες οι κορυφές σε καθένα από τα σύνολα αυτά συνδέονται με πλευρές με όλες τις κορυφές των



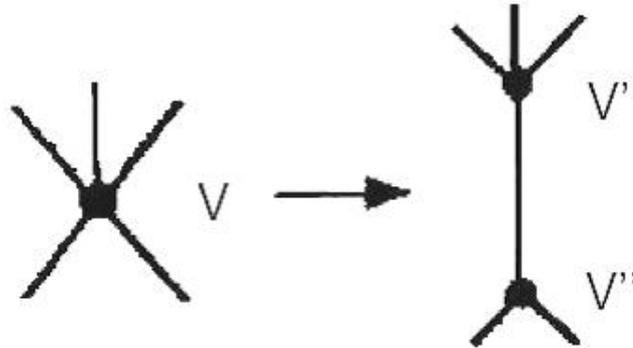
Σχήμα 2.11: Το γράφημα $K_{3,3,1}$

Συμβολίζουμε $\{1,2,3\}$ τις κορυφές της πρώτης ομάδας, $\{4,5,6\}$ τις κορυφές της δεύτερης ομάδας και 7 την τελευταία κορυφή. Στην περίπτωση που εξετάζουμε δε θα επιλέξουμε τρίγωνα, αφού κορυφές της ίδιας ομάδας δε συνδέονται με πλευρές, αλλά θα θεωρήσουμε κύκλους που δημιουργούνται με 3 κορυφές και τους αντίστοιχους κύκλους που προκύπτουν από τις υπόλοιπες 4 κορυφές. (Συνολικά δημιουργούνται $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$ ζεύγη κύκλων.)

Όπως και στην απόδειξη για το K_6 , η μόνη περίπτωση που το U επηρεάζεται είναι όταν αλλάζουμε τον τύπο της διασταύρωσης μεταξύ δύο μη διαδοχικών πλευρών. Έστω ότι επιλέγουμε τις πλευρές E_1, E_2 . Έχουμε δεσμεύσει 4 κορυφές και απομένουν άλλες 3. Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο δυνατούς συνδυασμούς πλευρών-κορυφών, όπως εύκολα διαπιστώνεται αν σκεφτούμε ότι μόνο κορυφές μεταξύ διαφορετικών ομάδων συνδέονται με πλευρές, οπότε το U θα μεταβληθεί κατά έναν άρτιο αριθμό. Στην συγκεκριμένη εμφύτευση, παρατηρούμε ότι οι κύκλοι $C_1 = \{1, 6, 7\}$, $C_2 = \{2, 3, 4, 5\}$ είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους (linked) με $lk(C_1, C_2) = \pm 1$. ■

Ορισμός 2.14. Με τον όρο *διαστολή* (*expansion*) ενός γραφήματος G εν-

νοούμε ένα νέο γράφημα G' , το οποίο προκύπτει από τον G διαστέλλοντας μία κορυφή του, δηλαδή αντικαθιστώντας μία κορυφή V με δύο νέες κορυφές V' και V'' που συνδέονται με μία νέα πλευρά, η οποία ξεκινά όπου και η παλιά πλευρά



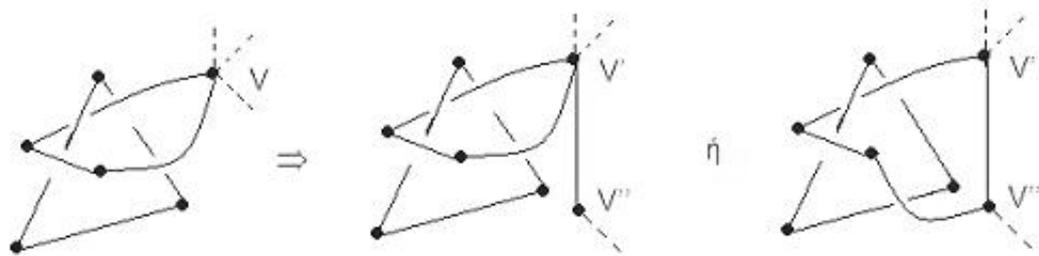
Σχήμα 2.12: Διαστολή

Πόρισμα 2.15. Η διαστολή ενός εγγενώς *linked* (*knotted*) γραφήματος είναι εγγενώς *linked* (αντίστ. *knotted*).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θα αποδείξουμε το πόρισμα στην περίπτωση των εγγενώς *linked* γραφημάτων. Η απόδειξη που αφορά στα εγγενώς *knotted* γραφήματα είναι όμοια.

Έστω ένα γράφημα G που είναι εγγενώς *linked* και θεωρώ μία διαστολή μίας κορυφής του V . Υπάρχει μία εμφύτευση του G με τουλάχιστον ένα ζεύγος συνδεδεμένων μεταξύ τους (*linked*) κύκλων. Αν η κορυφή V δεν ανήκει σε κανένα από αυτούς τους κύκλους, τότε προφανώς η διαστολή δεν επηρεάζει τον αριθμό συνέλιξης τους. Αν η κορυφή V ανήκει σε έναν από αυτούς έχω, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.13, τις ακόλουθες περιπτώσεις μετά τη διαστολή :

Οι δύο πλευρές που κατέληγαν στην V να καταλήγουν στην ίδια νέα κορυφή ή να καταλήγει η κάθε μία στις V' και V'' αντίστοιχα. Προφανώς, ο αριθμός συνέλιξης των κύκλων δεν αλλάζει σε καμία από τις δύο περιπτώσεις. (Στην δεύτερη περίπτωση, το μόνο που αλλάζει είναι η προσθήκη της νέας πλευράς $V'V''$ στον έναν από τους δύο κύκλους.) ■



Σχήμα 2.13: Ένας κρίκος κατά την διαστολή

Ο Miki Shimabara απέδειξε το 1988 το παρακάτω θεώρημα, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 2.16. Το γράφημα $K_{5,5}$ είναι εγγενώς knotted.

2.3 Ελαχιστότητα και χαρακτηρισμός των εγγενώς linked γραφημάτων

Είδαμε ότι για κάθε $n > 6$, το πλήρες γράφημα K_n είναι ταυτόχρονα εγγενώς linked και εγγενώς knotted. Θα θέλαμε να γνωρίζουμε ποια είναι τα απλούστερα δυνατά γραφήματα τα οποία είναι είτε εγγενώς linked είτε εγγενώς knotted. Περιγράφουμε μαθηματικά την έννοια του «ελαχίστου» γραφήματος χρησιμοποιώντας τον όρο minor minimal.

Ορισμός 2.17. Με τον όρο συστολή σε ένα γράφημα ονομάζουμε τη διαδικασία ταύτισης δύο γειτονικών κορυφών του γραφήματος. Η συστολή είναι η αντίστροφη διαδικασία της διαστολής την οποία περιγράψαμε στον Ορισμό 2.14.

Ορισμός 2.18. Έστω G ένα γράφημα. Λέμε ότι το H είναι minor του G , αν το H είναι υπογράφημα του G ή προκύπτει από το G με συστολή ενός πεπερασμένου αριθμού πλευρών του G . Για παράδειγμα, το γράφημα K_6 είναι minor του K_7 γιατί ξεκινώντας από το K_7 και διαγράφοντας όλες τις πλευρές που καταλήγουν στην κορυφή 7 εκτός από μία και συστειλούμε την πλευρά αυτή θα προκύψει το γράφημα K_6 .

Συμβολίζουμε $G - e$ το γράφημα που προκύπτει από το G με διαγραφή της πλευράς e και G/e το γράφημα που προκύπτει συστέλλοντας την πλευρά e του G .

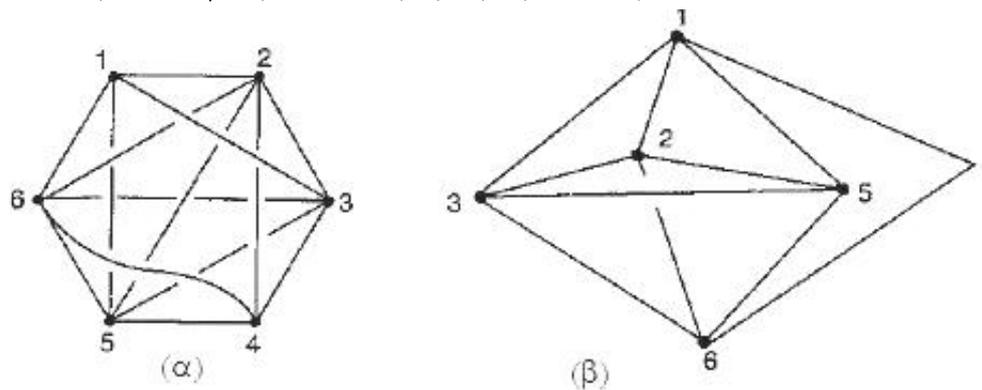
Οι Motwani, Raghunathan και Saran (1988) απέδειξαν το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.19. *Αν ένα γράφημα H είναι minor ενός γραφήματος G και το H είναι εγγενώς linked ή knotted, τότε και το G είναι αντίστοιχα εγγενώς linked ή knotted.*

Ορισμός 2.20. Ένα γράφημα G είναι minor minimal ως προς μία ιδιότητα, αν το G έχει την ιδιότητα αυτή και κανένα minor γραφήμά του δεν την έχει.

Πρόταση 2.21. Το γράφημα K_6 είναι minor minimal ως προς την ιδιότητα εγγενώς linked.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για να δείξουμε το ζητούμενο, διαγράφουμε μία πλευρά e του



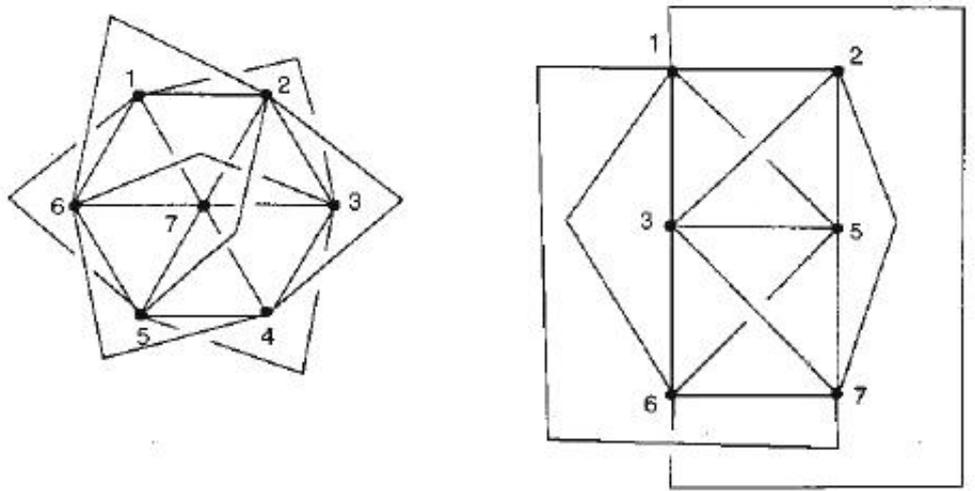
Σχήμα 2.14: Εμφυτεύσεις χωρίς κρίκους minor γραφημάτων του K_6

Στο Σχήμα 2.14α έχουμε διαγράψει την πλευρά $(1,4)$ και εμφυτεύσαμε το υπόλοιπο γράφημα όπως στο Σχήμα 2.5. Ο κρίκος με συνιστώσες $\{1, 5, 4\}$ και $\{2, 6, 3\}$ ήταν ο μόνος μη τετριμμένος σε αυτή την εμφύτευση του K_6 . Άρα το γράφημα του σχήματος δεν περιέχει κανέναν μη τετριμμένο κρίκο.

Στο Σχήμα 2.14β δημιουργούμε μια εμφύτευση του K_6 συστέλλοντας την πλευρά $(3,4)$. Συστέλλοντας την πλευρά αυτή καταλήγουμε να έχουμε δύο πλευρές από την κορυφή 3 προς κάθε άλλη κορυφή. Για να έχουμε γράφημα

(όπως ορίστηκε στην αρχή του κεφαλαίου) παραλείπουμε μία πλευρά από κάθε τέτοιο ζεύγος πλευρών. Παρατηρούμε ότι αυτό το γράφημα δεν περιέχει κανέναν μη τετριμμένο κρίκο.

