



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ  
ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΠΟΙΗΣΗΣ  
ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΡΜΟΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**του**

**Κωνσταντίνου Γ. Επταήμερου**

**Επιβλέπων: Λαμπροπούλου Σοφία  
Αν. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.**

**Αθήνα, Οκτώβριος 2006**





**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ  
ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΠΟΙΗΣΗΣ  
ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΡΜΟΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**του**

**Κωνσταντίνου Γ. Επταήμερου**

**Επιβλέπων: Λαμπροπούλου Σοφία  
Αν. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.**

**Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 30<sup>η</sup> Οκτωβρίου 2006.**

**Λαμπροπούλου Σοφία      Τσαμασφύρος Γ.      Κοκκίνης Β.  
Αν. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.      Καθηγητής Ε.Μ.Π.      Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.**

**Αθήνα, Οκτώβριος 2006**



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Σε αυτήν την ενότητα, θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ την κυρία **Λαμπροπούλου Σοφία, Αν. Καθηγήτρια του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου** που δέχτηκε να με επιβλέψει. Επίσης, θα ήθελα να την ευχαριστήσω για την μεγάλη βοήθεια της, για τον αμέτρητο χρόνο που αφιέρωσε για τη μελέτη από κοινού στο γραφείο της με σκοπό την καλύτερη κατανόηση, αλλά και τη διευκρίνιση αποριών και ερωτήσεων οι οποίες προέκυπταν συνεχώς και για το συνεχές ενδιαφέρον σχετικά με την πρόοδο και την πραγματοποίηση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Έπειτα, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο **Γεωργούλη Μανώλη, Λέκτορα του Τομέα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου του Λέστερ** που δέχτηκε να συνεπιβλέψει την εργασία αυτή. Επίσης, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για τον αμέτρητο χρόνο που αφιέρωνε στις συναντήσεις μας, ακόμα και κατά τη διάρκεια της περιόδου των διακοπών στην Ελλάδα, με σκοπό τη διευκρίνιση ερωτημάτων που προέκυπταν και συζητήσεων που αφορούσαν τις εφαρμογές των Πεπερασμένων Στοιχείων, για τις πολύτιμες πληροφορίες του σχετικά με τα συγγράμματα που έπρεπε να μελετήσω για την απόκτηση γνώσης και κατανόησης των Πεπερασμένων Στοιχείων. Επιπλέον, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την επιλογή του προβλήματος και των μεθόδων που περιλαμβάνονται στα κεφάλαια 5 και 6 αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους δύο για τις επιμελείς διορθώσεις τους και παρατηρήσεις τους, ώστε αυτή η διπλωματική εργασία να έχει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα και θα ευελπιστώ σε μία μελλοντική συνεργασία.



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις οι οποίες προκύπτουν στη Μαθηματική Μοντελοποίηση πολλών φυσικών, χημικών, βιολογικών φαινομένων και σε ποικίλες θεματικές περιοχές όπως η Δυναμική των Ρευστών, ο Ηλεκτρομαγνητισμός, η Επιστήμη των Υλικών, η Αστροφυσική, η Οικονομία, η Οικονομική Μοντελοποίηση κτλ. Επειδή πολύ συχνά οι εξισώσεις υπό εξέταση είναι τόσο περίπλοκες, ώστε για να βρούμε τη λύση τους σε κλειστή μορφή ή με καθαρά αναλυτικά μέσα (π.χ. με μεθόδους μετασχηματισμών Laplace ή Fourier ή με τη μορφή δυναμοσειράς) είναι είτε αδύνατο είτε ανέφικτο, κανείς πρέπει να αναζητήσει αριθμητική προσέγγιση της άγνωστης αναλυτικής λύσης.

Έτσι αναπτύχθηκαν οι Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων (βλέπε [17], [13], [12], [10], [8], [7], [2]), μία ιδιαίτερη κατηγορία αριθμητικών τεχνικών για να προσεγγίζουμε τη λύση των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, οι Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων έχουν γίνει ευρέως αποδεκτές ως ένα από τα πιο ισχυρά εργαλεία για την αριθμητική προσέγγιση των λύσεων των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η επιτυχία των Μεθόδων Πεπερασμένων Στοιχείων οφείλεται όχι μόνο στο γεγονός ότι έχουν την ικανότητα να σχετίζονται με περίπλοκες γεωμετρίες του χωρίου και μη δομημένες υποδιαίρεσεις, αλλά στην ισχυρή μαθηματική θεωρία, η οποία έχει αναπτυχθεί για την ανάλυση των αποδόσεων τους.

Για την αριθμητική επίλυση ενός περίπλοκου προβλήματος, όπως για παράδειγμα το συνοριακό πρόβλημα τιμών για τη διαρμονική εξίσωση, έχουν προταθεί ποικίλες Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων (βλέπε [7], [17] και Διαδίκτυο). Για παράδειγμα οι **Προσαρμοσμένες (Conforming) Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων**, οι οποίες απαιτούν η προσεγγιστική λύση να βρίσκεται σε έναν πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του χώρου Sobolev  $H^2(\Omega)$ . Αυτό επιβάλλει τη χρήση  $C^1$  πεπερασμένων στοιχείων (Hermite, Argyris), δηλαδή οι συναρτήσεις βάσης του χώρου πεπερασμένων στοιχείων μαζί με τις πρώτες παραγώγους χρειάζεται να είναι συνεχείς στο κλειστό χωρίο  $\bar{\Omega}$ . Επειδή η κατασκευή τέτοιων χώρων πεπερασμένων στοιχείων είναι αρκετά δύσκολη όταν έχουμε πολύπλοκη γεωμετρία του χωρίου  $\Omega$ , τα  $H^2(\Omega)$ -προσαρμοσμένα (conforming) πεπερασμένα στοιχεία σπάνια χρησιμοποιούνται σε πρακτικούς υπολογισμούς.

Ένας τρόπος για να αποφύγουμε τις απαιτήσεις (κανονικότητας) είναι να χρησιμοποιήσουμε **Μη – Προσαρμοσμένες (Non – Conforming) Μεθόδους**. Αυτές στηρίζονται σε βάση πεπερασμένων στοιχείων συνεχών συναρτήσεων, η οποία δεν ανήκει στο  $H^2(\Omega)$  (και συνεπώς αυτές οι συναρτήσεις δε συμπεριλαμβάνονται ούτε στο  $C^1(\bar{\Omega})$ ). Άλλες προσεγγίσεις που αποφεύγουν τη χρήση  $C^1$  πεπερασμένων στοιχείων περιλαμβάνουν τις **Μικτές Μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων**. Ωστόσο, αυτές οι Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων διπλασιάζουν τους βαθμούς ελευθερίας, διότι για να βρούμε την αριθμητική λύση του διαρμονικού προβλήματος

$$\Delta^2 u = f$$

πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \Delta u = g \\ \Delta g = f \end{cases} .$$

Επιπρόσθετα, μία άλλη κατηγορία μεθόδων για την αριθμητική επίλυση του συνοριακού προβλήματος τιμών για τη διαρμονική εξίσωση είναι οι **Εσωτερικής Ποινής Ασυνεχείς Galerkin Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων της  $hp$  - Εκδοχής** ( *$hp$  - Version Interior Penalty Discontinuous Galerkin Finite Element Methods*) που περιγράφονται στο [17].

Πριν από αυτό, αξίζει να αναφέρουμε τις έννοιες της  $hp$  και της **Μεθόδου Εσωτερικής Ποινής (Interior Penalty)**. Η έννοια της **Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων της  $hp$  - Εκδοχής** εισήχθη από τον Babuska τη δεκαετία του '80, αυτή επιτρέπει την τοπική μεταβολή και του μεγέθους των στοιχείων (υποδιαιρώντας αυτά που ήδη υπάρχουν) και του βαθμού των πολυωνυμικών συναρτήσεων βάσης πάνω σε κάθε στοιχείο. Η **Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων Εσωτερικής Ποινής** χρησιμοποιεί κλασικούς συνεχείς χώρους πεπερασμένων στοιχείων με ποινικοποίηση των ασυνεχειών των παραγώγων στις κοινές έδρες των στοιχείων.

Τώρα, οι **Εσωτερικής Ποινής Ασυνεχείς Μέθοδοι Galerkin Πεπερασμένων Στοιχείων της  $hp$  - Εκδοχής** ( *$hp$  - Version Interior Penalty Discontinuous Galerkin Finite Element Methods*) για τη διαρμονική εξίσωση, που περιλαμβάνουν όρους εσωτερικής ποινής (interior penalty) για να ποινικοποιήσουν τα άλματα κατά μήκος των κοινών εδρών των στοιχείων (στην αριθμητική επίλυση), εμφανίζονται να έχουν πλεονέκτημα συγκρινόμενες με τις **Προσαρμοσμένες Μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων (Conforming Finite Element Methods)**, επειδή μπορούν να χρησιμοποιήσουν διαφορετικούς πολυωνυμικούς βαθμούς πάνω σε κάθε στοιχείο χωρίς να ενδιαφέρονται για τις απαιτήσεις της συνέχειας εντός του πλέγματος. Αντιθέτως, η παραπάνω μέθοδος των Suli- Mozolevski που αναπτύσσεται στο [17] για τη διαρμονική εξίσωση μειονεκτεί, γιατί έχει πολλούς βαθμούς ελευθερίας.

Οι **Συνεχείς Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων Εσωτερικής Ποινής της  $hp$  - Εκδοχής** για τη διαρμονική εξίσωση χρησιμοποιώντας μη – προσαρμοσμένα (non – conforming) στοιχεία, που αναπτύσσονται στο κεφάλαιο 5 αυτής της διπλωματικής εργασίας, είναι ασθενώς  $C^1$  (λόγω της εσωτερικής ποινής) και ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας δε μεταβάλλεται, δηλαδή παραμένει σταθερός. Επίσης, οι **Συνεχείς Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων Εσωτερικής Ποινής της  $hp$  - Εκδοχής** είναι συγκρίσιμες με τις μεθόδους που αναφέρονται παραπάνω για τη διαρμονική εξίσωση, όταν έχουμε χαμηλό βαθμό πολυωνύμων και είναι καλύτερες από τις μεθόδους που αναφέρονται παραπάνω για τη διαρμονική εξίσωση, όταν έχουμε υψηλό βαθμό πολυωνύμων.

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι το διαρμονικό πρόβλημα διατυπώθηκε το 19<sup>ο</sup> αιώνα όταν έγιναν τα πρώτα βήματα στις θεωρίες της ελαστικής παραμόρφωσης και της ιξώδους κίνησης ρευστών. Το πρόβλημα μπορεί να εξεταστεί και από μαθηματική και από μηχανική άποψη, οι οποίες κατά κανόνα, είναι πολύ διαφορετικές. Βέβαια, η μαθηματική ανάλυση οδηγεί σε λύσεις του διαρμονικού



προβλήματος (είτε ισχυρές είτε προσεγγιστικές) κι έτσι παρέχει αποτελεσματικά εργαλεία όταν σχετίζεται με κύριες εφαρμογές της Μηχανικής, π.χ. στην εύρεση των θέσεων των σημείων με τη μέγιστες κανονικές πιέσεις και τις κανονικών αντιδράσεων για το πρόβλημα κάμψης ενός στερεωμένου πιάτου στη ναυπηγική. Επίσης, ψάχνοντας κανείς στο Διαδίκτυο μπορεί να βρει εφαρμογές του διαρμονικού προβλήματος τόσο στην απεικόνιση ραντάρ (radar imaging), όσο και στην αεροακουστική.

## ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Αυτή η εργασία είναι δομημένη ως ακολούθως. Το κεφάλαιο 1 αναφέρεται στους χώρους συναρτήσεων όπως είναι οι χώροι ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, συνεχών συναρτήσεων και Sobolev. Επίσης, αναφέρουμε ιδιότητες καθώς και ορισμούς, προτάσεις και θεωρήματα που ισχύουν σε αυτούς τους χώρους. Επιπλέον, το κεφάλαιο 1 περιέχει πολλές χρήσιμες ανισότητες όπως η (συνεχής ή διακριτή) ανισότητα Cauchy-Schwarz, η ανισότητα αντιστρεψιμότητας (inverse inequality), η ανισότητα ίχνους (trace inequality) κ.ά., οι οποίες θα μας χρειαστούν στο κεφάλαιο 5 και στο κεφάλαιο 6.

Το κεφάλαιο 2 αναφέρεται στη μεταβολική διατύπωση των ελλειπτικών συνοριακών προβλημάτων τιμών. Παρουσιάζουμε ορισμούς, θεωρήματα και ιδιότητες, των χώρων εσωτερικού γινομένου και των χώρων Hilbert. Επιπλέον, γίνεται μια μικρή αναφορά για τις προβολές πάνω σε υπόχωρους. Επιπρόσθετα, παρουσιάζουμε τους ορισμούς της συνέχειας και της ελλειπτικότητας (coercivity) της διγραμμικής μορφής καθώς και τις διατυπώσεις του συμμετρικού και του μη-συμμετρικού μεταβολικού προβλήματος. Τέλος, ιδιαίτερη έμφαση δίνεται σε κάποια σπουδαία θεωρήματα όπως το Θεώρημα Riesz, το Θεώρημα Lax-Milgram, το Θεώρημα Cea και το Θεώρημα Προβολής.

Το κεφάλαιο 3 αναφέρεται στην κατασκευή ενός χώρου πεπερασμένων στοιχείων. Στην παράγραφο 3.1, δίνονται χρήσιμοι ορισμοί και Λήμματα που θα βοηθούν στην κατανόηση και επίλυση των παραδειγμάτων που βρίσκονται στις επόμενες παραγράφους. Η παράγραφος 3.2 αναφέρεται στα τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία, όπως είναι το στοιχεία Lagrange, Hermite και Argyris. Η παράγραφος 3.3 αναφέρεται στον ορισμό του interpolant και τις ιδιότητες του, στον ορισμό της υποδιαίρεσης και της τριγωνοποίησης ενός χωρίου. Επιπλέον, γίνεται μία μικρή αναφορά στα πεπερασμένα στοιχεία υψηλότερων διαστάσεων και στα εξωτικά πεπερασμένα στοιχεία. Τέλος, αυτό το κεφάλαιο είναι εφοδιασμένο με πολλά λυμένα παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση των ορισμών που το αποτελούν.

Το κεφάλαιο 4 αναφέρεται εν συντομία στα  $n$ -διάστατα μεταβολικά προβλήματα, περιέχει τη μεταβολική διατύπωση της εξίσωσης Poisson, καθώς και χρήσιμες προτάσεις που εφαρμόζονται για να προκύψει αυτή η μεταβολική διτύπωση.

Το κεφάλαιο 5 αναφέρεται στις συνεχείς μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων εσωτερικής ποιότητας της  $hp$  - εκδοχής για τη διαρμονική εξίσωση. Στην παράγραφο 5.1 εισάγουμε τους χώρους πεπερασμένων στοιχείων (οι οποίοι αποτελούνται από τα κατά τμήματα συνεχή πολυώνυμα) και τους «σπασμένους» χώρους Sobolev. Στην

παράγραφο 5.2 διατυπώνουμε την ασθενή μορφή του συνοριακού προβλήματος τιμών για τη διαρμονική εξίσωση πάνω σε αυτούς τους χώρους ποινικοποιώντας τα άλματα (jumps) και εισάγοντας τον ορισμό της μέσης τιμής κατά μήκος των κοινών εδρών των στοιχείων. Στην παράγραφο 5.3 διατυπώνουμε τη συνεχή μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων εσωτερικής ποινής, εισάγουμε την ιδιότητα της ορθογωνιότητας Galerkin και αποδεικνύουμε την ιδιότητα της ελλειπτικότητας (coercivity) στις περιπτώσεις που το βήμα (mesh)  $h$  είναι ομοιόμορφο και μη-ομοιόμορφο αντίστοιχα. Στην παράγραφο 5.4 αποδεικνύουμε την a priori εκτίμηση σφάλματος της  $hp$ -εκδοχής στην  $\|\cdot\|_E$  νόρμα για τις συνεχείς μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων εσωτερικής ποινής που αναπτύχθηκαν στις παραπάνω παραγράφους αυτού του κεφαλαίου για ομοιόμορφο και μη-ομοιόμορφο βήμα (mesh)  $h$ , αντίστοιχα. Ιδιαίτερα, εγκαθιδρύουμε φράγματα για το σφάλμα, τα οποία είναι βέλτιστα (optimal) στο  $h$  και υπο-βέλτιστα (suboptimal) στο  $p$ .

Το κεφάλαιο 6 αναφέρεται στην εφαρμογή των συνεχών μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων εσωτερικής ποινής για τη διαρμονική εξίσωση στη μία διάσταση. Σκοπός μας είναι ο υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα ακαμψίας  $A = [\alpha_{kj}]_{3n \times 3n}$  χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα Lagrange 2<sup>ου</sup> βαθμού. Επίσης, στο τέλος του κεφαλαίου υπάρχουν δύο προγράμματα σε Matlab τα οποία υπολογίζουν τους συντελεστές  $[c_j]_{3n \times 1}$  της προσεγγιστικής λύσης  $u_h$  (άρα και την  $u_h$ ), λύνοντας το σύστημα  $Ac = b$ . Τέλος, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της ισχυρής και της προσεγγιστικής λύσης, αντίστοιχα, καθώς και η κοινή τους γραφική παράσταση.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### 1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΧΩΡΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1.1 Χώροι ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.....	1
1.2 Χώροι συνεχών συναρτήσεων και γενικευμένες (ασθενείς) παράγωγοι .....	3
1.3 Χώροι Sobolev .....	6
1.4 Θεώρημα Ίχνους .....	10
1.5 Χρήσιμες ανισότητες .....	11

### 2. ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

2.1 Χώροι εσωτερικού γινομένου .....	13
2.2 Χώροι Hilbert .....	14
2.3 Προβολές πάνω σε υπόχωρους .....	16
2.4 Θεώρημα Αναπαράστασης Riesz .....	18
2.5 Διατύπωση του συμμετρικού μεταβολικού (ασθενούς) προβλήματος .....	19
2.6 Διατύπωση του μη συμμετρικού μεταβολικού (ασθενούς) προβλήματος .....	20
2.7 Θεώρημα Lax – Milgram .....	21
2.8 Εκτιμήσεις για γενική προσέγγιση πεπερασμένου στοιχείου .....	22

### 3. Η ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΕΝΟΣ ΧΩΡΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

3.1 Το πεπερασμένο στοιχείο .....	25
3.2 Τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία .....	28
3.3 Η παρεμβάουσα συνάρτηση (interpolant) .....	43
3.4 Τετράπλευρα πεπερασμένα στοιχεία .....	49
3.5 Πεπερασμένα στοιχεία υψηλότερων διαστάσεων .....	53
3.6 Εξωτικά πεπερασμένα στοιχεία .....	54

### 4. $n$ - ΔΙΑΣΤΑΤΑ ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΑ (ΑΣΘΕΝΗ) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

4.1 Μεταβολική (ασθενής) διατύπωση της εξίσωσης Poisson .....	57
4.2 Μεταβολική (ασθενής) διατύπωση του προβλήματος Neumann .....	59

### 5. Η $hp$ - ΕΚΔΟΧΗ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΠΟΙΝΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΡΜΟΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

5.1 Χώροι πεπερασμένου στοιχείου .....	61
5.2 Ασθενής διατύπωση πάνω σε «σπασμένους» χώρους Sobolev .....	63
5.3 Διατύπωση των Συνεχών – Εσωτερικής Ποινής Μεθόδων Πεπερασμένου Στοιχείου και η ιδιότητα coercivity της διγραμμικής μορφής πάνω σε χώρο πεπερασμένου στοιχείου .....	68
5.4 Εκτίμηση σφάλματος .....	76

**6. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ  
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΠΟΙΝΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΡΜΟΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ  
ΣΤΗ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ**

6.1 Υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα ακαμψίας και επίλυση του  
συστήματος  $Ac = b$  .....100

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**.....120

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΧΩΡΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Αυτό το κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στους χώρους συναρτήσεων οι οποίοι χρησιμοποιούνται στη μεταβολική διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων. Ακριβείς υποθέσεις για την κανονικότητα της λύσης και των δεδομένων μπορούν να διατυπωθούν με τη διατύπωση κλάσεων συναρτήσεων με συγκεκριμένες ιδιότητες παραγωγισιμότητας και ολοκληρωσιμότητας οι οποίοι καλούνται χώροι συναρτήσεων. Παραδείγματα τέτοιων χώρων είναι οι χώροι των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, οι χώροι των συνεχών συναρτήσεων και οι χώροι Sobolev. Παρουσιάζονται βασικοί ορισμοί, χρήσιμα αποτελέσματα και ανισότητες. Αναπτύσσουμε μόνο ένα μικρό κομμάτι της γνωστής θεωρίας αυτών των χώρων, αρκετό για τη διατύπωση και την κατανόηση της μεθόδου πεπερασμένου στοιχείου.

### 1.1 ΧΩΡΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θα αναφέρουμε μερικές βασικές έννοιες της θεωρίας ολοκλήρωσης Lebesgue. Με τον όρο «χωρίο» εννοούμε ένα Lebesgue μετρήσιμο (συνήθως είτε ανοικτό είτε κλειστό) υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  με μη κενό εσωτερικό. Για λόγους απλότητας, περιοριζόμαστε σε πραγματικές συναρτήσεις. Έστω ότι  $p$  είναι ένας πραγματικός αριθμός,  $p \geq 1$ , ορίζουμε ως  $L^p(\Omega)$  το σύνολο όλων των Lebesgue μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται πάνω σε ένα δοσμένο χωρίο  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  έτσι ώστε

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις οι οποίες είναι ίσες σχεδόν παντού (π.χ. ίσες, εκτός από ένα σύνολο μέτρου μηδέν) πάνω στο  $\Omega$  ταυτίζονται μεταξύ τους. Συνεπώς, σκεφτόμαστε τον  $L^p(\Omega)$  ως ένα σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων ως προς αυτή την ταύτιση. Για  $1 \leq p < \infty$ , ο  $L^p(\Omega)$  είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

και για  $p = \infty$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess. sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Ο  $L^\infty(\Omega)$  περιέχει τις συναρτήσεις  $f$  που είναι ορισμένες πάνω στο  $\Omega$  έτσι ώστε η  $|f|$  να έχει πεπερασμένο essential supremum πάνω στο  $\Omega$  (κυρίως, υπάρχει μία θετική σταθερά  $M$  έτσι ώστε  $|f(x)| \leq M$  για σχεδόν όλα τα  $x$  στο  $\Omega$ , ο μικρότερος τέτοιος αριθμός  $M$  καλείται το essential supremum του  $|f|$  και γράφουμε  $M = \text{ess. sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$ ). Ο  $L^\infty(\Omega)$  είναι εφοδιασμένος με την παραπάνω νόρμα.

Σε οποιαδήποτε περίπτωση, ορίζουμε τους χώρους Lebesgue ως

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ μετρήσιμη } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\} \quad \text{με } 1 \leq p < \infty$$

και

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ μετρήσιμη και } \exists \text{ σταθερά } M \text{ τέτοια ώστε } |f(x)| \leq M \text{ σ.π. στο } \Omega\}$$

Ο χώρος  $L^2(\Omega)$  μπορεί να εφοδιαστεί με το εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g) := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Επίσης  $\|f\|_{L^2(\Omega)} = (f, f)^{1/2}$ .

Υπάρχουν χρήσιμες ανισότητες που ισχύουν για τα συναρτησιακά που ορίζονται παραπάνω:

**(1.1.1) Ανισότητα Minkowski.** Για  $1 \leq p \leq \infty$  και  $f, g \in L^p(\Omega)$ , έχουμε ότι

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

**(1.1.2) Ανισότητα Holder.** Για  $1 \leq p, q \leq \infty$  έτσι ώστε  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , αν  $f \in L^p(\Omega)$  και

$g \in L^q(\Omega)$ , τότε  $fg \in L^1(\Omega)$  και

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**(1.1.3) Ανισότητα Cauchy-Schwarz.** Αυτή είναι απλά ανισότητα Holder στην ειδική περίπτωση  $p = q = 2$ , δηλαδή αν  $f, g \in L^2(\Omega)$  τότε  $fg \in L^1(\Omega)$  και

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Εν' όψη της ανισότητας Minkowski και των ορισμών της  $\|\cdot\|_{L^p}$ , ο χώρος  $L^p(\Omega)$  έχει κάποιες ιδιότητες που δίνονται παρακάτω.

**(1.1.4) Ορισμός.** Για δοσμένο γραμμικό (διανυσματικό) χώρο  $V$ , μία νόρμα,  $\|\cdot\|$ , είναι μία συνάρτηση πάνω στον  $V$  με μη αρνητικές πραγματικές τιμές έχοντας τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i)  $\|u\| \geq 0 \quad \forall u \in V$   
 $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- (ii)  $\|c \cdot u\| \leq |c| \cdot \|u\| \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall u \in V$
- (iii)  $\|u + w\| \leq \|u\| + \|w\| \quad \forall u, w \in V$  (τριγωνική ανισότητα)

**(1.1.5) Θεώρημα.** Ο  $L^p(\Omega)$  είναι ένας γραμμικός χώρος και η  $\|\cdot\|_{L^p}$  είναι μία νόρμα για κάθε  $1 \leq p \leq \infty$ .

**(1.1.6) Πρόταση.** Αν  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  φραγμένο και  $1 \leq p \leq r \leq \infty$ , τότε  $L^r(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ .

**(1.1.7) Ορισμός.** Ένας γραμμικός χώρος με νόρμα  $(V, \|\cdot\|)$  λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζεται από τη νόρμα,  $\|\cdot\|$ .

**(1.1.8) Θεώρημα.** Για  $1 \leq p \leq \infty$ , ο  $L^p(\Omega)$  είναι χώρος Banach.

Παρατήρηση 1: Ο  $L^2(\Omega)$  είναι χώρος Hilbert, δηλαδή έχει εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)$  και είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  που ορίζεται από τη σχέση

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = (f, f)^{1/2}.$$

## 1.2 ΧΩΡΟΙ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ (ΑΣΘΕΝΕΙΣ) ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Έστω  $\Omega$  κάποιο χωρίο στον  $\mathbb{R}^n$  και έστω  $k \in \mathbb{N}$ . Ορίζουμε ως  $C^k(\Omega)$  το σύνολο όλων των συνεχών πραγματικών που είναι ορισμένες πάνω στο  $\Omega$  έτσι ώστε οι μερικές παράγωγοι  $D^a f$  να είναι συνεχείς πάνω στο  $\Omega$  για όλους τους πολυδείκτες  $a = (a_1, \dots, a_n)$  με  $|a| \leq k$ .

Αρχικά, εισάγουμε μία μικρή έννοια για τις (υπολογιστικές) μερικές παραγώγους, την έννοια του πολυδείκτη (multi-index). Έστω  $\mathbb{N}$  το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων.

Ένας πολυδείκτης,  $a$ , είναι ένα  $n$ -tuple

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$$

των μη αρνητικών ακεραίων,  $a_i$ . Το μήκος του  $a$  δίνεται από

$$|a| := \sum_{i=1}^n a_i.$$

Υποθέτοντας ότι το  $\Omega$  είναι ένα φραγμένο ανοικτό σύνολο στον  $\mathbb{R}^n$ , ως  $C^k(\bar{\Omega})$  ορίζουμε το σύνολο όλων των  $f$  στο  $C^k(\Omega)$  έτσι ώστε οι  $D^a f$  να μπορούν να επεκταθούν από το  $\Omega$  σε συνεχείς συναρτήσεις πάνω στο  $\bar{\Omega}$ , την κλειστότητα του συνόλου  $\Omega$ , για  $a = (a_1, \dots, a_n)$  με  $|a| \leq k$ .

Ο  $C^k(\bar{\Omega})$  μπορεί να εφοδιαστεί με τη νόρμα

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \sum_{|a| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^a f(x)|.$$

Ιδιαίτερα, όταν  $k = 0$ , θα γράφουμε  $C(\bar{\Omega})$  αντί του  $C^0(\bar{\Omega})$  για να ορίσουμε το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων που είναι ορισμένες πάνω στο  $\bar{\Omega}$ , σε αυτήν την περίπτωση

$$\|f\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Σημείωση 1: Η νόρμα  $\|f\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|$  μόνο όταν το  $\Omega$  είναι φραγμένο.

Παρομοίως, αν  $k = 1$

$$\|f\|_{C^1(\bar{\Omega})} := \sum_{|a| \leq 1} \sup_{x \in \Omega} |D^a f(x)| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \sum_{j=1}^n \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \right|.$$

Υπάρχουν αρκετοί ορισμοί των παραγώγων οι οποίοι είναι χρήσιμοι σε διαφορετικές περιπτώσεις. Ο «υπολογιστικός» ορισμός, δηλαδή

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

είναι ένας «τοπικός» ορισμός που παρέχει πληροφορίες για τη συνάρτηση  $f$  μόνο κοντά στο σημείο  $x$ . Στη μεταβολική διατύπωση που θα αναπτυχθεί στο παρακάτω κεφάλαιο οι παράγωγοι μπορούν να ερμηνευτούν ως συναρτήσεις στο χώρο Lebesgue  $L^2(\Omega)$  ορίζοντας, λοιπόν, μια ασθενέστερη έννοια παραγωγίσης. Μία συνάρτηση σε έναν από αυτούς τους χώρους  $L^p(\Omega)$  καθορίζεται μόνο από τη σφαιρική της



συμπεριφορά. Έτσι, είναι φυσικό να αναπτύξουμε μία σφαιρική έννοια της παραγώγου περισσότερο κατάλληλη στους χώρους Lebesgue. Αυτό το κάνουμε ως εξής, ορίζουμε παραγώγους για μία οικογένεια όχι και τόσο ομαλών συναρτήσεων (smooth functions) και τις συγκρίνουμε με πολύ ομαλές συναρτήσεις.

Για  $f \in C^\infty$ , ορίζουμε ως  $D^a f$ ,  $D_x^a f$ ,  $\partial_x^a f$ ,  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a f$  τη συνήθη μερική παράγωγο με

$$D^a = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{a_n} = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}}.$$

Για ένα δοσμένο διάνυσμα  $(x_1, \dots, x_n)$ , ορίζουμε ως  $x^a := x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ . Αξίζει να σημειώσουμε ότι αν το  $x$  αντικατασταθεί τυπικά από το συμβολισμό

$\frac{\partial}{\partial x} := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ , τότε αυτός ο ορισμός του  $x^a$  είναι συνεπής με τον προηγούμενο

ορισμό του  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$ . Επιπλέον, η τάξη της παραγώγου δίνεται από το  $|a|$ .

Έπειτα, εισάγουμε την έννοια του *στήριγματος* μίας συνάρτησης η οποία είναι ορισμένη πάνω σε κάποιο χωρίο στον  $\mathbb{R}^n$ . Για μία συνεχή συνάρτηση,  $f$ , *στήριγμα* είναι η κλειστότητα του συνόλου  $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$  στο  $\Omega$ . Επομένως, το *στήριγμα* είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του  $\Omega$  έτσι ώστε  $f = 0$  στο  $\Omega \setminus \text{στήριγμα } f$  (αυτό αν επεκταθεί ορίζεται σε ολόκληρο το  $\mathbb{R}^n$ ). Αν το *στήριγμα* είναι ένα συμπαγές σύνολο (π.χ. αν είναι φραγμένο) και αυτό είναι ένα υποσύνολο του εσωτερικού ενός συνόλου  $\Omega$ , τότε η  $f$  λέγεται ότι έχει *συμπαγές στήριγμα* ως προς το  $\Omega$ .

**(1.2.1) Ορισμός.** Έστω ότι  $\Omega$  είναι ένα χωρίο στον  $\mathbb{R}^n$ . Ορίζουμε ως  $D(\Omega)$  ή  $C_0^\infty(\Omega)$  το σύνολο των  $C^\infty(\Omega)$  συναρτήσεων με συμπαγές στήριγμα στο  $\Omega$ .

Σημείωση 2:  $C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C_0^k(\Omega)$ , όπου  $C_0^k(\Omega)$  είναι το σύνολο όλων των  $f$  στο

$C^k(\Omega)$  των οποίων το στήριγμα είναι φραγμένο υποσύνολο του  $\Omega$ .

**(1.2.2) Ορισμός.** Για ένα δοσμένο χωρίο  $\Omega$ , το σύνολο των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ορίζεται ως

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f : f \in L^1(K) \quad \forall K \text{ συμπαγές } \subset \text{int } \Omega\},$$

όπου  $\text{int } \Omega := \{x \in \Omega : \exists \varepsilon > 0 \text{ τέτοιο ώστε } B_\varepsilon(x) \subseteq \Omega\}$ .

Παρατήρηση 1: Οι συναρτήσεις στο  $L^1_{loc}(\Omega)$  μπορούν να συμπεριφέρονται άσχημα κοντά στο σύνορο, π.χ. η συνάρτηση  $e^{\frac{1}{\text{dist}(x, \partial\Omega)}} \in L^1_{loc}(\Omega)$ , αν και αυτή η άποψη είναι κάπως ταυτόσημη με τη χρήση του χώρου μας.

**(1.2.3) Ορισμός.** Λέμε ότι μία δοσμένη συνάρτηση  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  έχει ασθενή παράγωγο,  $D_w^a f$ , υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει μία συνάρτηση  $g \in L^1_{loc}(\Omega)$  έτσι ώστε

$$\int_{\Omega} g(x)\phi(x)dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} f(x)\phi^{(a)}(x)dx \quad \forall \phi \in \mathbf{D}(\Omega).$$

Αν μία τέτοια συνάρτηση  $g$  υπάρχει, τότε ορίζουμε  $D_w^a f = g$ .

**(1.2.4) Πρόταση.** Έστω ότι το  $a$  είναι αυθαίρετο και έστω  $\psi \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ . Τότε η ασθενής παράγωγος  $D_w^a \psi$  υπάρχει και είναι ίση με  $D^a \psi$  (σχεδόν παντού).

Παρατήρηση 2: Ως συνέπεια αυτής της πρότασης, αγνοούμε τις διαφορές στον ορισμό της  $D$  και της  $D_w$  από εδώ και στο εξής. Σαφέστερα, θα χρησιμοποιούμε το γράμμα  $D$  για να ορίσουμε τόσο κλασικές όσο και ασθενείς παραγώγους, θα είναι πάντα κατανοητό από τα συμφραζόμενα (εξετάζοντας την ομαλότητα της συνάρτησης που παραγωγίζεται) ποιο από τα δύο υπονοείται.