Τέλος, κάθε minor του K_6 είναι ουσιαστικά minor ενός από τα δύο προηγούμενα γραφήματα και επομένως έχει εμφύτευση που περιέχει μόνο τετριμ-

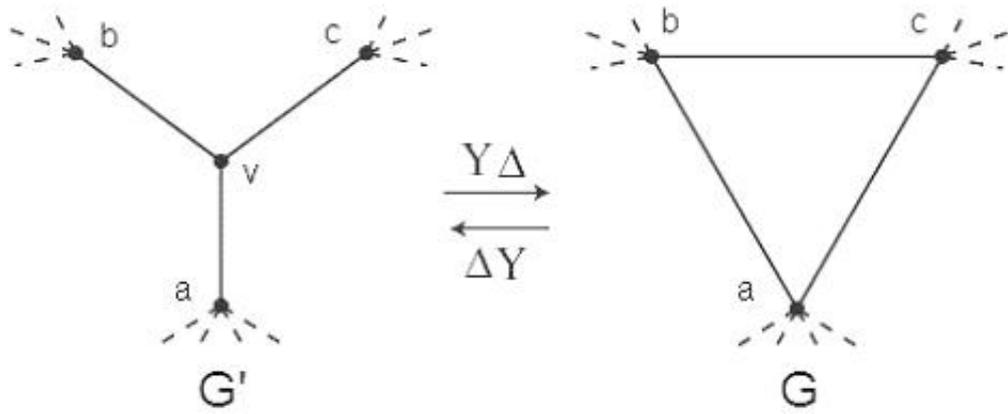


Σχήμα 2.15: Εμφυτεύσεις χωρίς κόμβους minor γραφημάτων του K_7

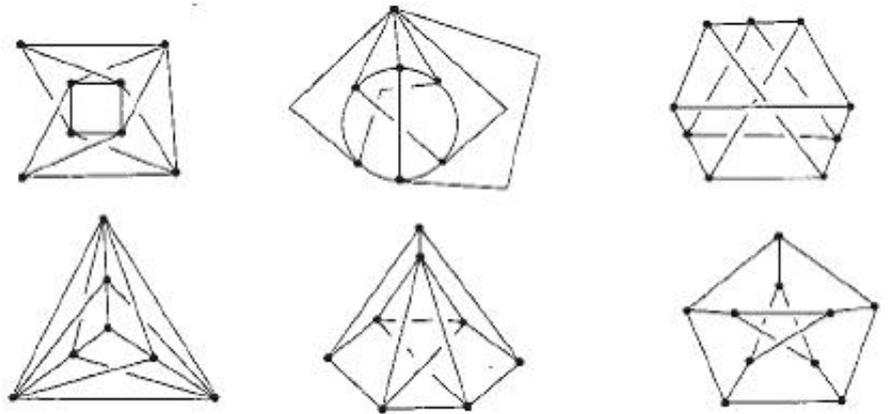
Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι κανένα από τα δύο αυτά γραφήματα δεν περιέχει έναν μη τετριμμένο κόμβο. Άρα κάθε minor του K_7 έχει μία εμφύτευση χωρίς κόμβους. ■

Θα εισάγουμε τώρα ένα νέο είδος κίνησης σε ένα γράφημα.

Ορισμός 2.23. Έστω ένα γράφημα G το οποίο περιέχει έναν κυκλικό δίσκο με ακριβώς τρεις κορυφές, έστω a, b, c . Έστω G' το γράφημα το οποίο ταυτίζεται με το G εκτός του κύκλου $\{a, b, c\}$ και ο οποίος αντικαθίσταται από μία νέα κορυφή v βαθμού 3 και τρεις νέες πλευρές (av) , (bv) και (cv) . Λέμε ότι το G' προκύπτει από το G με μία κίνηση $\Delta\Upsilon$. (Αντίστοιχα, το G προκύπτει από το G' με μία κίνηση $\Upsilon\Delta$.)



Σχήμα 2.16: Κινήσεις ΔY και $Y\Delta$



Σχήμα 2.17: Η οικογένεια Petersen

Ο Sachs (1983) απέδειξε χρησιμοποιώντας μία μέθοδο παρόμοια αυτής των Conway-Gordon το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.24. Το γράφημα K_6 καθώς και τα γραφήματα που ανήκουν στην οικογένεια Petersen είναι εγγενώς linked και μάλιστα *minor minimal* ως προς την ιδιότητα αυτή.

Δεν θα δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.24 αλλά στο Πρόγραμμα 2.13 έχουμε καλύψει μία από τις περιπτώσεις.

Στη συνέχεια παραθέτουμε το Θεώρημα των Robertson, Seymour και Thomas (1993) το οποίο αποτελεί χαρακτηρισμό των εγγενώς linked γραφημάτων.

Θεώρημα 2.25. (Robertson κ.α.) Έστω ένα γράφημα G . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Το G έχει μία εμφύτευση στον \mathbb{R}^3 που δεν περιέχει κανένα μη τετριμμένο κρίκο.
2. Το G έχει μία εμφύτευση στον \mathbb{R}^3 τ.ω. κάθε κύκλος του G ορίζει έναν δίσκο στο συμπλήρωμα του G .
3. Το G δεν έχει *minor* που να ανήκει στην οικογένεια *Petersen*.

Πόρισμα 2.26. Κάθε γράφημα εγγενώς *knotted* είναι και εγγενώς *linked*.

2.4 Εγγενώς *knotted* γραφήματα

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι τα γραφήματα της οικογένειας *Petersen* που προκύπτουν από το K_6 με κινήσεις ΔY είναι *minor minimal* ως προς την ιδιότητα εγγενώς *linked* και χαρακτηρίζουν τα εγγενώς *linked* γραφήματα. Είναι φυσιολογικό να εξετάσουμε τώρα αν τα γραφήματα που είναι *minor minimal* ως προς την ιδιότητα εγγενώς *knotted* είναι ακριβώς αυτά που προκύπτουν από το γράφημα K_7 με κινήσεις ΔY (ή $Y\Delta$). Θα δούμε ότι αυτό δεν ισχύει.

Ξεκινάμε με ένα Λήμμα των Motwani κ.α. (1988) που αποδεικνύει ότι οι κινήσεις ΔY σε οποιοδήποτε γράφημα διατηρούν τις ιδιότητες εγγενώς *linked* και *knotted*.

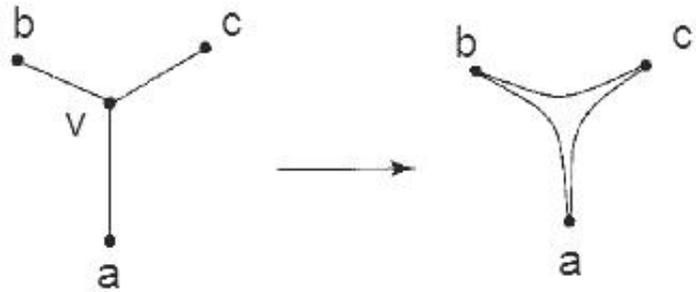
Λήμμα 2.27. Έστω γράφημα G και έστω ότι το G' προκύπτει από το G με μία κίνηση ΔY . Αν το G είναι εγγενώς *linked* (*knotted*) τότε και το G' είναι εγγενώς *linked* (αντ. *knotted*).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θα αποδείξουμε το λήμμα στην περίπτωση ενός εγγενώς *knotted* γραφήματος. Η απόδειξη για τα εγγενώς *linked* γραφήματα είναι όμοια.

Έστω G εγγενώς *knotted* γράφημα και έστω ότι το G' προκύπτει από το G αντικαθιστώντας το τρίγωνο με πλευρές (ab) , (ac) , (bc) με μία νέα κορυφή v που έχει πλευρές (av) , (bv) , (cv) .

Υποθέτουμε ότι το G' δεν είναι εγγενώς *knotted*. Άρα το G' έχει μια εμφύτευση στον \mathbb{R}^3 τ.ω. κανένας κύκλος του δεν σχηματίζει κόμβο. Σε

αυτή την εμφύτευση του G' επιλέγουμε μία μικρή κυλινδρική περιοχή σε σχήμα Υ , η οποία περιέχει τις (av) , (bv) , (cv) και δεν τέμνει κανένα άλλο τμήμα του γραφήματος. Δημιουργούμε μία εμφύτευση του C αντικαθιστώντας τις πλευρές



Σχήμα 2.18: Μια κυλινδρική περιοχή σχήματος Υ

Έχουμε υποθέσει ότι το G είναι εγγενώς knotted, άρα υπάρχει κύκλος C που δημιουργεί μη τετριμμένο κόμβο σε αυτή την εμφύτευση του G . Αν ο κύκλος C δεν περιέχει καμία από τις πλευρές (ab) , (bc) , (ac) , τότε ο κόμβος C περιέχεται και στην αντίστοιχη εμφύτευση του G' , οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως ο C περιέχει τουλάχιστον μία από τις (ab) , (bc) , (ac) .

Υποθέτουμε ότι περιλαμβάνει μόνο μία από αυτές, χ.β.γ. την (ab) . Ορίζουμε C' τον κύκλο στο G' που ταυτίζεται με τον C εκτός από το ότι η πλευρά (ab) έχει αντικατασταθεί από τις (av) , (bv) του G' . Λόγω κατασκευής της συγκεκριμένης εμφύτευσης του G , ο κύκλος C' είναι ισοτοπικός του C . Δηλαδή ο μη τετριμμένος κόμβος C' περιέχεται στο G' , άτοπο.

Αν τώρα ο C περιέχει δύο από τις πλευρές (ab) , (bc) , (ac) καταλήγουμε με όμοιο τρόπο σε άτοπο. Τέλος, αν ο C περιείχε και τις τρεις πλευρές, τότε ο C δεν θα ήταν μη τετριμμένος κόμβος (λόγω της κατασκευής του κύκλου (abc)). Συνεπώς το γράφημα G' είναι εγγενώς knotted. ■

Ξεκινάμε τώρα από το γράφημα K_7 και εφαρμόζοντας διαδοχικά κινήσεις $\Delta\Upsilon$ προκύπτουν δεκατρία διαφορετικά γραφήματα.³ Σύμφωνα με το Λήμμα

³Μία εικόνα των γραφημάτων αυτών υπάρχει στο βιβλίο Kohara, T., S. Suzuki, Some

2.27 αυτά τα γραφήματα είναι εγγενώς knotted.

Θεώρημα 2.28. (Kohara-Suzuki, 1992) Τα 13 γραφήματα που προκύπτουν από το γράφημα K_7 μέσω κινήσεων ΔY είναι *minor minimal* ως προς την ιδιότητα εγγενώς knotted.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.28, την οποία δεν θα παραθέσουμε βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.29. Έστω γράφημα G το οποίο είναι *minor minimal* ως προς την ιδιότητα εγγενώς knotted και έστω G' το γράφημα που προκύπτει από το G με μία κίνηση ΔY στο τρίγωνο (abc) . Έστω ότι για κάθε πλευρά e του G διάφορη των $(ab), (bc), (ac)$ ισχύουν τα ακόλουθα:

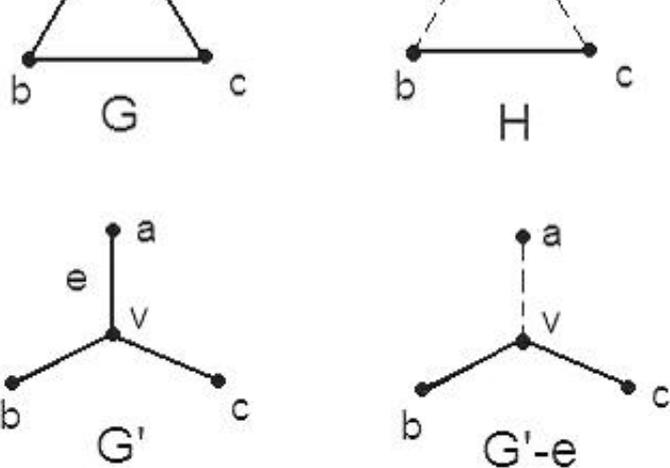
- (1) υπάρχει εμφύτευση του $G - e$ που δεν περιέχει κανέναν κόμβο και τέτοια ώστε το τρίγωνο (abc) να ορίζει ένα δίσκο και
- (2) υπάρχει εμφύτευση του G/e που δεν περιέχει κανέναν κόμβο και τέτοια ώστε το τρίγωνο (abc) να ορίζει ένα δίσκο.