Για παράδειγμα, αν μία συνάρτηση  $f$  είναι επαρκώς ομαλή, δηλαδή  $f \in C^k(\Omega)$ , τότε η ασθενής παράγωγος της  $D_w^a f$  τάξης  $|a| \leq k$  ταυτίζεται με την αντίστοιχη κλασική μερική παράγωγο

$$\frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}.$$

### 1.3 ΧΩΡΟΙ SOBOLEV

Αυτή η παράγραφος αναφέρεται στους χώρους Sobolev και στις ιδιότητες τους. Χρησιμοποιώντας την έννοια της ασθενής παραγώγου, γενικεύουμε τους χώρους και τις νόρμες Lebesgue για να περιλάβουν παραγώγους.

**(1.3.1) Ορισμός.** Έστω  $k$  ένας μη αρνητικός ακέραιος και έστω  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ .

Υποθέτουμε ότι η ασθενής παράγωγος τάξης  $|a|$ ,  $D^a f$ , υπάρχει για όλα τα  $|a| \leq k$  και επίσης υποθέτουμε ότι  $p \in [1, \infty]$ . Ορίζουμε

$$W_p^k(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^a f \in L^p(\Omega), |a| \leq k\}$$

να είναι ο χώρος Sobolev τάξης  $k$ , εφοδιασμένος με την παρακάτω (Sobolev) νόρμα

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} := \left( \sum_{|a| \leq k} \|D^a f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad \text{όταν } 1 \leq p < \infty$$

και

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} := \sum_{|a| \leq k} \|D^a f\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{όταν } p = \infty.$$

Ορίζουμε επίσης τις ημι-νόρμες:

$$|f|_{W_p^k(\Omega)} := \left( \sum_{|a|=k} \|D^a f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} := \left( \sum_{j=0}^k |f|_{W_p^j(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad \text{όταν } 1 \leq p < \infty.$$

Επίσης έχουμε,

$$|f|_{W_p^k(\Omega)} := \sum_{|a|=k} \|D^a f\|_{L^\infty(\Omega)},$$

ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$\|f\|_{W_\infty^k(\Omega)} := \sum_{j=0}^k |f|_{W_\infty^j(\Omega)} \quad \text{όταν } p = \infty.$$

Παρατήρηση 1: Όταν  $k \geq 1$ , η  $|\cdot|_{W_p^k(\Omega)}$  λέγεται ημι-νόρμα Sobolev πάνω στο χώρο  $W_p^k(\Omega)$ .

Πράγματι, όταν  $k \geq 1$ , η  $|\cdot|_{W_p^k(\Omega)}$  είναι μόνο μία ημι-νόρμα παρά μία νόρμα, επειδή αν  $|f|_{W_p^k(\Omega)} = 0$  για  $f \in W_p^k(\Omega)$  δεν προκύπτει απαραίτητα ότι  $f(x) = 0$  για σχεδόν κάθε  $x$  στο  $\Omega$  (μονάχα είναι γνωστό ότι  $D^a f(x) = 0$  για σχεδόν κάθε  $x \in \Omega$ ,  $|a| = k$ ), έτσι η  $|\cdot|_{W_p^k(\Omega)}$  δεν ικανοποιεί το πρώτο αξίωμα της νόρμας.

Παρατήρηση 2: Οι χώροι Sobolev μπορούν να σχετιστούν σε ειδικές περιπτώσεις με άλλους χώρους. Για παράδειγμα, ανακαλώντας τη νόρμα Lipschitz

$$\|f\|_{Lip(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : x, y \in \Omega \text{ με } x \neq y \right\}$$

και ο αντίστοιχος χώρος των συναρτήσεων Lipschitz είναι

$$Lip(\Omega) = \{f \in L^\infty(\Omega) : \|f\|_{Lip(\Omega)} < \infty\}.$$

Τότε για όλες τις διαστάσεις  $n$ , έχουμε ότι  $Lip(\Omega) = W_\infty^1(\Omega)$  με ισοδύναμες νόρμες, κάτω από ορισμένες συνθήκες πάνω στο χωρίο  $\Omega$ . Επιπλέον, για  $k > 1$

$$W_\infty^k(\Omega) = \{f \in C^{k-1}(\Omega) : f^{(a)} \in Lip(\Omega) \ \forall |a| \leq k-1\}.$$

Στη μία διάσταση ( $n = 1$ ), ο χώρος  $W_1^1(\Omega)$  μπορεί να χαρακτηριστεί ως το σύνολο των απολύτως συνεχών συναρτήσεων πάνω σε ένα διάστημα  $\Omega$ .

**(1.3.2) Θεώρημα.** *Ο  $W_p^k(\Omega)$  είναι ένας γραμμικός χώρος και η  $\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$  είναι μία νόρμα για κάθε  $1 \leq p \leq \infty$  και για κάθε  $k \geq 1$ .*

**(1.3.3) Θεώρημα.** *Ο χώρος Sobolev  $W_p^k(\Omega)$  είναι χώρος Banach.*

Παρατήρηση 3: Υπάρχει και άλλος δυνατός ορισμός του χώρου Sobolev. Έστω ότι  $H_p^k(\Omega)$  ορίζει την κλειστότητα του συνόλου  $C^k(\Omega)$  ως προς τη νόρμα Sobolev  $\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$ . Στην περίπτωση που  $p = \infty$ , έχουμε  $H_\infty^k = C^k$  και αυτό δεν είναι το ίδιο με το  $W_\infty^k(\Omega)$ . Πράγματι, έχουμε ήδη ταυτίσει το τελευταίο να σχετίζεται με κάποιους χώρους Lipschitz. Ωστόσο, για  $1 \leq p < \infty$ , αποδεικνύεται ότι  $H_p^k(\Omega) = W_p^k(\Omega)$  (για περισσότερα βλέπε [1]).

**(1.3.4) Θεώρημα.** *Έστω  $\Omega$  ένα οποιοδήποτε ανοικτό σύνολο. Τότε το  $C^\infty(\Omega) \cap W_p^k(\Omega)$  είναι πυκνό στον  $W_p^k(\Omega)$  για  $p < \infty$ .*

**(1.3.5) Πρόταση.** *Υποθέτουμε ότι  $\Omega$  είναι ένα οποιοδήποτε χωρίο,  $k$  και  $m$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση  $k \leq m$  και  $p$  είναι ένας*

οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση  $1 \leq p \leq \infty$ . Τότε  $W_p^m(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$ .

**(1.3.6) Πρόταση.** Υποθέτουμε ότι  $\Omega$  είναι ένα οποιοδήποτε φραγμένο χωρίο,  $k$  είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος και  $p, q$  είναι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ . Τότε  $W_q^k(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$ .

Ωστόσο, υπάρχουν περισσότερο λεπτές σχέσεις ανάμεσα στους χώρους Sobolev. Για παράδειγμα, υπάρχουν περιπτώσεις όταν  $k < m$  και  $p > q$  με  $W_q^m(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$ .

Μία σημαντική ειδική περίπτωση αντιστοιχεί όταν πάρουμε το  $p = 2$ , τότε ο χώρος  $W_2^k(\Omega)$  είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g)_{W_2^k(\Omega)} := \sum_{|a| \leq k} (D^a f, D^a g).$$

Για αυτό το λόγο θα γράφουμε  $H^k(\Omega)$  αντί του  $W_2^k(\Omega)$ . Παρακάτω δίνουμε τους ορισμούς της νόρμας και της ημι-νόρμας των χώρων Hilbert-Sobolev  $H^1(\Omega)$  και  $H^2(\Omega)$ .

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^a f \in L^2(\Omega), |a| \leq 1\}$$

με νόρμα

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left( \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + |f|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

και ημι-νόρμα

$$|f|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} = \left( \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

$$H^2(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^a f \in L^2(\Omega), |a| \leq 2\}$$

με νόρμα

$$\|f\|_{H^2(\Omega)} = \left( \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + |f|_{H^1(\Omega)}^2 + |f|_{H^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

και ημι-νόρμες

$$|f|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} = \left( \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

και

$$|f|_{H^2(\Omega)} = \left( \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Σημείωση 1: Η ημι-νόρμα  $|f|_{H^2(\Omega)} = \|\Delta f\|_{L^2(\Omega)}$  μόνο όταν  $f = 0$  στο  $\partial\Omega$ .

**(1.3.7) Ορισμός.** Λέμε ότι το  $\Omega$  έχει **σύνορο Lipschitz**  $\partial\Omega$  υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει μία συλλογή ανοικτών συνόλων  $O_i$ , μία θετική παράμετρος  $\varepsilon$ , ένας ακέραιος  $N$  και ένας πεπερασμένος αριθμός  $M$ , έτσι ώστε για όλα τα  $x \in \partial\Omega$  η μπάλα με ακτίνα  $\varepsilon$  και κέντρο  $x$  περιέχεται σε κάποια  $O_i$ , όχι περισσότερα από  $N$  των συνόλων τέμνονται μη τετριμμένα και κάθε χωρίο  $O_i \cap \Omega = O_i \cap \Omega_i$  όπου  $\Omega_i$  είναι ένα χωρίο του οποίου το σύνορο είναι το γράφημα μίας συνάρτησης Lipschitz  $\phi_i$  (π.χ.  $\Omega_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}^{n-1}, y < \phi_i(x)\}$ ) που ικανοποιεί τη σχέση  $\|\phi_i\|_{Lip(\mathbb{R}^{n-1})} \leq M$ .

## 1.4 ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΧΝΟΥΣ

Το σύνορο  $\partial\Omega$  ενός  $n$ -διάστατου χωρίου  $\Omega$  μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα αντικείμενο  $n-1$  διάστασης.

**(1.4.1) Θεώρημα.** Υποθέτουμε ότι το  $\Omega$  έχει σύνορο Lipschitz και ότι  $p$  είναι ένα πραγματικός αριθμός που ικανοποιεί τη σχέση  $1 \leq p \leq \infty$ . Τότε υπάρχει μία σταθερά  $C$  έτσι ώστε

$$\|f\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}^{1-1/p} \cdot \|f\|_{W_p^1(\Omega)}^{1/p} \quad \forall f \in W_p^1(\Omega).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό  $\dot{W}_p^1(\Omega)$  για να ορίσουμε το υποσύνολο του  $W_p^1(\Omega)$ , το οποίο αποτελείται από τις συναρτήσεις των οποίων το ίχνος πάνω στο σύνορο  $\partial\Omega$  είναι μηδέν. Έπειτα ορίζουμε

$$\dot{W}_p^1(\Omega) = \{f \in W_p^1(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = 0 \text{ στο } L^2(\partial\Omega)\}$$

Παρομοίως, ορίζουμε  $\dot{W}_p^k(\Omega)$  να είναι το υποσύνολο του  $W_p^k(\Omega)$  το οποίο περιέχει τις συναρτήσεις των οποίων οι παράγωγοι τάξης  $k-1$  είναι στο  $\dot{W}_p^1(\Omega)$ ,

$$\dot{W}_p^k(\Omega) = \{f \in W_p^k(\Omega) : f^{(a)}|_{\partial\Omega} = 0 \text{ στο } L^2(\partial\Omega) \forall |a| < k\}.$$

**(1.4.2) Ανισότητα Ίχνους. (Trace Inequality)** Για ένα πεπερασμένο στοιχείο  $K$  κανονικού σχήματος (shape regular) υπάρχει μία σταθερά  $C < \infty$  έτσι ώστε

$$(1.4.3) \quad \|u\|_{L^2(\partial K)}^2 \leq C \left( h_K^{-1} \|u\|_{L^2(K)}^2 + \|u\|_{L^2(K)} \cdot \|\nabla u\|_{L^2(K)} \right).$$

**(1.4.4) Πρόταση. (Ανισότητα Poincare)** Υποθέτουμε ότι το ανοικτό χωρίο  $\Omega$  είναι φραγμένο. Τότε υπάρχει σταθερά  $C < \infty$  (που εξαρτάται από το  $\Omega$  και το  $p$ ) έτσι ώστε

$$(1.4.5) \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in \dot{W}_p^1(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

## 1.5 ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Σε αυτή την παράγραφο δίνονται μερικές χρήσιμες ανισότητες, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στα παρακάτω κεφάλαια για την απόδειξη ορισμένων ιδιοτήτων των μεθόδων πεπερασμένου στοιχείου που θα εφαρμόσουμε.

**(1.5.1) Διακριτή Ανισότητα Holder.** Αν  $p, q$  είναι συζυγείς εκθέτες (δηλαδή  $p > 1$  και  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) και  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$  είναι  $2k$  πραγματικοί αριθμοί τότε

$$(1.5.2) \quad \sum_{i=1}^k |a_i b_i| \leq \left( \sum_{i=1}^k |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^k |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**(1.5.3) Διακριτή Ανισότητα Cauchy-Schwarz.** Αυτή είναι απλά διακριτή ανισότητα Holder στην ειδική περίπτωση  $p = q = 2$  όπου  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$  είναι  $2k$  πραγματικοί αριθμοί τότε

$$(1.5.4) \quad \sum_{i=1}^k |a_i b_i| \leq \left( \sum_{i=1}^k |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{i=1}^k |b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**(1.5.5) Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου.** Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $a$  και  $b$  ισχύει

$$(1.5.6) \quad ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

**(1.5.7) Ανισότητα.** Για οποιουδήποτε μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς  $a$ ,  $b$  και  $p$  ισχύει

$$(1.5.8) \quad (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

**(1.5.9) Ανισότητα Αντιστρεψιμότητας. (Inverse Inequality)** Έστω  $v$  ένα πολυώνυμο βαθμού  $p$  στο πεπερασμένο στοιχείο  $K$  και έστω  $e$  μία πλευρά του  $K$  με μήκος  $h$ . Τότε υπάρχει μία σταθερά  $C < \infty$  έτσι ώστε

$$(1.5.10) \quad \|v\|_{L^2(e)}^2 \leq C \frac{p^2}{h} \|v\|_{L^2(K)}^2.$$



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

Αυτό το κεφάλαιο αναφέρεται στα εργαλεία (ορισμοί – ιδιότητες) της συναρτησιακής ανάλυσης που απαιτούνται για την ανάπτυξη της μεταβολικής διατύπωσης (ασθενής διατύπωση, προσεγγιστική διατύπωση) των διαφορικών εξισώσεων. Αρχίζει με μία εισαγωγή στους χώρους Hilbert, περιέχοντας μονάχα υλικό το οποίο είναι χρήσιμο στις παρακάτω αναπτύξεις. Στόχος του κεφαλαίου είναι να παρέχει τη δυνατότητα, ώστε η ύπαρξη και η μοναδικότητα των λύσεων στα μεταβολικά προβλήματα να μπορούν να καθιερωθούν.

#### 2.1 ΧΩΡΟΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

**(2.1.1) Ορισμός.** Μία **διγραμμική μορφή (bilinear form)**,  $b(\cdot, \cdot)$ , πάνω σε ένα γραμμικό χώρο  $V$  είναι μία απεικόνιση  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε κάθε μία των μεταβλητών να είναι μία γραμμική μορφή (linear form) πάνω στον  $V$ .

Δηλαδή  $b(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 b(u_1, v) + \lambda_2 b(u_2, v)$  και

$$b(u, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1 b(u, v_1) + \mu_2 b(u, v_2) \quad \forall u, u_2, u, v, v_1, v_2 \in V \text{ και}$$

$$\forall \mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Η **διγραμμική μορφή είναι συμμετρική** αν  $b(u, v) = b(v, u)$  για όλα τα  $u, v \in V$ .

Ένα (πραγματικό) **εσωτερικό γινόμενο**, συμβολίζεται  $(\cdot, \cdot)$ , είναι μία **συμμετρική διγραμμική μορφή** πάνω στον γραμμικό χώρο  $V$  το οποίο ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(a)  $(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V$  και

(b)  $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ .

**(2.1.2) Ορισμός.** Ένας γραμμικός χώρος  $V$  μαζί με ένα εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται πάνω σε αυτόν λέγεται **χώρος εσωτερικού γινομένου** και συμβολίζεται ως  $(V, (\cdot, \cdot))$ .

**(2.1.3) Παραδείγματα.** Τα παρακάτω είναι παραδείγματα χώρων εσωτερικού γινομένου.

(i)  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $(x, y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$

$$(ii) \quad V = L^2(\Omega) \text{ , } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ , } (u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

$$(iii) \quad V = W_2^k(\Omega) \text{ , } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ , } (u, v)_{W_2^k(\Omega)} := \sum_{|a| \leq k} (D^a u, D^a v)_{L^2(\Omega)}$$

Σημείωση 1: Ο χώρος εσωτερικού γινομένου (iii) συχνά συμβολίζεται ως  $H^k(\Omega)$ .  
Επομένως  $H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$ .

**(2.1.4) Θεώρημα. (Ανισότητα Schwarz)** Αν  $(V, (\cdot, \cdot))$  είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου, τότε

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα  $u$  και  $v$  είναι γραμμικά εξαρτημένα.

**(2.1.5) Πρόταση.** Η σχέση  $\|u\| := \sqrt{(u, u)}$  ορίζει μία νόρμα στον χώρο εσωτερικού γινομένου  $(V, (\cdot, \cdot))$ .

## 2.2 ΧΩΡΟΙ HILBERT

Η πρόταση (2.1.5) λέει ότι για δοσμένο χώρο εσωτερικού γινομένου  $(V, (\cdot, \cdot))$ , υπάρχει μία νόρμα που σχετίζεται με τον  $V$ , είναι ορισμένη πάνω στον  $V$  και συμβολίζεται ως  $\|u\| := \sqrt{(u, u)}$ .

Έτσι, ένας χώρος εσωτερικού γινομένου μπορεί να μετατραπεί σε γραμμικό χώρο με νόρμα.

**(2.2.1) Ορισμός.** Έστω  $(V, (\cdot, \cdot))$  είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου. Αν ο γραμμικός χώρος με νόρμα  $(V, \|\cdot\|)$  είναι πλήρης, τότε ο  $(V, (\cdot, \cdot))$  λέγεται **χώρος Hilbert**.

Παρατήρηση 1: Ένας χώρος Hilbert είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο που είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

**(2.2.2) Παραδείγματα.** Τα παραδείγματα (i), (ii), (iii) του (2.1.3) είναι χώροι Hilbert.

**(2.2.3) Ορισμός.** Έστω  $H$  είναι ένας χώρος Hilbert και  $S \subset H$  είναι ένα γραμμικό υποσύνολο ( $S$  γραμμικό σημαίνει ότι  $u, v \in S$ ,  $a \in \mathbb{R} \Rightarrow u + av \in S$ ) το οποίο είναι κλειστό στον  $H$ . Τότε το  $S$  λέγεται **κλειστός υπόχωρος** του  $H$ .

**(2.2.4) Πρόταση.** Αν  $S$  είναι ένας κλειστός υπόχωρος του  $H$ , τότε ο  $(S, (\cdot, \cdot))$  είναι επίσης χώρος Hilbert.

**(2.2.5) Παραδείγματα κλειστών υπόχωρων χώρων Hilbert.**

- (i)  $H$  και  $\{0\}$  είναι οι προφανείς περιπτώσεις, αφού το μονοσύνολο  $\{0\}$  είναι κλειστό σύνολο.
- (ii) Έστω  $T : H \rightarrow K$  είναι μία συνεχής γραμμική απεικόνιση του  $H$  σε ένα άλλο γραμμικό χώρο. Αφού ο  $T$  είναι συνεχής, αντιστρέφει κλειστά σύνολα σε κλειστά σύνολα. Το  $\{0\} \subset K$  είναι κλειστό σύνολο, τότε ο πυρήνας  $\ker T = T^{-1}(\{0\}) = \{x \in H : T(x) \in \{0\}\}$  είναι κλειστό σύνολο ως αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου. Επομένως, επειδή ο πυρήνας  $\ker T$  είναι γραμμικός υπόχωρος του  $H$ , τότε ο πυρήνας  $\ker T$  είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος.
- (iii) Έστω  $x \in H$  (δηλαδή  $\{x\} \subset H$ ) και ορίζουμε  $x^\perp := \{v \in H : (v, x) = 0\}$ . Τότε  $x^\perp$  είναι ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος του  $H$ . Για να το δείξουμε αυτό, θεωρούμε ότι  $x^\perp = \ker L_x$ , όπου  $L_x$  είναι το γραμμικό συναρτησιακό

$$L_x : v \mapsto (v, x).$$

Από την ανισότητα Schwarz,

$$|L_x(v)| \leq \|x\| \cdot \|v\|,$$

δηλώνοντας ότι το  $L_x$  είναι φραγμένο και συνεπώς συνεχές.

Αυτό αποδεικνύει ότι ο  $x^\perp$  είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του  $H$ , εν' όψη του προηγούμενου παραδείγματος.

- (iv) Έστω  $M \subset H$  είναι ένα υποσύνολο και ορίζουμε  $M^\perp := \{v \in H : (x, v) = 0, \forall x \in M\}$ . (Υπάρχει πρόταση που λέει ότι: έστω  $H$  χώρος Hilbert και  $M \subset H$ , τότε ο  $M^\perp$  είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του  $H$ ). Θεωρούμε ότι

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp$$

και κάθε  $x^\perp$  είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του  $H$ , λόγω του παραδείγματος (iii).

Τότε ο  $M^\perp$  είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του  $H$ , διότι η αριθμήσιμη τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. □

**(2.2.6) Πρόταση.** Έστω  $H$  είναι ένας χώρος Hilbert.

- (i) Για οποιαδήποτε υποσύνολα  $M, N \subset H$ ,  $M \subset N \Rightarrow N^\perp \subset M^\perp$ .
- (ii) Για οποιοδήποτε υποσύνολο  $M$  του  $H$  που περιέχει το μηδέν,  $M \cap M^\perp = \{0\}$ .

- (iii)  $\{0\}^\perp = H$ .
- (iv)  $H^\perp = \{0\}$ .

**(2.2.7) Θεώρημα. (Κανόνας Παραλληλογράμμου)** Έστω  $\|\cdot\|$  είναι η νόρμα που σχετίζεται με το εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)$  πάνω στον  $H$ . Τότε για κάθε  $u, v \in H$  ισχύει ότι:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

### 2.3 ΠΡΟΒΟΛΕΣ ΠΑΝΩ ΣΕ ΥΠΟΧΩΡΟΥΣ

Οι παρακάτω προτάσεις αναφέρονται στις γεωμετρικές ιδιότητες των χώρων Hilbert.

**(2.3.1) Πρόταση.** Έστω ότι  $M$  είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert  $H$ . Έστω  $v \in H \setminus M$  και ορίζουμε  $\delta := \inf\{\|v-w\|: w \in M\}$ . (Σημειώνουμε ότι  $\delta > 0$  επειδή ο  $M$  είναι κλειστός στον  $H$ ). Τότε υπάρχει  $w_0 \in M$  έτσι ώστε

- (i)  $\|v-w_0\| = \delta$ , π.χ., υπάρχει ένα κοντινότερο σημείο  $w_0 \in M$  στο  $v$  και
- (ii)  $v-w_0 \in M^\perp$ .

Η πρόταση (2.3.1) λέει ότι, για δοσμένο υπόχωρο  $M$  του  $H$  και  $v \in H$ , μπορούμε να γράψουμε  $v = w_0 + w_1$ , όπου  $w_0 \in M$  και  $w_1 (= v - w_0) \in M^\perp$ . Θα δείξουμε ότι αυτή η ανάλυση ενός στοιχείου  $v \in H$  είναι μοναδική. Πράγματι, από

$$w_0 + w_1 = v = z_0 + z_1, \quad w_0, z_0 \in M, \quad w_1, z_1 \in M^\perp,$$

παίρνουμε

$$M \ni w_0 - z_0 = -(w_1 - z_1) \in M^\perp.$$

Επειδή  $M \cap M^\perp = \{0\}$ ,  $w_0 = z_0$  και  $w_1 = z_1$ . Αυτό δείχνει ότι η ανάλυση είναι μοναδική. Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε τους ακόλουθους τελεστές

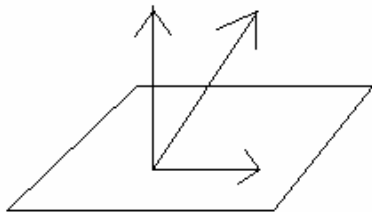
$$(2.3.2) \quad P_M : H \rightarrow M, \quad P_M^\perp : H \rightarrow M^\perp$$

όπου οι αντίστοιχοι ορισμοί του  $P_M$  και  $P_M^\perp$  δίνονται από

$$(2.3.3) \quad P_M v = v, \text{ αν } v \in M \text{ και } P_M v = w_0, \text{ αν } v \in H \setminus M.$$

$$(2.3.4) \quad P_M^\perp v = 0, \text{ αν } v \in M \text{ και } P_M^\perp v = v - w_0, \text{ αν } v \in H \setminus M.$$

Η μοναδικότητα της ανάλυσης δηλώνει ότι  $P_M^\perp = P_{M^\perp}$  έτσι δε χρειάζεται να προσέχουμε που θα τοποθετούμε το " $\perp$ ". Για την καλύτερη κατανόηση των ορισμών, κατασκευάζουμε το παρακάτω σχήμα.



**(2.3.5) Πρόταση.** Για δοσμένο κλειστό υπόχωρο  $M$  του  $H$  και  $v \in H$ , υπάρχει μοναδική ανάλυση

$$(2.3.6) \quad v = P_M v + P_{M^\perp} v,$$

όπου  $P_M : H \rightarrow M$  και  $P_{M^\perp} : H \rightarrow M^\perp$ . Με άλλα λόγια

(2.3.7)  $H = M \oplus M^\perp$ . (Δηλαδή  $H = M + M^\perp$  και  $M \cap M^\perp = \{0\}$ , αφού  $M, M^\perp$  είναι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι του  $H$ ).

Παρατήρηση 1: Οι τελεστές  $P_M$  και  $P_{M^\perp}$  είναι γραμμικοί τελεστές. Για να το δείξουμε αυτό, από την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι

$$av_1 + \beta v_2 = P_M(av_1 + \beta v_2) + P_{M^\perp}(av_1 + \beta v_2),$$

όπου

$$v_1 = P_M v_1 + P_{M^\perp} v_1 \quad \text{και} \quad v_2 = P_M v_2 + P_{M^\perp} v_2.$$

Το οποίο είναι

$$P_M(av_1 + \beta v_2) + P_{M^\perp}(av_1 + \beta v_2) = av_1 + \beta v_2 = (\alpha P_M v_1 + \beta P_M v_2) + (\alpha P_{M^\perp} v_1 + \beta P_{M^\perp} v_2).$$

Η μοναδικότητα της ανάλυσης του  $av_1 + \beta v_2$  και οι ορισμοί του  $P_M$  και  $P_{M^\perp}$  δηλώνουν ότι

$$P_M(av_1 + \beta v_2) = \alpha P_M v_1 + \beta P_M v_2$$

και

$$P_{M^\perp}(av_1 + \beta v_2) = \alpha P_{M^\perp} v_1 + \beta P_{M^\perp} v_2,$$

έτσι  $P_M$  και  $P_{M^\perp}$  είναι γραμμικοί.

**(2.3.8) Πρόταση.** Ένας τελεστής  $P$  πάνω σε ένα γραμμικό χώρο  $V$  είναι μία προβολή αν  $P^2 = P$ , π.χ.,  $Pz = z$  για όλα τα  $z$  στην εικόνα του  $P$ .

Παρατήρηση 2: Το γεγονός ότι  $P_M$  είναι μία προβολή έπεται από τον ορισμό του.

Επίσης, ότι  $P_{M^\perp}$  είναι προβολή έπεται από την σχέση  $P_M^\perp = P_{M^\perp}$ .

## 2.4 ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ RIESZ

Για δοσμένο  $u \in H$ , αναφέρουμε ότι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό  $L_u$  μπορεί να οριστεί πάνω στον  $H$  ως

$$L_u(v) = (u, v).$$

Το ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύει ότι το αντίστροφο είναι επίσης αληθές.

**(2.4.1) Θεώρημα. (Θεώρημα Αναπαράστασης Riesz)** Οποιοδήποτε συνεχές γραμμικό συναρτησιακό  $L$  πάνω σε ένα χώρο Hilbert  $H$  μπορεί να αναπαρασταθεί μοναδικά ως

$$L(v) = (u, v) \quad \text{για κάποιο } u \in H.$$

Επιπλέον, έχουμε:  $\|L\|_{H'} = \|u\|_H$ .

Παρατήρηση 1: Σύμφωνα με το Θεώρημα Αναπαράστασης Riesz, υπάρχει μία φυσική ισομετρία ανάμεσα τον  $H$  και στον  $H'$  ( $u \in H \leftrightarrow L_u \in H'$ ). Γι' αυτό το λόγο, ο  $H$  και ο  $H'$  συχνά ταυτίζονται.

## 2.5 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΟΥ (ΑΣΘΕΝΟΥΣ) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Ο σκοπός του υπόλοιπου κεφαλαίου είναι να εφαρμόσουμε τη θεωρία χώρων Hilbert, η οποία αναπτύχθηκε στις προηγούμενες παραγράφους, για να πάρουμε αποτελέσματα ύπαρξης και μοναδικότητας για τη μεταβολική διατύπωση των συνοριακού προβλήματος τιμών.

**(2.5.1) Ορισμός.** Μία διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  πάνω σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα  $H$  λέγεται ότι είναι **φραγμένη** (ή **συνεχής**) αν  $\exists C_1 < \infty$  έτσι ώστε

$$|\alpha(u, v)| \leq C_1 \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H$$

**Σχόλιο:** Ιδιότητα της συνέχειας (continuity).

και **coercive** πάνω στο  $V \subset H$  αν  $\exists C_2 > 0$  έτσι ώστε

$$\alpha(v, v) \geq C_2 \|v\|_H^2 \quad \forall v \in V.$$

**Σχόλιο:** Ιδιότητα της coercivity.

**(2.5.2) Πρόταση.** Έστω ότι ο  $H$  είναι χώρος Hilbert και υποθέτουμε ότι  $\alpha(\cdot, \cdot)$  είναι μία συμμετρική διγραμμική μορφή η οποία είναι συνεχής πάνω στο  $H$  και coercive πάνω σε ένα υπόχωρο  $V$  του  $H$ . Τότε ο  $(V, \alpha(\cdot, \cdot))$  είναι ένας χώρος Hilbert.

Παρατήρηση 1: Η Πρόταση (2.5.2) δηλώνει ότι η συμμετρική διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  ορίζει εσωτερικό γινόμενο πάνω στον κλειστό υπόχωρο  $V$ .

Παρατήρηση 2: Η ενεργειακή νόρμα (energy norm) για τη συμμετρική διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  ορίζεται από τη σχέση  $\|u\|_E := \sqrt{\alpha(u, u)}$ . Μία κρίσιμη σχέση ανάμεσα στην ενεργειακή νόρμα και το εσωτερικό γινόμενο είναι η ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$|\alpha(u, v)| \leq \|u\|_E \cdot \|v\|_E \quad \forall u, v \in V.$$

Γενικότερα, ένα συμμετρικό μεταβολικό πρόβλημα τίθεται όπως ακολουθεί. Υποθέτουμε ότι οι ακόλουθες τρεις συνθήκες είναι έγκυρες:

- (1)  $(H, (\cdot, \cdot))$  είναι ένας χώρος Hilbert.
- (2.5.3) (2)  $V$  είναι ένας (κλειστός) υπόχωρος του  $H$ .
- (3)  $\alpha(\cdot, \cdot)$  είναι μία φραγμένη, συμμετρική διγραμμική μορφή η οποία είναι coercive πάνω στο  $V$ .

Τότε το **συμμετρικό μεταβολικό πρόβλημα** είναι το ακόλουθο.

(2.5.4) Για δοσμένο  $F \in V'$ , βρείτε  $u \in V$  έτσι ώστε  $\alpha(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$ .

**(2.5.5) Θεώρημα.** Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες (1) έως και (3) της (2.5.3) ισχύουν. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό  $u \in V$  που λύνει το (2.5.4).

Το **(Ritz-Galerkin) Προσεγγιστικό Πρόβλημα** είναι το ακόλουθο.

Για ένα δοσμένο υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης  $V_h \subset V$  και για δοσμένο  $F \in V'$ , βρείτε  $u_h \in V_h$  έτσι ώστε

(2.5.6)  $\alpha(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h$ .

**(2.5.7) Θεώρημα.** Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες (1) έως και (3) της (2.5.3) ισχύουν. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό  $u_h \in V_h$  που λύνει το (2.5.6).

Οι εκτιμήσεις σφάλματος για το  $u - u_h$  (που ακολουθούν στα επόμενα κεφάλαια) είναι μία συνέπεια της παρακάτω σχέσης.

**(2.5.8) Πρόταση. (Galerkin Orthogonality)** Έστω  $u$  και  $u_h$  είναι λύσεις του (2.5.4) και του (2.5.6) αντίστοιχα. Τότε

$$\alpha(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h.$$

**(2.5.9) Πόρισμα.**  $\|u - u_h\|_E = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E$ .

Παρατήρηση 3: Το Πόρισμα (2.5.9) δηλώνει ότι η προσέγγιση Galerkin  $u_h$  ταυτίζεται με την προβολή (ή βέλτιστη προσέγγιση)  $\underline{u}$ , διότι η διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  είναι συμμετρική και συνεπώς θα ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

Σημείωση 1: Το Πόρισμα (2.5.9) είναι έγκυρο μονάχα στη συμμετρική περίπτωση.

## 2.6 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΜΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (ΑΣΘΕΝΟΥΣ)

Ένα μη συμμετρικό μεταβολικό πρόβλημα τίθεται όπως ακολουθεί. Υποθέτουμε ότι οι ακόλουθες πέντε συνθήκες είναι έγκυρες:

- (1)  $(H, (\cdot, \cdot))$  είναι ένας χώρος Hilbert.
- (2)  $V$  είναι ένας (κλειστός) υπόχωρος του  $H$ .



- (2.6.1) (3)  $\alpha(\cdot, \cdot)$  είναι μία διγραμμική μορφή πάνω στο  $V$ ,  
 όχι απαραίτητα συμμετρική.  
 (4)  $\alpha(\cdot, \cdot)$  είναι συνεχής (φραγμένη) πάνω στο  $V$ .  
 (5)  $\alpha(\cdot, \cdot)$  είναι coercive πάνω στο  $V$ .