Τότε και το G' είναι *minor minimal* ως προς την ιδιότητα εγγενώς knotted.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από το Λήμμα 2.27 γνωρίζουμε ότι το G' είναι εγγενώς knotted. Ζητώ να δείξω ότι αν το γράφημα H είναι *minor* του G' τότε υπάρχει εμφύτευση του H χωρίς κόμβους. Κάθε *minor* του G' είναι είτε $G' - e$, είτε G'/e είτε *minor* αυτών για κάποια πλευρά e . Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε πλευρά e υπάρχουν εμφυτεύσεις των $G' - e$ και G'/e χωρίς κόμβους.

Έστω e μία πλευρά του G' . Υποθέτουμε αρχικά ότι η e είναι μία από τις $(av), (bv), (cv)$. Χ.β.γ. $e = (av)$, όπου v η κορυφή που προστέθηκε μετά την κίνηση ΔY . Έστω ακόμη H το γράφημα που προκύπτει από το G αφαιρώντας τις πλευρές $(ab), (ac)$.

remarks on knots and links in spatial graphs, Knots90, Walter de Gruyter, New York, 1992



Σχήμα 2.19: Τα γραφήματα G , G' , H , $G' - e$

Τα γραφήματα $G' - e$ και H είναι (σαν σύνολα) ομοιομορφικά πορόλο που σαν γραφήματα το τμήμα στο $G' - e$ από την κορυφή b στην c αποτελείται από δύο πλευρές (bv) , (cv) ενώ στο H από μία μόνο πλευρά, την (bc) . Το H είναι *minor* του G και επομένως έχει εμφύτευση χωρίς κόμβους. Τοποθετώντας στο H μία κορυφή v οπουδήποτε στο εσωτερικό της πλευράς (bc) δημιουργούμε ένα γράφημα ομοιομορφικό του $G' - e$. Αυτό το γράφημα είναι εμφύτευση του $G' - e$, η οποία δεν περιέχει κανένα κόμβο. Όμοια το γράφημα G'/e είναι ταυτίζεται με το $G - (bc)$, το οποίο ως *minor* του G έχει μία εμφύτευση χωρίς κόμβους.

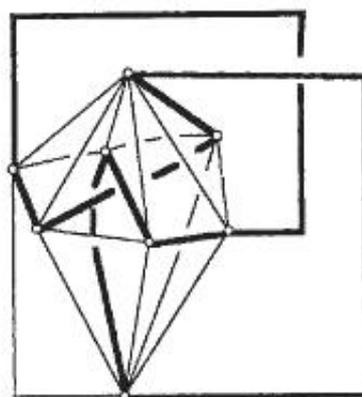
Υποθέτουμε τώρα ότι $e \neq (av)$, (bv) , (cv) . Τότε η e είναι και πλευρά του G και είναι διάφορη των (ab) , (ac) , (bc) . Ξεκινώντας από την εμφύτευση του $G - e$ της πρώτης υπόθεσης, δημιουργούμε μία εμφύτευση του $G' - e$ αφαιρώντας τις πλευρές (ab) , (ac) , (bc) και προσθέτοντας μέσα στον δίσκο D του τριγώνου (abc) μία κορυφή v και τις πλευρές (av) , (bv) , (cv) .

Έστω ότι αυτή η εμφύτευση του $G' - e$ περιείχε έναν κόμβο K' . Επειδή δεν υπάρχει κανένας κόμβος στο $G - e$, ο κόμβος K' θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μία από τις πλευρές (av) , (bv) , (cv) . Επειδή ο κόμβος K' είναι κλειστή καμπύλη δεν μπορεί να περιέχει μόνο μία από αυτές και εξ' ορισμού δεν μπορεί να περιέχει και τις τρεις. Άρα περιλαμβάνει ακριβώς δύο από αυτές, χ.β.γ. έστω τις (av) , (bv) . Τότε όμως υπάρχει κύκλος K στο $G - e$ ο οποίος ταυτίζεται με τον K' εκτός από το ότι οι πλευρές (av) , (bv) έχουν αντικατασταθεί από την (ab) . Από την κατασκευή του $G' - e$ ο K είναι ισοτοπικός του K' και άρα ο K είναι μη τετριμμένος. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση και συνεπώς η εμφύτευση αυτή του $G' - e$ δεν περιέχει κανένα κόμβο.

Όμοια δείχνουμε ότι υπάρχει εμφύτευση του G'/e χωρίς κόμβους. ■

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Ένα ανάλογο λήμμα μπορεί να διατυπωθεί και για γραφήματα που είναι *minor minimal* ως προς την ιδιότητα εγγενώς *linked*.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.28 περιλαμβάνει πολλές περιπτώσεις. Συνοπτικά, παρατηρούμε ότι τα τέσσερα από τα δεκατρία γραφήματα προκύπτουν από τα υπόλοιπα εννέα με μία μόνο κίνηση ΔY . Άρα, για κάθε ένα από τα εννέα



Σχήμα 2.20: Μία εμφύτευση του $K_{3,3,1,1}$ με έναν κόμβο

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Το θεώρημα των Kohara και Suzuki δεν αποτελεί χαρακτηρισμό των εγγενώς *knotted* γραφημάτων σε αντίθεση με το Θεώρημα 2.25. Ο J. Foisy (2002) απέδειξε το παρακάτω θεώρημα το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 2.30. Το γράφημα $K_{3,3,1,1}$ είναι *minor minimal* ως προς την ιδιότητα εγγενώς *knotted* και όμως δεν είναι κάποιο από τα γραφήματα που προκύπτουν από το K_7 μέσω κινήσεων ΔY .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Προφανώς και τα γραφήματα τα οποία προκύπτουν από το $K_{3,3,1,1}$ με κινήσεις ΔY και $Y\Delta$ θα είναι εγγενώς *knotted*.

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογές στην Στερεοχημική Τοπολογία

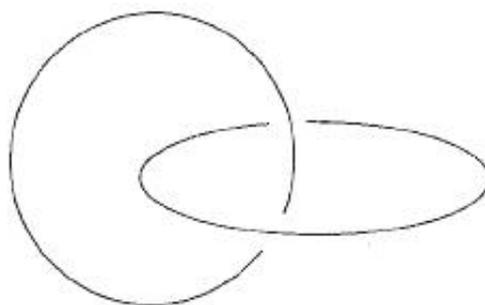
3.1 Εισαγωγή

Στερεοχημεία είναι ο κλάδος της Χημείας που ασχολείται με τη μελέτη της τρισδιάστατης δομής των μορίων. Μέχρι πριν από σαράντα χρόνια τα γραφήματα των μοριακών δομών των γνωστών μέχρι τότε μορίων ήταν επίπεδα, οπότε η μελέτη τους απαιτούσε μόνο τη γνώση της γεωμετρίας τους και όχι της τοπολογικής τους δομής. Σχετικά πρόσφατα όμως συνετέθησαν στο εργαστήριο μόρια με δομή κόμβων, κρίκων και γενικά μη επίπεδων γραφημάτων, των οποίων η μελέτη απαιτεί τη χρήση αποτελεσμάτων της Τοπολογίας. Τέτοιου είδους μοριακές δομές συναντώνται όμως και στη φύση, σε πρωτεΐνες και στα μόρια του DNA. Το κίνητρο για τη σύνθεση τέτοιων τοπολογικών δομών είναι η επιθυμία σύνθεσης νέων τύπων μορίων, τα οποία πιθανώς να έχουν ασυνήθιστες ιδιότητες, καθώς και η προσδοκία εύρεσης νέων τεχνικών για τη σύνθεση μορίων.

Το *μοριακό γράφημα* ενός μορίου είναι ένα μοντέλο του μορίου το οποίο παριστάνεται με ένα γράφημα εμφυτευμένο στον τρισδιάστατο χώρο με τις κο-

ρυφές του να αντιστοιχούν σε άτομα ή ομάδες ατόμων και τις πλευρές του σε χημικούς δεσμούς μεταξύ ατόμων ή σε αλυσίδες αποτελούμενες από άτομα. Ένα γράφημα στον τρισδιάστατο χώρο θεωρείται *τοπολογικά σύνθετο* (*topologically complex*), αν δεν μπορεί να ισοτοπηθεί στο επίπεδο ακόμα και με την υπόθεση πλήρους ελαστικότητας.

Το πρώτο τοπολογικά σύνθετο μόριο που συνετέθη (και αποδείχθηκε ότι ήταν σύνθετο) ήταν ένα ζεύγος linked κρίκων, γνωστά στη χημική βιβλιογραφία ως *catenanes*, το 1961 από τους Frisch και Wasserman. Αυτό το μόριο που έχει την δομή ενός κρίκου Hopf όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1 δεν έχει δεσμούς

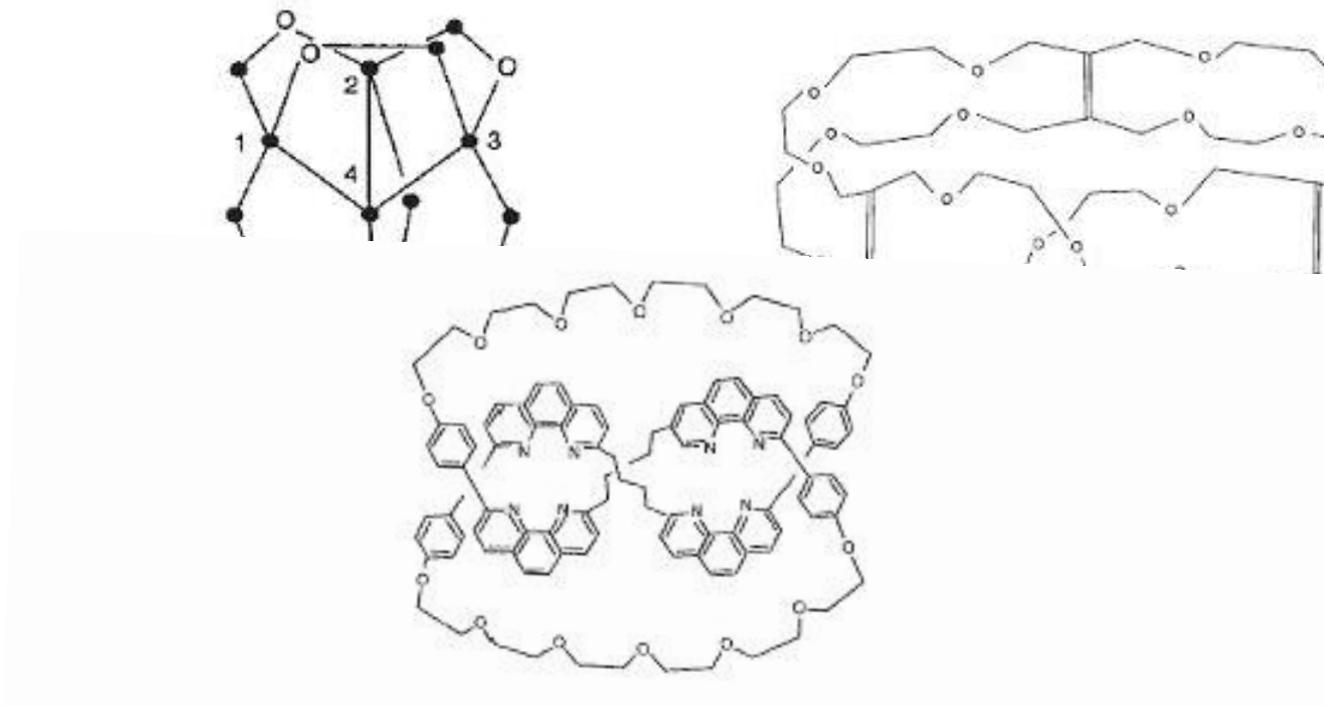


Σχήμα 3.1: Κρίκος Hopf

Ένα ακόμη σημαντικό αποτέλεσμα είναι η σύνθεση του μορίου Simons-Raquette το 1981. Το μοριακό του γράφημα έχει σαν υπογράφημά του το πλήρες γράφημα K_5 , οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Kuratowski το γράφημα του μορίου δεν γίνεται να εμψυτευθεί στο επίπεδο.

Το 1982 συνετέθη από τους Walba, Richards και Haltiwanger το πρώτο μόριο με δομή σκάλας Moebius με τρεις συνδέσεις (rungs). Και αυτό το μόριο είναι μη επίπεδο αφού έχει σαν υπογράφημά του το γράφημα $K_{3,3}$.

Τέλος, ο πρώτος μοριακός κόμβος συνετέθη το 1989 από τους Dietrich-Buchecker και Sauvage και έχει τη μορφή ενός trefoil. Το μόριο αυτό είναι σαν γράφημα επίπεδο, γιατί μια διαφορετική εμφύτευσή του μπορεί να μοιάζει με έναν κύκλο στο επίπεδο με προσαρμοσμένα εξάγωνα.

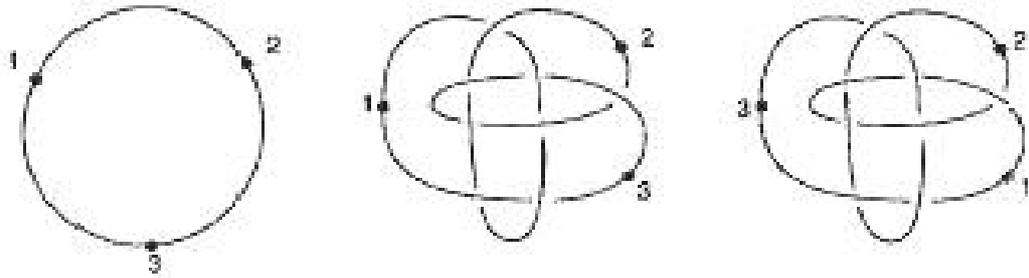


Σχήμα 3.3: Ο πρώτος μοριακός κόμβος

Έκτοτε έχουν βρεθεί πολλά μόρια των οποίων τα γραφήματα περιέχουν τα γραφήματα $K_{3,3}$ και K_5 καθώς και κόμβους ή κρίκους.

3.2 Τοπολογικά στερεοϊσομερή

Το πρόβλημα του να αναγνωρίσει κανείς πότε δύο εμφυτεύσεις ενός γραφήματος είναι τοπολογικά στερεοϊσομερή αποτελεί επέκταση του προβλήματος της διάκρισης δύο κόμβων: σε αντίθεση με τη Θεωρία Κόμβων, οι κορυφές ενός μοριακού γραφήματος δίνουν επιπλέον πληροφορίες για τη δομή, εφόσον συνήθως φέρουν ονόματα ώστε να επισημαίνεται ποια άτομα αντιστοιχούν σε κάθε κορυφή. Τα γραφήματα αυτά ονομάζονται *αριθμημένα γραφήματα* (*labeled graphs*). Δύο εμφυτεύσεις ενός αριθμημένου γραφήματος μπορεί να είναι τοπολογικά στερεοϊσομερή, αν είτε δεν είναι ισοτοπικά ως μοριακά γραφήματα λόγω της εμφύτευσής τους ως απλά (μη αριθμημένα) γραφήματα είτε ως αποτέλεσμα της συγκεκριμένης αρίθμησης των κορυφών. Στο Σχήμα 3.4 φαίνονται οι δύο τρόποι με τους οποίους αριθμημένα γραφήματα μπορεί να αποτελούν στερεοϊσομερή.



Σχήμα 3.4: Διαφορετικοί τύποι τοπολογικών στερεοϊσομερών

Κάθε γράφημα που περιέχει έναν κύκλο έχει προφανώς άπειρες τοπολογικά διαφορετικές εμφυτεύσεις, αφού σε κάθε εμφύτευση μπορούμε να προσθέτουμε κάθε φορά και έναν κόμβο. Αντιθέτως, τα τοπολογικά στερεοϊσομερή που προκύπτουν από μετάθεση των αριθμών των κορυφών είναι πεπερασμένα το πλήθος και επομένως είναι δυνατόν να μελετηθούν.

Παραθέτουμε τώρα κάποιους ορισμούς, χρήσιμους για την συνέχεια.

- Ορισμός 3.1.** 1. Ένας αυτομορφισμός ενός αριθμημένου γραφήματος είναι μία 1-1 και επί συνάρτηση, η οποία αντιστοιχεί κορυφές σε κορυφές έτσι ώστε γειτονικές κορυφές να αντιστοιχούν σε γειτονικές κορυφές. Θα συμβολίζουμε $(v_{11}, \dots, v_{1n_1})(v_{21}, \dots, v_{2n_2}) \cdots (v_{m1}, \dots, v_{mn_m})$ τον αυτομορφισμό που αντιστοιχεί κάθε κορυφή v_{ij} στην $v_{i,j+1}$ κ.ο.κ, όπου οι δείκτες στο κάθε v_{ij} θεωρούνται $\text{mod } n_i$ και οι κορυφές που δεν εμφανίζονται θεωρούνται σταθερές.
2. Τάξη ενός αυτομορφισμού ενός αριθμημένου γραφήματος ορίζεται ο μικρότερος αριθμός τ.ω. εφαρμόζοντας τον αυτομορφισμό τόσες φορές κάθε κορυφή να επιστρέφει στην αρχική της θέση.
3. Ορίζουμε δύο αριθμήσεις ενός εμφυτευμένου γραφήματος να είναι *ισομορφικές (abstractly isomorphic)* αν υπάρχει αυτομορφισμός του γραφήματος που να αντιστοιχεί την μία αριθμηση στην άλλη.

Ορισμός 3.2. Έστω G γράφημα και έστω F αυτομορφισμός του G . Λέμε ότι ο F επάγεται από έναν ομοιομορφισμό $h : (\mathbb{R}^3, G) \rightarrow (\mathbb{R}^3, G)$, δηλαδή από μία εμφύτευση του G , αν η δράση του h στις κορυφές του G είναι ίδια με εκείνη

του F .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αν $h : (\mathbb{R}^3, G) \rightarrow (\mathbb{R}^3, G)$ τότε από τον ορισμό ο h αντιστοιχεί κορυφές σε κορυφές και πλευρές σε πλευρές οπότε αναγκαστικά διατηρεί τις γειτονικές κορυφές και άρα επάγει κάποιον αυτομορφισμό στις κορυφές του G .

Ορισμός 3.3. Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ και $h : M \rightarrow M$ ομοιομορφισμός. Έστω $r \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε τον h^r που προκύπτει εφαρμόζοντας τον h διαδοχικά r φορές. Αν r είναι ο ελάχιστος αριθμός τ.ω. ο h^r να είναι η ταυτοτική απεικόνιση, τότε λέμε ότι ο ομοιομορφισμός h έχει τάξη r . Αν δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός τότε λέμε ότι ο h δεν έχει πεπερασμένη τάξη.

Ορισμός 3.4. Για κάθε σύνολο κορυφών και πλευρών S ενός γραφήματος G ορίζουμε την τροχιά του S υπό τον ομοιομορφισμό h ως την ένωση των υποσυνόλων του G της μορφής $h^i(S)$ για $i \in \mathbb{N}$. Για παράδειγμα, αν S είναι ένας κύκλος που περιέχεται στον G , τότε η τροχιά του S είναι το σύνολο των κύκλων που προκύπτουν εφαρμόζοντας διαδοχικά τον h στον κύκλο S .

Ορισμός 3.5. Αν F είναι ο αυτομορφισμός ο οποίος επάγεται από τον h , θα αναφερόμαστε στις τροχιές αυτού του αυτομορφισμού σαν τροχιές κορυφών (*vertex orbits*) του h .

Ειδικότερα, έστω G ένα γράφημα, έστω F ένας αυτομορφισμός του G και v μία κορυφή του G . Τότε η τροχιά της v υπό τον F είναι το σύνολο όλων των κορυφών w του G τ.ω. για κάποιο $i \in \mathbb{N}$ να ισχύει $w = F^i(v)$. Η τάξη μιας τροχιάς ορίζεται ως το πλήθος των κορυφών w αυτής.

Οι τροχιές των κορυφών υπό έναν αυτομορφισμό F διαμερίζουν τις κορυφές σε ξένα σύνολα, η ένωση των οποίων είναι το σύνολο των κορυφών του G . Αναφερόμαστε σε αυτά τα σύνολα με τον όρο τροχιές του F . Αν η τάξη μίας τροχιάς είναι n , τότε για κάθε κορυφή v που ανήκει στην τροχιά αυτή ισχύει $F^n(v) = v$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΣΤΕΡΕΟΧΗΜΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ 62

Επιστρέφουμε τώρα στα τοπολογικά στερεοϊσομερή, τα οποία δημιουργούνται από την δράση ενός αυτομορφισμού σε ένα αριθμημένο γράφημα. Αν για ένα αριθμημένο γράφημα μπορούμε να βρούμε έναν αυτομορφισμό του και μία εμφύτευση του γραφήματος, η οποία να μην επάγει τον συγκεκριμένο αυτομορφισμό, τότε εκτελώντας αυτόν τον αυτομορφισμό στις κορυφές του γραφήματος στην συγκεκριμένη εμφύτευση θα προκύψει ένα τοπολογικό στερεοϊσομερές του αρχικού γραφήματος. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.4 παρατηρούμε ότι ο αυτομορφισμός (13) στον κύκλο μπορεί να προκύψει με μια στροφή γύρω από μία γραμμή που διέρχεται από την κορυφή 2 και τέμνει στα δύο το γράφημα, δηλαδή από μία ισοτοπία του κύκλου. Άρα, δεν προκύπτουν τοπολογικά στερεοϊσομερή από αυτή την εμφύτευση και τον αυτομορφισμό (13). Αντιθέτως, στην περίπτωση του κόμβου, ο αυτομορφισμός (13) δεν μπορεί να προκύψει από καμία ισοτοπία του κόμβου, γι' αυτό οι δύο τελευταίες εικόνες του σχήματος αποτελούν τοπολογικά στερεοϊσομερή. (Προφανώς, ο κύκλος με καθέναν από τους δύο κόμβους είναι επίσης τοπολογικά στερεοϊσομερή.)

Σε αντίθεση με αυτό το παράδειγμα, το οποίο εξαρτάται από την συγκεκριμένη εμφύτευση του αφηρημένου γραφήματος ($\{1,2,3\}, \{12,23,31\}$), υπάρχουν γραφήματα και αυτομορφισμοί που δεν μπορούν να προκύψουν από καμία εμφύτευση του γραφήματος. Άρα, δεδομένης οποιασδήποτε εμφύτευσης του γραφήματος, εκτελώντας αυτόν τον αυτομορφισμό, θα προκύπτει πάντα ένα τοπολογικό στερεοϊσομερές. Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι αυτό ισχύει για το πλήρες γράφημα K_6 και τον αυτομορφισμό (1234).

Επαναδιατυπώνουμε αρχικά τον ορισμό των τοπολογικών στερεοϊσομερών.

Ορισμός 3.6. Τα γραφήματα G_1 και G_2 αποτελούν τοπολογικά στερεοϊσομερή, αν είναι ισομορφικά, αλλά δεν υπάρχει ομοιομορφισμός του \mathbb{R}^3 που να διατηρεί τον προσανατολισμό και να απεικονίζει το G_1 στο G_2 .