Τότε το **μη συμμετρικό μεταβολικό πρόβλημα** είναι το ακόλουθο.

(2.6.2) Για δοσμένο  $F \in V'$ , βρείτε  $u \in V$  έτσι ώστε  $\alpha(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$ .

Το **(Galerkin) Προσεγγιστικό Πρόβλημα** είναι το ακόλουθο.

Για ένα δοσμένο υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης  $V_h \subset V$  και για δοσμένο  $F \in V'$ , βρείτε  $u_h \in V_h$  έτσι ώστε

(2.6.3)  $\alpha(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h$ .

## 2.7 ΘΕΩΡΗΜΑ LAX MILGRAM

Θέλουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης του (μη συμμετρικού) μεταβολικού προβλήματος:

(2.7.1) Βρείτε  $u \in V$  έτσι ώστε  $\alpha(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$ ,

όπου  $V$  είναι ένας χώρος Hilbert,  $F \in V'$  και  $\alpha(\cdot, \cdot)$  είναι μία συνεχής, coercive διγραμμική μορφή η οποία δεν είναι απαραίτητα συμμετρική. Το Θεώρημα Lax-Milgram εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του (2.7.1).

**(2.7.2) Θεώρημα. (Lax-Milgram)** Για ένα δοσμένο χώρο Hilbert  $(V, (\cdot, \cdot))$ , μία συνεχής, coercive διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  και ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό  $F \in V'$ , υπάρχει ένα μοναδικό  $u \in V$  έτσι ώστε

(2.7.3)  $\alpha(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$ .

Παρατήρηση 1: Ισχύει ότι  $\|u\|_V \leq (1/C_2) \|F\|_{V'}$ , όπου  $C_2$  είναι η σταθερά της coercivity.

Πράγματι από ορισμό  $\|F\|_{V'} = \sup_{0 \neq u \in V} \frac{|F(u)|}{\|u\|_V}$  έχουμε  $|F(u)| \leq \|F\|_{V'} \|u\|_V$ . Επίσης,  $|F(u)| = |\alpha(u, u)| \geq C_2 \|u\|_V^2$ . Άρα,  $\|F\|_{V'} \|u\|_V \geq C_2 \|u\|_V^2 \Rightarrow \|F\|_{V'} \geq C_2 \|u\|_V$

**(2.7.4) Πόρισμα.** Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες (2.6.1) ισχύουν. Τότε το μεταβολικό πρόβλημα (2.6.2) έχει μοναδική λύση.

**(2.7.5) Πόρισμα.** Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες (2.6.1) ισχύουν. Τότε το προσεγγιστικό πρόβλημα (2.6.3) έχει μοναδική λύση.

Παρατήρηση 2: Ο  $V_h$  δε χρειάζεται να είναι πεπερασμένης διάστασης για το (2.6.3) για να είναι καλά ορισμένο.

## 2.8 ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

Έστω ότι  $u$  είναι η λύση του μεταβολικού προβλήματος (2.6.2) και  $u_h$  είναι η λύση του προσεγγιστικού προβλήματος (2.6.3). Τώρα, θέλουμε να εκτιμήσουμε το σφάλμα  $\|u - u_h\|_V$ . Αυτό το κάνουμε ακολουθώντας το παρακάτω θεώρημα.

**(2.8.1) Θεώρημα. (Cea)** Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες (2.6.1) ισχύουν και ότι το  $u$  λύνει το (2.6.2). Για το μεταβολικό πρόβλημα πεπερασμένου στοιχείου (2.6.3) έχουμε

$$(2.8.2) \quad \|u - u_h\|_V \leq \frac{C_1}{C_2} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V,$$

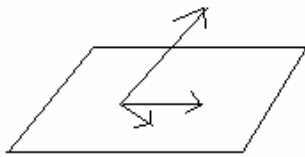
όπου  $C_1$  είναι η σταθερά της συνέχειας (continuity) και  $C_2$  είναι η σταθερά της coercivity της διγραμμικής μορφής  $a(\cdot, \cdot)$  πάνω στο  $V$ .

**(2.8.3) Θεώρημα. (Θεώρημα Προβολής)** Έστω  $U$  χώρος Hilbert και  $V$  κλειστός υπόχωρος του  $U$ . Για κάθε  $u \in U$  υπάρχει μοναδικό  $\underline{u} \in V$  τέτοιο ώστε

$$(u - \underline{u}, v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Επιπλέον το  $\underline{u}$  ικανοποιεί τη σχέση:  $\|u - \underline{u}\| = \min_{v \in V} \|u - v\|$ .

Το  $\underline{u}$  καλείται **προβολή** του  $u$  στο  $V$  ή **βέλτιστη προσέγγιση** του  $u$  στο  $V$ .



Παρατηρήσεις:

- (i) Το Θεώρημα Cea δείχνει ότι το  $u_h$  είναι σχεδόν-βέλτιστο (quasi-optimal), δηλαδή το σφάλμα  $\|u - u_h\|_V$  είναι ανάλογο στον καλύτερο υπόχωρο  $V_h$  που μπορεί να χρησιμοποιηθεί.
- (ii) Στη συμμετρική περίπτωση, δείξαμε ότι  $\|u - u_h\|_E = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E$ .

Επομένως,  $C_2 \|u - u_h\|_V^2 \leq \alpha(u - u_h, u - u_h)$  ή  
 $\sqrt{C_2} \|u - u_h\|_V \leq (\alpha(u - u_h, u - u_h))^{\frac{1}{2}} = \|u - u_h\|_E$ ,

πράγματι

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \frac{1}{\sqrt{C_2}} \|u - u_h\|_E = \frac{1}{\sqrt{C_2}} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E = \frac{1}{\sqrt{C_2}} \min_{v \in V_h} (\alpha(u - v, u - v))^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{C_2}} \min_{v \in V_h} (C_1 \|u - v\|_V \|u - v\|_V)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V \leq \frac{C_1}{C_2} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V \end{aligned}$$

αυτό είναι το αποτέλεσμα του λήμματος Cea.

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από  $C_2 \|u\|_V^2 \leq \alpha(u, u) \leq C_1 \|u\|_H^2$ .

Τότε  $C_1 \|u\|_H^2 \geq C_2 \|u\|_V^2$  δηλαδή  $\frac{C_1}{C_2} \geq 1$ . Άρα  $\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \leq \frac{C_1}{C_2}$ .

Αυτή η παρατήρηση αφορά τη σχέση ανάμεσα στις δύο διατυπώσεις, κυρίως ότι η μία μπορεί να προκύψει από την άλλη.

Σημείωση 1: Αν η διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  είναι συμμετρική τότε η λύση  $u_h$  του προσεγγιστικού προβλήματος ταυτίζεται με τη βέλτιστη προσέγγιση  $\underline{u}$ . Δηλαδή

$$\|u - u_h\| = \|u - \underline{u}\|, \text{ αλλιώς } \|u - \underline{u}\| \leq \|u - u_h\|.$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Η ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΕΝΟΣ ΧΩΡΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Για να προσεγγίσουμε τη λύση ενός μεταβολικού προβλήματος (variational problem),

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

**Σχόλιο:** Είναι το πρόβλημα σε ασθενή μορφή.

χρειαζόμαστε να κατασκευάσουμε υπόχωρους πεπερασμένης διάστασης  $S \subset V$  με ένα συστηματικό και πρακτικό τρόπο.

Επιπλέον, έχουμε ανάγκη να απαντήσουμε τις παρακάτω ερωτήσεις έτσι ώστε να κατανοήσουμε πλήρως πως ορίζονται οι συναρτήσεις σε ένα χώρο  $S$ :

1<sup>ον</sup> : Πώς είναι μια συνάρτηση σε ένα δοσμένο υποδιάστημα;

2<sup>ον</sup> : Με ποιο τρόπο αποφασίζουμε τη συνάρτηση σε ένα δοσμένο υποδιάστημα;

3<sup>ον</sup> : Με ποιο τρόπο οι περιορισμοί μιας συνάρτησης σε δύο γειτονικά υποδιαστήματα, ταιριάζουν στο κοινό τους σύνορο;

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ορίσουμε κατά τμήματα χώρους συναρτήσεων και θα αναπτύξουμε σενάρια τα οποία θα βοηθήσουν να απαντήσουμε αυτές τις ερωτήσεις.

#### 3.1 ΤΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ

Ακολουθεί ο ορισμός ενός πεπερασμένου στοιχείου, όπως διατυπώθηκε από τον Ciarlet το 1978.

**(3.1.1) Ορισμός.** Έστω

- (i)  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  να είναι ένα χωρίο με κατά τμήματα λείο σύνορο (το χωρίο του στοιχείου)
- (ii)  $P$  είναι ένας πεπερασμένης διάστασης χώρος συναρτήσεων στο  $K$  (οι συναρτήσεις σχήματος)
- (iii)  $N = \{N_1, N_2, \dots, N_k\}$  είναι μια βάση για το  $P'$  (οι nodal μεταβλητές)

**Σχόλιο:** Οι συναρτήσεις  $K \mapsto \mathbb{R}$ . Άρα είναι γραμμικές μορφές.

**Σχόλιο:**  $\dim P = k = \dim P'$

Τότε το  $(K, P, N)$  ονομάζεται **πεπερασμένο στοιχείο**.

Σημείωση 1: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι nodal μεταβλητές,  $N_i$ , βρίσκονται στο δυϊκό χώρο κάποιου μεγαλύτερου συναρτησιακού χώρου, π.χ. ενός χώρου Sobolev.

**(3.1.2) Ορισμός.** Έστω  $(K, \mathbf{P}, N)$  είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο και έστω  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$  είναι μια βάση για το  $\mathbf{P}$  δυϊκή προς το  $N$  ( $N_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$ ). Αυτή ονομάζεται nodal βάση του  $\mathbf{P}$ .

**Σχόλιο:** Είναι ένα σύστημα  $k^2$  εξισώσεων με  $k^2$  αγνώστους.

**Παράδειγμα.** (το μονοδιάστατο στοιχείο Lagrange)

Έστω  $K = [0, 1]$ ,  $\mathbf{P} =$  το σύνολο των γραμμικών πολυωνύμων, δηλαδή  $\mathbf{P} = \{p(x) = ax+b \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{a \cdot x + b \cdot 1 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \langle x, 1 \rangle$ . Συνεπώς  $\dim \mathbf{P} = 2$  και μια βάση του  $\mathbf{P}$  είναι η  $\{1, x\}$  (κανονική βάση), όχι αναγκαστικά η nodal βάση.

$N = \{N_1, N_2\}$  οι nodal μεταβλητές,  $N_i : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$  γραμμικές μορφές και  $v \in \mathbf{P}$ .

Ορίζουμε  $N_1(v) := v(0)$  και  $N_2(v) := v(1) \quad \forall v \in \mathbf{P}$ .

Πράγματι :  $N_1(\lambda v_1 + \mu v_2) = (\lambda v_1 + \mu v_2)(0) = \lambda v_1(0) + \mu v_2(0) = \lambda N_1(v_1) + \mu N_1(v_2)$

$N_2(\lambda v_1 + \mu v_2) = (\lambda v_1 + \mu v_2)(1) = \lambda v_1(1) + \mu v_2(1) = \lambda N_2(v_1) + \mu N_2(v_2)$

Άρα είναι γραμμικές.

Θα δείξουμε ότι τα  $N_1, N_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή  $\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = \mathbf{0}$

Πράγματι :  $(\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2)(v) = \mathbf{0}(v) = 0 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 N_1(v) + \lambda_2 N_2(v) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 v(0) + \lambda_2 v(1) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{P}$

Επομένως για (i)  $v(x) = x \Rightarrow \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

(ii)  $v(x) = 1 \Rightarrow \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

Άρα τα  $N_1, N_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

**Σχόλιο:** Το  $\{1, x\}$  είναι μια κανονική βάση για το  $\mathbf{P}$ , αλλά αυτό δε σημαίνει ότι θα είναι και nodal βάση για το  $\mathbf{P}$ . Αυτό πρέπει να ελέγξουμε.

**Σχόλιο:** Η μηδενική απεικόνιση.

Η nodal βάση βρίσκεται ως εξής. Έστω  $\varphi_1(x) = ax+b$  και  $\varphi_2(x) = cx+d$

$$N_1(\varphi_1) = 1 = \varphi_1(0)$$

$$N_1(\varphi_2) = 0 = \varphi_2(0)$$

$$N_2(\varphi_1) = 0 = \varphi_1(1)$$

$$N_2(\varphi_2) = 1 = \varphi_2(1)$$

Τότε  $a = -1, b = 1, c = 1, d = 0$ . Επομένως  $\varphi_1(x) = -x+1$  και  $\varphi_2(x) = x$ .

Τότε το  $(K, \mathbf{P}, N)$  είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο και η nodal βάση αποτελείται από τις  $\varphi_1(x) = -x+1$  και  $\varphi_2(x) = x$ .

Αυτή η διαδικασία θα μπορούσε να γενικευτεί για  $K = [a, b]$ ,  $\mathbf{P}_k =$  το σύνολο όλων των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με  $k$ ,  $N_k = \{N_0, N_1, N_2, \dots, N_k\}$ , όπου

$N_i(v) = v(a + (b-a)i/k) \quad \forall v \in \mathbf{P}_k$  και  $i = 0, 1, \dots, k$ .

Τότε το  $(K, \mathbf{P}_k, N_k)$  είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο. Αυτό επιβεβαιώνεται με το παρακάτω λήμμα.  $\square$

Σημείωση 2: Η συνθήκη (iii) του ορισμού 3.1.1 είναι συνήθως που απαιτεί την περισσότερη δουλειά στα παρακάτω.

**(3.1.3) Λήμμα.** Έστω  $\mathbf{P}$  είναι ένας  $d$ -διάστατος διανυσματικός χώρος και έστω  $\{N_1, N_2, \dots, N_d\}$  είναι ένα σύνολο του δυϊκού χώρου  $\mathbf{P}'$ . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(α)  $H \{N_1, N_2, \dots, N_d\}$  είναι μια βάση του  $\mathbf{P}'$ .

(β) Για δοσμένο  $v \in \mathbf{P}$ , με  $N_i(v) = 0$  για  $i = 1, 2, \dots, d$ , τότε  $v \equiv 0$ .

Απόδειξη. ( $\Rightarrow$ ) Έστω  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d\}$  είναι κάποια βάση για το  $\mathbf{P}$ ,  $\{N_1, N_2, \dots, N_d\}$  είναι μια βάση για το  $\mathbf{P}'$  αν και μόνο αν για οποιοδήποτε  $L$  στο  $\mathbf{P}'$ , έχουμε :

$$L = \alpha_1 N_1 + \dots + \alpha_d N_d \quad (\text{I}),$$

επειδή  $d = \dim \mathbf{P} = \dim \mathbf{P}'$ . (αφού τα  $N_1, N_2, \dots, N_d$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα).

Η εξίσωση (I) είναι ισοδύναμη με την

$$y_i := L(\varphi_i) = \alpha_1 N_1(\varphi_i) + \dots + \alpha_d N_d(\varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Έστω  $\mathbf{B} = [N_j(\varphi_i)]$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, d$ . Έτσι, η (α) είναι ισοδύναμη με το  $\mathbf{B}\alpha = y$ .

Αυτό το σύστημα είναι πάντα επιλύσιμο, το οποίο είναι το ίδιο με το να πούμε ότι ο  $\mathbf{B}$  είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι στο σύστημα, τα  $\alpha_i$  είναι οι άγνωστοι. Συνεπώς, για να έχει το σύστημα μοναδική λύση πρέπει  $\det \mathbf{B} \neq 0$ . Όμως,  $\text{rank} \mathbf{B} = d$ , επειδή έχουμε  $d$  το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα  $N_i$  και αντίστοιχα  $\varphi_i$ . Άρα ο  $\mathbf{B}$  είναι όντως αντιστρέψιμος.

Για οποιοδήποτε δοσμένο  $v \in \mathbf{P}$ , αυτό μπορεί να γραφεί ως  $v = \beta_1 \varphi_1 + \dots + \beta_d \varphi_d$ .  $N_i(v) = 0$  σημαίνει ότι  $\beta_1 N_i(\varphi_1) + \dots + \beta_d N_i(\varphi_d) = 0$ . Συνεπώς, η (β) είναι ισοδύναμη με το

$$\beta_1 N_i(\varphi_1) + \dots + \beta_d N_i(\varphi_d) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, d. \quad (\text{II})$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_d = 0$$

Έστω  $\mathbf{C} = [N_i(\varphi_j)]$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, d$ . Όμως  $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T$ , αφού  $\mathbf{B} = [N_j(\varphi_i)]$ . Επομένως, αν ο  $\mathbf{B}$  είναι αντιστρέψιμος θα είναι και ο  $\mathbf{C}$ , διότι  $\det \mathbf{C} = \det \mathbf{B}^T = \det \mathbf{B} \neq 0$ .

Λόγω της (II) η (β) είναι ισοδύναμη με το σύστημα  $\mathbf{C}x = 0$  και επειδή ο  $\mathbf{C}$  είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική.

Επομένως, η (α) είναι ισοδύναμη με τη (β).

( $\Leftarrow$ ) Θα δείξουμε ότι η (β) είναι ισοδύναμη με τη (α). Έστω  $N_i(v) = 0 \Rightarrow v = 0$ .

Το  $v$  μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d$ , διότι το σύνολο  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d\}$  είναι κάποια βάση για το  $\mathbf{P}$ . Συνεπώς,  $v = \beta_1 \varphi_1 + \dots + \beta_d \varphi_d$  με  $v = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ .

Έχουμε  $N_i(v) = 0 \Leftrightarrow \beta_1 N_1(\varphi_1) + \dots + \beta_d N_1(\varphi_d) = 0$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & \beta_1 N_d(\varphi_1) + \dots + \beta_d N_d(\varphi_d) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [N_i(\varphi_j)] [\beta_1, \dots, \beta_d]^T = \mathbf{0}.$$

Άρα η  $\beta_1 = \dots = \beta_d = 0$  είναι μοναδική λύση αν και μόνο αν  $\text{rank} \mathbf{B}^T = d$  αν και μόνο αν ο  $\mathbf{B}^T$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο  $\mathbf{B} = [N_j(\varphi_i)]$  είναι αντιστρέψιμος.

Αν ο  $\mathbf{B}$  είναι αντιστρέψιμος, αυτό σημαίνει ότι το σύστημα  $\mathbf{B}\alpha = y$  έχει πάντα μοναδική λύση.

Αυτό είναι ισοδύναμο με τη συνθήκη (α). Άρα η  $\{N_1, N_2, \dots, N_d\}$  είναι μια βάση για το  $\mathbf{P}'$ .  $\square$

**Σχόλιο:** Από το ευθύ μέρος της απόδειξης, όπως δείξαμε παραπάνω.

Παρατήρηση 1: Η συνθήκη (iii) του ορισμού 3.1.1 είναι ίδια με τη συνθήκη (α) του Λήμματος 3.1.3, άρα μπορεί να εξεταστεί από τη συνθήκη (β) του Λήμματος 3.1.3. Από τη γενική μορφή του παραπάνω παραδείγματος, έχουμε:  
 αν  $v \in \mathbf{P}_k$  και  $0 = N_i(v) = v(a + (b-a)i/k) \quad \forall i = 0, 1, \dots, k$  τότε το  $v$  μηδενίζεται σε  $k+1$  σημεία, δηλαδή έχει  $k+1$  ρίζες. Όμως το  $v$  είναι ένα πολυώνυμο με βαθμό  $\leq k$ . Έτσι από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας καταλήγουμε σε άτοπο. Τότε  $v = 0$ . Συνεπώς, το  $(K, \mathbf{P}_k, \mathbf{N}_k)$  είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο.

Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας: Κάθε πολυώνυμο βαθμού  $k$ , έχει στο σύνολο των μιγαδικών  $k$  ακριβώς ρίζες.

**(3.1.4) Ορισμός.** Λέμε ότι το  $\mathbf{N}$  ορίζει το  $\mathbf{P}$  αν  $\psi \in \mathbf{P}$  με  $N(\psi) = 0 \quad \forall N \in \mathbf{N}$  συνεπάγεται ότι  $\psi = 0$ .

Παρατήρηση 2: Το υπερεπίπεδο ορίζεται ως  $\{x : L(x) = 0\}$ , όπου  $L$  είναι μία μη εκφυλισμένη γραμμική συνάρτηση. Δηλαδή,  $L(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + \beta$ .

**(3.1.5) Λήμμα.** Έστω  $P$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $d \geq 1$  που μηδενίζεται στο υπερεπίπεδο  $L$ , δηλαδή  $P|_L = 0$ . Τότε μπορούμε να γράψουμε  $P = LQ$ , όπου το  $Q$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $(d-1)$ .

## 3.2 ΤΡΙΓΩΝΙΚΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Έστω  $K$  ένα οποιοδήποτε τρίγωνο και έστω με  $\mathbf{P}_k$  συμβολίζουμε το σύνολο όλων των πολυωνύμων βαθμού  $\leq k$  στις δύο διαστάσεις. Ο ακόλουθος πίνακας δίνει τη διάσταση του  $\mathbf{P}_k$ .

$k$	$\dim \mathbf{P}_k$
1	3
2	6
3	10
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮
$k$	$\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

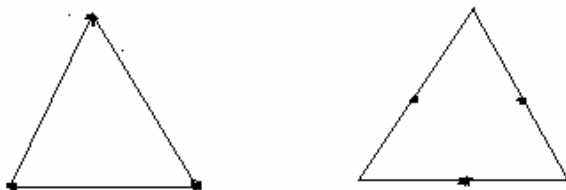
π.χ.  $\mathbf{P}_1 = \{1, x, y\}$ ,  $\mathbf{P}_2 = \{1, x, y, xy, x^2, y^2\}$ , ...,  
 $\mathbf{P}_k = \{1, x, \dots, x^k, y, \dots, y^k, xy, \dots, xy^{k-1}, x^2y, \dots, x^2y^{k-2}, \dots, x^{k-1}y\}$



## Το στοιχείο Lagrange

**(3.2.1) Παράδειγμα.** ( $k=1$ ) Έστω  $P = P_1$  και έστω  $N = N_1 = \{ N_1, N_2, N_3 \}$  ( $\dim P_1 = 3$ ), όπου

$N_i(v) = v(z_i)$  και  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$ ,  $z_3 = (x_3, y_3)$  είναι οι κορυφές του τριγώνου  $K$ . Αυτό το στοιχείο φαίνεται παρακάτω και είναι το αριστερό τρίγωνο:



Η ‘•’ στα σχήματα δείχνει την τιμή των nodal μεταβλητών στα σημεία όπου η ‘•’ τοποθετείται.

Θα αποδείξουμε τη συνθήκη (iii) του ορισμού 3.1.1 χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (β) του Λήμματος 3.1.3, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι το  $N_1$  ορίζει το  $P_1$ . Έστω  $L_1, L_2, L_3$  είναι μη τετριμμένες γραμμικές συναρτήσεις οι οποίες ορίζουν τις ευθείες γραμμές πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου.

Για παράδειγμα, η μορφή για την  $L_3$  είναι:  $y = ax + b$ . Τα σημεία  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$  ανήκουν στην ευθεία  $L_3$  άρα την επαληθεύουν. Οπότε  $y_1 = ax_1 + b$  και  $y_2 = ax_2 + b$ .

Επομένως,  $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ .

Αν  $x_2 = x_1$ , τότε η εξίσωση είναι της μορφής  $x = x_0$ .

Αν  $x_2 \neq x_1$ , τότε  $a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ , οπότε  $b = y_1 - [(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)] x_1$ ,

δηλαδή  $b = (y_1 x_2 - y_2 x_1)/(x_2 - x_1)$ .

Άρα  $L_3: y = [(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)]x + (y_1 x_2 - y_2 x_1)/(x_2 - x_1)$ .

Υποθέτουμε ότι ένα πολυώνυμο  $P \in P_1$  μηδενίζεται στα  $z_1, z_2, z_3$ , δηλαδή θεωρούμε το  $v = P$  έτσι ώστε

$$N_1(P) = P(z_1) = 0$$

$$N_2(P) = P(z_2) = 0$$

**Σχόλιο:** Το αριστερό σχήμα αντιστοιχεί σε ένα γραμμικό τρίγωνο Lagrange, ενώ το δεξιό σχήμα αντιστοιχεί σε ένα nonconforming γραμμικό τρίγωνο Crouzeix-Raviart

$$N_3(P) = P(z_3) = 0.$$

Για την ευθεία  $L_3$  έχουμε:

$$L_3 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \{(x, [(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)]x + (y_1x_2 - y_2x_1)/(x_2 - x_1)) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Το πολυώνυμο  $P \in \mathbf{P}_1$  θα είναι της μορφής  $P(x,y) = \delta x + \varepsilon y + \gamma$ .

Ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_3$  είναι μία γραμμική συνάρτηση μίας μεταβλητής, δηλαδή

$$P(x,y)|_{L_3} = \delta x + \varepsilon \{[(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)]x + (y_1x_2 - y_2x_1)/(x_2 - x_1)\} + \gamma = \kappa x + \lambda.$$

Το  $P(x,y)|_{L_3}$  μηδενίζεται σε δύο σημεία, στα  $z_1 = (x_1, y_1)$  και  $z_2 = (x_2, y_2)$ , δηλαδή σε αυτά που ανήκουν στην ευθεία  $L_3$ . Έχουμε  $P(x_1, y_1)|_{L_3} = \kappa x_1 + \lambda = 0$  και

$$P(x_2, y_2)|_{L_3} = \kappa x_2 + \lambda = 0. \text{ Επειδή } x_2 \neq x_1, \text{ τότε } \kappa = \lambda = 0.$$

Άρα, το πολυώνυμο  $P(x,y)|_{L_3}$  είναι  $1^{\text{ου}}$  βαθμού και έχει δύο ρίζες. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας καταλήγουμε σε άτοπο. Συνεπώς  $P = 0$  στην  $L_3$ . Από το Λήμμα 3.1.5 μπορούμε να γράψουμε το  $P$  ως  $P = QL_3$ , όπου το  $Q$  είναι ένα πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.

Άρα  $Q = c$ , όπου το  $c$  είναι μία σταθερά. Αλλά

$$0 = P(z_3) = c L_3(z_3) \Rightarrow c = 0, \text{ διότι } L_3(z_3) \neq 0.$$

Έτσι,  $P \equiv 0$  και το  $N_1$  ορίζει το  $\mathbf{P}_1$ .

Άρα το  $(K, \mathbf{P}_1, N_1)$  είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο.  $\square$

**Παρατήρηση 1:** Η παραπάνω επιλογή για το  $N$  δεν είναι μοναδική. Θα ήταν δυνατόν  $N_i(v) = v$  (το μέσο της  $i$ -πλευράς), όπως φαίνεται στο δεξιό τρίγωνο. Αν ενώσουμε τα μέσα των πλευρών, θα σχηματιστεί ένα νέο τρίγωνο πάνω στο οποίο το πολυώνυμο  $P \in \mathbf{P}_1$  και το  $P$  θα μηδενίζεται στις κορυφές του νέου τριγώνου. Έτσι σύμφωνα με το παράδειγμα 3.2.1 δείχνεται ότι  $P \equiv 0$  και το  $N_1$  ορίζει το  $\mathbf{P}_1$ . Άρα το  $(K, \mathbf{P}_1, N_1)$  είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο.

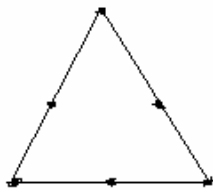
**(3.2.2) Παράδειγμα.** ( $k=2$ ) Έστω  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_2$  και έστω  $N = N_2 = \{N_1, N_2, \dots, N_6\}$  ( $\dim \mathbf{P}_2 = 6$ ), όπου

$$N_i(v) = v(\text{i-κορυφής}) \quad i = 1, 2, 3$$

$$N_i(v) = v(\text{μέσο της (i-3) πλευράς}), \text{ (ή ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο της (i-3) πλευράς)}$$

$$i = 4, 5, 6$$

και  $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), \dots, z_6 = (x_3, y_3)$  είναι τα σημεία που φαίνονται στο παρακάτω τρίγωνο.



**Σχόλιο:** Είναι ένα δευτεροβάθμιο τρίγωνο Lagrange.

Θα αποδείξουμε τη συνθήκη (iii) του ορισμού 3.1.1 χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (β) του Λήμματος 3.1.3, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι το  $N_2$  ορίζει το  $\mathbf{P}_2$ . Έστω  $L_1, L_2, L_3$  είναι μη τετριμμένες γραμμικές συναρτήσεις οι οποίες ορίζουν τις ευθείες γραμμές πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου. Ένα πολυώνυμο  $P$  στο  $\mathbf{P}_2$  είναι της μορφής

$$P(x,y) = ax^2 + by^2 + \gamma xy + \delta x + \epsilon y + \kappa.$$

Η μορφή για την  $L_1$  είναι:  $y = vx + \mu$ . Ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_1$  είναι μία δευτεροβάθμια συνάρτηση (πολυώνυμο  $2^{\text{ο}}$  βαθμού) μίας μεταβλητής.

Υποθέτουμε ότι ένα πολυώνυμο  $P \in \mathbf{P}_2$  μηδενίζεται στα  $z_1, z_2, \dots, z_6$ , δηλαδή θεωρούμε το  $v = P$  έτσι ώστε

$$N_i(P) = P(z_i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 6.$$

Η  $L_1$  ευθεία επαληθεύεται από τα  $z_2, z_3, z_4$ . Έτσι, επειδή ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_1$  είναι μία δευτεροβάθμια συνάρτηση (πολυώνυμο  $2^{\text{ο}}$  βαθμού) μίας μεταβλητής, έχουμε:

$$P(x,y)|_{L_1} = ax^2 + by^2 + c \quad \text{με} \quad P|_{L_1}(z_2) = P|_{L_1}(z_3) = P|_{L_1}(z_4) = 0.$$

Αυτό είναι άτοπο από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. Συνεπώς,  $P|_{L_1} = 0$ , δηλαδή  $P = 0$  στην  $L_1$ . Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1.5, το  $P$  μπορεί να γραφεί ως  $P = L_1 Q_1$  όπου  $\deg P = 2$  και  $\deg L_1 = \deg Q_1 = 1$ .

Ομοίως, η  $L_2$  ευθεία  $y = dx + e$  επαληθεύεται από τα  $z_1, z_3, z_5$ . Έτσι, επειδή ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_2$  είναι μία δευτεροβάθμια συνάρτηση (πολυώνυμο  $2^{\text{ου}}$  βαθμού) μίας μεταβλητής, έχουμε:

$$P(x,y)|_{L_2} = mx^2 + ny^2 + w \text{ με } P|_{L_2}(z_1) = P|_{L_2}(z_3) = P|_{L_2}(z_5) = 0.$$

Αυτό είναι άτοπο από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. Συνεπώς,  $P|_{L_2} = 0$ , δηλαδή  $P = 0$  στην  $L_2$ .

Επομένως,  $P|_{L_2} = L_1 Q_1|_{L_2} = 0$ . Συνεπώς στην  $L_2$  είτε  $L_1 = 0$  είτε  $Q_1 = 0$ .

**Σχόλιο:** Δηλαδή  $L_1|_{L_2} = 0$  ή  $Q_1|_{L_2} = 0$ .

Όμως, η  $L_1$  μπορεί να είναι ίση με μηδέν μόνο σε ένα σημείο της  $L_2$ , το οποίο είναι το σημείο  $z_3$  (διότι  $L_1(z_3) = L_2(z_3) = 0$ ), επειδή έχουμε μη εκφυλισμένο τρίγωνο.

Συνεπώς  $Q_1 = 0$  στην  $L_2$ , εκτός ίσως από ένα σημείο το  $z_3$ .

Λόγω της συνέχειας του  $Q_1$ , έχουμε  $Q_1 \equiv 0$  στην  $L_2$ .

**Σχόλιο:** Το  $Q_1$  είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, άρα είναι συνεχές.

Από το Λήμμα 3.1.5, μπορούμε να γράψουμε  $Q_1 = L_2 Q_2$  όπου  $\deg L_2 = 1$  και  $\deg Q_2 = 0$ . Άρα  $Q_2 = t$ , όπου  $t$  είναι μία σταθερά. Έτσι  $Q_1 = L_2 t$ .

Επομένως  $P = L_1 Q_1 = t L_1 L_2$ , μα  $P(z_6) = 0$  και το  $z_6$  δε βρίσκεται ούτε στην ευθεία  $L_1$  ούτε στην ευθεία  $L_2$ .

$$\text{Συνεπώς, } 0 = P(z_6) = t L_1(z_6) L_2(z_6) \Rightarrow t = 0, \text{ αφού } L_1(z_6) \neq 0 \text{ και } L_2(z_6) \neq 0.$$

Έτσι,  $P \equiv 0$  και το  $N_2$  ορίζει το  $P_2$ , δηλαδή  $\{N_1, N_2, \dots, N_6\}$  βάση του  $P'$ .

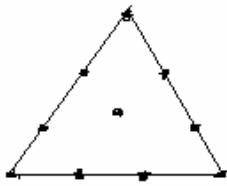
Άρα το  $(K, P_2, N_2)$  είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο.  $\square$

**(3.2.3) Παράδειγμα.** ( $k=3$ ) Έστω  $P = P_3$  και έστω  $N = N_3 = \{N_1, N_2, \dots, N_{10}\}$  ( $\dim P_3 = 10$ ), όπου

$N_i(v) = v(z_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 9$  ( $z_i$  σημεία στις πλευρές του τριγώνου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα)

$N_{10}(v) = v(\text{οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο})$

και  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$ ,  $\dots$ ,  $z_{10} = (x_{10}, y_{10})$  είναι τα σημεία που φαίνονται στο παρακάτω τρίγωνο.



**Σχόλιο:** Είναι ένα κυβικό τρίγωνο Lagrange.

Θα αποδείξουμε τη συνθήκη (iii) του ορισμού 3.1.1 χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (β) του Λήμματος 3.1.3, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι το  $N_3$  ορίζει το  $P_3$ . Έστω  $L_1, L_2, L_3$  είναι μη τετριμμένες γραμμικές συναρτήσεις οι οποίες ορίζουν τις ευθείες γραμμές πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου. Ένα πολυώνυμο  $P$  στο  $P_3$  είναι της μορφής

$$P(x,y) = ax^3 + by^3 + \gamma x^2 + \delta y^2 + \epsilon x + \zeta y + \eta xy + \kappa x^2 y + \lambda xy^2 + c.$$

Η μορφή για την  $L_3$  είναι:  $y = mx + v$ . Ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_3$  είναι μία τριτοβάθμια συνάρτηση (πολυώνυμο  $3^{00}$  βαθμού) μίας μεταβλητής.