Άρα, δύο γραφήματα αποτελούν τοπολογικά στερεοϊσομερή όταν:

α) είναι μη ισοτοπικά ως απλά γραφήματα

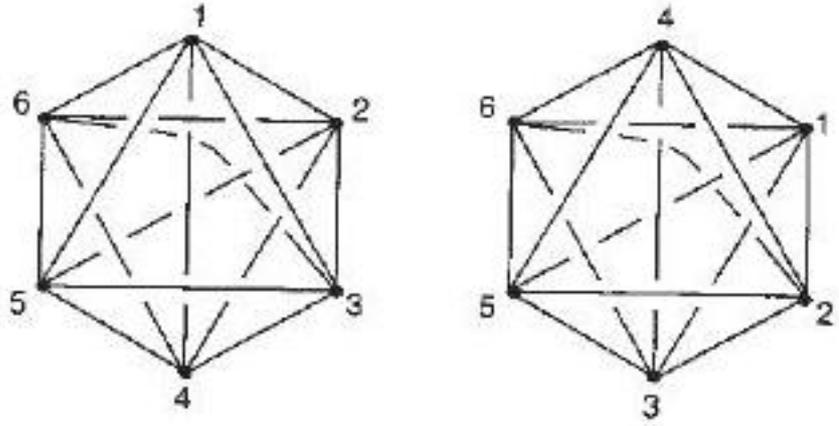
β) είναι ισοτοπικά ως απλά γραφήματα, αλλά όχι ως αριθμημένα, δηλαδή δεν υπάρχει ομοιομορφισμός του \mathbb{R}^3 που να διατηρεί τον προσανατολισμό και να επάγει τον αυτομορφισμό των κορυφών τους.

Θεώρημα 3.7. (Flapan, 1992) Έστω μία εμφύτευση του K_6 στον \mathbb{R}^3 και έστω ότι οι κορυφές του έχουν αριθμηθεί από 1 έως 6. Τότε, δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : (\mathbb{R}^3, K_6) \rightarrow (\mathbb{R}^3, K_6)$, ο οποίος να επάγει τον αυτομορφισμό (1234).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.10 των Conway-Gordon ότι υπάρχουν δέκα ζεύγη ξένων κύκλων (συγκεκριμένα τριγώνων) σε κάθε εμφύτευση του K_6 . Απαριθμούμε την τροχιά ενός ζεύγους τριγώνων υπό τον αυτομορφισμό (1234), δίνοντας την τροχιά του ενός μόνο από τα δύο τρίγωνα. Τότε οι τροχιές θα είναι οι εξής: $\langle 123, 234, 341, 412 \rangle$, $\langle 125, 235, 345, 415 \rangle$ και $\langle 135, 245 \rangle$. Παρατηρούμε ότι κάθε τροχιά περιέχει άρτιο αριθμό ζευγών κύκλων.

Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει εμφύτευση του K_6 στον \mathbb{R}^3 τ.ω. ένας ομοιομορφισμός $h : (\mathbb{R}^3, K_6) \rightarrow (\mathbb{R}^3, K_6)$ να επάγει τον αυτομορφισμό (1234). Έστω $\omega(C_1, C_2) = lk(C_1, C_2) \pmod 2$. Τότε, με τον συμβολισμό του Θεωρήματος 2.10, $V = \sum_{C_1, C_2} \omega(C_1, C_2)$. Επειδή ο h είναι ομοιομορφισμός και οι αριθμοί συνέλιξης θεωρούνται *modulo 2*, θα ισχύει $\omega(C_1, C_2) = \omega[h(C_1), h(C_2)]$, για κάθε ζεύγος τριγώνων C_1 και C_2 ανεξάρτητα από το αν ο h διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Άρα όλα τα ζεύγη τριγώνων σε μία δεδομένη τροχιά θα έχουν τον ίδιο αριθμό συνέλιξης *modulo 2*, εφόσον θα είναι μεταξύ τους ομοιομορφικές εικόνες. Επειδή ο αριθμός ζευγών τριγώνων σε κάθε τροχιά είναι άρτιος, θα έχουμε $V = 0$, άτοπο αφού από το Θεώρημα 2.10 προκύπτει $V = 1$, για κάθε εμφύτευση του K_6 στον χώρο \mathbb{R}^3 . Άρα δεν υπάρχει τέτοιος ομοιομορφισμός h που υποθέσαμε, ο οποίος να επάγει τον αυτομορφισμό (1234). ■

Στο Σχήμα 3.5 βλέπουμε δύο εμφυτεύσεις του αριθμημένου γραφήματος K_6

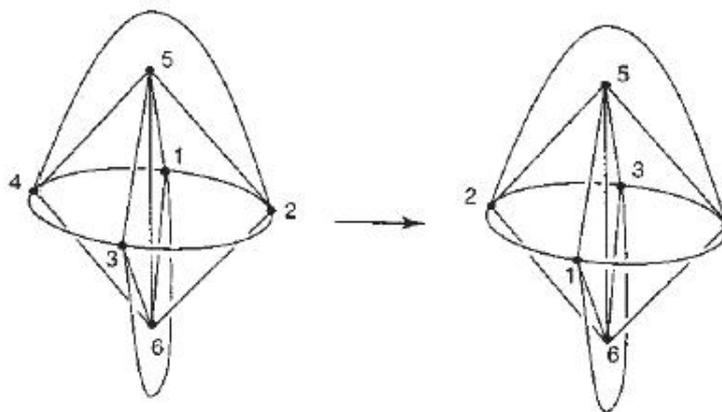


Σχήμα 3.5: Τοπολογικά στερεοϊσομερείς εμφυτεύσεις του K_6

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 1. Η ιδιότητα του γραφήματος K_6 που περιγράφεται στο Θεώρημα 3.7 αποτελεί εγγενή ιδιότητα του γραφήματος, εφ' όσον είναι ιδιότητα του αφηρημένου γραφήματος.

2. Γενικά, μπορούμε να πάρουμε δύο τοπολογικά στερεοϊσομερή εάν ένας αυτομορφισμός γραφημάτων δεν μπορεί να επαχθεί από έναν ομοιομορφισμό του \mathbb{R}^3 ο οποίος να διατηρεί τον προσανατολισμό του χώρου. Το Θεώρημα 3.7 δείχνει το πιο ισχυρό αποτέλεσμα ότι ο αυτομορφισμός (1234) δεν μπορεί να επαχθεί στο γράφημα K_6 από κανέναν ομοιομορφισμό είτε διατηρεί τον προσανατολισμό είτε όχι.

3. Ξεκινώντας από μία εμφύτευση G του γραφήματος K_6 , αν εφαρμόσουμε τον αυτομορφισμό (1234) στο G δύο φορές, θα έχουμε ένα τοπολογικό στερεοϊσομερές G'' του γραφήματος G' που προέκυψε εφαρμόζοντας τον αυτομορφισμό (1234) μία φορά. Αυτό ισοδυναμεί με το να εφαρμόσουμε τον αυτομορφισμό $(13)(24)$ μία φορά στην εμφύτευση G του K_6 . Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 3.6, ο αυτομορφισμός $(13)(24)$ επάγεται από μία στροφή 180° γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα G'' μπορεί να υπερτεθεί σαν στερεό αντικείμενο στην αρχική εμφύτευση G . Άρα, τα γραφήματα G και G'' δεν είναι ούτε καν γεωμετρικά στερεοϊσομερή.



Σχήμα 3.6: Ο αυτομορφισμός $(13)(24)$ επάγεται από μία στροφή

3.3 Μη αμφιχειρία (chirality)

Όπως είδαμε στην εισαγωγή, ένας δυνατός τρόπος κατασκευής τοπολογικών στερεοϊσομερών είναι να κατασκευάσουμε για ένα μοριακό γράφημα G την κατοπτρική του εικόνα G^* .

Αν δεν υπάρχει παραμόρφωση που να μετατρέπει έναν μοριακό γράφημα στην κατοπτρική του εικόνα τότε το μόριο είναι χημικά μη αμφίχειρο. Δύο μη αμφίχειρα μόρια ονομάζονται *εναντιομερή*. Αν ένα μόριο μπορεί να παραμορφωθεί έτσι ώστε να προκύψει η κατοπτρική του εικόνα, τότε η αλλαγή που υφίσταται το μόριο είναι αντίστοιχη της παραμόρφωσης του μοριακού γραφήματος ώστε να προκύψει η κατοπτρική του εικόνα. Συγκεκριμένα, οι δεσμοί στο μόριο μπορούν να περιστραφούν ή να «τεντωθούν» αλλά δεν μπορούν να διαπεράσουν ο ένας τον άλλον σε θερμοκρασία δωματίου. Ανάλογα, στην ισοτοπία ενός γραφήματος δεν επιτρέπουμε σε πλευρές του γραφήματος να διαπερνούν η μία την άλλη. Οπότε μη αμφιχειρία μορίων συνεπάγεται μη αμφιχειρία μοριακών γραφημάτων. Αν όμως το μοριακό γράφημα είναι τοπολογικά αμφίχειρο δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την αμφιχειρία ή μη του μορίου, αφού η συγκεκριμένη παραμόρφωση που άλλαξε το γράφημα μπορεί να μην είναι χημικά αποδεκτή.

Για τα τοπολογικά σύνθετα μόρια, η Τοπολογία αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για να διαπιστώσουμε την αμφιχειρία (ή μη). Θα θέλαμε να ορίσουμε τοπολογικά την ιδιότητα της αμφιχειρίας έτσι ώστε να έχει το εξής χαρακτηριστικό: αν για ένα μόριο το μοριακό του γράφημα είναι τοπολογικά μη αμφίχειρο, τότε το μόριο να είναι και χημικά μη αμφίχειρο, χωρίς όμως να ισχύει κατ'

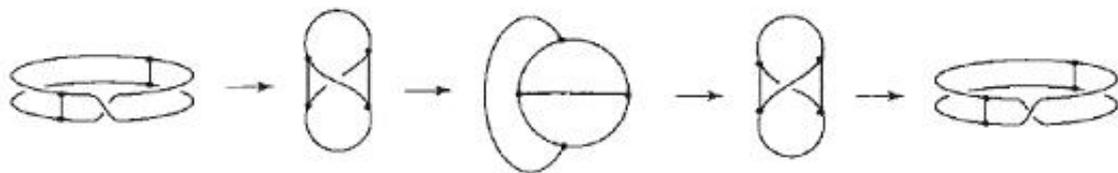
ανάγκη και το αντίστροφο.

Ορισμός 3.8. Ένα εμφυτευμένο γράφημα G είναι *τοπολογικά αμφίχειρο*, αν υπάρχει ομοιομορφισμός του ζεύγους (\mathbb{R}^3, G) στον εαυτό του που να αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου. Ισοδύναμα, αν υπάρχει ομοιομορφισμός του \mathbb{R}^3 που να διατηρεί τον προσανατολισμό και να απεικονίζει το G στο G^* , δηλαδή αν τα G και G^* είναι ισοτοπικά.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Ο Ορισμός 3.8 είναι ανάλογος του ορισμού της κατοπτρικής εικόνας στην Θεωρία Κόμβων.