Υποθέτουμε ότι ένα πολυώνυμο  $P \in P_3$  μηδενίζεται στα  $z_1, z_2, \dots, z_{10}$ , δηλαδή θεωρούμε το  $v = P$  έτσι ώστε

$$N_i(P) = P(z_i) = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 10.$$

Η  $L_3$  ευθεία επαληθεύεται από τα  $z_1, z_2, z_3, z_4$ . Έτσι, επειδή ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_3$  είναι μία τριτοβάθμια συνάρτηση (πολυώνυμο  $3^{00}$  βαθμού) μίας μεταβλητής, έχουμε:

$$P(x,y)|_{L_3} = gx^3 + wx^2 + zx + m \text{ με } P|_{L_3}(z_1) = P|_{L_3}(z_2) = P|_{L_3}(z_3) = P|_{L_3}(z_4) = 0.$$

Αυτό είναι άτοπο από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. Συνεπώς,  $P|_{L_3} = 0$ , δηλαδή  $P = 0$  στην  $L_3$ . Χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.1.5, το  $P$  μπορεί να γραφεί ως  $P = L_3 Q_3$  όπου  $\deg P = 3$ ,  $\deg L_3 = 1$  και  $\deg Q_3 = 2$ .

Ομοίως, η  $L_1$  ευθεία  $y = dx + e$  επαληθεύεται από τα  $z_4, z_5, z_6, z_7$ . Έτσι, επειδή ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_1$  είναι μία τριτοβάθμια συνάρτηση (πολυώνυμο  $3^{00}$  βαθμού) μίας μεταβλητής, έχουμε:

$$P(x,y)|_{L_1} = sx^3 + tx^2 + vx + u \text{ με } P|_{L_1}(z_4) = P|_{L_1}(z_5) = P|_{L_1}(z_6) = P|_{L_1}(z_7) = 0.$$

Αυτό είναι άτοπο από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. Συνεπώς,  $P|_{L_1} = 0$ , δηλαδή  $P = 0$  στην  $L_1$ .

Επομένως,  $P|_{L_1} = L_3Q_3|_{L_1} = 0$ . Συνεπώς στην  $L_1$  είτε  $L_3 = 0$  είτε  $Q_3 = 0$ .

**Σχόλιο:** Δηλαδή  $L_3|_{L_1} = 0$  ή  $Q_3|_{L_1} = 0$ .

Όμως, η  $L_3$  μπορεί να είναι ίση με μηδέν μόνο σε ένα σημείο της  $L_1$ , το οποίο είναι το σημείο  $z_4$  (διότι  $L_3(z_4) = L_1(z_4) = 0$ ), επειδή έχουμε μη εκφυλισμένο τρίγωνο.

Συνεπώς  $Q_3 = 0$  στην  $L_1$ , εκτός ίσως από ένα σημείο το  $z_4$ .

Λόγω της συνέχειας του  $Q_3$ , έχουμε  $Q_3 \equiv 0$  στην  $L_1$ .

**Σχόλιο:** Το  $Q_3$  είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, άρα είναι συνεχές.

Από το λήμμα 3.1.5, μπορούμε να γράψουμε  $Q_3 = L_1Q_1$  όπου  $\deg L_1 = \deg Q_1 = 1$ .

Επομένως  $P = L_3Q_3 = L_1L_3Q_1$ .

Ομοίως, η  $L_2$  ευθεία  $y = \xi x + \rho$  επαληθεύεται από τα  $z_1, z_7, z_8, z_9$ . Έτσι, επειδή ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_2$  είναι μία τριτοβάθμια συνάρτηση (πολυώνυμο 3<sup>ου</sup> βαθμού) μίας μεταβλητής, έχουμε:

$$P(x,y)|_{L_2} = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ με } P|_{L_2}(z_1) = P|_{L_2}(z_7) = P|_{L_2}(z_8) = P|_{L_2}(z_9) = 0.$$

Αυτό είναι άτοπο από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. Συνεπώς,  $P|_{L_2} = 0$ , δηλαδή  $P = 0$  στην  $L_2$ .

Επομένως,  $P|_{L_2} = L_1L_3Q_1|_{L_2} = 0$ . Συνεπώς στην  $L_2$  είτε  $L_1 = 0$  είτε  $L_3 = 0$  είτε  $Q_1 = 0$ .

**Σχόλιο:** Δηλαδή  $L_1|_{L_2} = 0$  ή  $L_3|_{L_2} = 0$  ή  $Q_1|_{L_2} = 0$ .

Όμως, η  $L_3$  και η  $L_1$  αντίστοιχα μπορεί να είναι ίση με μηδέν μόνο σε ένα σημείο της  $L_2$ , το οποίο είναι το σημείο  $z_1$  και το  $z_7$  αντίστοιχα (διότι  $L_3(z_1) = L_1(z_7) = L_2(z_1) = L_2(z_7) = 0$ ), επειδή έχουμε μη εκφυλισμένο τρίγωνο.

Συνεπώς  $Q_1 = 0$  στην  $L_2$ , εκτός ίσως από δύο σημεία το  $z_1$  και το  $z_7$ .

Λόγω της συνέχειας του  $Q_1$ , έχουμε  $Q_1 \equiv 0$  στην  $L_2$ .

**Σχόλιο:** Το  $Q_1$  είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, άρα είναι συνεχές.

Από το Λήμμα 3.1.5, μπορούμε να γράψουμε  $Q_1 = L_2Q_2$  όπου  $\deg L_2 = 1$  και  $\deg Q_2 = 0$ . Άρα  $Q_2 = h$ , όπου  $h$  είναι μία σταθερά. Έτσι  $Q_1 = L_2h$ .

Επομένως  $P = L_1L_3Q_1 = h L_1L_2L_3$ , μα  $P(z_{10}) = 0$  και το  $z_{10}$  δε βρίσκεται ούτε στην ευθεία  $L_1$  ούτε στην ευθεία  $L_2$  ούτε στην ευθεία  $L_3$ .

Συνεπώς,  $0 = P(z_{10}) = h L_1(z_{10})L_2(z_{10})L_3(z_{10}) \Rightarrow h = 0$ , αφού  $L_1(z_{10}) \neq 0$ ,  $L_2(z_{10}) \neq 0$  και  $L_3(z_{10}) \neq 0$ .

Έτσι,  $P \equiv 0$  και το  $N_3$  ορίζει το  $P_3$ , δηλαδή  $\{N_1, N_2, \dots, N_{10}\}$  βάση του  $P'$ .

Άρα το  $(K, P_3, N_3)$  είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο.  $\square$

Παρατήρηση 2: Γενικότερα για  $k \geq 1$ , έχουμε  $P = P_k$  και

$$N = N_k = \{N_i : i = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(k+1)(k+2)\}.$$

Επιλέγουμε να κάνουμε αποτίμηση στα ακόλουθα σημεία:

- (i) στις κορυφές του τριγώνου
- (ii) σε  $3(k-1)$  σημεία των πλευρών και
- (iii) σε  $\frac{1}{2}(k-2)(k-1)$  εσωτερικά σημεία.

$$\begin{aligned} \text{Αυτές οι επιλογές επαρκούν, διότι } 3 + 3(k-1) + \frac{1}{2}(k-2)(k-1) &= 3k + \frac{1}{2}(k^2 - 3k + 2) \\ &= \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 2) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = \dim \mathbf{P}_k. \end{aligned}$$

Τα σημεία αποτίμησης για  $k = 4$  και  $k = 5$  φαίνονται παρακάτω στο αριστερό και δεξιό τρίγωνο αντίστοιχα. Το αριστερό είναι ένα τεταρτοβάθμιο τρίγωνο Lagrange, ενώ το δεξιό είναι ένα πεμπτοβάθμιο τρίγωνο Lagrange.



Παρατήρηση 3: Για να δείξουμε ότι το  $N_k$  ορίζει το  $\mathbf{P}_k$ , υποθέτουμε ότι ένα πολυώνυμο  $P \in \mathbf{P}_k$  μηδενίζεται σε όλα τα nodes (που είναι οι μαύρες κουκίδες). Έστω  $L_1, L_2, L_3$  είναι μη τετριμμένες γραμμικές συναρτήσεις οι οποίες ορίζουν τις ευθείες γραμμές πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου. Όπως προηγουμένως, συμπεραίνουμε ότι από το μηδενισμό του  $P$  στα nodes των κορυφών και των πλευρών, το  $P$  μπορεί να γραφεί ως  $P = Q L_1 L_2 L_3$  όπου  $\deg(Q) \leq k-3$ , αφού  $\deg L_1 = \deg L_2 = \deg L_3 = 1$ . Συνεπώς, το  $Q$  πρέπει να μηδενίζεται σε όλα τα εσωτερικά σημεία, επειδή καμιά από τις ευθείες  $L_i$  δε μηδενίζεται σε αυτά τα σημεία λόγω του τρόπου ορισμού τους. Αυτά τα σημεία ήταν επιλεγμένα για να ορίζουν ότι  $Q \equiv 0$ .

## Το στοιχείο Hermite

**(3.2.4) Παράδειγμα. ( $k=3$  Κυβικό Hermite)** Έστω  $P = P_3$  και έστω ότι η ‘•’ δείχνει την αποτίμηση του σημείου εκεί που τοποθετείται και ο κύκλος ‘Ο’ δείχνει την αποτίμηση της παραγώγου στο κέντρο αυτού του κύκλου. Το τελευταίο αντιστοιχεί σε δύο nodal μεταβλητές, μία nodal μεταβλητή κατά τον άξονα  $x$  και μία nodal μεταβλητή κατά τον άξονα  $y$ . Αξίζει να σημειώσουμε ότι η αναπαράσταση της παραγώγου δεν είναι μοναδική ( για παράδειγμα είναι δυνατόν οι δύο nodal μεταβλητές να σχηματίζουν γωνία διαφορετική των 90 μοιρών δηλαδή να μην είναι κατά τον άξονα  $x$  και  $y$ ).

Αφού  $P = P_3$  και  $N = \{ N_1, N_2, \dots, N_{10} \}$  ( $\dim P_3 = 10$ ), έχουμε:

$$N_i(v) = v(z_i), \quad i = 1, 2, 3$$

$$N_4(v) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_1)$$

$$N_5(v) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_1)$$

$$N_6(v) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_2)$$

$$N_7(v) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_2)$$

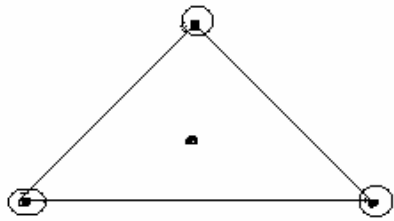
$$N_8(v) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_3)$$

$$N_9(v) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_3)$$

$$N_{10}(v) = v(z_4) \quad (\text{το } z_4 \text{ είναι το μοναδικό εσωτερικό σημείο του τριγώνου)}$$

και  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$ ,  $z_3 = (x_3, y_3)$ ,  $z_4 = (x_4, y_4)$  είναι τα σημεία που φαίνονται στο παρακάτω τρίγωνο.





Θα αποδείξουμε τη συνθήκη (iii) του ορισμού 3.1.1 χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (β) του Λήμματος 3.1.3, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι το  $N$  ορίζει το  $\mathbf{P}_3$ . Έστω  $L_1, L_2, L_3$  είναι μη τετριμμένες γραμμικές συναρτήσεις οι οποίες ορίζουν τις ευθείες γραμμές πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου. Ένα πολυώνυμο  $P$  στο  $\mathbf{P}_3$  είναι της μορφής

$$P(x,y) = ax^3 + by^3 + \gamma x^2 + \delta y^2 + ex + \zeta y + \eta xy + \kappa x^2y + \lambda xy^2 + c.$$

Η μορφή για την  $L_1$  είναι:  $y = dx + e$ . Ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_1$  είναι μία τριτοβάθμια συνάρτηση (πολυώνυμο 3<sup>ου</sup> βαθμού) μίας μεταβλητής.

Υποθέτουμε ότι ένα πολυώνυμο  $P \in \mathbf{P}_3$  μηδενίζεται στα  $z_1, z_2, z_3, z_4$  δηλαδή θεωρούμε το  $v = P$  έτσι ώστε

$$N_i(P) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 10.$$

Η  $L_1$  ευθεία επαληθεύεται από τα  $z_2, z_3$ . Έτσι, επειδή ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_1$  είναι μία τριτοβάθμια συνάρτηση (πολυώνυμο 3<sup>ου</sup> βαθμού) μίας μεταβλητής, έχουμε:

$$P(x,y)|_{L_1} = sx^3 + tx^2 + vx + u \quad \text{με} \quad P|_{L_1}(z_2) = P'|_{L_1}(z_2) = P|_{L_1}(z_3) = P'|_{L_1}(z_3) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι τα  $z_2, z_3$  είναι διπλές ρίζες του  $P$ , διότι  $P(z_2) = 0, P'(z_2) = 0$  και  $P(z_3) = 0, P'(z_3) = 0$ , όπου ο  $'$  δείχνει παραγώγιση κατά μήκος της ευθείας γραμμής  $L_1$ . Όμως το μοναδικό πολυώνυμο 3<sup>ου</sup> βαθμού μίας μεταβλητής με τέσσερις ρίζες είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Συνεπώς,  $P|_{L_1} = 0$ , δηλαδή  $P = 0$  στην  $L_1$ .

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1.5, το  $P$  μπορεί να γραφεί ως  $P = L_1 Q_1$  όπου  $\deg P = 3, \deg L_1 = 1$  και  $\deg Q_1 = 2$ .

Ομοίως, η  $L_2$  ευθεία  $y = \xi x + \rho$  επαληθεύεται από τα  $z_1, z_3$ . Έτσι, επειδή ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_2$  είναι μία τριτοβάθμια συνάρτηση (πολυώνυμο 3<sup>ου</sup> βαθμού) μίας μεταβλητής, έχουμε:

$$P(x,y)|_{L_2} = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ με } P|_{L_2}(z_1) = P'|_{L_2}(z_1) = P|_{L_2}(z_3) = P'|_{L_2}(z_3) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι τα  $z_1, z_3$  είναι διπλές ρίζες του  $P$ , διότι  $P(z_1) = 0, P'(z_1) = 0$  και  $P(z_3) = 0, P'(z_3) = 0$ , όπου ο ' δείχνει παραγωγή κατά μήκος της ευθείας γραμμής  $L_2$ . Όμως το μοναδικό πολυώνυμο 3<sup>ου</sup> βαθμού μίας μεταβλητής με τέσσερις ρίζες είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Συνεπώς,  $P|_{L_2} = 0$ , δηλαδή  $P = 0$  στην  $L_2$ .

Επομένως,  $P|_{L_2} = L_1 Q_1|_{L_2} = 0$ . Συνεπώς στην  $L_2$  είτε  $L_1 = 0$  είτε  $Q_1 = 0$ .

**Σχόλιο:** Δηλαδή  $L_1|_{L_2} = 0$  ή  $Q_1|_{L_2} = 0$ .

Όμως, η  $L_1$  μπορεί να είναι ίση με μηδέν μόνο σε ένα σημείο της  $L_2$ , το οποίο είναι το σημείο  $z_3$  (διότι  $L_1(z_3) = L_2(z_3) = 0$ ), επειδή έχουμε μη εκφυλισμένο τρίγωνο.

Συνεπώς  $Q_1 = 0$  στην  $L_2$ , εκτός ίσως από ένα σημείο το  $z_3$ .

Λόγω της συνέχειας του  $Q_1$ , έχουμε  $Q_1 \equiv 0$  στην  $L_2$ .

**Σχόλιο:** Το  $Q_1$  είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, άρα είναι συνεχές.

Από το Λήμμα 3.1.5, μπορούμε να γράψουμε  $Q_1 = L_2 Q_2$  όπου  $\deg L_2 = \deg Q_2 = 1$ . Άρα  $P = L_1 Q_1 = L_1 L_2 Q_2$ .

Ομοίως, η  $L_3$  ευθεία  $y = \mu x + \nu$  επαληθεύεται από τα  $z_1, z_2$ . Έτσι, επειδή ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_3$  είναι μία τριτοβάθμια συνάρτηση (πολυώνυμο 3<sup>ου</sup> βαθμού) μίας μεταβλητής, έχουμε:

$$P(x,y)|_{L_3} = gx^3 + wx^2 + zx + m \text{ με } P|_{L_3}(z_1) = P'|_{L_3}(z_1) = P|_{L_3}(z_2) = P'|_{L_3}(z_2) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι τα  $z_1, z_2$  είναι διπλές ρίζες του  $P$ , διότι  $P(z_1) = 0, P'(z_1) = 0$  και  $P(z_2) = 0, P'(z_2) = 0$ , όπου ο ' δείχνει παραγωγή κατά μήκος της ευθείας γραμμής  $L_3$ . Όμως το μοναδικό πολυώνυμο 3<sup>ου</sup> βαθμού μίας μεταβλητής με τέσσερις ρίζες είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Συνεπώς,  $P|_{L_3} = 0$ , δηλαδή  $P = 0$  στην  $L_3$ .

Επομένως,  $P|_{L_3} = L_1 L_2 Q_2|_{L_3} = 0$ . Συνεπώς στην  $L_3$  είτε  $L_1 = 0$  είτε  $L_2 = 0$  είτε  $Q_2 = 0$ .

**Σχόλιο:** Δηλαδή  $L_1|_{L_3} = 0$  ή  $L_2|_{L_3} = 0$  ή  $Q_2|_{L_3} = 0$ .

Όμως, η  $L_1$  και η  $L_2$  αντίστοιχα μπορεί να είναι ίση με μηδέν μόνο σε ένα σημείο της  $L_3$ , το οποία είναι το σημεία  $z_1$  και το  $z_2$  αντίστοιχα (διότι  $L_3(z_1) = L_3(z_2) = L_2(z_1) = L_1(z_2) = 0$ ), επειδή έχουμε μη εκφυλισμένο τρίγωνο.

Συνεπώς  $Q_2 = 0$  στην  $L_3$ , εκτός ίσως από δύο σημεία το  $z_1$  και το  $z_2$ .

Λόγω της συνέχειας του  $Q_2$ , έχουμε  $Q_2 \equiv 0$  στην  $L_3$ .

**Σχόλιο:** Το  $Q_2$  είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, άρα είναι συνεχές.

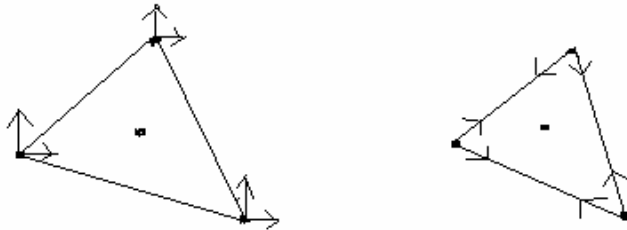
Από το Λήμμα 3.1.5, μπορούμε να γράψουμε  $Q_2 = L_3 Q_3$  όπου  $\deg L_3 = 1$  και  $\deg Q_3 = 0$ . Άρα  $Q_3 = c$ , όπου  $c$  είναι μία σταθερά. Έτσι  $Q_2 = L_3 c$ .

Επομένως  $P = L_1 L_2 Q_2 = c L_1 L_2 L_3$ , μα  $P(z_4) = 0$  και το  $z_4$  δε βρίσκεται ούτε στην ευθεία  $L_1$  ούτε στην ευθεία  $L_2$  ούτε στην ευθεία  $L_3$ .

Συνεπώς,  $0 = P(z_4) = c L_1(z_4) L_2(z_4) L_3(z_4) \Rightarrow c = 0$ , αφού  $L_1(z_4) \neq 0, L_2(z_4) \neq 0$  και  $L_3(z_4) \neq 0$ .

Έτσι,  $P \equiv 0$  και το  $N$  ορίζει το  $P_3$ , δηλαδή  $\{N_1, N_2, \dots, N_{10}\}$  βάση του  $P'$ .  
 Άρα το  $(K, P_3, N)$  είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο.  $\square$

Παρατήρηση 4: Χρησιμοποιώντας παραγώγους κατά κατεύθυνση, υπάρχουν ποικίλοι τρόποι να ορίσουμε ένα πεπερασμένο στοιχείο χρησιμοποιώντας το  $P_3$ , δύο από τους οποίους φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Τα βέλη παριστάνουν παραγώγους κατά κατεύθυνση κατά μήκος των ενδεικτικών κατευθύνσεων στα σημεία. Το αριστερό στοιχείο ( global element ) έχει το πλεονέκτημα της ευκολίας του υπολογισμού των παραγώγων κατά κατεύθυνση του  $x$  και  $y$  άξονα σε όλη την έκταση του χωρίου που διαιρείται σε τρίγωνα. Το δεξιό στοιχείο ( local element ) έχει το πλεονέκτημα ότι σε αυτό οι nodal παράμετροι κάθε τριγώνου είναι αμετάβλητοι ως προς το τρίγωνο.

Παρατήρηση 5: Στη γενική περίπτωση Hermite, έχουμε:

- (i) 3 nodes για τις κορυφές
- (ii) 6 nodes για τις παραγώγους κατά κατεύθυνση ( 2 για καθεμία από τις 3 κορυφές )
- (iii)  $3(k-3)$  nodes για τις πλευρές

$$(iv) \quad \frac{1}{2}(k-2)(k-1) \text{ εσωτερικά nodes ( όπως στην περίπτωση Lagrange )}$$

Το άθροισμα:  $3 + 6 + 3(k-3) + \frac{1}{2}(k-2)(k-1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = \dim P_k$  όπως στην περίπτωση Lagrange.

### Το στοιχείο Argyris

**(3.2.5) Παράδειγμα.** ( $k = 5$ ) Έστω  $P = P_5$  και έστω ότι η ‘•’ δείχνει την αποτίμηση του σημείου εκεί που τοποθετείται, ο εσωτερικός κύκλος ‘Ο’ δείχνει την αποτίμηση της παραγώγου στο κέντρο αυτού του κύκλου και ο εξωτερικός κύκλος ‘Ο’ δείχνει την αποτίμηση της δεύτερης παραγώγου στο κέντρο αυτού του κύκλου (έχουμε τρεις δεύτερες παραγώγους στο κέντρο). Τα βέλη, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, παριστάνουν αποτίμηση των κανονικών παραγώγων στα τρία μέσα των αντίστοιχων πλευρών.

Αφού  $P = P_5$  και  $N = \{N_1, N_2, \dots, N_{21}\}$  ( $\dim P_5 = 21$ , δηλαδή 21 βαθμοί ελευθερίας), έχουμε:

$$N_i(v) = v(z_i), \quad i = 1, 2, 3$$

$$N_4(v) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_1)$$

$$N_5(v) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_1)$$

$$N_6(v) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_2)$$

$$N_7(v) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_2)$$

$$N_8(v) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_3)$$

$$N_9(v) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_3)$$

$$N_{10}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(z_1)$$

$$N_{11}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(z_1)$$

$$N_{12}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(z_1)$$

$$N_{13}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(z_2)$$

$$N_{14}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(z_2)$$

$$N_{15}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(z_2)$$

$$N_{16}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(z_3)$$

$$N_{17}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(z_3)$$

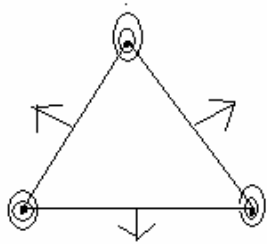
$$N_{18}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(z_3)$$

$$N_{19}(v) = \frac{\partial v}{\partial \eta_1}(m_1)$$

$$N_{20}(v) = \frac{\partial v}{\partial \eta_2}(m_2)$$

$$N_{21}(v) = \frac{\partial v}{\partial \eta_3}(m_3)$$

και  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$ ,  $z_3 = (x_3, y_3)$  είναι τα σημεία που φαίνονται στο παρακάτω τρίγωνο.



Θα αποδείξουμε τη συνθήκη (iii) του ορισμού 3.1.1 χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (β) του Λήμματος 3.1.3, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι το  $N$  ορίζει το  $P_5$ . Έστω  $L_1, L_2, L_3$  είναι μη τετριμμένες γραμμικές συναρτήσεις οι οποίες ορίζουν τις ευθείες γραμμές πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου.

Υποθέτουμε ότι ένα πολυώνυμο  $P \in P_5$  μηδενίζεται στα  $z_1, z_2, z_3$  δηλαδή θεωρούμε το  $\nu = P$  έτσι ώστε

$$N_i(P) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 21.$$

Ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_1$  είναι ένα πολυώνυμο  $5^{\text{ου}}$  βαθμού μίας μεταβλητής με τριπλές ρίζες στα  $z_2$  και  $z_3$ . Συνεπώς,  $P|_{L_1} = 0$ , δηλαδή  $P = 0$  στην  $L_1$ .

Ομοίως, ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_2$  είναι ένα πολυώνυμο  $5^{\text{ου}}$  βαθμού μίας μεταβλητής με τριπλές ρίζες στα  $z_1$  και  $z_3$  συνεπώς  $P|_{L_2} = 0$ , δηλαδή  $P = 0$  στην  $L_2$  και ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_3$  είναι ένα πολυώνυμο  $5^{\text{ου}}$  βαθμού μίας μεταβλητής με τριπλές ρίζες στα  $z_1$  και  $z_2$  συνεπώς  $P|_{L_3} = 0$ , δηλαδή  $P = 0$  στην  $L_3$ .

Συνεπώς,  $P = Q L_1 L_2 L_3$ , όπου  $\deg Q = 2$ .

Έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial L_2} = \frac{\partial}{\partial L_2} (Q L_1 L_2 L_3) = Q \frac{\partial L_1}{\partial L_2} L_2 L_3 + Q \frac{\partial L_2}{\partial L_2} L_1 L_3 + Q \frac{\partial L_3}{\partial L_2} L_1 L_2$$

και

$$\frac{\partial}{\partial L_1} \left( \frac{\partial P}{\partial L_2} \right) = Q \frac{\partial^2 L_1}{\partial L_1 \partial L_2} L_2 L_3 + Q \frac{\partial L_1}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial L_1} L_3 + Q \frac{\partial L_1}{\partial L_2} \frac{\partial L_3}{\partial L_1} L_2 + Q \frac{\partial^2 L_3}{\partial L_1 \partial L_2} L_1 L_2 + Q \frac{\partial L_3}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial L_1} L_2 + Q \frac{\partial L_3}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial L_1} L_1$$

όπου  $\partial L_1, \partial L_2$  είναι οι παράγωγοι κατά κατεύθυνση κατά μήκος της  $L_1$  και  $L_2$  αντίστοιχα.

Επομένως,

$$0 = \frac{\partial}{\partial L_1} \left( \frac{\partial P}{\partial L_2} (z_3) \right) = Q(z_3) \frac{\partial L_1}{\partial L_2} (z_3) \frac{\partial L_2}{\partial L_1} (z_3) L_3(z_3)$$

επειδή  $\partial_{L_i} L_i \equiv 0$  και  $L_i(z_3) = 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Αυτό σημαίνει ότι  $Q(z_3) = 0$ , διότι  $L_3(z_3) \neq 0, \partial_{L_2} L_1 \neq 0$  και  $\partial_{L_1} L_2 \neq 0$ .

Ομοίως βρίσκουμε το  $\partial_{L_1} \partial_{L_3} P$ , το  $\partial_{L_2} \partial_{L_3} P$  και δείχνουμε ότι  $Q(z_2) = 0$  και  $Q(z_1) = 0$ , αντίστοιχα.

Επίσης, επειδή  $L_1(m_1) = 0$  και  $\frac{\partial}{\partial \eta_1} P(m_1) = (Q \frac{\partial L_1}{\partial \eta_1} L_2 L_3)(m_1)$ . Συνεπώς

$$0 = \frac{\partial}{\partial \eta_1} P(m_1) \Rightarrow Q(m_1) = 0, \text{ επειδή } \frac{\partial L_1}{\partial \eta_1} \neq 0, L_2(m_1) \neq 0 \text{ και } L_3(m_1) \neq 0.$$

Παρόμοια δείχνουμε ότι  $0 = \frac{\partial}{\partial \eta_2} P(m_2) \Rightarrow Q(m_2) = 0$  και

$$0 = \frac{\partial}{\partial \eta_3} P(m_3) \Rightarrow Q(m_3) = 0.$$

Έτσι, επειδή το πολώνυμο  $Q$  είναι δευτέρου βαθμού και  $Q(z_1) = 0$ ,  $Q(z_2) = 0$ ,  $Q(z_3) = 0$ ,  $Q(m_1) = 0$ ,  $Q(m_2) = 0$ ,  $Q(m_3) = 0$ , από το παράδειγμα (3.2.2) έχουμε ότι  $Q = 0$ .

Συνεπώς,  $P \equiv 0$  και το  $N$  ορίζει το  $P_5$ , δηλαδή  $\{N_1, N_2, \dots, N_{21}\}$  βάση του  $P'$ . Άρα το  $(K, P_5, N)$  είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο.  $\square$

### 3.3 Η ΠΑΡΕΜΒΑΛΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (INTERPOLANT)

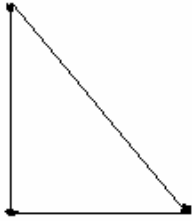
Αφού έχουμε εξετάσει κάποια είδη πεπερασμένων στοιχείων, θα τα ενώσουμε για να κατασκευάσουμε υπόχωρους χώρων Sobolev. Ξεκινώντας, δίνουμε τον ορισμό του (τοπικού) interpolant.

**(3.3.1) Ορισμός.** Για δοσμένο πεπερασμένο στοιχείο  $(K, P, N)$ , έστω το σύνολο  $\{\phi_i : 1 \leq i \leq d\} \subseteq P$  είναι μια βάση δυϊκή προς το  $N$  ( $N_i(\phi_j) = \delta_{ij}$ ). Αν  $v$  είναι μια συνάρτηση για την οποία όλα τα  $N_i \in N$ ,  $i = 1, \dots, d$ , είναι προσδιορισμένα, τότε ορίζουμε το **τοπικό interpolant** ως :

$$(3.3.2) \quad I_K v := \sum_{i=1}^d N_i(v) \phi_i$$

**(3.3.3) Παράδειγμα.** Έστω  $K$  το παρακάτω τρίγωνο,  $P = P_1$ ,  $N = \{N_1, N_2, N_3\}$  όπως στο παράδειγμα (3.2.1) και  $f = e^{xy}$ . Θέλουμε να βρούμε το  $I_K f$ .

Επίσης  $N_i(f) = f(z_i)$ .



Εξ' ορισμού  $I_K f = N_1(f)\varphi_1 + N_2(f)\varphi_2 + N_3(f)\varphi_3$ . Συνεπώς πρέπει να προσδιορίσουμε τα  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Έχουμε  $z_1 = (0,0)$ ,  $z_2 = (1,0)$ ,  $z_3 = (0,1)$  και  $\varphi_j(x, y) = ax + by + c$ .

Όμως  $N_i(\varphi_j) = \varphi_j(z_i) = \delta_{ij}$ . Επομένως  $N_1(\varphi_1) = \varphi_1(z_1) = 1$ ,  $N_2(\varphi_1) = \varphi_1(z_2) = 0$ ,  $N_3(\varphi_1) = \varphi_1(z_3) = 0$ , δηλαδή  $c = 1$ ,  $a + c = 0$ ,  $b + c = 0$ .

Τότε  $a = b = -1$  και  $c = 1$ . Άρα  $\varphi_1(x, y) = -x - y + 1$ .

$N_1(\varphi_2) = \varphi_2(z_1) = 0$ ,  $N_2(\varphi_2) = \varphi_2(z_2) = 1$ ,  $N_3(\varphi_2) = \varphi_2(z_3) = 0$ , δηλαδή  $c = 0$ ,  $a + c = 1$ ,  $b + c = 0$ .

Τότε  $a = 1$ ,  $b = c = 0$ . Άρα  $\varphi_2(x, y) = x$ .

$N_1(\varphi_3) = \varphi_3(z_1) = 0$ ,  $N_2(\varphi_3) = \varphi_3(z_2) = 0$ ,  $N_3(\varphi_3) = \varphi_3(z_3) = 1$ , δηλαδή  $c = 0$ ,  $a + c = 0$ ,  $b + c = 1$ .

Τότε  $a = c = 0$ ,  $b = 1$ . Άρα  $\varphi_3(x, y) = y$ .

Επίσης  $N_1(f) = N_2(f) = N_3(f) = 1$ .



Επομένως  $I_K f = N_1(f)(1-x-y) + N_2(f)x + N_3(f)y = 1-x-y+x+y = 1$ .  $\square$

Παρακάτω, αναφέρουμε μερικές ιδιότητες του interpolant.

**(3.3.4) Πρόταση.** Το interpolant  $I_K$  είναι γραμμικό.

**(3.3.5) Πρόταση.**  $N_i(I_K(f)) = N_i(f) \quad \forall 1 \leq i \leq d$ .

Παρατήρηση 1: Η πρόταση (3.3.5) δηλώνει ότι το  $I_K(f)$  είναι η μοναδική συνάρτηση σχήματος η οποία έχει τις ίδιες nodal τιμές όπως η  $f$ .

**(3.3.6) Πρόταση.**  $I_K(f) = f$  για  $f \in \mathbf{P}$ . Επιπρόσθετα το  $I_K$  είναι αυτοδύναμο, δηλαδή  $I_K^2 = I_K$ .

Τώρα θα ενώσουμε τα στοιχεία.

**(3.3.7) Ορισμός.** Μία υποδιαίρεση ενός χωρίου  $\Omega$  είναι μία πεπερασμένη συλλογή ανοικτών συνόλων  $\{K_i\}$  έτσι ώστε:

(i)  $K_i \cap K_j = \emptyset$  αν  $i \neq j$  και

(ii)  $\bigcup \bar{K}_i = \bar{\Omega}$ .

**(3.3.8) Ορισμός.** Έστω  $\Omega$  είναι ένα χωρίο με μία υποδιαίρεση  $T$ . Υποθέτουμε ότι το κάθε χωρίο του στοιχείου,  $K$ , στην υποδιαίρεση είναι εφοδιασμένο με κάποιο είδος συναρτήσεων σχήματος,  $\mathbf{P}$ , και nodal μεταβλητών,  $\mathbf{N}$ , έτσι ώστε το  $(K, \mathbf{P}, \mathbf{N})$  να ορίζει ένα πεπερασμένο στοιχείο. Έστω  $m$  είναι η μεγαλύτερη τάξη των μερικών παραγώγων που εμπλέκονται στις nodal μεταβλητές. Για  $f \in C^m(\bar{\Omega})$ , το ολικό interpolant ( global interpolant ) ορίζεται ως

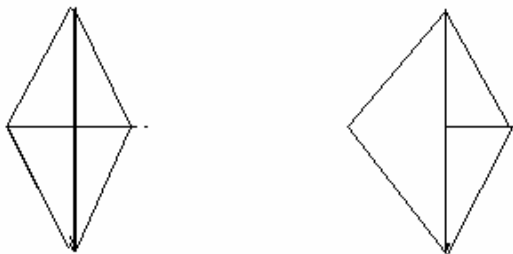
$$(3.3.9) \quad I_T f|_{K_i} = I_{K_i} f \quad \text{για όλα τα } K_i \in T.$$

Δε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το ολικό interpolant ικανοποιεί τις ιδιότητες της συνέχειας, εφ' όσον δεν έχουμε περισσότερες υποθέσεις πάνω στην υποδιαίρεση. Κατόπιν, θα περιγράψουμε κάποιες συνθήκες οι οποίες αποφέρουν συνέχεια. Θα περιοριστούμε με λεπτομέρεια μόνο στη δισδιάστατη περίπτωση των τριγωνικών στοιχείων, ανάλογοι ορισμοί και αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν για μεγαλύτερες διαστάσεις και διαφορετικές υποδιαίρεσεις.

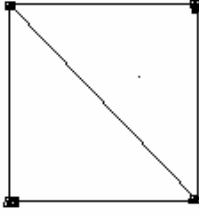
**(3.3.10) Ορισμός.** Μία τριγωνοποίηση ενός πολυγωνικού χωρίου  $\Omega$  είναι μία υποδιαίρεση η οποία αποτελείται από τρίγωνα, ικανοποιεί τον ορισμό (3.3.7), έχοντας την ιδιότητα ότι:

καμία κορυφή ενός οποιουδήποτε τριγώνου δεν είναι εσωτερικό σημείο μίας πλευράς ενός άλλου τριγώνου.

Για την καλύτερη κατανόηση του ορισμού (3.3.10), δίνουμε τις δύο παρακάτω εικόνες. Η αριστερή εικόνα είναι τριγωνοποίηση ενός χωρίου, ενώ η δεξιά δεν είναι τριγωνοποίηση.



**(3.3.11) Παράδειγμα.** Έστω ότι  $\Omega$  είναι το τετράγωνο του παρακάτω σχήματος. Η τριγωνοποίηση  $\mathbf{T}$  αποτελείται από δύο τρίγωνα, το  $T_1$  και το  $T_2$ .



Το πεπερασμένο στοιχείο σε κάθε τρίγωνο είναι το στοιχείο Lagrange του παραδείγματος (3.2.1).

Επομένως  $\mathbf{T} = \{ T_1, T_2 \}$  η τριγωνοποίηση του πολυγωνικού χωρίου  $\Omega$  και

$\bar{\Omega} = [0,1] \times [0,1]$ ,  $z_1 = (0,0)$ ,  $z_2 = (1,0)$ ,  $z_3 = (0,1)$ ,  $z_4 = (1,1)$

και  $\varphi_j(x, y) = ax + by + c$ .

Έχουμε δύο πεπερασμένα στοιχεία  $(T_1, \mathbf{P}, \mathbf{N}_1)$  και  $(T_2, \mathbf{P}, \mathbf{N}_2)$  όπου  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$  με

$\dim \mathbf{P}_1 = \dim \mathbf{N}_1 = \dim \mathbf{N}_2 = 3$ . Σαφέστερα  $\mathbf{N}_1 = \{ N_1, N_2, N_3 \}$  και

$\mathbf{N}_2 = \{ N_2, N_3, N_4 \}$ .

Για  $f \in C^0(\bar{\Omega})$  έχουμε  $I_T f|_{T_i} = I_{T_i} f$  για όλα τα  $T_i \in \mathbf{T}$ , με  $f = \sin(\pi(x+y)/2)$ .

Για το πεπερασμένο στοιχείο  $(T_1, \mathbf{P}_1, \mathbf{N}_1)$  έχουμε  $\{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \}$  βάση του  $\mathbf{P}_1$  δυϊκή

προς το  $\mathbf{N}_1$ , δηλαδή  $N_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$  με  $N_i(\varphi_j) = \varphi_j(z_i)$  με  $i, j = 1, 2, 3$ .

Συνεπώς  $N_i(\varphi_j) = \varphi_j(z_i) = \delta_{ij}$  με  $i, j = 1, 2, 3$ .

Αυτό επειδή έχουμε γραμμικό Lagrange τρίγωνο.

Από τη σχέση  $\varphi_j(z_i) = \delta_{ij}$  με  $i, j = 1, 2, 3$  θα προκύψει ότι  $\varphi_1(z_1) = 1$ ,  $\varphi_1(z_2) = 0$ ,

$\varphi_1(z_3) = 0$ , δηλαδή  $c = 1$ ,  $a + c = 0$ ,  $b + c = 0$ .

Τότε  $a = b = -1$  και  $c = 1$ . Άρα  $\varphi_1(x, y) = -x - y + 1$ .

Επίσης,  $\varphi_2(z_1) = 0$ ,  $\varphi_2(z_2) = 1$ ,  $\varphi_2(z_3) = 0$ , δηλαδή  $c = 0$ ,  $a + c = 1$ ,  $b + c = 0$ . Τότε  $a = 1$ ,  $b = c = 0$ . Άρα  $\varphi_2(x, y) = x$ .

Επίσης,  $\varphi_3(z_1) = 0$ ,  $\varphi_3(z_2) = 0$ ,  $\varphi_3(z_3) = 1$ , δηλαδή  $c = 0$ ,  $a + c = 0$ ,  $b + c = 1$ . Τότε  $a = c = 0$ ,  $b = 1$ . Άρα  $\varphi_3(x, y) = y$ .

Έτσι  $\{ \varphi_1(x, y) = -x - y + 1, \varphi_2(x, y) = x, \varphi_3(x, y) = y \}$ .

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } I_T f|_{T_1} &= I_{T_1} f \text{ με } I_{T_1} f = \sum_{i=1}^3 N_i(f) \phi_i = N_1(f) \varphi_1 + N_2(f) \varphi_2 + N_3(f) \varphi_3 = \\ &= f(z_1) \varphi_1 + f(z_2) \varphi_2 + f(z_3) \varphi_3 = 0 \cdot \varphi_1 + 1 \cdot \varphi_2 + 1 \cdot \varphi_3 = x + y. \end{aligned}$$

Συνεπώς  $I_T f|_{T_1} = x + y$ .

Τώρα για το πεπερασμένο στοιχείο  $(T_2, P_1, N_2)$  έχουμε  $\{ \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \}$  βάση του  $P_1$  δυϊκή προς το  $N_2$ , δηλαδή  $N_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$  με  $N_i(\varphi_j) = \varphi_j(z_i)$  με  $i, j = 2, 3, 4$ .

Συνεπώς  $N_i(\varphi_j) = \varphi_j(z_i) = \delta_{ij}$  με  $i, j = 2, 3, 4$ .

Αυτό επειδή έχουμε γραμμικό Lagrange τρίγωνο.

Από τη σχέση  $\varphi_j(z_i) = \delta_{ij}$  με  $i, j = 2, 3, 4$  θα προκύψει ότι  $\varphi_2(z_2) = 1$ ,  $\varphi_2(z_3) = 0$ ,  $\varphi_2(z_4) = 0$ , δηλαδή  $a + c = 1$ ,  $b + c = 0$ ,  $a + b + c = 0$ . Τότε  $a = 0$ ,  $b = -1$  και  $c = 1$ . Άρα  $\varphi_2(x, y) = -y + 1$ .

Επίσης,  $\varphi_3(z_2) = 0$ ,  $\varphi_3(z_3) = 1$ ,  $\varphi_3(z_4) = 0$ , δηλαδή  $a + c = 0$ ,  $b + c = 1$ ,  $a + b + c = 0$ . Τότε  $a = -1$ ,  $b = 0$  και  $c = 1$ . Άρα  $\varphi_3(x, y) = -x + 1$ .

Επίσης,  $\varphi_4(z_2) = 0$ ,  $\varphi_4(z_3) = 0$ ,  $\varphi_4(z_4) = 1$ , δηλαδή  $a + c = 0$ ,  $b + c = 0$ ,  $a + b + c = 1$ . Τότε  $a = 1$ ,  $b = 1$  και  $c = -1$ . Άρα  $\varphi_4(x, y) = x + y - 1$ .

Έτσι  $\{ \varphi_2(x, y) = -y + 1, \varphi_3(x, y) = -x + 1, \varphi_4(x, y) = x + y - 1 \}$ .

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } I_T f|_{T_2} &= I_{T_2} f \text{ με } I_{T_2} f = \sum_{i=2}^4 N_i(f) \phi_i = N_2(f) \varphi_2 + N_3(f) \varphi_3 + N_4(f) \varphi_4 = \\ &= f(z_2) \varphi_2 + f(z_3) \varphi_3 + f(z_4) \varphi_4 = 1 \cdot \varphi_2 + 1 \cdot \varphi_3 + 0 \cdot \varphi_4 = 2 - x - y. \end{aligned}$$

Συνεπώς  $I_T f|_{T_2} = 2 - x - y$ . □

**Παρατήρηση 2:** Για να προσδιορίσουμε ένα πρόβλημα Dirichlet με μηδενικές συνοριακές συνθήκες, χρησιμοποιούμε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης που αποτελείται από κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες που δίνονται από τη σχέση:

$$V_T = \{ I_T f : f \in C^m(\bar{\Omega}), f|_{\partial\Omega} = 0 \} \text{ πάνω σε κάθε}$$

τριγωνοποίηση  $T$ .

**Σχόλιο:** Ο  $V_T$  είναι υπόχωρος Sobolev και ο  $P$  είναι πεπερασμένης διάστασης. Συνεπώς και ο  $V_T$  είναι πεπερασμένης διάστασης με  $V_T \leq P \Rightarrow \dim V_T \leq \dim P$ .

**(3.3.12) Ορισμός.** Ένα interpolant έχει ( continuity order ) τάξη συνέχειας  $r$  ( εν συντομία  $C^r$  ) αν  $I_T f \in C^r$  για όλα τα  $f \in C^m(\bar{\Omega})$ .

Ο χώρος  $V_T = \{ I_T f : f \in C^m \}$  λέγεται “  $C^r$  ” χώρος πεπερασμένου στοιχείου.

**Παρατήρηση 3:** Ένα πεπερασμένο στοιχείο ( ή συλλογή πεπερασμένων στοιχείων ) το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να οριστεί ένας χώρος  $C^r$  όπως παραπάνω λέγεται «  $C^r$  στοιχείο ». Ωστόσο, όλες οι επιλογές των nodes δε θα οδηγούν σε συνέχεια  $C^r$ . Για τα στοιχεία που έχουν μελετηθεί μέχρι τώρα, το ουσιώδες είναι ότι τοποθετούνται κατά ελεύθερο τρόπο σε ένα σύστημα συντεταγμένων ο οποίος είναι συμμετρικός ως προς το μέσο της πλευράς.

**(3.3.13) Πρόταση.** Τα στοιχεία Lagrange και Hermite είναι και τα δύο  $C^0$  στοιχεία, ενώ το στοιχείο Argyris είναι  $C^1$  στοιχείο. Σαφέστερα, δοθέντος μίας τριγωνοποίησης  $T$  του  $\Omega$ , είναι δυνατόν να επιλέξουμε nodes για τις πλευρές για τα αντίστοιχα στοιχεία  $(K, P, N)$ ,  $K \in T$ , έτσι ώστε το ολικό interpolant να ικανοποιεί τα παρακάτω:

$I_T f \in C^r$  (  $r = 0$  για το Lagrange και το Hermite και  $r = 1$  για το Argyris ) για  $f \in C^m$  ( $m = 0$  για το Lagrange,  $m = 1$  για το Hermite,  $m = 2$  για το Argyris ).

Ιδιαίτερα, είναι επαρκές για κάθε πλευρά  $\bar{x}\bar{x}'$  να έχουμε nodes  $\xi_i(\bar{x}' - \bar{x}) + \bar{x}$ , όπου

$\{ \xi_i : i = 1, \dots, k-1-2m \}$  είναι σταθερό και συμμετρικό γύρω από το  $\xi = \frac{1}{2}$ .

Επιπλέον, κάτω από αυτές τις υποθέσεις,  $I_T f \in W_\infty^{r+1}$ .

**Παρατήρηση 4:** Στα στοιχεία Lagrange δεν εμφανίζονται παράγωγοι της  $f$ , όμως οι συναρτήσεις βάσης είναι συνεχείς αφού είναι πολυώνυμα..

Στα στοιχεία Hermite εμφανίζονται πρώτες μερικές παράγωγοι ως προς  $x$  και  $y$ , αλλά δεν γνωρίζουμε αν αυτές οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς.

Έτσι, εξ' ορισμού το interpolant θα είναι συνεχές ως άθροισμα συνεχών

συναρτήσεων, δηλαδή  $I_T f \in C^0$  για τα στοιχεία Lagrange και Hermite.

Αντιθέτως, στα στοιχεία Argyris εμφανίζονται δεύτερες μερικές παράγωγοι ως προς  $x$  και  $y$ , αλλά δεν γνωρίζουμε αν αυτές οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς. Άρα, οι πρώτες μερικές παράγωγοι ως προς  $x$  και  $y$  θα είναι συνεχείς, δηλαδή  $I_T f \in C^1$ .

### 3.4 ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο, θεωρούμε πεπερασμένα στοιχεία τα οποία ορίζονται πάνω σε ορθογώνια.

Εστω  $\mathcal{Q}_k = \{ \sum_j c_j p_j(x) q_j(y) : p_j, q_j \text{ πολυώνυμα βαθμού } \leq k \}$ .

Σημειώνουμε ότι  $\dim \mathcal{Q}_k = (\dim \mathcal{P}_k^1)^2$ , όπου  $\mathcal{P}_k^1$  δείχνει το χώρο των πολυώνυμων μίας μεταβλητής βαθμού μικρότερου ή ίσου με  $k$ .

### Πεπερασμένα στοιχεία τανυστικού γινομένου

**(3.4.1) Παράδειγμα.** ( $k = 1$ ) Έστω  $K$  είναι ένα οποιοδήποτε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,  $\mathbf{P} = \mathcal{Q}_1$  και  $\mathbf{N} = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Αφού  $\mathbf{P} = \mathcal{Q}_1$  και  $\mathbf{N} = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$  έχουμε ότι  $\dim \mathcal{Q}_1 = (\dim \mathbf{P}_1^1)^2 = 2^2 = 4$  με  $\text{span } \mathcal{Q}_1 = \{1, x, y, xy\}$

Επίσης, έχουμε:  $N_i(v) = v(z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$   
και  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$ ,  $z_3 = (x_3, y_3)$ ,  $z_4 = (x_4, y_4)$  είναι τα σημεία που φαίνονται στο παρακάτω ορθογώνιο.



Θα αποδείξουμε τη συνθήκη (iii) του ορισμού 3.1.1 χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (β) του Λήμματος 3.1.3, δηλαδή θα αποδείξουμε ότι το  $\mathbf{N}$  ορίζει το  $\mathbf{P}$ . Έστω  $L_1, L_2$  είναι μη τετριμμένες γραμμικές συναρτήσεις οι οποίες ορίζουν τις ευθείες γραμμές πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του ορθογώνιου. Ένα πολώνυμο  $P$  στο  $\mathbf{P}$  είναι της μορφής

$P(x,y) = ax + by + \gamma xy + \delta$ . Η μορφή για την  $L_1$  είναι:  $y = c$ . Ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_1$  είναι μία πρωτοβάθμια συνάρτηση (πολυώνυμο 1<sup>ου</sup> βαθμού) μίας μεταβλητής.

Υποθέτουμε ότι ένα πολυώνυμο  $P \in \mathbf{P}$  μηδενίζεται στα  $z_1, z_2, z_3, z_4$  δηλαδή θεωρούμε το  $v = P$  έτσι ώστε

$$N_i(P) = P(z_i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4.$$

Η  $L_1$  ευθεία επαληθεύεται από τα  $z_1, z_2$ . Έτσι, επειδή ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_1$  είναι μία πρωτοβάθμια συνάρτηση (πολυώνυμο 1<sup>ου</sup> βαθμού) μίας μεταβλητής, έχουμε:

$$P(x,y)|_{L_1} = ax + \beta c + \gamma xc + \delta = (a + \gamma c)x + (\beta c + \delta) \text{ με } P|_{L_1}(z_1) = P|_{L_1}(z_2) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι τα  $z_1, z_2$  είναι ρίζες του  $P$ , διότι  $P(z_1) = 0$  και  $P(z_2) = 0$ . Όμως το μοναδικό πολυώνυμο 1<sup>ου</sup> βαθμού μίας μεταβλητής με δύο ρίζες είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Συνεπώς,  $P|_{L_1} = 0$ , δηλαδή  $P = 0$  στην  $L_1$ .

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1.5, το  $P$  μπορεί να γραφεί ως  $P = L_1 Q_1$  όπου  $\deg P = 2$  και  $\deg L_1 = \deg Q_1 = 1$ .

Ομοίως, η  $L_2$  ευθεία  $x = m$  ( με  $m$  σταθερά ) επαληθεύεται από τα  $z_2, z_4$ . Έτσι, επειδή ο περιορισμός του πολυωνύμου  $P$  στην ευθεία  $L_2$  είναι μία πρωτοβάθμια συνάρτηση (πολυώνυμο 1<sup>ου</sup> βαθμού) μίας μεταβλητής, έχουμε:

$$P(x,y)|_{L_2} = am + \beta y + \gamma my + \delta = (\beta + \gamma m)y + (am + \delta) \text{ με } P|_{L_2}(z_2) = P|_{L_2}(z_4) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι τα  $z_2, z_4$  είναι ρίζες του  $P$ , διότι  $P(z_2) = 0$  και  $P(z_4) = 0$ . Όμως το μοναδικό πολυώνυμο 1<sup>ου</sup> βαθμού μίας μεταβλητής με δύο ρίζες είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Συνεπώς,  $P|_{L_2} = 0$ , δηλαδή  $P = 0$  στην  $L_2$ .

Επομένως,  $P|_{L_2} = L_1 Q_1|_{L_2} = 0$ . Συνεπώς στην  $L_2$  είτε  $L_1 = 0$  είτε  $Q_1 = 0$ .

**Σχόλιο:** Δηλαδή  $L_1|_{L_2} = 0$  ή  $Q_1|_{L_2} = 0$ .

Όμως, η  $L_1$  μπορεί να είναι ίση με μηδέν μόνο σε ένα σημείο της  $L_2$ , το οποίο είναι το σημείο  $z_2$  (διότι  $L_1(z_2) = L_2(z_2) = 0$ ), επειδή έχουμε μη εκφυλισμένο ορθογώνιο. Συνεπώς  $Q_1 = 0$  στην  $L_2$ , εκτός ίσως από ένα σημείο το  $z_2$ .

Λόγω της συνέχειας του  $Q_1$ , έχουμε  $Q_1 \equiv 0$  στην  $L_2$ .

**Σχόλιο:** Το  $Q_1$  είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, άρα είναι συνεχές.

Από το Λήμμα 3.1.5, μπορούμε να γράψουμε  $Q_1 = L_2 Q_2$  όπου  $\deg L_2 = 1$  και  $\deg Q_2 = 0$ . Άρα  $Q_2 = h$ , όπου  $h$  είναι μία σταθερά. Έτσι  $Q_1 = L_2 h$ .

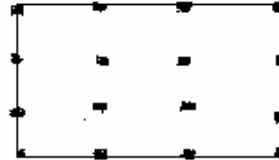
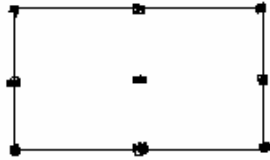
Επομένως  $P = L_1 Q_1 = h L_1 L_2$ , μα  $P(z_3) = 0$  και το  $z_3$  δε βρίσκεται ούτε στην ευθεία  $L_1$  ούτε στην ευθεία  $L_2$ .

Συνεπώς,  $0 = P(z_3) = h L_1(z_3) L_2(z_3) \Rightarrow h = 0$ , αφού  $L_1(z_3) \neq 0, L_2(z_3) \neq 0$ .

Έτσι,  $P \equiv 0$  και το  $N$  ορίζει το  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_1$ , δηλαδή  $\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$  βάση του  $\mathbf{P}$ . Άρα το  $(K, \mathbf{Q}_1, N)$  είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο.  $\square$

**(3.4.2) Παράδειγμα.** (αυθαίρετο  $k$ ) Έστω  $K$  είναι ένα οποιοδήποτε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_k$  και το  $N$  δείχνει αποτίμηση σημείων στα  $\{(t_i, t_j) : i, j = 0, 1, \dots, k\}$  όπου  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1\}$ . Τότε το  $(K, \mathbf{P}, N)$  είναι ένα πεπερασμένο στοιχείο.  $\square$

Παρατήρηση 1: Παρακάτω, βλέπουμε το πεπερασμένο στοιχείο διτετραγωνικό (biquadratic) Lagrange ορθογώνιο που αντιστοιχεί στο  $k = 2$  και το πεπερασμένο στοιχείο δικυβικό (bicubic) Lagrange ορθογώνιο που αντιστοιχεί στο  $k = 3$ .



Παρατήρηση 2: Η έννοια ενός  $C^r$  ορθογώνιου στοιχείου μπορεί να οριστεί παρόμοια όπως στον ορισμό (3.3.12). Επίσης, σύμφωνα με την πρόταση (3.3.13), διαπιστώνουμε ότι όλα τα ορθογώνια στοιχεία που ορίστηκαν σε αυτήν την παράγραφο είναι  $C^0$  στοιχεία.



### 3.5 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΥΨΗΛΟΤΕΡΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

Τα πεπερασμένα στοιχεία υψηλότερων διαστάσεων μπορούν να κατασκευαστούν επαγωγικά, με τον ίδιο τρόπο που κατασκευάσαμε τα πεπερασμένα στοιχεία δύο διαστάσεων χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πεπερασμένων στοιχείων μίας διάστασης ως δομικές μονάδες. Για μεγαλύτερη σαφήνεια, θα περιγράψουμε το τετραεδρικό στοιχείο στις τρεις διαστάσεις. Τα στοιχεία Lagrange μπορούν να οριστούν όπως πριν, επαγωγικά στο βαθμό  $k$ , όπως ακολουθεί. (Δηλαδή στο τετραεδρικό στοιχείο, θα εφαρμόσουμε στοιχεία Lagrange στην κάθε έδρα οι οποίες είναι τέσσερις. Η κάθε έδρα θα αντιστοιχεί σε τριγωνικό στοιχείο Lagrange δύο διαστάσεων).

Παίρνουμε nodal μεταβλητές στις κορυφές (οι οποίες είναι τέσσερις), στα  $k-1$  σημεία στο εσωτερικό της κάθε πλευράς (υπάρχουν έξι πλευρές) και στα  $\frac{1}{2}(k-2)(k-1)$  σημεία στο εσωτερικό της κάθε έδρας (υπάρχουν τέσσερις έδρες). Τα σημεία στο εσωτερικό της κάθε έδρας, τα οποία υπάρχουν μόνο όταν  $k \geq 3$ , θα είναι καλύτερο να επιλέγονται έτσι ώστε να ορίζουν πολυώνυμα δύο μεταβλητών (στο επίπεδο της έδρας) βαθμού  $k-3$ . Για  $k \geq 4$ , παίρνουμε, επίσης, σημεία στο εσωτερικό του τετραέδρου έτσι ώστε να ορίζουν πολυώνυμα τριών μεταβλητών βαθμού  $k-4$ . Η ύπαρξη του τελευταίου δείχνεται με επαγωγή στο  $k$ , όπως στην περίπτωση των δύο διαστάσεων.

Υποθέτουμε ότι αυτές οι nodal τιμές μηδενίζονται για  $v \in \mathbf{P}_k$ . Ο περιορισμός του  $v$  σε κάθε έδρα,  $F_i$ , του τετραέδρου είναι ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών (οι συντεταγμένες για το επίπεδο  $F_i$ ) και οι nodal μεταβλητές έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να ορίζουν αυτό τον περιορισμό. Έτσι,  $v|_{F_i} = 0$ . Εφαρμόζοντας το Λήμμα (3.1.5) τέσσερις φορές έχουμε:

$$v = L_1 L_2 L_3 L_4 R$$

(τα  $F_i$  με  $i = 1, 2, 3, 4$  είναι επίπεδα της μορφή  $z = u(x, y)$ , συνεπώς είναι πολυώνυμα 1<sup>ου</sup> βαθμού ως προς  $x$  και  $y$ . Η  $v$  είναι πολυώνυμο βαθμού  $k$ , τριών μεταβλητών), όπου το  $R$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $k-4$ . Για  $k \leq 3$ , αυτό σημαίνει ότι  $R = 0$ , άρα  $v = 0$ . Στην γενική περίπτωση, χρησιμοποιούμε εσωτερικά nodes για να δείξουμε ότι  $R = 0$  (έστω  $z_j$  εσωτερικό σημείο, επειδή  $v(z_j) = 0$  και  $F_i(z_j) \neq 0$  με  $i = 1, 2, 3, 4$  τότε έχουμε ότι  $R = 0$ ). Απομένει να μετρήσουμε τον αριθμό των nodes και να ελέγξουμε ότι είναι ίσος με τη  $\dim \mathbf{P}_k$ .

Ο αριθμός των nodes είναι

$$(3.5.1) \quad C(k) := 4 + 6(k-1) + 4 \frac{1}{2}(k-2)(k-1) + \dim \mathbf{P}_{k-4}.$$

Η διάσταση του  $\mathbf{P}_k$  υπολογίζεται με τον εξής τρόπο. Μπορούμε να αναλύσουμε ένα αυθαίρετο πολυώνυμο,  $P$ , βαθμού  $k$ , τριών μεταβλητών μοναδικά ως

$$(3.5.2) \quad P(x, y, z) = p(x, y) + zq(x, y, z)$$

όπου ο βαθμός του  $p$  είναι  $k$  και ο βαθμός του  $q$  είναι  $k-1$ . Απλώς, έστω  $p(x, y) := P(x, y, 0)$  και εφαρμόζουμε το λήμμα (3.1.5) στο  $P-p$  με  $L(x, y, z) = z$ . Επομένως

$$(3.5.3) \quad \dim \mathbf{P}_k = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) + \dim \mathbf{P}_{k-1} = \sum_{j=0}^k \frac{1}{2}(j+1)(j+2)$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την πρώτη με επαγωγή. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται μερικές από τις διαστάσεις του  $\mathbf{P}_k$  οι οποίες συμφωνούν με τη σχέση (3.5.1).

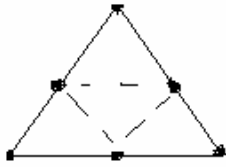
$k$	$\dim \mathbf{P}_k$
1	4
2	10
3	20
4	35

Παρατήρηση 1: Κάποιος πρέπει να επιλέγει τα nodes σημεία της κάθε έδρας κατά ελεύθερο και συμμετρικό τρόπο σε ένα σύστημα συντεταγμένων.

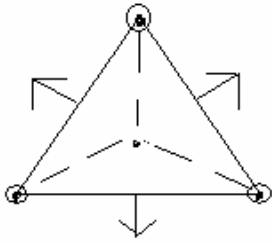
Παρατήρηση 2: Η έννοια ενός  $C^r$  τετραεδρικού στοιχείου μπορεί να οριστεί παρόμοια όπως στον ορισμό (3.3.12). Επίσης, σύμφωνα με την πρόταση (3.3.13), διαπιστώνουμε ότι όλα τα τετραεδρικά στοιχεία που ορίστηκαν σε αυτήν την παράγραφο είναι  $C^0$  στοιχεία.

### 3.6 ΕΞΩΤΙΚΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Αξίζει να αναφέρουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένα στοιχεία τα οποία λέγονται εξωτικά (exotic elements). Αυτά ανήκουν στην οικογένεια των μακρό-πεπερασμένων στοιχείων (macro-finite elements), για τα οποία οι συναρτήσεις σχήματος (shape functions),  $\mathbf{P}$ , είναι κατά τμήματα πολυώνυμα. Τέτοια στοιχεία είναι το μακρό-κατά τμήματα-γραμμικό τρίγωνο (macro-piecewise-linear triangle), (το οποίο διαιρείται σε τέσσερα υποτρίγωνα όπως φαίνεται στο σχήμα, με  $\mathbf{P}$  το σύνολο των συνεχών κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων πάνω σε αυτήν την τριγωνοποίηση, το  $N$  περιέχει τις αποτιμήσεις των σημείων στις κορυφές καθώς και στα μέσα των πλευρών)



το οποίο είναι  $C^0$  πεπερασμένο στοιχείο και το στοιχείο των Clough και Tocher (Ciarlet 1978), το μακρό-κατά τμήματα-κυβικό τρίγωνο (macro-piecewise-cubic triangle), ( το οποίο διαιρείται σε τρία υποτρίγωνα όπως φαίνεται στο σχήμα, με  $P$  το σύνολο των  $C^1$  κατά τμήματα κυβικών συναρτήσεων πάνω σε αυτήν την τριγωνοποίηση, το  $N$  περιέχει τις αποτιμήσεις των σημείων στις κορυφές καθώς και των παραγώγων αυτών και των παραγώγων κατά κατεύθυνση στα μέσα των πλευρών)



το οποίο είναι  $C^1$  πεπερασμένο στοιχείο.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### $n$ - ΔΙΑΣΤΑΤΑ ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΑ (ΑΣΘΕΝΗ) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο, δίνουμε κάποια παραδείγματα μεταβολικών προβλημάτων υψηλότερης διάστασης τα οποία χρησιμοποιούν τη θεωρία που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια. Κυρίως, αυτή των χώρων Sobolev που αναπτύχθηκε στο πρώτο κεφάλαιο. Επίσης, υποθέτουμε ότι το χωρίο  $\Omega$  είναι φραγμένο.

#### 4.1 ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ (ΑΣΘΕΝΗΣ) ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ POISSON

Αρχικά, θεωρούμε την εξίσωση Poisson

$$(4.1.1) \quad -\Delta u = f \quad \text{στο } \Omega$$

όπου το  $\Delta$  ορίζει τον τελεστή Laplace

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} .$$

Θεωρούμε συνοριακές συνθήκες δύο ειδών, αυξάνοντας την εξίσωση:

$$(4.1.2) \quad u = 0 \quad \text{πάνω στο } \Gamma \subset \partial\Omega \quad (\text{Dirichlet})$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{πάνω στο } \partial\Omega \setminus \Gamma \quad (\text{Neumann})$$

όπου το  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  ορίζει την παράγωγο κατά κατεύθυνση του  $u$  στο σύνορο  $\partial\Omega$ .

Υποθέτουμε ότι το σύνορο  $\partial\Omega$  είναι Lipschitz συνεχές. Ορίζουμε ως  $\nu$  το κάθετο, μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο  $\partial\Omega$  με φορά προς τα έξω το οποίο από την υπόθεση βρίσκεται στο χώρο  $L^\infty(\partial\Omega)^n$  με

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla u .$$

Ξεκινώντας, υποθέτουμε ότι το  $\Gamma$  είναι κλειστό και έχει μη μηδενικό μέτρο.

Για να διατυπώσουμε το μεταβολικό (ασθενές) ισοδύναμο του ((4.1.1), (4.1.2)), ορίζουμε τον παρακάτω μεταβολικό (ασθενή) χώρο που περιέχει τη συνθήκη Dirichlet η οποία είναι μέρος της (4.1.2)

$$(4.1.3) \quad V := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma} = 0\},$$

όπου σημειώνουμε ότι το  $v|_{\Gamma} = 0$  μπορεί να κατανοηθεί, χρησιμοποιώντας το θεώρημα ίχνους στο  $L^2(\partial\Omega)$ . Η ποσότητα  $v|_{\Gamma} = 0$  μπορεί να γραφεί ως  $v|_{\Gamma} = v\chi_{\Gamma} = 0$  όπου  $\chi$  είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση. Η κατάλληλη διγραμμική μορφή για το μεταβολικό πρόβλημα υπολογίζεται, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση Poisson με κατάλληλη ομαλή συνάρτηση, ολοκληρώνοντας στο  $\Omega$  και κατόπιν με ολοκλήρωση κατά μέρη.

**Σχόλιο:** Παρόμοια διαδικασία με τα μονοδιάστατα προβλήματα.

Εφαρμόζουμε κάποια υπολογιστικά θεωρήματα των χώρων Sobolev, για να προετοιμάσουμε το τελευταίο βήμα. Επίσης, υποθέτουμε ότι το  $\Omega$  είναι ένα χωρίο Lipschitz και το  $\nu$  είναι το κάθετο, μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο  $\partial\Omega$  με φορά προς τα έξω. Επιπλέον, για ένα οποιοδήποτε γραμμικό χώρο  $B$ , ορίζουμε ως  $B^n$  το γραμμικό χώρο των  $n$ -tuple των μελών του  $B$  (αν ο  $B$  είναι χώρος με νόρμα, τότε εφοδιάζουμε το  $B^n$  με νόρμα που ορίζεται ως ένας κατάλληλος συνδυασμός των νορμών πάνω σε κάθε στοιχείο ξεχωριστά).

**(4.1.4) Πρόταση.** Έστω  $\vec{u} \in W_1^1(\Omega)^n$ . Τότε

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{u} dx = \int_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \nu.$$

**(4.1.5) Πρόταση.** Έστω  $v, w \in H^1(\Omega)$ . Τότε, για  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) w dx = - \int_{\Omega} v \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx + \int_{\partial\Omega} v w \nu_i.$$

**(4.1.6) Πρόταση.** Έστω  $u \in H^2(\Omega)$  και  $v \in H^1(\Omega)$ . Τότε

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v.$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία πρόταση, αν  $u \in H^2(\Omega)$  ικανοποιεί την εξίσωση Poisson (4.1.1) με τις συνοριακές συνθήκες (4.1.2) και  $v \in V$ , τότε

$$(f, v) = \int_{\Omega} (-\Delta u)v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx := \alpha(u, v).$$

$$\text{Με } \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v,$$

Δηλαδή ο συνοριακός όρος μηδενίζεται για  $v \in V$  επειδή είτε  $v$  ή  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  είναι ίσο με μηδέν πάνω σε οποιοδήποτε μέρος του συνόρου.