3.4 Μη αμφιχειρία των ταινιών Moebius

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, οι Walba κ.α. συνέθεσαν το 1982 το πρώτο μόριο με δομή σκάλας Moebius με τρεις εγκάρσιες συνδέσεις του οποίου το γράφημα δεν είναι επίπεδο. Οι πλευρές στο σύνορο της σκάλας αναπαριστούν χημικούς δεσμούς σε μία αλυσίδα πολυαιθέρα με εξήντα άτομα άνθρακα και οξυγόνου, ενώ οι συνδέσεις αναπαριστούν διπλούς δεσμούς μεταξύ ατόμων άνθρακα. Άρα, στην μοριακή σκάλα Moebius οι πλευρές διαφέρουν χημικά από τις συνδέσεις. Το 1975 οι Graf και Lehn είχαν συνθέσει ένα μόριο με δομή σκάλας Moebius με δύο συνδέσεις. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7, το



Σχήμα 3.7: Σκάλα Moebius με δύο συνδέσεις

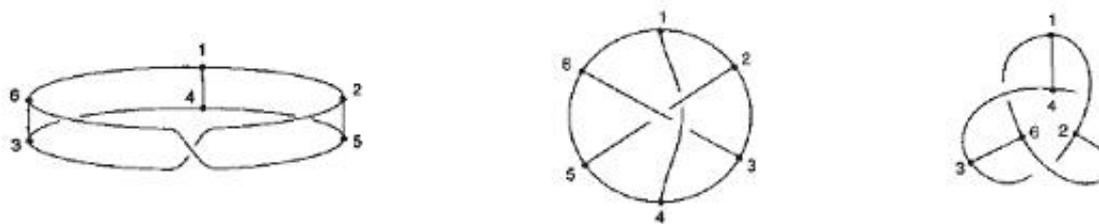
Το ερώτημα που τέθηκε από τον Walba ήταν, αν τα γραφήματα που αναπαριστούν μία σκάλα Moebius με τρεις συνδέσεις είναι τοπολογικά αμφίχειρα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΣΤΕΡΕΟΧΗΜΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ 67

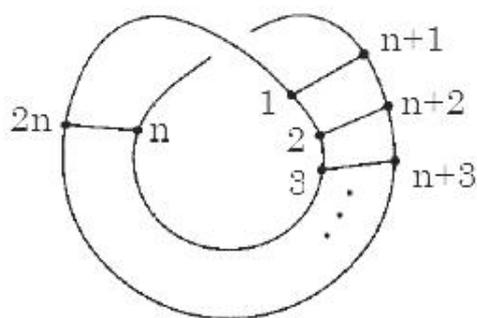
Θα αρχίσουμε με τους μαθηματικούς ορισμό της ταινίας και της σκάλας Moebius.

Ορισμός 3.9. Μία ταινία Moebius είναι μία απλή εμφύτευση του $S^1 \times [-1, 1]$ στον \mathbb{R}^3 ώστε να προκύπτει μία μη προσανατολισμένη επιφάνεια. Με τον όρο απλή εμφύτευση εννοούμε ότι ο κεντρικός κύκλος $S^1 \times \{0\}$ παραμένει τετριμμένος στην εμφύτευση.

Ορισμός 3.10. Μία σκάλα Moebius M_n είναι ένα γράφημα που αποτελείται από μία απλή κλειστή καμπύλη K με $2n$ κορυφές και n επιπλέον πλευρές a_1, a_2, \dots, a_n . Αν συμβολίσουμε διαδοχικά τις κορυφές της K με $1, 2, \dots, 2n$, τότε οι κορυφές κάθε πλευράς a_i είναι i και $i+n$. Λέμε ότι η K είναι ο βρόγχος (loop) και τα a_i οι συνδέσεις (rungs) του γραφήματος.



Σχήμα 3.8: Εμφυτεύσεις της σκάλας Moebius με τρεις συνδέσεις



Σχήμα 3.9: Κανονική εμφύτευση της σκάλας Moebius

Επαναδιατυπώνουμε τώρα το ερώτημα του Walba, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.8. Για ένα κανονικά εμφυτευμένο γράφημα M_n αναζητάμε ομοιομορφισμό $h : (\mathbb{R}^3, M_n) \rightarrow (\mathbb{R}^3, M_n)$ που να αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου. Ο ομοιομορφισμός αυτός θα απεικονίζει συνδέσεις του M_n σε συνδέσεις και πλευρές σε πλευρές. Συγκεκριμένα, ένας τέτοιος ομοιομορφισμός θα απεικονίζει κάθε πλευρά του βρόγχου K σε μία πλευρά του K . Άρα, $h(K) = K$. Αντίστροφα, αν $h(K) = K$, τότε ο h θα απεικονίζει συνδέσεις σε συνδέσεις και πλευρές σε πλευρές.

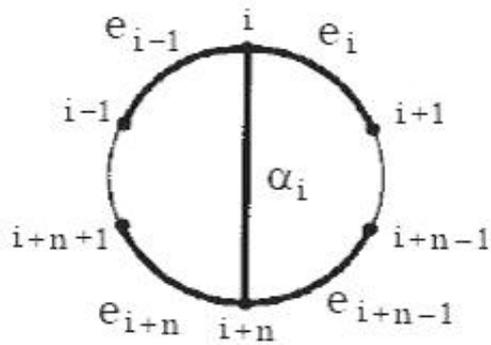
Άρα, ζητάμε έναν ομοιομορφισμό του \mathbb{R}^3 που να αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου και τ.ω. $h(K) = K$.

Ο τοπολόγος J.Simon απάντησε αρνητικά το 1986 το ερώτημα του Walba το 1986 για κάθε $n \geq 3$. Επιπλέον, ο Simon απέδειξε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.12. *Για κάθε $n \geq 4$, κάθε αυτομορφισμός των κορυφών του γραφήματος M_n αφήνει τον βρόγχο K συνολοθεωρητικά αναλλοίωτο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω αυτομορφισμός A ο οποίος δεν αφήνει τον βρόγχο K συνολοθεωρητικά αναλλοίωτο. Τότε ο A απεικονίζει τον βρόγχο K σε μία άλλη κλειστή καμπύλη H με $2n$ κορυφές τ.ω. να ικανοποιείται ο ορισμός της σκάλας Moebius με βρόγχο H . Επειδή $H \neq K$, υπάρχει πλευρά a_i η οποία περιέχεται στον H , αλλά όχι στον K . Άρα, η πλευρά a_i είναι μια σύνδεση στην εμφύτευση της σκάλας Moebius με βρόγχο K και επομένως έχει κορυφές i και $i + n$. Επειδή ο H είναι μία απλή κλειστή καμπύλη, θα υπάρχει ακριβώς μία πλευρά, διαφορετική της a_i , με κορυφή την i . Οι μόνες πλευρές του γραφήματος M_n που περιέχουν την κορυφή i είναι η πλευρά e_{i-1} με κορυφές $i - 1$ και i , και η e_i με κορυφές i και $i + 1$ (Σχήμα 3.10). Χ.β.γ. υποθέτουμε ότι στον βρόγχο H περιέχεται η πλευρά e_{i-1} και όχι η e_i .

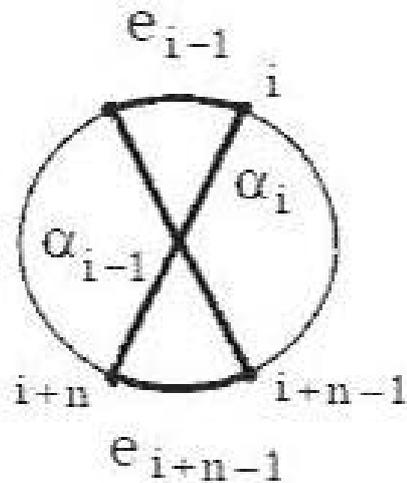
Όμοια, επειδή ο βρόγχος H περιέχει την κορυφή $i + n$ της πλευράς a_i , ο H θα περιέχει ακριβώς μία ακόμη πλευρά, διαφορετική της a_i , με κορυφή την $i + n$. Άρα, ο H θα περιέχει είτε την πλευρά e_{i+n-1} με κορυφές $i + n - 1$ και



Σχήμα 3.10: Οι γειτονικές πλευρές της a_i

$i + n$, είτε την πλευρά e_{i+n} με κορυφές $i + n$ και $i + n + 1$. Εξετάζουμε στην

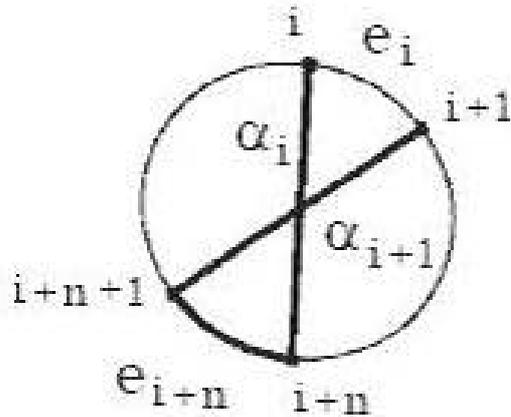
■



Σχήμα 3.11: Η κλειστή καμπύλη e_{i-1} , a_i , e_{i+n-1} και a_{i-1}

Αν ο H περιείχε και την πλευρά a_{i-1} του γραφήματος M_n , τότε ο H θα περιείχε μία κλειστή καμπύλη με τέσσερις πλευρές (Σχήμα 3.11), τις e_{i-1} , a_i , e_{i+n-1} και a_{i-1} , άτοπο, αφού ο H είναι μία απλή κλειστή καμπύλη με $2n$ πλευρές και $n \geq 4$. Άρα, ο H δεν περιέχει την πλευρά a_{i-1} . Άρα, στην σκάλα Moebius με βρόγχο H , η πλευρά a_{i-1} αποτελεί σύνδεση του γραφήματος. Αν ο H κοπεί σε δύο τμήματα στις κορυφές μίας σύνδεσης, τότε κάθε τμήμα θα περιέχει n το πλήθος πλευρές. Είδαμε ότι οι πλευρές e_{i-1} , a_i , e_{i+n-1} και a_{i-1} ορίζουν μία απλή κλειστή καμπύλη. Άρα, αφαιρώντας τις κορυφές της σύνδεσης a_{i-1} , το ένα από τα δύο τμήματα στα οποία χωρίζεται ο H , θα περιέχει μόνο τις πλευρές e_{i-1} , a_i , e_{i+n-1} , άτοπο, αφού $n \geq 4$. Άρα, ο βρόγχος H δεν μπορεί να περιέχει

την πλευρά e_{i+n-1} .



Σχήμα 3.12: Η καμπύλη a_i , e_{i+n} και a_{i+1}

Επειδή ο βρόγχος H δεν περιέχει την πλευρά e_i , η πλευρά αυτή θα είναι μία σύνδεση σε αυτήν την εμφύτευση της σκάλας Moebius. Όπως είδαμε, αφαιρώντας τις κορυφές της σύνδεσης e_i , ο βρόγχος H θα χωριστεί σε δύο τμήματα, καθένα από τα οποία έχει n πλευρές. Το ένα τμήμα θα περιέχει μόνο τις πλευρές a_i , e_{i+n} και a_{i+1} , άτοπο, αφού $n \geq 4$. Άρα, ο βρόγχος H δεν περιέχει ούτε την πλευρά e_{i+n} , δηλαδή δεν υπάρχει ο αυτομορφισμός που υποθέσαμε. ■

Το Λήμμα 3.12 αποδεικνύει ότι κάθε αυτομορφισμός του M_n απεικονίζει πλευρές της σκάλας Moebius σε πλευρές και συνδέσεις σε συνδέσεις. (Δηλαδή για κάθε $n \geq 4$ υπάρχει ένας μόνος τρόπος επιλογής του βρόγχου K .)

Πόρισμα 3.13. Αν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : (\mathbb{R}^3, M_n) \rightarrow (\mathbb{R}^3, M_n)$ για $n \geq 4$, τότε $h(K) = K$.

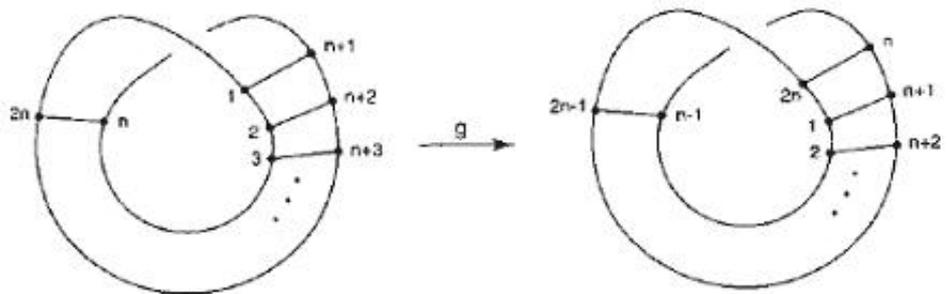
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Πράγματι, έστω ότι υπάρχει ένας τέτοιος ομοιομορφισμός h . Τότε, ο h επάγει έναν αυτομορφισμό στις κορυφές του M_n και από το Λήμμα 3.12, ο αυτομορφισμός αυτός θα αφήνει τον βρόγχο K συνολοθεωρητικά

αναλλοίωτο. ■

Άρα, για να απαντηθεί το ερώτημα του Walba έστω και αρνητικά, στην περίπτωση $n \geq 4$ δεν χρειάζεται η υπόθεση, ο ομοιομορφισμός που ζητάμε να διατηρεί συνολοθεωρητικά το υποσύνολο K του M_n .

Για τους ομοιομορφισμούς του ζεύγους (\mathbb{R}^3, M_n) αξίζει να σημειωθούν τα παρακάτω:

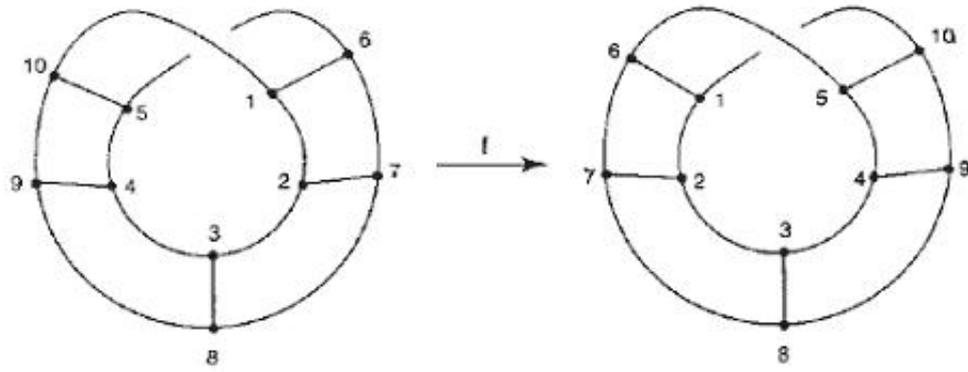
Έστω η κανονική εμφύτευση μίας σκάλας Moebius M_n . Υπάρχει τότε, ομοιομορφισμός $g : (S^3, M_n) \rightarrow (S^3, M_n)$ που διατηρεί τον προσανατολισμό του χώρου και απεικονίζει κάθε κορυφή i του K στην επόμενη της $i + 1$. Ο ομοιομορφισμός g περιστρέφει το γράφημα M_n γύρω από έναν άξονα, ο οποίος



Σχήμα 3.13: Ο ομοιομορφισμός g μεταθέτει τις κορυφές του M_n

Υπάρχει ακόμη ένας ομοιομορφισμός $f : (S^3, M_n) \rightarrow (S^3, M_n)$ που διατηρεί τον προσανατολισμό του χώρου και αντιστρέφει τον προσανατολισμό του βρόγχου K . Ο ομοιομορφισμός f περιστρέφει την σκάλα Moebius κατά 180° στον χώρο (Σχήμα 3.14). Αν το πλήθος των συνδέσεων είναι περιττός αριθμός, τότε θα υπάρχει μία σύνδεση που θα παραμείνει σταθερή μέσω του f .

Έστω, τώρα, ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $h : (S^3, M_n) \rightarrow (S^3, M_n)$ που αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου και τ.ω. $h(K) = K$. Η αυξανόμενη αρίθμηση των κορυφών του βρόγχου K δίνει στον K έναν προσανατολισμό. Γνωρίζουμε ότι ο h απεικονίζει κορυφές του K σε κορυφές του K , έτσι ώστε



Σχήμα 3.14: Ο ομοιομορφισμός f αντιστρέφει τον προσανατολισμό του K

γειτονικές κορυφές να απεικονίζονται σε γειτονικές κορυφές. Άρα, ο ομοιομορφισμός h είτε περιστρέφει τον βρόγχο K γύρω από έναν άξονα κάθετο στο επίπεδο και μεταθέτει έτσι τις κορυφές του K , είτε αντιστρέφει τον προσανατολισμό του K . Συνθέτοντας τον h , αν χρειαστεί, με τον ομοιομορφισμό f , προκύπτει ένας ομοιομορφισμός του (S^3, M_n) που αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου και διατηρεί τον προσανατολισμό του K . Στη συνέχεια, συνθέτοντας τον h με κάποια δύναμη του g , προκύπτει ένας ομοιομορφισμός του (S^3, M_n) που αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου και διατηρεί σταθερή κάθε κορυφή του γραφήματος.

Παραθέτουμε τώρα χωρίς απόδειξη το βασικό θεώρημα του Simon.

Θεώρημα 3.14. (Simon, 1986) Έστω M_n σκάλα Moebius η οποία είναι κανονικά εμφυτευμένη στην S^3 με $n \geq 3$ συνδέσεις και βρόγχο K . Τότε, δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : (S^3, M_n) \rightarrow (S^3, M_n)$ που να αντιστρέφει τον προσανατολισμό και τ.ω. $h(K) = K$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.14 γίνεται με χρήση τοπολογικών μεθόδων και συγκεκριμένα διακλαδιζομένων καλυμμάτων με δύο φύλλα (twofold branched covers).

Επομένως, το γράφημα κάθε μορίου με μορφή σκάλας Moebius με τρεις ή περισσότερες συνδέσεις είναι τοπολογικά μη αμφίχειρο στην S^3 και άρα στον \mathbb{R}^3 . Επομένως, τα μόρια με μοριακό γράφημα που περιλαμβάνει μία κανονική εμφύτευση μίας σκάλας Moebius είναι χημικά μη αμφίχειρα, και συνεπώς, μαζί με την κατοπτρική τους εικόνα, αποτελούν τοπολογικά στερεοϊσομερή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΣΤΕΡΕΟΧΗΜΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ 73

Το επόμενο θεώρημα, του οποίου η απόδειξη επίσης κάνει χρήση διακλαδιζομένων καλυμμάτων με δύο φύλλα, οφείλεται στην E. Flapan.

Θεώρημα 3.15. (Flapan, 1986) Έστω $n \geq 3$ και σκάλα Moebius εμφυτευμένη στην S^3 . Έστω $h : (S^3, M_n) \rightarrow (S^3, M_n)$ ομοιομορφισμός που αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου τ.ω. $h(K) = K$, όπου K ο βρόγχος του M_n . Τότε δεν υπάρχει σύνδεση a_i τ.ω. $h(a_i) = a_i$.

Σε αντίθεση με το Θεώρημα 3.14, στο Θεώρημα 3.15 δεν κάνουμε καμία υπόθεση για τον τρόπο με τον οποίο το γράφημα M_n είναι εμφυτευμένο. Έτσι, ο βρόγχος K , καθώς και οποιαδήποτε σύνδεση μπορεί να περιέχει και κόμβους.

Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.15 για να αποδείξουμε την τοπολογική μη αμφιχειρία κάθε εμφύτευσης μιας σκάλας Moebius με περιττό αριθμό συνδέσεων, ανεξάρτητα από το αν περιέχει κόμβους. Πράγματι, το Θεώρημα 3.16 γενικεύει το Θεώρημα 3.14, για n περιττό.

Θεώρημα 3.16. (Flapan, 1989) Έστω σκάλα Moebius M_n εμφυτευμένη στην S^3 και έστω $n \geq 3$ περιττός φυσικός αριθμός. Τότε δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : (S^3, M_n) \rightarrow (S^3, M_n)$ που να αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου τ.ω. $h(K) = K$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι υπάρχει τέτοιος ομοιομορφισμός h . Από την υπόθεση έχουμε ότι $h(K) = K$, οπότε με βάση την παρατήρηση ο h είτε περιστρέφει είτε κατοπτρίζει τις κορυφές του K .

Υποθέτουμε αρχικά ότι ο h περιστρέφει τις κορυφές του K . Τότε ο h περιστρέφει και τις συνδέσεις του K και υπάρχει ελάχιστος αριθμός r τ.ω. ο h^r να απεικονίζει κάθε σύνδεση στον εαυτό της. Επειδή ο h περιστρέφει τις συνδέσεις ο αριθμός r θα πρέπει να διαιρεί τον αριθμό των συνδέσεων n και συνεπώς ο h^n απεικονίζει επίσης κάθε σύνδεση στον εαυτό της. Επειδή ο n είναι περιττός, ο h^n είναι ομοιομορφισμός του (S^3, M_n) που αντιστρέφει τον

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΣΤΕΡΕΟΧΗΜΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ 74

προσανατολισμό και τ.ω. $h^n(K) = K$ και $h^n(a_i) = a_i$, $\forall i$, άτοπο, λόγω του Θεωρήματος 3.15.

Οπότε ο h κατοπτρίζει τις κορυφές του K και επάγει έτσι έναν αυτομορφισμό τάξης δύο στις κορυφές του K και στις συνδέσεις. Επειδή ο n είναι περιττός, θα υπάρχει τουλάχιστον μία σύνδεση a_j τ.ω. $h(a_j) = a_j$, άτοπο και πάλι λόγω του Θεωρήματος 3.15.

Επομένως, δεν υπάρχει ο ομοιομορφισμός h που υποθέσαμε. ■

Από το Θεώρημα 3.16 έπεται ότι:

Τα μόρια με μοριακό γράφημα που περιλαμβάνει μία οποιαδήποτε εμφύτευση μίας σκάλας Moebius είναι χημικά μη αμφίχειρα, και συνεπώς, μαζί με την κατοπτρική τους εικόνα, αποτελούν τοπολογικά στερεοϊσομερή.

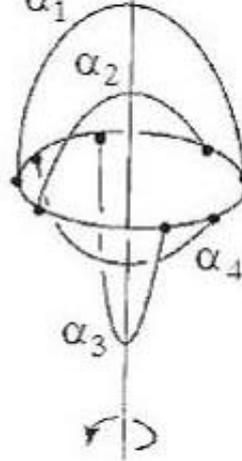
Καταλήγουμε έτσι στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.17. Ένα αριθμημένο ή μη γράφημα G ονομάζεται *εγγενώς μη αμφίχειρο (intrinsically chiral)*, αν κάθε εμφύτευσή του είναι τοπολογικά μη αμφίχειρη.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.17, το Θεώρημα 3.16 αποδεικνύει ότι:

Για n περιττό αριθμό, το γράφημα M_n είναι εγγενώς μη αμφίχειρο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αν n ένας άρτιος φυσικός αριθμός, τότε υπάρχει πάντα μία εμφύτευση του γραφήματος M_n η οποία μπορεί να περιστραφεί και να δώσει την κατοπτρική εικόνα του M_n . Άρα, το Θεώρημα 3.16 δεν ισχύει για κανέναν n άρτιο. Στο Σχήμα 3.15 βλέπουμε μία τοπολογικά αμφίχειρη εμφύτευση του M_4 . Πράγματι, περιστρέφοντας το γράφημα κατά 90° γύρω από έναν κάθετο άξονα καταλήγουμε στην κατοπτρική του εικόνα. Στη συνέχεια, προσθέτοντας συμμετρικά ζεύγη συνδέσεων στο πάνω και κάτω μέρος του γραφήματος, θα έχουμε μία τοπολογικά αμφίχειρη εμφύτευση του M_n στον \mathbb{R}^3 , για κάθε $n \in \mathbb{N}$ άρτιο.



Σχήμα 3.15: Μία αμφίχειρη εμφύτευση του γραφήματος M_4

3.5 Εγγενής μη αμφίχειρία σε πλήρη γραφήματα

Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Conway και Gordon για να αποδείξουμε ότι κάθε πλήρες γράφημα με $4n + 3$ κορυφές είναι εγγενώς μη αμφίχειρο. Αποδεικνύουμε αρχικά το ακόλουθο βασικό για την απόδειξη λήμμα.