**(4.1.7) Πρόταση.** Έστω  $u \in H^2(\Omega)$  λύνει την εξίσωση Poisson (4.1.1) (αυτό σημαίνει ότι  $f \in L^2(\Omega)$ ) με τις συνοριακές συνθήκες (4.1.2). Τότε το  $u$  μπορεί να χαρακτηριστεί από τα παρακάτω

$$(4.1.8) \quad u \in V \text{ ικανοποιεί } \alpha(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V.$$

**Σχόλιο:** Είναι το μεταβολικό ή ασθενές πρόβλημα.

**(4.1.9) Πρόταση.** Έστω  $f \in L^2(\Omega)$  και υποθέτουμε ότι το  $u \in H^2(\Omega)$  λύνει τη μεταβολική (ασθενή) εξίσωση (4.1.8). Τότε το  $u$  λύνει την εξίσωση Poisson (4.1.1) με τις συνοριακές συνθήκες (4.1.2).

## 4.2 ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ (ΑΣΘΕΝΗΣ) ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ NEUMANN

Στην προηγούμενη παράγραφο, αναφέραμε τη μεταβολική (ασθενή) διατύπωση για την εξίσωση Poisson σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες. Η κατάσταση για την περίπτωση της καθαρά συνοριακής συνθήκης Neumann

$$(4.2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ πάνω στο } \partial\Omega$$

(δηλαδή έχουμε  $\Gamma = \emptyset$ ) είναι λίγο διαφορετική. Ιδιαίτερα, οι μοναδικές λύσεις εξαρτώμενες από μία σταθερά μπορούν να υπάρχουν μόνο όταν το δεξί μέλος,  $f$ , της (4.1.1) ικανοποιεί το παρακάτω

$$(4.2.2) \quad \int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} -\Delta u(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla 1 dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

χρησιμοποιώντας την πρόταση (4.1.6). Ένας κατάλληλος μεταβολικός χώρος για την παρούσα περίπτωση είναι ο

$$(4.2.3) \quad V = \{v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v(x) dx = 0\}.$$

Για οποιαδήποτε ολοκληρώσιμη συνάρτηση  $g$ , ορίζουμε τη μέση τιμή,  $\bar{g}$ , της  $g$  ακολούθως

$$(4.2.4) \quad \bar{g} := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(x) dx \quad \text{όπου το μέτρο του χωρίου } \Omega \text{ συμβολίζεται ως } |\Omega|.$$

Για οποιοδήποτε  $v \in H^1(\Omega)$ , έχουμε ότι  $v - \bar{v} \in V$ . Πράγματι

$$\int_{\Omega} (v - \bar{v}) dx = \int_{\Omega} v dx - \int_{\Omega} \bar{v} dx = \int_{\Omega} v dx - \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v dx \right) dx = \int_{\Omega} v dx - \int_{\Omega} \frac{1}{|\Omega|} dx \cdot \int_{\Omega} v dx = \int_{\Omega} v dx - \int_{\Omega} v dx = 0$$

**(4.2.5) Πρόταση.** Έστω  $u \in H^2(\Omega)$  λύνει την εξίσωση Poisson (4.1.1) με τις καθαρά συνοριακές συνθήκες Neumann (4.1.2) με  $\Gamma = \emptyset$  ή (4.2.1), φυσικά αυτό σημαίνει ότι  $\eta \cdot f \in L^2(\Omega)$  ικανοποιεί την (4.2.2). Τότε η  $u - \bar{u}$  ικανοποιεί τη μεταβολική (ασθενή) διατύπωση (4.1.8) με  $V$  όπως ορίζεται στην (4.2.3).

**(4.2.6) Πρόταση.** Έστω  $f \in L^2(\Omega)$  και υποθέτουμε ότι  $u \in H^2(\Omega)$  λύνει το μεταβολική (ασθενή) εξίσωση (4.1.8) με  $V$  όπως ορίζεται στην (4.2.3). Τότε το  $u$  λύνει την εξίσωση Poisson (4.1.1) με το δεξί μέλος να δίνεται από

$$\bar{f}(x) := f(x) - \bar{f} \quad \forall x \in \Omega$$

με τις συνοριακές συνθήκες (4.2.1).

Παρατήρηση 1: Οι δηλώσεις της ισοδυναμίας του ισχυρού και του μεταβολικού (ασθενούς) προβλήματος είναι παρόμοιες με εκείνες της προηγούμενης παραγράφου, εκτός ότι έχει αλλάξει ο ορισμός του  $V$  και περιορισμοί εμφανίζονται στην  $f$  και το  $u$ . Επειδή το  $v \in V$  σημαίνει ότι  $\int_{\Omega} v(x) dx = 0$ , έχουμε ότι

$$\int_{\Omega} v(x) \bar{f}(x) dx = \int_{\Omega} v(x) f(x) dx \quad \forall v \in V,$$

έτσι ώστε τα μεταβολικά (ασθενή) προβλήματα για το  $f$  και το  $\bar{f}$  να ταυτίζονται.



Παρατήρηση 2: Πράγματι

$$\int_{\Omega} v \bar{f} dx = \int_{\Omega} v(f - \bar{f}) dx = \int_{\Omega} v f - \int_{\Omega} v \bar{f} = \int_{\Omega} v f - \int_{\Omega} v \cdot \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f dx = \int_{\Omega} v f dx.$$



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Η $hp$ – ΕΚΔΟΧΗ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΠΟΙΝΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΡΜΟΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο, κατασκευάζουμε την  $hp$  – εκδοχή των Συνεχών Μεθόδων Πεπερασμένων Στοιχείων Εσωτερικής Ποιής για τη διαρμονική εξίσωση. Το ενδιαφέρον μας είναι να καθιερώσουμε την ευστάθεια και να αναπτύξουμε την  $a$  priori εκτίμηση σφάλματος αυτών των μεθόδων. Επίσης, καθιερώνουμε φράγματα για το σφάλμα τα οποία είναι βέλτιστα (optimal) στο  $h$  και ελαφρώς υπο-βέλτιστα (suboptimal) στο  $p$ .

#### 5.1 ΧΩΡΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Υποθέτουμε ότι το  $\Omega$  είναι ένα φραγμένο, ανοικτό, κυρτό πολυεδρικό χωρίο στον  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , με σύνορο  $\partial\Omega$  το οποίο είναι η ένωση των ανοικτών εδρών του όπου η καθεμία έχει διάσταση  $(d-1)$ . Επίσης, θεωρούμε μία οικογένεια υποδιαιρέσεων  $\{T_h\}$  του  $\Omega$ , παραμετρική (parametrised) ως προς  $h > 0$ , σε χωριστά ανοικτά και κυρτά χωρία στοιχείων  $K = K_j$  έτσι ώστε

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} \bar{K} \quad \text{και} \quad K_i \cap K_j = \emptyset \quad \text{για} \quad i \neq j.$$

Ορίζουμε μία κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση βήματος (mesh)  $h_T$  ως

$$h_T(x) = h_K = \text{diam}(K), \quad x \in K, \quad K \in T,$$

και θέτουμε

$$h = \max_{K \in T_h} h_K.$$

Έστω ότι  $E$  είναι το σύνολο όλων των ανοικτών εδρών διάστασης  $(d-1)$  όλων των στοιχείων  $K \in T_h$ . Επιπλέον, ορίζουμε μία κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση έδρας πάνω στο  $E$  ως

$$h_E(x) = h_e = \text{diam}(e), \quad x \in e.$$

Υποθέτουμε ότι η οικογένεια των υποδιαϊρέσεων  $\{T_h\}_{h>0}$  είναι κανονικού σχήματος (shape – regular). (βλέπε Παρατήρηση 2.2, σελ. 114, στο [4]). Αναφέρουμε ότι για μία οικογένεια κανονικού σχήματος υπάρχει μία θετική σταθερά  $c$  (σταθερά κανονικού σχήματος), ανεξάρτητη του  $h$ , έτσι ώστε

$$ch_K \leq h_e \leq h_K \quad \forall K \in \bigcup_{h>0} T_h \quad \forall e \in \partial K,$$

επομένως, για ένα οποιοδήποτε στοιχείο  $K \in T_h$ ,  $h_K$  και  $h_e$  είναι ίσα ως προς μία σταθερά.

Για ένα μη αρνητικό ακέραιο  $m$ , ορίζουμε ως  $Q_m(K)$  το σύνολο όλων των πολυώνυμων που αντιστοιχούν σε τετράπλευρα πεπερασμένα στοιχεία βαθμού  $m$  ή μικρότερου, σύμφωνα με το κεφάλαιο 3.4. Σε κάθε  $K \in T_h$  ορίζουμε ένα μη-αρνητικό ακέραιο  $p_K$  (τον τοπικό βαθμό πολυωνύμου) και ένα μη-αρνητικό ακέραιο  $s_K$  (τον τοπικό δείκτη του χώρου Sobolev) και έπειτα συλλέγουμε τα  $p_K, s_K$  σε διανύσματα  $\mathbf{p} = (p_K : K \in T_h)$ ,  $\mathbf{s} = (s_K : K \in T_h)$ , αντίστοιχα. Εισάγουμε το χώρο πεπερασμένων στοιχείων

$$V_h = \left\{ u_h : u_h \in Q_{p_K}(K), \text{ με } [u_h] = 0 \quad \forall K \in T_h \right\}$$

να είναι ο χώρος των πολυωνύμων που αντιστοιχούν σε τετράπλευρα πεπερασμένα στοιχεία και αυτά τα πολυώνυμα να είναι συνεχή στο σύνορο (δηλαδή να έχουν μηδενικό άλμα).

Επιπλέον ορίζουμε, για την υποδιαίρεση  $T_h$ , το «σπασμένο» χώρο Sobolev (broken Sobolev space)

$$H^s(\Omega, T_h) = \{ u \in L^2(\Omega) : u|_K \in H^{s_K}(K) \quad \forall K \in T_h \}$$

με «σπασμένη» νόρμα και ημι – νόρμα Sobolev

$$\| u \|_{\mathbf{s}, T_h} = \left( \sum_{K \in T_h} \| u \|_{H^{s_K}(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad | u |_{\mathbf{s}, T_h} = \left( \sum_{K \in T_h} | u |_{H^{s_K}(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Θα γράφουμε  $H^s(\Omega, T_h)$ ,  $\| u \|_{\mathbf{s}, T_h}$  και  $| u |_{\mathbf{s}, T_h}$  όταν  $s_K = s$ ,  $K \in T_h$ . Για  $u \in H^2(\Omega, T_h)$  γράφουμε  $u_K = u|_K$  και ορίζουμε τη «σπασμένη» παράγωγο  $\nabla_{T_h}$  ως

$$\left( \nabla_{T_h} u \right)|_K = \left( \nabla u|_K \right) \text{ και τη «σπασμένη» Λαπλασιανή } \Delta_{T_h} \text{ ως } \left( \Delta_{T_h} u \right)|_K = \left( \Delta u|_K \right),$$

$K \in T_h$ .

Κατόπιν, ορίζουμε το  $\Gamma$  ως

$$\Gamma := \bigcup_{e \in E} e,$$

το  $\Gamma_{\text{int}}$  ως

$$\Gamma_{\text{int}} := \bigcup_{e \in E_{\text{int}}} e$$

και

$$\Gamma = \Gamma_{\text{int}} \cup \partial\Omega.$$

Επίσης, ορίζουμε το σύνολο  $E_{\text{int}}$  όλων των εσωτερικών εδρών ως

$$E_{\text{int}} = \{e \in E : e \subset \Omega\}$$

και το σύνολο  $E_{\partial}$  όλων των συνοριακών εδρών ως

$$E_{\partial} = \{e \in E : e \subset \partial\Omega\}.$$

Για ένα ακέραιο  $m$  ορίζουμε

$$\{p^m\}_E(x) = \{p^m\}_e = \frac{p_K^m + p_{K'}^m}{2}, \quad x \in e,$$

όπου το  $e \in E_{\text{int}}$  και τα στοιχεία  $K$  και  $K'$  μοιράζονται την έδρα  $e$  και για  $e \in E_{\partial}$ ,  $e \subset \partial K$ , έχουμε

$$\{p^m\}_E(x) = p_K^m.$$

Παρακάτω, θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $\sum_e \int_e$ , όπου

$$\sum_e \int_e = \int_{\bigcup_{e \in E} e} = \int_{\Gamma} = \int_{\Gamma_{\text{int}}} + \int_{\partial\Omega}.$$

## 5.2 ΑΣΘΕΝΗΣ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΑΝΩ ΣΕ «ΣΠΑΣΜΕΝΟΥΣ» ΧΩΡΟΥΣ SOBOLEV

Θεωρούμε το ακόλουθο συνοριακό πρόβλημα τιμών

$$(5.2.1) \quad \begin{aligned} \Delta^2 u &= f && \text{στο } \Omega \\ u &= 0 && \text{στο } \partial\Omega \\ \nabla u \cdot \nu &= 0 && \text{στο } \partial\Omega \end{aligned}$$

όπου ο τελεστής  $\Delta$  ορίζεται από

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad \text{και} \quad \Delta^2 u = \Delta(\Delta u),$$

$\underline{\nu}$  είναι το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο σύνορο  $\partial\Omega$  και η  $f$  είναι δοσμένη συνάρτηση ορισμένη στο  $\Omega$ . Κάτω από κατάλληλες συνθήκες ( βλέπε [3] ) πάνω στο  $\Omega$  και στη δοσμένη συνάρτηση  $f$ , το συνοριακό πρόβλημα τιμών (5.2.1) δέχεται μοναδική λύση  $u \in H^4(\Omega)$  η οποία εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος.

Αρχικά, θα υποθέσουμε ότι η λύση  $u$  του προβλήματος (5.2.1) είναι μία επαρκώς ομαλή συνάρτηση.

Για κάθε έδρα  $e \in E_{\text{int}}$ , υπάρχουν δείκτες  $i, j$  έτσι ώστε  $i > j$  και τα στοιχεία  $K := K_i$  και  $K' := K_j$  μοιράζονται την έδρα  $e$ . Τότε ορίζουμε το άλμα (*jump*) της συνάρτησης κατά μήκος της  $e$  και τη μέση τιμή (mean value) πάνω στην  $e$  του  $u \in H^1(\Omega, T_h)$  ως

$$[u]_e := u|_{\partial K \cap e} - u|_{\partial K' \cap e} \quad \text{και} \quad \langle u \rangle_e := \frac{1}{2}(u|_{\partial K \cap e} + u|_{\partial K' \cap e}),$$

αντίστοιχα, όπου το  $\partial K$  είναι η ένωση όλων των ανοικτών εδρών του στοιχείου  $K$ .

Για χάρη ευκολίας, επεκτείνουμε τους ορισμούς του άλματος και της μέσης τιμής σε έδρες  $e \in E_\partial$  ορίζοντας

$$[u]_e := u|_e \quad \text{και} \quad \langle u \rangle_e := u|_e.$$

Με κάθε έδρα  $e \in E_{\text{int}}$  σχετίζουμε το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα  $\underline{\mu}$  κάθετο στην  $e$  να δείχνει από το  $K_i$  στο  $K_j$  όταν  $i > j$  και επιλέγουμε  $\underline{\mu}$  να είναι το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο σύνορο  $\partial\Omega$ ,  $\underline{\nu}$ , όταν  $e \in E_\partial$  όπου  $e \subset \partial K$ .

Τώρα, είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στην ασθενή διατύπωση του συνοριακού προβλήματος τιμών (5.2.1) για τη διαρμονική εξίσωση, η οποία θα οδηγήσει στη Συνεχή Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων Εσωτερικής Ποιής.

Επειδή η μέθοδος θα είναι μη προσαρμοσμένη (non – conforming) (δηλαδή θα βασίζεται σε βάση συνεχών συναρτήσεων για το πεπερασμένο στοιχείο η οποία δεν ανήκει στο  $H^2(\Omega)$ ), θα χρησιμοποιήσουμε το «σπασμένο» χώρο Sobolev  $H^4(\Omega, T_h)$ .

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με μια συνάρτηση  $v \in H^4(\Omega, T_h)$  και ολοκληρώνουμε ως προς  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx.$$

Μετά διασπάμε τα ολοκληρώματα ως

$$(5.2.2) \quad \sum_{K \in T_h} \int_K \Delta^2 u \cdot v dx = \sum_{K \in T_h} \int_K f \cdot v dx .$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη ως προς κάποιο στοιχείο  $K \in T_h$ , για οποιοσδήποτε  $u \in H^4(K)$  και  $v \in H^4(K)$ , έχουμε

$$(5.2.3) \quad \begin{aligned} \int_K \Delta^2 u \cdot v dx &= - \int_K \nabla \Delta u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial K} (\nabla \Delta u \cdot \underline{\eta}) \cdot v ds = \\ &= \int_K \Delta u \cdot \Delta v dx - \int_{\partial K} \Delta u \cdot (\nabla v \cdot \underline{\eta}) ds + \int_{\partial K} (\nabla \Delta u \cdot \underline{\eta}) \cdot v ds \end{aligned} \quad \forall K \in T_h .$$

Αντικαθιστώντας την ισότητα (5.2.3) στη σχέση (5.2.2) συμπεραίνουμε ότι

$$(5.2.4) \quad \sum_{K \in T_h} \int_K \Delta u \cdot \Delta v dx - \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} \Delta u \cdot (\nabla v \cdot \underline{\eta}) ds + \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} (\nabla \Delta u \cdot \underline{\eta}) \cdot v ds = \sum_{K \in T_h} \int_K f \cdot v dx$$

για οποιοσδήποτε συναρτήσεις  $u \in H^4(\Omega, T_h)$  και  $v \in H^4(\Omega, T_h)$ , όπου  $\underline{\eta}$  ορίζεται να είναι το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην έδρα κάθε στοιχείου.

Έπειτα, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς του άλματος και της μέσης τιμής, ξαναγράφουμε τη σχέση (5.2.4) ως

$$(5.2.5) \quad \sum_{K \in T_h} \int_K \Delta u \cdot \Delta v dx - \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla v \cdot \underline{\eta}]_e ds + \sum_e \int_e \langle \nabla \Delta u \cdot \underline{\eta} \rangle_e \cdot [v]_e ds = \sum_{K \in T_h} \int_K f \cdot v dx .$$

Επειδή  $u \in H^4(\Omega, T_h)$  και  $v \in H^4(\Omega, T_h)$  τότε η  $u$  και η  $\nabla u \cdot \underline{\eta}$  είναι συνεχείς.

Επομένως, το άλμα της  $u$ ,  $\nabla u \cdot \underline{\eta}$  αντίστοιχα είναι μηδενικό, δηλαδή

$$[u]_e = 0 \quad \forall e$$

και

$$[\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e = 0 \quad \forall e .$$

Άρα και τα ολοκληρώματα που περιέχουν τις παραπάνω ποσότητες είναι ίσα με το μηδέν (σύμφωνα με το λήμμα 3 του [17] που αναφέρεται παρακάτω), δηλαδή

$$(5.2.6) \quad \sum_e \int_e \langle \nabla \Delta v \cdot \underline{\eta} \rangle_e \cdot [u]_e ds = 0$$

και

$$(5.2.7) \quad \sum_e \int_e \langle \Delta v \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds = 0.$$

Προσθέτοντας τη σχέση (5.2.6) στην (5.2.5) και ταυτόχρονα αφαιρώντας τη σχέση (5.2.7) προκύπτει η

$$(5.2.8) \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Delta u \cdot \Delta v dx - \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla v \cdot \underline{\eta}]_e ds - \sum_e \int_e \langle \Delta v \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds + \\ + \sum_e \int_e \langle \nabla \Delta u \cdot \underline{\eta} \rangle_e \cdot [v]_e ds + \sum_e \int_e \langle \nabla \Delta v \cdot \underline{\eta} \rangle_e \cdot [u]_e ds = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f \cdot v dx.$$

Επίσης,

$$(5.2.9) \quad \sum_e \int_e \alpha \cdot [u]_e \cdot [v]_e ds = 0$$

και

$$(5.2.10) \quad \sum_e \int_e \beta \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \cdot [\nabla v \cdot \underline{\eta}]_e ds = 0.$$

Οι συναρτήσεις  $\alpha, \beta \geq 0$  οι οποίες ορίζονται πάνω στο  $\Gamma$  ως

$$\alpha|_e = \alpha_e, \quad \beta|_e = \beta_e \quad \forall e \in E,$$

λέγονται παράμετροι ποινικοποίησης της ασυνέχειας και οι μη-αρνητικές σταθερές  $\alpha_e, \beta_e$  εξαρτώνται από τις παραμέτρους  $h$  και  $p$ .

Προσθέτοντας τη σχέση (5.2.9) και (5.2.10) στην (5.2.8) προκύπτει η

$$(5.2.11) \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Delta u \cdot \Delta v dx - \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla v \cdot \underline{\eta}]_e ds - \sum_e \int_e \langle \Delta v \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds + \\ + \sum_e \int_e \langle \nabla \Delta u \cdot \underline{\eta} \rangle_e \cdot [v]_e ds + \sum_e \int_e \langle \nabla \Delta v \cdot \underline{\eta} \rangle_e \cdot [u]_e ds + \\ + \sum_e \int_e \alpha_e \cdot [u]_e \cdot [v]_e ds + \sum_e \int_e \beta_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \cdot [\nabla v \cdot \underline{\eta}]_e ds = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f \cdot v dx.$$

Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησιακό  $l(\cdot)$  πάνω στο χώρο  $H^4(\Omega, T_h)$  να ορίζεται ως



$$l(v) = \sum_{K \in T_h} \int_K f \cdot v.$$

Τότε, η «σπασμένη» ασθενής διατύπωση του συνοριακού προβλήματος τιμών για τη διαρμονική εξίσωση είναι ακολούθως:

βρείτε  $u \in H^4(\Omega, T_h)$  έτσι ώστε

$$(5.2.12) \quad \alpha(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^4(\Omega, T_h)$$

με τη διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  να είναι

$$\begin{aligned} \alpha(u, v) = & \sum_{K \in T_h} \int_K \Delta u \cdot \Delta v dx - \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla v \cdot \underline{\eta}]_e ds - \sum_e \int_e \langle \Delta v \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds + \\ & + \sum_e \int_e \langle \nabla \Delta u \cdot \underline{\eta} \rangle_e \cdot [v]_e ds + \sum_e \int_e \langle \nabla \Delta v \cdot \underline{\eta} \rangle_e \cdot [u]_e ds + \\ & + \sum_e \int_e \alpha_e \cdot [u]_e \cdot [v]_e ds + \sum_e \int_e \beta_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \cdot [\nabla v \cdot \underline{\eta}]_e ds. \end{aligned}$$

Σημείωση 1: Στη σχέση (5.2.12) χρησιμοποιούμε τα άλματα  $[u]$  και  $[v]$  παρόλο που είναι μηδενικά, διότι η σχέση (5.2.12) αφορά τη συνεχή μορφή του προβλήματος και όχι τη διακριτή μορφή.

Θα σχετίσουμε με τη διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  τη νόρμα που ορίζεται ως

$$\|u\|_E := \left( \sum_{K \in T_h} \|\Delta u\|_{L^2(K)}^2 + \sum_e \|\sqrt{\beta} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in H^4(\Omega, T_h).$$

**(5.2.13) Θεώρημα.** Αν  $\beta > 0$  πάνω στο  $E$ , τότε η  $\|u\|_E$  είναι νόρμα πάνω στο  $H^4(\Omega, T_h)$ .

**Απόδειξη.** Βλέπε λήμμα 1 του [17]. □

Παρατήρηση 1: Η διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  της σχέσης (5.2.12) είναι συμμετρική.

Αναφέρουμε το λήμμα 3 του [17].

**Λήμμα 3.** Υποθέτουμε ότι  $u \in H^4(\Omega)$ , τότε για οποιαδήποτε έδρα  $e \in E_{\text{int}}$ , έχουμε

$$\int_e [u] \cdot v ds = \int_e [\nabla u \cdot \underline{\eta}] \cdot v ds = \int_e [\Delta u] \cdot v ds = \int_e [\Delta \nabla u \cdot \underline{\eta}] \cdot v ds = 0 \quad \forall v \in L^2(e).$$

**Απόδειξη.** Βλέπε [17].

□

Τώρα, αναφέρουμε το θεώρημα που μας εξασφαλίζει ότι μία ισχυρή λύση του συνοριακού προβλήματος τιμών για τη διαρμονική εξίσωση, επαρκώς ομαλή, είναι λύση της «σπασμένης ασθενής» διατύπωσης.

**(5.2.14) Θεώρημα.** Η «σπασμένη» ασθενής διατύπωση (5.2.12) του συνοριακού προβλήματος τιμών (5.2.1) είναι συνεπής στο χώρο  $H^4(\Omega)$  υπό την έννοια ότι οποιαδήποτε λύση  $u$  στο συνοριακό πρόβλημα τιμών, τέτοια ώστε  $u \in H^4(\Omega)$ , λύνει την (5.2.12) επίσης.

**Απόδειξη.** Βλέπε Θεώρημα 4 του [17].

□

### 5.3 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΠΟΙΝΗΣ ΚΑΙ Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ COERCIVITY ΤΗΣ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΠΑΝΩ ΣΕ ΧΩΡΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Μπορούμε να σχετίσουμε την «σπασμένη» ασθενή διατύπωση που θεωρήθηκε παραπάνω με τη Συνεχή Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων Εσωτερικής Ποινής ακολούθως

βρείτε  $u_h \in V_h$  έτσι ώστε

$$(5.3.1) \quad \alpha(u_h, v) = l(v) \quad \forall v \in V_h$$

με τη διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  να είναι

$$\begin{aligned} \alpha(u_h, v) = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Delta u_h \cdot \Delta v dx - \sum_e \int_e \langle \Delta u_h \rangle_e \cdot [\nabla v \cdot \underline{\eta}]_e ds - \\ & - \sum_e \int_e \langle \Delta v \rangle_e \cdot [\nabla u_h \cdot \underline{\eta}]_e ds + \sum_e \int_e \beta_e \cdot [\nabla u_h \cdot \underline{\eta}]_e \cdot [\nabla v \cdot \underline{\eta}]_e ds \end{aligned}$$

και

$$l(v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f \cdot v.$$

Θα υποθέσουμε ότι η ισχυρή λύση  $u$  στο συνοριακό πρόβλημα τιμών ικανοποιεί την υπόθεση ομαλότητας  $u \in H^4(\Omega)$ , ώστε η  $u$  να είναι λύση του (5.2.12) συνεπώς και του (5.3.1). Συνεπώς η ιδιότητα της ορθογωνιότητας Galerkin

$$(5.3.2) \quad \alpha(u - u_h, v) = 0 \quad \text{θα ισχύει για όλα τα } v \in V_h.$$

Θα αποδείξουμε την ιδιότητα coercivity της διγραμμικής μορφής  $\alpha(\cdot, \cdot)$  για το χώρο πεπερασμένων στοιχείων όταν το βήμα (mesh)  $h$  είναι ομοιόμορφο και μη-ομοιόμορφο, αντίστοιχα.

Παρατήρηση 1: Όταν το  $h$  είναι ομοιόμορφο το  $\beta$  ορίζεται ως  $\beta_e = C \frac{p^2}{h}$ , ενώ όταν

το  $h$  δεν είναι ομοιόμορφο το  $\beta = \max\{\beta_e\}$  με  $\beta_e = C \frac{\{p^2\}_e}{h_e}$

**(5.3.4) Θεώρημα.** Έστω η διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  όπως ορίζεται στη σχέση (5.3.1) και  $\beta_e = C \frac{p^2}{h}$  ή  $\beta_e = C \frac{\{p^2\}_e}{h_e}$  ανάλογα αν έχουμε ομοιόμορφο βήμα (mesh)  $h$  ή μη-ομοιόμορφο, αντίστοιχα. Τότε, υπάρχει μία θετική σταθερά  $\theta$  ( $\theta = \frac{1}{2}$ ) έτσι ώστε

$$\alpha(u, u) \geq \theta \|u\|_E^2 \quad \forall u \in V_h.$$

**Απόδειξη.** Έστω ότι το  $h$  είναι ομοιόμορφο και έστω  $u \in V_h$ . Τότε

$$\begin{aligned} \alpha(u, u) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Delta u \cdot \Delta u dx - \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds - \\ &- \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds + \sum_e \int_e \beta_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds = \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\Delta u|^2 dx - 2 \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds + \sum_e \int_e \beta_e \cdot \left[ [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \right]^2 ds = \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Delta u\|_{L^2(K)}^2 - 2 \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds + \sum_e \int_e \left[ \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \right]^2 ds = \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Delta u\|_{L^2(K)}^2 - 2 \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds + \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 = \\ &= \|u\|_E^2 - 2 \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε την παρακάτω σχέση

$$(5.3.5) \quad \alpha(u, u) = \|u\|_E^2 - 2 \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds.$$

Θα αναλύσουμε την ποσότητα  $\sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds$ .

$$\begin{aligned} \left| \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds \right| &\leq \sum_e \left| \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds \right| \leq \sum_e \int_e \left| \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \right| ds = \\ &= \sum_e \int_e \left| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta u \rangle_e \cdot \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \right| ds \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\leq \sum_e \left( \int_e \left( \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta u \rangle_e \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_e \left( \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_e \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \|\langle \Delta u \rangle_e\|_{L^2(e)} \cdot \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}$$

εφαρμόζοντας τη διακριτή ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\leq \left( \sum_e \frac{1}{\beta_e} \cdot \|\langle \Delta u \rangle_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

αναλύουμε το  $\langle \Delta u \rangle_e = \frac{1}{2}(\Delta u|_{\partial K \cap e} + \Delta u|_{\partial K' \cap e})$ , οπότε

$$\begin{aligned} &= \left( \sum_e \frac{1}{\beta_e} \cdot \left\| \frac{1}{2}(\Delta u|_{\partial K \cap e} + \Delta u|_{\partial K' \cap e}) \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \sum_e \frac{1}{4\beta_e} \cdot \left\| (\Delta u|_{\partial K \cap e} + \Delta u|_{\partial K' \cap e}) \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα

$$\leq \left( \sum_e \frac{1}{4\beta_e} \cdot \left( \|\Delta u|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)} + \|\Delta u|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα (1.5.7)

$$\begin{aligned}
&\leq \left( \sum_{e \subset \bar{K} \cap \bar{K}'} \frac{1}{4\beta_e} \cdot \left( 2 \|\Delta u|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + 2 \|\Delta u|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left( \sum_{e \subset \bar{K} \cap \bar{K}'} \frac{1}{2\beta_e} \cdot \left( \|\Delta u|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + \|\Delta u|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{2\beta_e} \cdot \|\Delta u\|_{L^2(\partial K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα αντιστρεψιμότητας (inverse inequality) (\*)

$$\leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{2\beta_e} \cdot C_{inv} \cdot \frac{p^2}{h} \cdot \|\Delta u\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

θέλουμε  $\frac{1}{2\beta_e} \cdot C_{inv} \cdot \frac{p^2}{h} \leq \frac{1}{16}$  (τότε πρέπει το  $\beta_e \geq 8C_{inv} \cdot \frac{p^2}{h}$  η οποία είναι αναγκαία συνθήκη)

$$\begin{aligned}
&\leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{16} \|\Delta u\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}} \cdot \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Delta u\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Delta u\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4} \cdot \|u\|_E^2.
\end{aligned}$$

Άρα

$$(5.3.6) \quad \left| \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \right| ds \leq \frac{1}{4} \cdot \|u\|_E^2.$$

Τότε

$$(5.3.7) \quad -\frac{1}{2} \cdot \|u\|_E^2 \leq -2 \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds \leq \frac{1}{2} \cdot \|u\|_E^2.$$

Με αντικατάσταση της (5.3.7) στην (5.3.5) έχουμε

$$\alpha(u, u) = \|u\|_E^2 - 2 \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds \geq \|u\|_E^2 - \frac{1}{2} \cdot \|u\|_E^2 = \frac{1}{2} \cdot \|u\|_E^2.$$

Άρα

$$(5.3.8) \quad \alpha(u, u) \geq \frac{1}{2} \cdot \|u\|_E^2 \quad \forall u \in V_h.$$

Τώρα θα αποδείξουμε την ιδιότητα coercivity της διγραμμικής μορφής  $\alpha(\cdot, \cdot)$  όταν το βήμα (mesh)  $h$  είναι μη-ομοιόμορφο. Η διαδικασία είναι όμοια με εκείνη του ομοιόμορφου βήματος (mesh)  $h$ , εκτός από κάποιες μικρές διαφορές. Γι' αυτό το λόγο μόνο όπου χρειάζεται θα αλλάζουμε την αρίθμηση των σχέσεων.

Έστω  $u \in V_h$ . Τότε, ομοίως έχουμε

$$(5.3.5) \quad \alpha(u, u) = \|u\|_E^2 - 2 \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds$$

Θα αναλύσουμε την ποσότητα  $\sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds$ .

$$\begin{aligned} \left| \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds \right| &\leq \sum_e \left| \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e ds \right| \leq \sum_e \int_e \left| \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \right| ds = \\ &= \sum_e \int_e \left| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta u \rangle_e \cdot \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \right| ds \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} &\leq \sum_e \left( \int_e \left( \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta u \rangle_e \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_e \left( \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_e \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \|\langle \Delta u \rangle_e\|_{L^2(e)} \cdot \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)} \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας τη διακριτή ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\leq \left( \sum_e \frac{1}{\beta_e} \cdot \|\langle \Delta u \rangle_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

αναλύουμε το  $\langle \Delta u \rangle_e = \frac{1}{2}(\Delta u|_{\partial K \cap e} + \Delta u|_{\partial K' \cap e})$ , οπότε

$$\begin{aligned} &= \left( \sum_e \frac{1}{\beta_e} \cdot \left\| \frac{1}{2}(\Delta u|_{\partial K \cap e} + \Delta u|_{\partial K' \cap e}) \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \sum_e \frac{1}{4\beta_e} \cdot \|\Delta u|_{\partial K \cap e} + \Delta u|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα

$$\leq \left( \sum_e \frac{1}{4\beta_e} \cdot \left( \|\Delta u|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)} + \|\Delta u|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα (1.5.7)

$$\begin{aligned} &\leq \left( \sum_{e \in \bar{K} \cap \bar{K}'} \frac{1}{4\beta_e} \cdot \left( 2\|\Delta u|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + 2\|\Delta u|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \sum_{e \in \bar{K} \cap \bar{K}'} \frac{1}{2\beta_e} \cdot \left( \|\Delta u|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + \|\Delta u|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{1}{2\beta_{e_1}} \cdot \|\Delta u\|_{L^2(e_1)}^2 + \frac{1}{2\beta_{e_2}} \cdot \|\Delta u\|_{L^2(e_2)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα αντιστρεψιμότητας (inverse inequality) (\*)

$$\leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{1}{2\beta_{e_1}} \cdot C_1 \cdot \frac{\{p^2\}_{e_1}}{h_{e_1}} \cdot \|\Delta u\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2\beta_{e_2}} \cdot C_2 \cdot \frac{\{p^2\}_{e_2}}{h_{e_2}} \cdot \|\Delta u\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\text{θέτουμε } \hat{C} = \max \left\{ \frac{1}{2\beta_{e_1}} \cdot C_1 \cdot \frac{\{p^2\}_{e_1}}{h_{e_1}}, \frac{1}{2\beta_{e_2}} \cdot C_2 \cdot \frac{\{p^2\}_{e_2}}{h_{e_2}} \right\}$$

$$\leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \hat{C} \|\Delta u\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

θέλουμε  $\hat{C} \leq \frac{1}{16}$  (τότε πρέπει το  $\beta_{e_i} \geq 8C_i \cdot \frac{\{p^2\}_{e_i}}{h_{e_i}}$  η οποία είναι αναγκαία συνθήκη)

$$\begin{aligned} &\leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{16} \|\Delta u\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Delta u\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4} \cdot \|u\|_E^2. \end{aligned}$$

Άρα προκύπτει η σχέση (5.3.6) απλώς με διαφορετικό τρόπο

$$(5.3.6) \quad \left| \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \frac{1}{4} \cdot \|u\|_E^2.$$

Τότε

$$(5.3.7) \quad -\frac{1}{2} \cdot \|u\|_E^2 \leq -2 \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \leq \frac{1}{2} \cdot \|u\|_E^2.$$

Με αντικατάσταση της (5.3.7) στην (5.3.5) έχουμε

$$\alpha(u, u) = \|u\|_E^2 - 2 \sum_e \int_e \langle \Delta u \rangle_e \cdot [\nabla u \cdot \underline{\eta}]_e \geq \|u\|_E^2 - \frac{1}{2} \cdot \|u\|_E^2 = \frac{1}{2} \cdot \|u\|_E^2.$$

Άρα προκύπτει πάλι η σχέση (5.3.8), όταν το  $h$  είναι μη ομοιόμορφο.

$$(5.3.8) \quad \alpha(u, u) \geq \frac{1}{2} \cdot \|u\|_E^2 \quad \forall u \in V_h. \quad \square$$



(\*) Παρατήρηση 2: Η ανισότητα αντιστρεψιμότητας (inverse inequality) εφαρμόζεται μονάχα σε πολυώνυμα, επομένως μπορούμε να την εφαρμόσουμε για να αποδείξουμε την παραπάνω ανισότητα, αφού το  $u \in V_h$  ανήκει στο χώρο πεπερασμένης διάστασης  $V_h$  και άρα είναι πολυώνυμο.

## 5.4 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Σε αυτή την παράγραφο, αποδεικνύουμε την a priori εκτίμηση σφάλματος της  $hp$ -εκδοχής στην  $\|\cdot\|_E$  νόρμα για τις Συνεχείς Μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων Εσωτερικής Ποιής που αναπτύχθηκαν στις παραπάνω παραγράφους αυτού του κεφαλαίου.

Γενικά, για να αποδείξουμε την εκτίμηση σφάλματος χρειαζόμαστε την ιδιότητα coercivity της διγραμμικής μορφής  $a(\cdot, \cdot)$  στο χώρο πεπερασμένων στοιχείων  $V_h$ , την ιδιότητα της ορθογωνιότητας Galerkin και την ιδιότητα της συνέχειας της διγραμμικής μορφής  $a(\cdot, \cdot)$  στο χώρο  $V$  που ορίζεται η ασθενής μορφή του προβλήματος, έτσι ώστε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Cea να καταλήξουμε σε μία σχέση της μορφής

$$\|u - u_h\|_E \leq \frac{C_{cont}}{C_{coerc}} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_E.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων που εφαρμόζουμε σε αυτό το κεφάλαιο, δεν αποδεικνύεται η ιδιότητα της συνέχειας της διγραμμικής μορφής  $a(u, v)$  στο χώρο  $V$  που αναφέρουμε παραπάνω. Επομένως, δε μπορούμε να εφαρμόσουμε ούτε το Θεώρημα Lax-Milgram ούτε το Θεώρημα Cea. Συνεπώς, για να αποδείξουμε την a priori εκτίμηση σφάλματος  $\|u - u_h\|_E$ , θα κάνουμε κάτι διαφορετικό καταλήγοντας σε μία σχέση της μορφής

$$\|u - u_h\|_E \leq \frac{C_{cont}}{C_{coerc}} f(u - v),$$

όπου  $f$  είναι μία συνάρτηση των  $u$  και  $v$ .

Έστω ότι  $\Pi$  είναι ένας οποιοσδήποτε (γραμμικός) τελεστής προβολής από το χώρο  $H^s(\Omega, T_h)$  πάνω στο χώρο πεπερασμένων στοιχείων  $V_h$ . Τότε αναλύουμε το σφάλμα ακολούθως

$$u - u_h = (u - \Pi u) + (\Pi u - u_h) \equiv \eta + \xi,$$

όπου  $\eta = u - \Pi u$ ,  $\xi = \Pi u - u_h$ . Επομένως

$$(5.4.1) \quad \|u - u_h\|_E = \|\eta + \xi\|_E \leq \|\eta\|_E + \|\xi\|_E.$$

Από παραπάνω έχουμε ότι  $\Pi u \in V_h$ , συνεπώς  $\xi = \Pi u - u_h \in V_h$ . Η δικιά μας ανάλυση σφάλματος, παρακάτω, θα παρέχει ένα φράγμα για τον όρο  $\|\xi\|_E$ . Αυτό το φράγμα θα αποτελείται από κατάλληλες νόρμες του όρου  $\eta$ . Συνεπώς, θα λάβουμε ένα φράγμα για την ποσότητα  $\|u - u_h\|_E$  το οποίο θα αποτελείται από νόρμες Sobolev του  $\eta$ . Άρα, για να ολοκληρώσουμε την ανάλυση σφάλματος χρειάζεται να φράξουμε τις

νόρμες Sobolev του  $\eta$  από γνωστές νόρμες Sobolev, αυτό συμβαίνει με τη βοήθεια του λήμματος 8 του [17].

**Λήμμα 8.** Υποθέτουμε ότι μία υποδιαίρεση του  $\Omega$  αποτελείται από  $d$  - διάστατα παραλληλεπίπεδα. Τότε, για κάθε  $u \in H^t(\Omega, T_h)$ ,  $\mathbf{t} = (t_K : K \in T_h)$  και για κάθε  $\mathbf{p} = (p_K : K \in T_h, p_K \in \mathbb{N})$ , υπάρχει μία προβολή

$$\Pi : H^t(\Omega, T_h) \rightarrow V_h, \quad (\Pi_{\mathbf{p}}^h u)|_K = \Pi_{p_K}^{h_K}(u|_K)$$

έτσι ώστε, για  $0 \leq q \leq t_K$ ,

$$(5.4.2) \quad \|u - \Pi_{p_K}^{h_K} u\|_{H^q(K)} \leq C \frac{h_K^{s_K - q}}{p_K^{t_K - q}} \|u\|_{H^{t_K}(K)} \quad \forall K \in T_h,$$

και για  $0 \leq q \leq t_K - 1$

$$(5.4.3) \quad \|D^a(u - \Pi_{p_K}^{h_K} u)\|_{L^2(\partial K)} \leq C \frac{h_K^{s_K - q - \frac{1}{2}}}{p_K^{t_K - q - \frac{1}{2}}} \|u\|_{H^{t_K}(K)}, \quad |a| = q, \quad \forall K \in T_h,$$

όπου  $s_K = \min(p_K + 1, t_K)$  και  $C$  είναι μία σταθερά ανεξάρτητη του  $u$ ,  $h_K$  και  $p_K$ , αλλά εξαρτώμενη από το  $t = \max_{K \in T_h} t_K$ .

Όπως στο [13], θα υποθέσουμε ότι το διάνυσμα πολυωνομικού βαθμού  $\mathbf{p}$ , με  $p_K \in \mathbb{N}$ , έχει φραγμένη τοπική μεταβολή, δηλαδή υπάρχει μία σταθερά  $\rho > 0$  έτσι ώστε για οποιοδήποτε ζευγάρι στοιχείων  $K$  και  $K'$  τα οποία μοιράζονται κάποια έδρα  $e \in E$ , να έχουμε

$$\rho^{-1} p_{K'} \leq p_K \leq \rho p_{K'}.$$

**Θεώρημα.** Υποθέτουμε ότι  $\Omega$  είναι ένα φραγμένο πολυεδρικό χωρίο στον  $\mathbb{R}^d$  και ότι  $\{T_h\}_{h>0}$  είναι μία οικογένεια υποδιαιρέσεων κανονικού σχήματος (shape-regular), διαμορφωμένη από  $d$ -διάστατα παραλληλεπίπεδα. Έστω  $\mathbf{p} = (p_K : K \in T_h, p_K \in \mathbb{N}, p_K \geq 3)$  είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα πολυωνομικού βαθμού φραγμένης τοπικής μεταβολής. Για κάθε κοινή έδρα  $e \in E$ , ορίζουμε θετική, πραγματική, κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση έδρας  $\beta$  ως

$$\beta_e = C \frac{\{p^2\}_e}{h_e}.$$

Τότε, αν η ακριβής λύση  $u$  του προβλήματος ( $\alpha(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^4(\Omega, T_h)$ ) ανήκει στο χώρο  $H^t(\Omega, T_h)$ ,  $\mathbf{t} = (t_K : K \in T_h, \quad t_K \geq 4)$ , τότε η λύση  $u_h \in V_h$  ( $V_h$  είναι ο χώρος πεπερασμένων στοιχείων που αποτελείται από τα πολυώνυμα βαθμού  $p_K$ ) του προβλήματος ( $\alpha(u_h, v) = l(v) \quad \forall v \in V_h$ ) ικανοποιεί το ακόλουθο φράγμα για το σφάλμα

$$(5.4.4) \quad \|u - u_h\|_E^2 \leq C \sum_{K \in T_h} \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2t_K-5}} \|u\|_{H^{t_K}(K)}^2,$$

όπου  $1 \leq s_K \leq \min(p_K + 1, t_K)$  και  $C$  είναι μία σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από τη διάσταση  $d$  του χώρου, τη σταθερά κανονικού σχήματος  $c$ , τη σταθερά του τοπικού πολυωνυμικού βαθμού μεταβολής  $\rho$  και από το  $t = \max_{K \in T_h} t_K$ .

Αντίστοιχα, όταν το βήμα (mesh)  $h$  είναι ομοιόμορφο δηλαδή  $h_K = h$  και  $s_K = s, \quad t_K = t, \quad p_K = p \quad \forall K \in T_h$  το  $\beta_e$  γίνεται

$$\beta_e = C \frac{p^2}{h}.$$

Τότε, αν η ακριβής λύση  $u$  του προβλήματος ( $\alpha(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^4(\Omega, T_h)$ ) ανήκει στο χώρο  $H^t(\Omega, T_h)$ ,  $\mathbf{t} = (t : t \geq 4)$ , τότε η λύση  $u_h \in V_h$  ( $V_h$  είναι ο χώρος πεπερασμένων στοιχείων που αποτελείται από τα πολυώνυμα βαθμού  $p$ ) του προβλήματος ( $\alpha(u_h, v) = l(v) \quad \forall v \in V_h$ ) ικανοποιεί το ακόλουθο φράγμα για το σφάλμα

$$(5.4.5) \quad \|u - u_h\|_E^2 \leq C \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-5}} \|u\|_{H^t(\Omega)}^2,$$

όπου  $1 \leq s \leq \min(p + 1, t)$  και  $C$  είναι μία σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από τη διάσταση  $d$  του χώρου και το  $t$ .

**Απόδειξη.** Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε την εκτίμηση σφάλματος όταν το βήμα (mesh)  $h$  είναι ομοιόμορφο δηλαδή  $h_K = h$  και έχοντας  $s_K = s, \quad t_K = t, \quad p_K = p \quad \forall K \in T_h$ .

Από την ιδιότητα coercivity της διγραμμικής μορφής  $\alpha(\cdot, \cdot)$  έχουμε

$$\begin{aligned} \|\xi\|_E^2 &\leq \frac{1}{C_{coerc}} \alpha(\xi, \xi) = \frac{1}{C_{coerc}} \alpha(\xi + \eta - \eta, \xi) = \frac{1}{C_{coerc}} (\alpha(\xi + \eta, \xi) + \alpha(-\eta, \xi)) = \\ &= \frac{1}{C_{coerc}} (\alpha(\xi + \eta, \xi) - \alpha(\eta, \xi)) = -\frac{1}{C_{coerc}} \alpha(\eta, \xi) \end{aligned}$$

όπου λόγω ορθογωνιότητας Galerkin, έχουμε  $\alpha(\xi + \eta, \xi) = \alpha(u - u_h, \xi) = 0$  επειδή το  $\xi = \Pi u - u_h \in V_h$ .

Συνεπώς,

$$(5.4.6) \quad \|\xi\|_E^2 \leq -\frac{1}{C_{coerc}} \alpha(\eta, \xi).$$

Το  $\eta = u - \Pi u \notin V_h$ . Πράγματι το  $\eta = u - \Pi u \in H^4(\Omega, T_h) + V_h$ . Άρα το  $\eta = u - \Pi u$  δεν είναι πολυώνυμο.

Αφού το  $\eta$  δεν είναι πολυώνυμο, δε μπορούμε να εφαρμόσουμε της συνθήκη συνέχειας (continuity) της διγραμμικής μορφής  $\alpha(\eta, \xi)$ , διότι για την μέθοδο που εφαρμόζουμε, αυτή ισχύει μονάχα στον πεπερασμένης διάστασης χώρο  $V_h$ .

Τώρα θα δείξουμε ότι

$$(5.4.7) \quad -\frac{1}{C_{coerc}} \alpha(\eta, \xi) \leq \frac{1}{C_{coerc}} |\alpha(\eta, \xi)| \leq C \|\xi\|_E f(\eta).$$

Η διγραμμική μορφή  $\alpha(\eta, \xi)$  είναι

$$\begin{aligned} \alpha(\eta, \xi) = & \sum_{K \in T_h} \int_K \Delta \eta \cdot \Delta \xi - \sum_e \int_e \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e - \\ & - \sum_e \int_e \langle \Delta \xi \rangle_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e + \sum_e \int_e \beta_e [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} |\alpha(\eta, \xi)| \leq & \left| \sum_{K \in T_h} \int_K \Delta \eta \cdot \Delta \xi \right| + \left| \sum_e \int_e \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| + \\ & + \left| \sum_e \int_e \langle \Delta \xi \rangle_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \right| + \left| \sum_e \int_e \beta_e [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| \end{aligned}$$

με

$$\left| \sum_{K \in T_h} \int_K \Delta \eta \cdot \Delta \xi \right| \leq \sum_{K \in T_h} \left| \int_K \Delta \eta \cdot \Delta \xi \right| \leq \sum_{K \in T_h} \int_K |\Delta \eta \cdot \Delta \xi|$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Delta \eta\|_{L^2(K)} \cdot \|\Delta \xi\|_{L^2(K)}$$

εφαρμόζοντας τη διακριτή ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Delta \eta\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Delta \xi\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\eta\|_E \cdot \|\xi\|_E.$$

Άρα

$$(5.4.8) \quad \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Delta \eta \cdot \Delta \xi \right| \leq \|\eta\|_E \cdot \|\xi\|_E.$$

Επίσης

$$\begin{aligned} & \left| \sum_e \int_e \beta_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \sum_e \left| \int_e \beta_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \\ & \leq \sum_e \int_e \left| \beta_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| = \sum_e \int_e \left| \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \cdot \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\leq \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)} \cdot \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}$$

εφαρμόζοντας τη διακριτή ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\leq \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\eta\|_E \cdot \|\xi\|_E.$$

Άρα

$$(5.4.9) \quad \left| \sum_e \int_e \beta_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \|\eta\|_E \cdot \|\xi\|_E.$$

Επίσης

$$\begin{aligned} & \left| \sum_e \int_e \langle \Delta \xi \rangle_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \sum_e \left| \int_e \langle \Delta \xi \rangle_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \\ & \leq \sum_e \int_e \left| \langle \Delta \xi \rangle_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \right| = \sum_e \int_e \left| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \xi \rangle_e \cdot \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \right| \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & \leq \sum_e \left( \int_e \left( \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \xi \rangle_e \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_e \left( \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \sum_e \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \|\langle \Delta \xi \rangle_e\|_{L^2(e)} \cdot \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)} \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας τη διακριτή ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\leq \left( \sum_e \frac{1}{\beta_e} \cdot \|\langle \Delta \xi \rangle_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

αναλύουμε το  $\langle \Delta \xi \rangle_e = \frac{1}{2}(\Delta \xi|_{\partial K \cap e} + \Delta \xi|_{\partial K' \cap e})$ , οπότε

$$\begin{aligned} & = \left( \sum_e \frac{1}{\beta_e} \cdot \left\| \frac{1}{2}(\Delta \xi|_{\partial K \cap e} + \Delta \xi|_{\partial K' \cap e}) \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \left( \sum_e \frac{1}{4\beta_e} \cdot \|\Delta \xi|_{\partial K \cap e} + \Delta \xi|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα

$$\leq \left( \sum_e \frac{1}{4\beta_e} \cdot \left( \|\Delta \xi|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)} + \|\Delta \xi|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα (1.5.7)

$$\begin{aligned}
&\leq \left( \sum_{e \in \bar{K} \cap \bar{K}'} \frac{1}{4\beta_e} \cdot (2 \|\Delta \xi|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + 2 \|\Delta \xi|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left( \sum_{e \in \bar{K} \cap \bar{K}'} \frac{1}{2\beta_e} \cdot (\|\Delta \xi|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + \|\Delta \xi|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left( \sum_{K \in T_h} \frac{1}{2\beta_e} \cdot \|\Delta \xi\|_{L^2(\partial K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα αντιστρεψιμότητας (inverse inequality) (\*)

$$\leq \left( \sum_{K \in T_h} \frac{1}{2\beta_e} \cdot C_{inv} \cdot \frac{p^2}{h} \cdot \|\Delta \xi\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

θέλουμε  $\frac{1}{2\beta_e} \cdot C_{inv} \cdot \frac{p^2}{h} \leq \frac{1}{16}$  (τότε πρέπει το  $\beta_e \geq 8C_{inv} \cdot \frac{p^2}{h}$  η οποία είναι αναγκαία συνθήκη)

$$\begin{aligned}
&\leq \left( \sum_{K \in T_h} \frac{1}{16} \|\Delta \xi\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}} \cdot \left( \sum_{K \in T_h} \|\Delta \xi\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left( \sum_{K \in T_h} \|\Delta \xi\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4} \cdot \|\xi\|_E \cdot \|\eta\|_E.
\end{aligned}$$

Άρα

$$(5.4.10) \quad \left| \sum_e \int_e \langle \Delta \xi \rangle_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \frac{1}{4} \cdot \|\xi\|_E \cdot \|\eta\|_E.$$

(\*) Παρατήρηση 1: Η ανισότητα αντιστρεψιμότητας (inverse inequality) εφαρμόζεται μονάχα σε πολυώνυμα, επομένως μπορούμε να την εφαρμόσουμε για να αποδείξουμε την παραπάνω ανισότητα, αφού το  $\xi = \Pi u - u_h \in V_h$  ανήκει στο χώρο πεπερασμένης διάστασης  $V_h$  και άρα είναι πολυώνυμο.



Παρατήρηση 2: Το  $\eta = u - \Pi u$  όπως αναφέρεται παραπάνω δεν ανήκει στο χώρο πεπερασμένης διάστασης  $V_h$  και άρα δεν είναι πολυώνυμο, επομένως δε μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα αντιστρεψιμότητας (inverse inequality). Έτσι

φράσσουμε την ποσότητα  $\left| \sum_e \int_e \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right|$  με άλλο τρόπο.

$$\begin{aligned} \left| \sum_e \int_e \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| &\leq \sum_e \left| \int_e \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \\ &\leq \sum_e \int_e \left| \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| = \sum_e \int_e \left| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\leq \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)} \cdot \left\| \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right\|_{L^2(e)}$$

εφαρμόζοντας τη διακριτή ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} &\leq \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\beta_e} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \left\| \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\beta_e} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\xi\|_E. \end{aligned}$$

Άρα

$$(5.4.11) \quad \left| \sum_e \int_e \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\beta_e} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\xi\|_E.$$

Η διγραμμική μορφή  $\alpha(\eta, \xi)$  με τη βοήθεια των σχέσεων (5.4.8), (5.4.9), (5.4.10), (5.4.11) γίνεται

$$\begin{aligned}
& |\alpha(\eta, \xi)| \leq \\
& \leq \|\eta\|_E \cdot \|\xi\|_E + \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\xi\|_E + \frac{1}{4} \cdot \|\xi\|_E \cdot \|\eta\|_E + \|\eta\|_E \cdot \|\xi\|_E = \\
& = \|\xi\|_E \cdot \left( \frac{9}{4} \cdot \|\eta\|_E + \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq \\
& \leq C \|\xi\|_E \cdot \left( \|\eta\|_E + \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) = C \|\xi\|_E \cdot f(\eta)
\end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στις σχέσεις (5.4.6), (5.4.7) έχουμε πράγματι

$$\|\xi\|_E^2 \leq -\frac{1}{C_{coerc}} \alpha(\eta, \xi) \leq \frac{1}{C_{coerc}} |\alpha(\eta, \xi)| \leq C \|\xi\|_E f(\eta), \text{ οπότε}$$

$$(5.4.12) \quad \|\xi\|_E \leq C \cdot f(\eta) = C \left( \|\eta\|_E + \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Τώρα, αναλύουμε την ποσότητα  $\langle \Delta \eta \rangle_e = \frac{1}{2} (\Delta \eta|_{\partial K \cap e} + \Delta \eta|_{\partial K' \cap e})$ , οπότε

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_e \left\| \frac{1}{2\sqrt{\beta_e}} \cdot (\Delta \eta|_{\partial K \cap e} + \Delta \eta|_{\partial K' \cap e}) \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
& = \left( \sum_e \frac{1}{4\beta_e} \cdot \|(\Delta \eta|_{\partial K \cap e} + \Delta \eta|_{\partial K' \cap e})\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα

$$\leq \left( \sum_e \frac{1}{4\beta_e} \cdot \left( \|\Delta \eta|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)} + \|\Delta \eta|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα (1.5.7)

$$\begin{aligned} &\leq \left( \sum_{e \in \bar{K} \cap \bar{K}'} \frac{1}{4\beta_e} \cdot \left( 2 \|\Delta \eta|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + 2 \|\Delta \eta|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \sum_{e \in \bar{K} \cap \bar{K}'} \frac{1}{2\beta_e} \cdot \left( \|\Delta \eta|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + \|\Delta \eta|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα ίχνους (trace inequality)

$$\leq \left( \sum_{K \in T_h} \frac{C}{\beta_e} \cdot \left( h^{-1} \cdot \|\Delta \eta\|_{L^2(K)}^2 + \|\Delta \eta\|_{L^2(K)} \cdot \|\nabla \Delta \eta\|_{L^2(K)} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

(με τη βοήθεια της ανισότητας (5.4.2) έχουμε

$$(5.4.13) \quad \|\Delta \eta\|_{L^2(K)} \leq \|\eta\|_{H^2(K)} \leq C \frac{h^{s-2}}{p^{t-2}} \|u\|_{H^t(K)} \quad \forall K \in T_h$$

και

$$(5.4.14) \quad \|\nabla \Delta \eta\|_{L^2(K)} \leq \|\eta\|_{H^3(K)} \leq C \frac{h^{s-3}}{p^{t-3}} \|u\|_{H^t(K)} \quad \forall K \in T_h,$$

εφαρμόζοντας τις ανισότητες (5.4.13) και (5.4.14) στην τελευταία ανισότητα και αντικαθιστώντας το  $\beta_e = C \frac{p^2}{h}$  έχουμε

$$\begin{aligned} &\leq \left( \sum_{K \in T_h} C \frac{h}{p^2} \cdot \left( h^{-1} \cdot \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-4}} \|u\|_{H^t(K)}^2 + \frac{h^{s-2}}{p^{t-2}} \|u\|_{H^t(K)} \cdot \frac{h^{s-3}}{p^{t-3}} \|u\|_{H^t(K)} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( C \sum_{K \in T_h} \left( \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-2}} + \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-3}} \right) \|u\|_{H^t(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Δηλαδή} \quad \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( C \sum_{K \in T_h} \left( \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-2}} + \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-3}} \right) \|u\|_{H^t(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Άρα

$$(5.4.15) \quad \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{h^{2s-4}}{p^{2l-2}} + \frac{h^{2s-4}}{p^{2l-3}} \right) \|u\|_{H'(K)}^2.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$(5.4.16) \quad \|\eta\|_E^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Delta \eta\|_{L^2(K)}^2 + \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2.$$

Τώρα, αναλύουμε την ποσότητα  $[\nabla \eta]_e = \nabla \eta|_{\partial K \cap e} - \nabla \eta|_{\partial K' \cap e}$ , οπότε

$$\begin{aligned} \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 &= \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot (\nabla \eta|_{\partial K \cap e} - \nabla \eta|_{\partial K' \cap e}) \cdot \underline{\eta}\|_{L^2(e)}^2 \leq \\ &\leq \sum_e \beta_e \cdot \left( \|\nabla \eta|_{\partial K \cap e} - \nabla \eta|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)} \right)^2 \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα

$$\leq \sum_e \beta_e \cdot \left( \|\nabla \eta|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)} + \|\nabla \eta|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)} \right)^2$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα (1.5.7)

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{e \subset \bar{K} \cap \bar{K}'} \beta_e \cdot \left( 2 \|\nabla \eta|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + 2 \|\nabla \eta|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right) \\ &= \sum_{e \subset \bar{K} \cap \bar{K}'} 2\beta_e \cdot \left( \|\nabla \eta|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + \|\nabla \eta|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right) \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα ίχνους (trace inequality)

$$\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C\beta_e \cdot \left( h^{-1} \cdot \|\nabla \eta\|_{L^2(K)}^2 + \|\nabla \eta\|_{L^2(K)} \cdot \|\Delta \eta\|_{L^2(K)} \right)$$

(με τη βοήθεια της ανισότητας (5.4.2) έχουμε

$$(5.4.17) \quad \|\nabla \eta\|_{L^2(K)} \leq \|\eta\|_{H^1(K)} \leq C \frac{h^{s-1}}{p^{t-1}} \|u\|_{H^t(K)} \quad \forall K \in T_h),$$

εφαρμόζοντας τις ανισότητες (5.4.13) και (5.4.17) στην τελευταία ανισότητα και αντικαθιστώντας το  $\beta_e = C \frac{p^2}{h}$  έχουμε

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{K \in T_h} C \frac{p^2}{h} \cdot \left( h^{-1} \cdot \frac{h^{2s-2}}{p^{2t-2}} \|u\|_{H^t(K)}^2 + \frac{h^{s-1}}{p^{t-1}} \|u\|_{H^t(K)} \cdot \frac{h^{s-2}}{p^{t-2}} \|u\|_{H^t(K)} \right) = \\ &= C \sum_{K \in T_h} \left( \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-4}} + \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-5}} \right) \|u\|_{H^t(K)}^2. \end{aligned}$$

Άρα

$$(5.4.18) \quad \sum_e \|\sqrt{\beta_e} [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \leq C \sum_{K \in T_h} \left( \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-4}} + \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-5}} \right) \|u\|_{H^t(K)}^2.$$

Επίσης, με τη βοήθεια της ανισότητας (5.4.13) έχουμε

$$(5.4.19) \quad \sum_{K \in T_h} \|\Delta \eta\|_{L^2(K)}^2 \leq C \sum_{K \in T_h} \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-4}} \|u\|_{H^t(K)}^2.$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (5.4.18) και (5.4.19) στη σχέση (5.4.16) προκύπτει

$$(5.4.20) \quad \|\eta\|_E^2 \leq C \sum_{K \in T_h} \left( \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-4}} + \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-5}} \right) \|u\|_{H^t(K)}^2.$$

Έπειτα, από τη σχέση (5.4.1) έχουμε

$$\|u - u_h\|_E^2 = \|\eta + \xi\|_E^2 \leq (\|\eta\|_E + \|\xi\|_E)^2$$

αντικαθιστώντας τη σχέση (5.4.12)

$$\leq \left( \|\eta\|_E + C \left( \|\eta\|_E + \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα (1.5.7) δύο φορές

$$\begin{aligned} &\leq 2\|\eta\|_E^2 + 2C \left( \|\eta\|_E + \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq \\ &\leq 2\|\eta\|_E^2 + 2C \cdot 2\|\eta\|_E^2 + 2C \cdot 2 \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \leq \\ &\leq C \left( \|\eta\|_E^2 + \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right) \end{aligned}$$

με αντικατάσταση των σχέσεων (5.4.15) και (5.4.20) έχουμε

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-4}} + \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-5}} + \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-2}} + \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-3}} \right) \|u\|_{H^t(K)}^2 \leq \\ &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-5}} \|u\|_{H^t(K)}^2 = C \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-5}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{H^t(K)}^2 = C \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-5}} \|u\|_{H^t(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Αρα αποδείξαμε τη σχέση (5.4.5), δηλαδή

$$\|u - u_h\|_E^2 \leq C \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-5}} \|u\|_{H^t(\Omega)}^2.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι a priori εκτίμηση σφάλματος είναι βέλτιστη (optimal) στο  $h$ , αλλά είναι  $p$  υπο-βέλτιστη (suboptimal) από  $\frac{1}{2}$  τάξεις του  $p$ .

Τώρα θα αποδείξουμε την ανάλυση σφάλματος όταν το βήμα (mesh)  $h$  είναι μη-ομοιόμορφο.

Η διαδικασία είναι όμοια με εκείνη του ομοιόμορφου βήματος (mesh)  $h$ , εκτός από κάποιες μικρές διαφορές. Γι' αυτό το λόγο μόνο όπου χρειάζεται θα αλλάζουμε την αρίθμηση των σχέσεων.

Από την ιδιότητα coercivity της διγραμμικής μορφής  $\alpha(\cdot, \cdot)$  έχουμε

$$\begin{aligned} \|\xi\|_E^2 &\leq \frac{1}{C_{coerc}} \alpha(\xi, \xi) = \frac{1}{C_{coerc}} \alpha(\xi + \eta - \eta, \xi) = \frac{1}{C_{coerc}} (\alpha(\xi + \eta, \xi) + \alpha(-\eta, \xi)) = \\ &= \frac{1}{C_{coerc}} (\alpha(\xi + \eta, \xi) - \alpha(\eta, \xi)) = -\frac{1}{C_{coerc}} \alpha(\eta, \xi) \end{aligned}$$

όπου λόγω ορθογωνιότητας Galerkin, έχουμε  $\alpha(\xi + \eta, \xi) = \alpha(u - u_h, \xi) = 0$  επειδή το  $\xi = \Pi u - u_h \in V_h$ .

Συνεπώς,

$$(5.4.6) \quad \|\xi\|_E^2 \leq -\frac{1}{C_{coerc}} \alpha(\eta, \xi).$$

Το  $\eta = u - \Pi u \notin V_h$ . Πράγματι το  $\eta = u - \Pi u \in H^4(\Omega, T_h) + V_h$ . Άρα το  $\eta = u - \Pi u$  δεν είναι πολυώνυμο.

Αφού το  $\eta$  δεν είναι πολυώνυμο, δε μπορούμε να εφαρμόσουμε της συνθήκη συνέχειας (continuity) της διγραμμικής μορφής  $\alpha(\eta, \xi)$ , διότι για την μέθοδο που εφαρμόζουμε, αυτή ισχύει μονάχα στον πεπερασμένης διάστασης χώρο  $V_h$ .