Λήμμα 3.18. (Flapan και Weaver, 1992) Έστω μία εμφύτευση του γραφήματος K_7 στον \mathbb{R}^3 και έστω $f : (\mathbb{R}^3, K_7) \rightarrow (\mathbb{R}^3, K_7)$ ένας ομοιομορφισμός. Αν ο f επάγει έναν αυτομορφισμό τάξης δύο των κορυφών του K_7 , τότε ο f διατηρεί σταθερή ακριβώς μία κορυφή του γραφήματος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω C το σύνολο όλων των κύκλων Hamilton στην εμφύτευση του K_7 . Για κάθε $K \in C$, έστω $a(K)$ η αναλλοίωτη Arf του K και $a = \sum_{K \in C} a(K) \pmod{2}$. Επειδή ο f είναι ένας ομοιομορφισμός του χώρου, για κάθε κύκλο $K \in C$ έχουμε ότι το $f(K)$ είναι επίσης κύκλος στο $f(K_7) = K_7$ και επειδή ο f διατηρεί το K_7 θα είναι $a[f(K)] = a(K)$, ανεξάρτητα αν ο f διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Πράγματι, ο f είτε θα απεικονίζει τον κύκλο K στον εαυτό του είτε στην κατοπτρική του εικόνα K^* και ένας κόμβος και η κατοπτρική του εικόνα έχουν ίδια τιμή της αναλλοίωτης Arf. Άρα, θα ισχύει:

$$a[f(K)] + a(K) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Δημιουργούμε τώρα ζεύγη κύκλων στο C , τα οποία αποτελούνται από εκείνους τους κύκλους με $f(K) \neq K$. Το άθροισμα των αναλλοιώτων Arf κάθε

ζεύγους δεν συνεισφέρει στην τιμή του a . Οπότε:

$$a = \sum_{K \in C} (a(K)) \equiv \sum_{K=f(K)} a(K) \pmod{2}.$$

Από το Θεώρημα Conway-Gordon γνωρίζουμε ότι $a = 1$ για κάθε εμφύτευση του K_7 , άρα υπάρχει τουλάχιστον ένας κύκλος Hamilton K τ.ω. $K = f(K)$. Ο ομοιομορφισμός f είτε θα περιστρέφει είτε θα κατοπτρίζει τις κορυφές του K_7 .

Επειδή ο f επάγει έναν αυτομορφισμό τάξης δύο, κάθε κορυφή είτε αντιμετατίθεται με μία άλλη κορυφή είτε παραμένει σταθερή μέσω του f . Επειδή όμως οι κορυφές είναι περιττές το πλήθος, τουλάχιστον μία κορυφή παραμένει σταθερή. Επίσης, αν όλες οι κορυφές παρέμεναν σταθερές τότε ο f θα είχε τάξη ένα, άτοπο. Αυτό σημαίνει ότι ο f θα κατοπτρίζει τις κορυφές του κύκλου. Άρα, το πολύ δύο κορυφές του K μπορεί να παραμένουν σταθερές υπό τον f . Επειδή οι κορυφές είναι περιττές το πλήθος, ο f διατηρεί σταθερή ακριβώς μία κορυφή του K και επομένως και του γραφήματος. ■

Θεώρημα 3.19. (Flapan και Weaver, 1992) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το πλήρες γράφημα K_{4n+3} είναι εγγενώς μη αμφίχειρο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι για κάποιο n υπάρχει εμφύτευση του K_{4n+3} που είναι τοπολογικά αμφίχειρη. Τότε υπάρχει ομοιομορφισμός $h : (\mathbb{R}^3, K_{4n+3}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, K_{4n+3})$ που αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου. Ο ομοιομορφισμός h επάγει κάποιον αυτομορφισμό στις κορυφές του γραφήματος και διαιρεί τις κορυφές σε p το πλήθος τροχιές. Έστω n_1, n_2, \dots, n_p η τάξη κάθε τροχιάς. Κάθε n_i μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $n_i = q_i \cdot 2^{m_i}$, όπου q_i περιττός αριθμός, $\forall i = 1, \dots, p$. Ο ομοιομορφισμός h^{q_i} επάγει έναν αυτομορφισμό τάξης 2^{m_i} στις n_i κορυφές της i -τροχιάς. Έστω $q = q_1 \cdots q_p$. Το q είναι περιττός αριθμός, οπότε ο $g = h^q : (\mathbb{R}^3, K_{4n+3}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, K_{4n+3})$ αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου και η τάξη κάθε τροχιάς κορυφών ως προς g είναι δύναμη του δύο, πιθανώς συμπεριλαμβανομένης και της μηδενικής δύναμης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΣΤΕΡΕΟΧΗΜΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ 77

Επειδή το άθροισμα των τάξεων των τροχιών κορυφών ως προς g πρέπει να ισούται με $4n+3$ και όλες οι τάξεις είναι δυνάμεις του δύο, θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία τροχιά τάξης ένα, και είτε τουλάχιστον μία τροχιά τάξης δύο είτε δύο επιπλέον τροχιές τάξης ένα. Σε κάθε περίπτωση, τουλάχιστον τρεις κορυφές θα παραμείνουν σταθερές υπό τον g^2 .

Εξετάζουμε τώρα τέσσερις περιπτώσεις ανάλογα με τις τάξεις των τροχιών κορυφών ως προς g .

Πρώτη περίπτωση Ο g έχει τουλάχιστον μία τροχιά κορυφών τάξης μεγαλύτερης του δύο.

Δηλαδή υπάρχει τροχιά τάξης 2^m , $m \geq 2$. Τότε, το 2^m διαιρείται με το τέσσερα. Άρα υπάρχει τουλάχιστον μία τροχιά κορυφών, A , τάξης τέσσερα υπό τον ομοιομορφισμό $g^{2^{m-2}} = g^{2^m/4}$. Ο ομοιομορφισμός $(g^{2^{m-2}})^2$ επάγει έναν αυτομορφισμό τάξης δύο στις κορυφές της τροχιάς A . Το πλήρες γράφημα K_{4n+3} έχει τουλάχιστον επτά κορυφές. Οι τέσσερις κορυφές της A με τις τρεις κορυφές που παραμένουν σταθερές υπό τον g^2 και τις πλευρές που τις συνδέουν αποτελούν μία εμφύτευση του γραφήματος K_7 , που είναι υπογράφημα του K_7 . Άρα, ομοιομορφισμός $(g^2)^{2^{m-2}} = (g^{2^{m-2}})^2$ του (\mathbb{R}^3, K_7) επάγει έναν αυτομορφισμό τάξης δύο στο γράφημα K_7 . Άτοπο, λόγω του ότι ο g^2 διατηρεί σταθερές τρεις κορυφές του K_7 και του Λήμματος 3.18. Άρα δεν υπάρχει τροχιά κορυφών ως προς g τάξης μεγαλύτερης του δύο.

Δεύτερη περίπτωση Ο g έχει μία ή δύο τροχιές κορυφών τάξης δύο.

Αφού δεν υπάρχει τροχιά τάξης μεγαλύτερης του δύο, οι κορυφές που δεν ανήκουν στις τροχιές τάξης δύο παραμένουν σταθερές υπό τον g . Θεωρούμε το υπογράφημα του K_{4n+3} που αποτελείται από τις κορυφές που ανήκουν στη μία ή στις δύο τροχιές τάξης δύο και ακόμη πέντε ή τρεις κορυφές που παραμένουν σταθερές, μαζί με τις πλευρές που τις συνδέουν. Αυτό το υπογράφημα είναι μία εμφύτευση του K_7 και ο ομοιομορφισμός g επάγει έναν αυτομορφισμό τάξης δύο στις κορυφές του, άτοπο, λόγω του Λήμματος 3.18, εφόσον

διατηρούνται σταθερές πάνω από μία κορυφές. Άρα δεν υπάρχουν μία ή δύο τροχιές κορυφών του g τάξης δύο.

Τρίτη περίπτωση Ο g έχει τουλάχιστον τρεις τροχιές κορυφών τάξης δύο.

Αριθμούμε τις κορυφές σε τρεις από τις τροχιές κορυφών τάξης δύο ως $1, 2, \dots, 6$ έτσι ώστε τα παρακάτω ζευγάρια κορυφών να ανήκουν στην ίδια τροχιά: $\langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 6 \rangle$. Οι πλευρές (14), (25) και (36) διατηρούνται αναλλοίωτες από τον g και ο g απεικονίζει την πλευρά (12) στην (45), την (23) στην (56) και την (34) στην (61). Έστω M το υπογράφημα του K_{4n+3} που αποτελείται από τις κορυφές 1 έως 6, τις πλευρές (14), (25), (36) και τις πλευρές (12), (23), (34), (45), (56), (61), οι οποίες δημιουργούν μία απλή κλειστή καμπύλη, έστω K . Τότε, το γράφημα M είναι εμφύτευση μίας σκάλας Moebius με βρόγχο K και συνδέσεις τις πλευρές (14), (25), (36). Δηλαδή, ο g είναι ομοιομορφισμός που αντιστρέφει τον προσανατολισμό του (\mathbb{R}^3, M) τ.ω. $g(K) = K$. Άτοπο, λόγω του Θεωρήματος 3.16. Άρα δεν υπάρχουν τρεις ή περισσότερες τροχιές του g τάξης δύο.

Τέταρτη περίπτωση Ο g δεν έχει τροχιά τάξης δύο.

Δηλαδή, κάθε κορυφή του γραφήματος K_{4n+3} παραμένει σταθερή υπό τον g . Επιλέγουμε μία σκάλα Moebius M_3 με βρόγχο K και τρεις συνδέσεις η οποία είναι υπογράφημα του K_{4n+3} . Τότε έχουμε έναν ομοιομορφισμό που αντιστρέφει τον προσανατολισμό g του (\mathbb{R}^3, M_3) τ.ω. $g(K) = K$, άτοπο. Άρα ο g δεν μπορεί να μην έχει τροχιά τάξης δύο.

Επειδή, όπως δείξαμε, καμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις δεν μπορεί να ισχύει, δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : (\mathbb{R}^3, K_{4n+3}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, K_{4n+3})$ που να αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου. Άρα το γράφημα K_{4n+3} είναι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εγγενώς μη αμφίχειρο. ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΣΤΕΡΕΟΧΗΜΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ 79

Το Θεώρημα 3.19 δίνει θεωρητικά τρόπους κατασκευής τοπολογικών στερεοϊσομερών.

Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι δεν έχει συντεθεί μόριο, του οποίου το γράφημα να είναι το K_n για $n > 5$. Το γράφημα K_6 (καθώς και άλλα σύνθετα γραφήματα) έχουν προταθεί ως στόχος για μοριακή σύνθεση. Όπως αναφέρει η Flapan [3], ο Seeman (1999) έχει χρησιμοποιήσει συνθετικό DNA για να δημιουργήσει σύνθετα μόρια που περιέχουν κόμβους, κρίκους και γραφήματα. Ανάλογες τεχνικές ίσως μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δημιουργηθούν πλήρη γραφήματα από συνθετικό DNA. Ακόμα όμως και με αυτή την τεχνική, η δυσκολία σύνθεσης ενός μορίου με γράφημα K_n μεγαλώνει καθώς αυξάνεται ο αριθμός n .

Βιβλιογραφία

- [1] C. Adams, The Knot Book, W. H. Freeman and Company, New York, 1994.
- [2] J. Conway, C. McA Gordon, Knots and Links in Spatial Graphs, J. of Graph Theory, 7(1983), 445-453
- [3] E. Flapan, When Topology meets Chemistry, Cambridge University Press, 2000
- [4] J. Foisy, Intrinsically knotted graphs, J. of Graph Theory, 39(2002), 178-187.
- [5] L. Kauffman, Formal Knot Theory, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2006
- [6] L. Kauffman, The Conway Polynomial, Topology, 20(1981), 101-108
- [7] Σ. Λαμπροπούλου, Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος «Θεωρία Κόμβων και Εφαρμογές», 2007
- [8] Α. Παπαϊωάννου, Θεωρία Γραφημάτων, Έκδοση Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, Αθήνα, 2004