Τώρα θα δείξουμε ότι

$$(5.4.7) \quad -\frac{1}{C_{coerc}} \alpha(\eta, \xi) \leq \frac{1}{C_{coerc}} |\alpha(\eta, \xi)| \leq C \|\xi\|_E f(\eta).$$

Η διγραμμική μορφή  $\alpha(\eta, \xi)$  είναι

$$\begin{aligned} \alpha(\eta, \xi) &= \sum_{K \in T_h} \int_K \Delta \eta \cdot \Delta \xi - \sum_e \int_e \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e - \\ &- \sum_e \int_e \langle \Delta \xi \rangle_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e + \sum_e \int_e \beta_e [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \end{aligned}$$

Επομένως,

$$|\alpha(\eta, \xi)| \leq \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Delta \eta \cdot \Delta \xi \right| + \left| \sum_e \int_e \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| +$$

$$+ \left| \sum_e \int_e \langle \Delta \xi \rangle_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \right| + \left| \sum_e \int_e \beta_e [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right|$$

με

$$(5.4.8) \quad \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Delta \eta \cdot \Delta \xi \right| \leq \|\eta\|_E \cdot \|\xi\|_E$$

και

$$(5.4.9) \quad \left| \sum_e \int_e \beta_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \|\eta\|_E \cdot \|\xi\|_E.$$

Επίσης

$$\left| \sum_e \int_e \langle \Delta \xi \rangle_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \sum_e \left| \int_e \langle \Delta \xi \rangle_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq$$

$$\leq \sum_e \int_e \left| \langle \Delta \xi \rangle_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \right| = \sum_e \int_e \left| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \xi \rangle_e \cdot \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \right|$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\leq \sum_e \left( \int_e \left( \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \xi \rangle_e \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_e \left( \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_e \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \|\langle \Delta \xi \rangle_e\|_{L^2(e)} \cdot \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}$$

εφαρμόζοντας τη διακριτή ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\leq \left( \sum_e \frac{1}{\beta_e} \cdot \|\langle \Delta \xi \rangle_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$



αναλύουμε το  $\langle \Delta \xi \rangle_e = \frac{1}{2}(\Delta \xi|_{\partial K \cap e} + \Delta \xi|_{\partial K' \cap e})$ , οπότε

$$\begin{aligned} &= \left( \sum_e \frac{1}{\beta_e} \cdot \left\| \frac{1}{2}(\Delta \xi|_{\partial K \cap e} + \Delta \xi|_{\partial K' \cap e}) \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \sum_e \frac{1}{4\beta_e} \cdot \left\| (\Delta \xi|_{\partial K \cap e} + \Delta \xi|_{\partial K' \cap e}) \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα

$$\leq \left( \sum_e \frac{1}{4\beta_e} \cdot \left( \|\Delta \xi|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)} + \|\Delta \xi|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα (1.5.7)

$$\begin{aligned} &\leq \left( \sum_{e \in \bar{K} \cap \bar{K}'} \frac{1}{4\beta_e} \cdot \left( 2\|\Delta \xi|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + 2\|\Delta \xi|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \sum_{e \in \bar{K} \cap \bar{K}'} \frac{1}{2\beta_e} \cdot \left( \|\Delta \xi|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + \|\Delta \xi|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{1}{2\beta_{e_1}} \cdot \|\Delta \xi\|_{L^2(e_1)}^2 + \frac{1}{2\beta_{e_2}} \cdot \|\Delta \xi\|_{L^2(e_2)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα αντιστρεψιμότητας (inverse inequality) (\*)

$$\leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{1}{2\beta_{e_1}} \cdot C_1 \cdot \frac{\{p^2\}_{e_1}}{h_{e_1}} \cdot \|\Delta \xi\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2\beta_{e_2}} \cdot C_2 \cdot \frac{\{p^2\}_{e_2}}{h_{e_2}} \cdot \|\Delta \xi\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\text{θέτουμε } \hat{C} = \max \left\{ \frac{1}{2\beta_{e_1}} \cdot C_1 \cdot \frac{\{p^2\}_{e_1}}{h_{e_1}}, \frac{1}{2\beta_{e_2}} \cdot C_2 \cdot \frac{\{p^2\}_{e_2}}{h_{e_2}} \right\}$$

$$\leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \hat{C} \|\Delta \xi\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

θέλουμε  $\hat{C} \leq \frac{1}{16}$  (τότε πρέπει το  $\beta_{e_i} \geq 8C_i \cdot \frac{\{p^2\}_{e_i}}{h_{e_i}}$  η οποία είναι αναγκαία συνθήκη)

$$\begin{aligned} &\leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{16} \|\Delta \xi\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Delta \xi\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4} \cdot \|\xi\|_E \cdot \|\eta\|_E. \end{aligned}$$

Άρα

$$(5.4.21) \quad \left| \sum_e \int_e \langle \Delta \xi \rangle_e \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \frac{1}{4} \cdot \|\xi\|_E \cdot \|\eta\|_E.$$

(\*)Παρατήρηση 3: Ομοίως με την Παρατήρηση 1.

Παρατήρηση 4: Ομοίως με την παρατήρηση 2.

$$\begin{aligned} &\left| \sum_e \int_e \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \sum_e \left| \int_e \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \\ &\leq \sum_e \int_e \left| \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| = \sum_e \int_e \left| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\leq \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)} \cdot \left\| \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right\|_{L^2(e)}$$

εφαρμόζοντας τη διακριτή ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} &\leq \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\beta_e} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_e \left\| \sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\beta_e} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\xi\|_E. \end{aligned}$$

Άρα

$$(5.4.11) \quad \left| \sum_e \int_e \langle \Delta \eta \rangle_e \cdot [\nabla \xi \cdot \underline{\eta}]_e \right| \leq \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\xi\|_E.$$

Η διγραμμική μορφή  $\alpha(\eta, \xi)$  με τη βοήθεια των σχέσεων (5.4.8), (5.4.9), (5.4.21), (5.4.11) γίνεται

$$\begin{aligned} &|\alpha(\eta, \xi)| \leq \\ &\leq \|\eta\|_E \cdot \|\xi\|_E + \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\xi\|_E + \frac{1}{4} \cdot \|\xi\|_E \cdot \|\eta\|_E + \|\eta\|_E \cdot \|\xi\|_E = \\ &= \|\xi\|_E \cdot \left( \frac{9}{4} \cdot \|\eta\|_E + \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq \\ &\leq C \|\xi\|_E \cdot \left( \|\eta\|_E + \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) = C \|\xi\|_E \cdot f(\eta) \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στις σχέσεις (5.4.6), (5.4.7) έχουμε πράγματι

$$\|\xi\|_E^2 \leq -\frac{1}{C_{coerc}} \alpha(\eta, \xi) \leq \frac{1}{C_{coerc}} |\alpha(\eta, \xi)| \leq C \|\xi\|_E f(\eta), \text{ οπότε}$$

$$(5.4.12) \quad \|\xi\|_E \leq C \cdot f(\eta) = C \left( \|\eta\|_E + \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Τώρα, αναλύουμε την ποσότητα  $\langle \Delta \eta \rangle_e = \frac{1}{2}(\Delta \eta|_{\partial K \cap e} + \Delta \eta|_{\partial K' \cap e})$ , οπότε

$$\begin{aligned} & \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_e \left\| \frac{1}{2\sqrt{\beta_e}} \cdot (\Delta \eta|_{\partial K \cap e} + \Delta \eta|_{\partial K' \cap e}) \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \left( \sum_e \frac{1}{4\beta_e} \cdot \|(\Delta \eta|_{\partial K \cap e} + \Delta \eta|_{\partial K' \cap e})\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα

$$\leq \left( \sum_e \frac{1}{4\beta_e} \cdot \left( \|\Delta \eta|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)} + \|\Delta \eta|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα (1.5.7)

$$\begin{aligned} & \leq \left( \sum_{e \subset \bar{K} \cap \bar{K}'} \frac{1}{4\beta_e} \cdot \left( 2\|\Delta \eta|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + 2\|\Delta \eta|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \left( \sum_{e \subset \bar{K} \cap \bar{K}'} \frac{1}{2\beta_e} \cdot \left( \|\Delta \eta|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + \|\Delta \eta|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{1}{2\beta_{e_1}} \cdot \|\Delta \eta\|_{L^2(e_1)}^2 + \frac{1}{2\beta_{e_2}} \cdot \|\Delta \eta\|_{L^2(e_2)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

με αντικατάσταση του  $\beta_e = C \frac{\{p^2\}_e}{h_e}$

$$= \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{2} \left( \frac{h_{e_1}}{C_1 \{p^2\}_{e_1}} \|\Delta \eta\|_{L^2(e_1)}^2 + \frac{h_{e_2}}{C_2 \{p^2\}_{e_2}} \|\Delta \eta\|_{L^2(e_2)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα ίχνους (trace inequality)

$$\leq \left( \sum_{K \in T_h} \frac{1}{2} \left( \frac{h_{e_1}}{C_1 \{p^2\}_{e_1}} C \left\{ h_{e_1}^{-1} \cdot \|\Delta \eta\|_{L^2(K)}^2 + \|\Delta \eta\|_{L^2(K)} \cdot \|\nabla \Delta \eta\|_{L^2(K)} \right\} + \frac{h_{e_2}}{C_2 \{p^2\}_{e_2}} C \left\{ h_{e_2}^{-1} \cdot \|\Delta \eta\|_{L^2(K)}^2 + \|\Delta \eta\|_{L^2(K)} \cdot \|\nabla \Delta \eta\|_{L^2(K)} \right\} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left( \sum_{K \in T_h} C \left( \frac{1}{\{p^2\}_{e_1}} \left\{ \|\Delta \eta\|_{L^2(K)}^2 + h_{e_1} \cdot \|\Delta \eta\|_{L^2(K)} \cdot \|\nabla \Delta \eta\|_{L^2(K)} \right\} + \frac{1}{\{p^2\}_{e_2}} \left\{ \|\Delta \eta\|_{L^2(K)}^2 + h_{e_2} \cdot \|\Delta \eta\|_{L^2(K)} \cdot \|\nabla \Delta \eta\|_{L^2(K)} \right\} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

(με τη βοήθεια της ανισότητας (5.4.2) έχουμε

$$(5.4.22) \quad \|\Delta \eta\|_{L^2(K)} \leq \|\eta\|_{H^2(K)} \leq C \frac{h_K^{s_K-2}}{p_K^{t_K-2}} \|u\|_{H^{t_K}(K)} \quad \forall K \in T_h$$

και

$$(5.4.23) \quad \|\nabla \Delta \eta\|_{L^2(K)} \leq \|\eta\|_{H^3(K)} \leq C \frac{h_K^{s_K-3}}{p_K^{t_K-3}} \|u\|_{H^{t_K}(K)} \quad \forall K \in T_h,$$

εφαρμόζοντας τις ανισότητες (5.4.22) και (5.4.23) στην τελευταία ανισότητα έχουμε

$$\leq \left( C \sum_{K \in T_h} \left( \frac{1}{\{p^2\}_{e_1}} \left\{ \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2t_K-4}} \|u\|_{H^{t_K}(K)}^2 + h_{e_1} \frac{h_K^{s_K-2}}{p_K^{t_K-2}} \|u\|_{H^{t_K}(K)} \frac{h_K^{s_K-3}}{p_K^{t_K-3}} \|u\|_{H^{t_K}(K)} \right\} + \frac{1}{\{p^2\}_{e_2}} \left\{ \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2t_K-4}} \|u\|_{H^{t_K}(K)}^2 + h_{e_2} \frac{h_K^{s_K-2}}{p_K^{t_K-2}} \|u\|_{H^{t_K}(K)} \frac{h_K^{s_K-3}}{p_K^{t_K-3}} \|u\|_{H^{t_K}(K)} \right\} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left( C \sum_{K \in T_h} \left( \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2t_K-2}} + \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2t_K-3}} \right) \|u\|_{H^{t_K}(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Δηλαδή} \quad \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( C \sum_{K \in T_h} \left( \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2t_K-2}} + \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2t_K-3}} \right) \|u\|_{H^{t_K}(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Άρα

$$(5.4.24) \quad \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right) \leq \left( C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{h_K^{2s_K-4}}{P_K^{2t_K-2}} + \frac{h_K^{2s_K-4}}{P_K^{2t_K-3}} \right) \|u\|_{H^{t_K}(K)}^2 \right).$$

Γνωρίζουμε ότι

$$(5.4.16) \quad \|\eta\|_E^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Delta \eta\|_{L^2(K)}^2 + \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2.$$

Τώρα, αναλύουμε την ποσότητα  $[\nabla \eta]_e = \nabla \eta|_{\partial K \cap e} - \nabla \eta|_{\partial K' \cap e}$ , οπότε

$$\begin{aligned} \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 &= \sum_e \|\sqrt{\beta_e} \cdot (\nabla \eta|_{\partial K \cap e} - \nabla \eta|_{\partial K' \cap e}) \cdot \underline{\eta}\|_{L^2(e)}^2 \leq \\ &\leq \sum_e \beta_e \cdot \left( \|\nabla \eta|_{\partial K \cap e} - \nabla \eta|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)} \right)^2 \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα

$$\leq \sum_e \beta_e \cdot \left( \|\nabla \eta|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)} + \|\nabla \eta|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)} \right)^2$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα (1.5.7)

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{e \subset \bar{K} \cap \bar{K}'} \beta_e \cdot \left( 2 \|\nabla \eta|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + 2 \|\nabla \eta|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right) = \\ &= \sum_{e \subset \bar{K} \cap \bar{K}'} 2\beta_e \cdot \left( \|\nabla \eta|_{\partial K \cap e}\|_{L^2(e)}^2 + \|\nabla \eta|_{\partial K' \cap e}\|_{L^2(e)}^2 \right) = \\ &= \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} 2 \left( \beta_{e_1} \cdot \|\nabla \eta\|_{L^2(e_1)}^2 + \beta_{e_2} \cdot \|\nabla \eta\|_{L^2(e_2)}^2 \right) \right) \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα ίχνους (trace inequality) και αντικαθιστώντας

$$\text{το } \beta_{e_i} = C \frac{\{P^2\}_{e_i}}{h_{e_i}}$$

$$\leq \left( \sum_{K \in T_h} 2 \left( C_1 \frac{\{p^2\}_{e_1}}{h_{e_1}} C \left\{ h_{e_1}^{-1} \cdot \|\nabla \eta\|_{L^2(K)}^2 + \|\nabla \eta\|_{L^2(K)} \cdot \|\Delta \eta\|_{L^2(K)} \right\} + \right. \right. \\ \left. \left. + C_2 \frac{\{p^2\}_{e_2}}{h_{e_2}} C \left\{ h_{e_2}^{-1} \cdot \|\nabla \eta\|_{L^2(K)}^2 + \|\nabla \eta\|_{L^2(K)} \cdot \|\Delta \eta\|_{L^2(K)} \right\} \right) \right) \leq \\ \leq C \sum_{K \in T_h} \left( \frac{\{p^2\}_{e_1}}{h_{e_1}} \left\{ h_{e_1}^{-1} \cdot \|\nabla \eta\|_{L^2(K)}^2 + \|\nabla \eta\|_{L^2(K)} \cdot \|\Delta \eta\|_{L^2(K)} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\{p^2\}_{e_2}}{h_{e_2}} \left\{ h_{e_2}^{-1} \cdot \|\nabla \eta\|_{L^2(K)}^2 + \|\nabla \eta\|_{L^2(K)} \cdot \|\Delta \eta\|_{L^2(K)} \right\} \right) \leq$$

(με τη βοήθεια της ανισότητας (5.4.2) έχουμε

$$(5.4.25) \quad \|\nabla \eta\|_{L^2(K)} \leq \|\eta\|_{H^1(K)} \leq C \frac{h_K^{s_K-1}}{p_K^{t_K-1}} \|u\|_{H^{t_K}(K)} \quad \forall K \in T_h,$$

εφαρμόζοντας τις ανισότητες (5.4.22) και (5.4.25) στην τελευταία ανισότητα έχουμε

$$\leq C \sum_{K \in T_h} \left( \frac{\{p^2\}_{e_1}}{h_{e_1}} \left\{ h_{e_1}^{-1} \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2t_K-2}} \|u\|_{H^{t_K}(K)}^2 + \frac{h_K^{s_K-1}}{p_K^{t_K-1}} \|u\|_{H^{t_K}(K)} \cdot \frac{h_K^{s_K-2}}{p_K^{t_K-2}} \|u\|_{H^{t_K}(K)} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\{p^2\}_{e_2}}{h_{e_2}} \left\{ h_{e_2}^{-1} \frac{h_K^{2s_K-2}}{p_K^{2t_K-2}} \|u\|_{H^{t_K}(K)}^2 + \frac{h_K^{s_K-1}}{p_K^{t_K-1}} \|u\|_{H^{t_K}(K)} \cdot \frac{h_K^{s_K-2}}{p_K^{t_K-2}} \|u\|_{H^{t_K}(K)} \right\} + \right) \leq \\ \leq C \sum_{K \in T_h} \left( \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2t_K-4}} + \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2t_K-5}} \right) \|u\|_{H^{t_K}(K)}^2.$$

Άρα

$$(5.4.26) \quad \sum_e \|\sqrt{\beta_e} [\nabla \eta \cdot \underline{\eta}]_e\|_{L^2(e)}^2 \leq C \sum_{K \in T_h} \left( \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2t_K-4}} + \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2t_K-5}} \right) \|u\|_{H^{t_K}(K)}^2.$$

Επίσης, με τη βοήθεια της ανισότητας (5.4.22) έχουμε

$$(5.4.27) \quad \sum_{K \in T_h} \|\Delta \eta\|_{L^2(K)}^2 \leq C \sum_{K \in T_h} \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2t_K-4}} \|u\|_{H^{t_K}(K)}^2.$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (5.4.26) και (5.4.27) στη σχέση (5.4.16) προκύπτει

$$(5.4.28) \quad \|\eta\|_E^2 \leq C \sum_{K \in T_h} \left( \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2l_K-4}} + \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2l_K-5}} \right) \|u\|_{H^{l_K}(K)}^2.$$

Έπειτα, από τη σχέση (5.4.1) έχουμε

$$\|u - u_h\|_E^2 = \|\eta + \xi\|_E^2 \leq (\|\eta\|_E + \|\xi\|_E)^2$$

αντικαθιστώντας τη σχέση (5.4.12)

$$\leq \left( \|\eta\|_E + C \left( \|\eta\|_E + \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα (1.5.7) δύο φορές

$$\begin{aligned} &\leq 2\|\eta\|_E^2 + 2C \left( \|\eta\|_E + \left( \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq \\ &\leq 2\|\eta\|_E^2 + 2C \cdot 2\|\eta\|_E^2 + 2C \cdot 2 \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \leq \\ &\leq C \left( \|\eta\|_E^2 + \sum_e \left\| \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \cdot \langle \Delta \eta \rangle_e \right\|_{L^2(e)}^2 \right) \end{aligned}$$

με αντικατάσταση των σχέσεων (5.4.24) και (5.4.28) έχουμε

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{K \in T_h} \left( \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2l_K-4}} + \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2l_K-5}} + \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2l_K-2}} + \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2l_K-3}} \right) \|u\|_{H^{l_K}(K)}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in T_h} \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2l_K-5}} \|u\|_{H^{l_K}(K)}^2. \end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε τη σχέση (5.4.4), δηλαδή



$$\|u - u_h\|_E^2 \leq C \sum_{K \in T_h} \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2t_K-5}} \|u\|_{H^{t_K}(K)}^2. \quad \square$$

Αξιίζει να σημειώσουμε ότι a priori εκτίμηση σφάλματος είναι βέλτιστη (optimal) στο  $h$ , αλλά είναι  $p$  υπο-βέλτιστη (suboptimal) από  $\frac{1}{2}$  τάξεις του  $p$ .

Παρακάτω δίνουμε ένα θεώρημα που περιγράφει το παραπάνω αποτέλεσμα.

**Θεώρημα.** Υποθέτουμε ότι  $\Omega$  είναι ένα φραγμένο πολυεδρικό χωρίο στον  $\mathbb{R}^d$  και ότι  $\{T_h\}_{h>0}$  είναι μία οικογένεια υποδιαιρέσεων κανονικού σχήματος (shape-regular), διαμορφωμένη από  $d$ -διάστατα παραλληλεπίπεδα. Έστω  $\mathbf{p} = (p_K : K \in T_h, p_K \in \mathbb{N}, p_K \geq 3)$  είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα πολυωνυμικού βαθμού φραγμένης τοπικής μεταβολής. Τότε η a priori εκτίμηση σφάλματος της  $hp$ -εκδοχής στην  $\|\cdot\|_E$  νόρμα για τις συνεχείς μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων εσωτερικής ποιικής που ικανοποιεί το ακόλουθο φράγμα

$$\|u - u_h\|_E^2 \leq C \sum_{K \in T_h} \frac{h_K^{2s_K-4}}{p_K^{2t_K-5}} \|u\|_{H^{t_K}(K)}^2$$

είναι βέλτιστη (optimal) στο  $h$  και υπο-βέλτιστη (suboptimal) από  $\frac{1}{2}$  τάξεις του  $p$ , όπου  $1 \leq s_K \leq \min(p_K + 1, t_K)$  και  $C$  είναι μία σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από τη διάσταση  $d$  του χώρου, τη σταθερά κανονικού σχήματος  $c$ , τη σταθερά του τοπικού πολυωνυμικού βαθμού μεταβολής  $\rho$  και από το  $t = \max_{K \in T_h} t_K$ .

Αντίστοιχα, όταν το βήμα (mesh)  $h$  είναι ομοιόμορφο δηλαδή  $h_K = h$  και  $s_K = s, t_K = t, p_K = p \quad \forall K \in T_h$ , η a priori εκτίμηση σφάλματος που ικανοποιεί το ακόλουθο φράγμα

$$\|u - u_h\|_E^2 \leq C \frac{h^{2s-4}}{p^{2t-5}} \|u\|_{H^t(\Omega)}^2$$

είναι βέλτιστη (optimal) στο  $h$  και υπο-βέλτιστη (suboptimal) από  $\frac{1}{2}$  τάξεις του  $p$ , όπου  $1 \leq s \leq \min(p + 1, t)$  και  $C$  είναι μία σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από τη διάσταση  $d$  του χώρου και το  $t$ .



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΠΟΙΝΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΡΜΟΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΤΗ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο εφαρμόζουμε τις Συνεχείς Μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων Εσωτερικής Ποινής για τη διαρμονική εξίσωση στη μία διάσταση (1D). Θεωρούμε ότι ο χώρος πεπερασμένου στοιχείου  $V_h$  (όπως ορίζεται στην παράγραφο 5.1) αποτελείται από τα πολυώνυμα Lagrange δευτέρου βαθμού. Σκοπός μας είναι ο υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα (πίνακας ακαμψίας) του γραμμικού συστήματος  $Ac = b$  για αυτή τη μέθοδο.

#### 6.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ $Ac = b$ .

Θεωρούμε το συνοριακό πρόβλημα τιμών για τη διαρμονική εξίσωση στη μία διάσταση

$$(6.1.1) \quad \begin{aligned} u^{(4)} &= f, \quad x \in [0,1] \\ u(0) &= u(1) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{aligned}$$

και την ακολουθία  $\{x_i\}_{i=0}^n$  από  $n+1$  ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος  $[0,1]$  με  $x_i = ih$  και  $h = \frac{1}{n}$ .

Σε κάθε διάστημα  $[x_i, x_{i+1}]$  με μέσο  $x'_i$  υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που παίρνει την τιμή 1  $x_i$  ή στο  $x_{i+1}$  και την τιμή 0 στα 2 άλλα από τα 3 σημεία  $x_i, x'_i, x_{i+1}$ . Επιπλέον, υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που παίρνει την τιμή 1 στο  $x'_i$  και την τιμή 0 στα  $x_i, x_{i+1}$ .

Παρατηρούμε ότι ο φορέας της  $\phi_k$  είναι  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  και ο φορέας της  $\psi_k$  είναι  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Επίσης, βλέπουμε ότι  $\phi_k, \psi_k \in C[0,1]$ .

Χρησιμοποιώντας τον τύπο  $\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq \lambda}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_\lambda - x_i)}$  έχουμε

$$\phi_k(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{i-1} \\ \frac{x^2 - (x'_{i-1} + x_{i-1})x + x'_{i-1}x_{i-1}}{\frac{h^2}{2}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x^2 - (x'_i + x_{i+1})x + x'_i x_{i+1}}{\frac{h^2}{2}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_i \\ -\frac{x^2 - (x_i + x_{i+1})x + x_i x_{i+1}}{\frac{h^2}{4}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

$$\phi_{k+1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_i \\ \frac{x^2 - (x'_i + x_i)x + x'_i x_i}{\frac{h^2}{2}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \frac{x^2 - (x'_{i+1} + x_{i+2})x + x'_{i+1} x_{i+2}}{\frac{h^2}{2}}, & x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ 0, & x \geq x_{i+2} \end{cases}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η βάση για το χώρο πεπερασμένου στοιχείου  $V_h$  είναι το σύνολο  $\{\phi_0^+, \psi_0, \phi_1^-, \phi_1^+, \dots, \phi_{n-1}^+, \psi_{n-1}, \phi_n^-\} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{3n-2}, \phi_{3n-1}, \phi_{3n}\}$  με  $\phi_1(x) \neq 0$  και  $\phi_{3n}(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ .

Π.χ. συμβολίζουμε τη συνάρτηση με  $\phi_1^-$  όταν  $x \leq x_1$  και με  $\phi_1^+$  όταν  $x \geq x_1$ .

Τώρα, θεωρούμε ότι το πεπερασμένο στοιχείο  $K_i$  είναι αυτό που βρίσκεται στο φορέα  $[x_{i-1}, x_i]$  και το  $K_{i+1}$  αυτό που βρίσκεται στο φορέα  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Θα λύσουμε το συνοριακό πρόβλημα τιμών (6.1.1) με τον τρόπο που περιγράφεται στις παραγράφους 5.2 και 5.3.

Ομοίως, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με μια συνάρτηση  $v \in H^4([0,1], T_h)$  και ολοκληρώνουμε ως προς  $[0,1]$

$$\int_0^1 u^{(4)}(x) \cdot v(x) dx = \int_0^1 f(x) \cdot v(x) dx .$$

Μετά διασπάμε τα ολοκληρώματα ως

$$(6.1.2) \quad \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} u^{(4)}(x) \cdot v(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cdot v(x) dx .$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη ως προς κάποιο στοιχείο  $[x_{i-1}, x_i] \in T_h$ , για οποιοσδήποτε  $u \in H^4([x_{i-1}, x_i])$  και  $v \in H^4([x_{i-1}, x_i])$ , έχουμε

$$(6.1.3) \quad \begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u^{(4)}(x) \cdot v(x) dx &= - \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'''(x) \cdot v'(x) dx + u'''(x) \cdot v(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(x) \cdot v''(x) dx - u''(x) \cdot v'(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + u'''(x) \cdot v(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \end{aligned}$$

$$\forall [x_{i-1}, x_i] \in T_h .$$

Αντικαθιστώντας την ισότητα (6.1.3) στη σχέση (6.1.2) συμπεραίνουμε ότι

$$(6.1.4) \quad \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(x) \cdot v''(x) dx - \sum_{i=1}^n u''(x) \cdot v'(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \sum_{i=1}^n u'''(x) \cdot v(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cdot v(x) dx$$

για οποιοσδήποτε συναρτήσεις  $u \in H^4([0,1], T_h)$  και  $v \in H^4([0,1], T_h)$ .

Έπειτα, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς του άλματος και της μέσης τιμής, ξαναγράφουμε τη σχέση (6.1.4) ως

$$(6.1.5) \quad \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(x) \cdot v''(x) dx - \sum_{i=0}^n \langle u''(x_i) \rangle \cdot [v'(x_i)] + \sum_{i=0}^n \langle u'''(x_i) \rangle \cdot [v(x_i)] = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cdot v(x) dx .$$

Επειδή  $u \in H^4([0,1], T_h)$  και  $v \in H^4([0,1], T_h)$  τότε η  $u$  και η  $u'$  είναι συνεχείς. Επομένως, το άλμα της  $u$ ,  $u'$  αντίστοιχα είναι μηδενικό, δηλαδή

$$[u(x_i)] = 0 \quad \forall x_i \quad i = 0, \dots, n$$

και

$$[u'(x_i)] = 0 \quad \forall x_i \quad i = 0, \dots, n.$$

Άρα και τα αθροίσματα που περιέχουν τις παραπάνω ποσότητες είναι ίσα με το μηδέν, δηλαδή

$$(6.1.6) \quad \sum_{i=0}^n \langle v'''(x_i) \rangle \cdot [u(x_i)] = 0$$

και

$$(6.1.7) \quad \sum_{i=0}^n \langle v''(x_i) \rangle \cdot [u'(x_i)] = 0.$$

Προσθέτοντας τη σχέση (6.1.6) στην (6.1.5) και ταυτόχρονα αφαιρώντας τη σχέση (6.1.7) προκύπτει η

$$(6.1.8) \quad \int_0^1 u''(x) \cdot v''(x) dx - \sum_{i=0}^n \langle u''(x_i) \rangle \cdot [v'(x_i)] - \sum_{i=0}^n \langle v''(x_i) \rangle \cdot [u'(x_i)] + \\ + \sum_{i=0}^n \langle u'''(x_i) \rangle \cdot [v(x_i)] + \sum_{i=0}^n \langle v'''(x_i) \rangle \cdot [u(x_i)] = \int_0^1 f(x) \cdot v(x).$$

Επίσης,

$$(6.1.9) \quad \sum_{i=0}^n \alpha \cdot [u(x_i)] \cdot [v(x_i)] = 0$$

και

$$(6.1.10) \quad \sum_{i=0}^n \beta \cdot [u'(x_i)] \cdot [v'(x_i)] = 0.$$

Προσθέτοντας τη σχέση (6.1.9) και (6.1.10) στην (6.1.8) προκύπτει η

$$(6.1.11) \quad \int_0^1 u''(x) \cdot v''(x) dx - \sum_{i=0}^n \langle u''(x_i) \rangle \cdot [v'(x_i)] - \sum_{i=0}^n \langle v''(x_i) \rangle \cdot [u'(x_i)] + \\ + \sum_{i=0}^n \langle u'''(x_i) \rangle \cdot [v(x_i)] + \sum_{i=0}^n \langle v'''(x_i) \rangle \cdot [u(x_i)] + \\ + \sum_{i=0}^n \alpha_{x_i} \cdot [u(x_i)] \cdot [v(x_i)] + \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot [u'(x_i)] \cdot [v'(x_i)] = \int_0^1 f(x) \cdot v(x).$$

Τότε, η «σπασμένη» ασθενής διατύπωση του συνοριακού προβλήματος τιμών για τη διααρμονική εξίσωση είναι ακολούθως:

βρείτε  $u \in H^4([0,1], T_h)$  έτσι ώστε

$$(6.1.12) \quad \alpha(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^4([0,1], T_h)$$

με τη διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  να είναι

$$\begin{aligned} \alpha(u, v) = & \int_0^1 u''(x) \cdot v''(x) dx - \sum_{i=0}^n \langle u''(x_i) \rangle \cdot [v'(x_i)] - \sum_{i=0}^n \langle v''(x_i) \rangle \cdot [u'(x_i)] + \\ & + \sum_{i=0}^n \langle u'''(x_i) \rangle \cdot [v(x_i)] + \sum_{i=0}^n \langle v'''(x_i) \rangle \cdot [u(x_i)] + \\ & + \sum_{i=0}^n \alpha_{x_i} \cdot [u(x_i)] \cdot [v(x_i)] + \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot [u'(x_i)] \cdot [v'(x_i)] \end{aligned}$$

και

$$l(v) = \int_0^1 f(x) \cdot v(x) dx.$$

Τότε το προσεγγιστικό πρόβλημα είναι

βρείτε  $u_h \in V_h$  έτσι ώστε

$$(6.1.13) \quad \alpha(u_h, v) = l(v) \quad \forall v \in V_h$$

με τη διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  να είναι

$$\begin{aligned} \alpha(u_h, v) = & \int_0^1 u_h''(x) \cdot v''(x) dx - \sum_{i=0}^n \langle u_h''(x_i) \rangle \cdot [v'(x_i)] - \\ & - \sum_{i=0}^n \langle v''(x_i) \rangle \cdot [u_h'(x_i)] + \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot [u_h'(x_i)] \cdot [v'(x_i)] \end{aligned}$$

και

$$l(v) = \int_0^1 f(x) \cdot v(x) dx.$$

Τα στοιχεία του πίνακα θα δίνονται από τη διγραμμική μορφή  $\alpha(u_h, v)$ , με τη λύση

$$u_h \text{ να δίνεται από τη σχέση } u_h = \sum_{k=1}^{3n} c_k \phi_k.$$

Επομένως η σχέση (6.1.13) γίνεται

$$(6.1.14) \quad \alpha\left(\sum_{k=1}^{3n} c_k \phi_k, \phi_j\right) = l(\phi_j) \quad \forall \phi_j \in V_h \quad j = 1, \dots, 3n.$$

$$\text{Τότε} \quad \sum_{k=1}^{3n} c_k \cdot \alpha(\phi_k, \phi_j) = l(\phi_j) \quad \forall \phi_j \in V_h \quad j = 1, \dots, 3n.$$

Άρα καταλήξαμε σε ένα σύστημα της μορφής  $Ac = b$  με  $A = [\alpha_{jk}]_{3n \times 3n}$  όπου

$$\begin{aligned} \alpha_{jk} = \alpha(\phi_k, \phi_j) &= \int_0^1 \phi_k''(x) \cdot \phi_j''(x) dx - \sum_{i=0}^n \langle \phi_k''(x_i) \rangle \cdot [\phi_j'(x_i)] \\ &- \sum_{i=0}^n \langle \phi_j''(x_i) \rangle \cdot [\phi_k'(x_i)] + \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot [\phi_k'(x_i)] \cdot [\phi_j'(x_i)]. \end{aligned} \quad \forall j, k = 1, \dots, 3n.$$

και

$$b = [b_j]_{3n \times 1} = l(\phi_j).$$

Παρατήρηση 1: Ο πίνακας  $A = [\alpha_{jk}]_{3n \times 3n}$  είναι συμμετρικός, επειδή η διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  είναι συμμετρική όπως αναφέρεται στην Παρατήρηση 2 της παραγράφου 5.2.

Παρατήρηση 2: Το βήμα  $h$  είναι ομοιόμορφο, οπότε θεωρούμε ότι

$$\beta_{x_i} = \frac{p^2}{h} = \frac{4}{h} \quad \forall i = 0, \dots, n.$$



Τα διαγώνια στοιχεία  $\alpha_{kk}$  του πίνακα  $A = [\alpha_{jk}]_{3n \times 3n}$  δίνονται από

$$\begin{aligned}
 \alpha_{kk} &= \alpha(\phi_k, \phi_k) = \int_0^1 (\phi_k''(x))^2 dx - 2 \sum_{i=0}^n \langle \phi_k''(x_i) \rangle \cdot [\phi_k'(x_i)] + \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot ([\phi_k'(x_i)])^2 = \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_k''(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_k''(x))^2 dx - \sum_{i=0}^n (\phi_k''(x_i+) + \phi_k''(x_i-)) \cdot (\phi_k'(x_i+) - \phi_k'(x_i-)) + \\
 &+ \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot (\phi_k'(x_i+) - \phi_k'(x_i-))^2 = \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_k''(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_k''(x))^2 dx - \left\{ \begin{aligned} &(\phi_k''(x_{i-1}+) + \phi_k''(x_{i-1}-)) \cdot (\phi_k'(x_{i-1}+) - \phi_k'(x_{i-1}-)) + \\ &+ (\phi_k''(x_i+) + \phi_k''(x_i-)) \cdot (\phi_k'(x_i+) - \phi_k'(x_i-)) + \\ &+ (\phi_k''(x_{i+1}+) + \phi_k''(x_{i+1}-)) \cdot (\phi_k'(x_{i+1}+) - \phi_k'(x_{i+1}-)) \end{aligned} \right\} + \\
 &+ \beta_{x_{i-1}} \cdot (\phi_k'(x_{i-1}+) - \phi_k'(x_{i-1}-))^2 + \beta_{x_i} \cdot (\phi_k'(x_i+) - \phi_k'(x_i-))^2 + \beta_{x_{i+1}} \cdot (\phi_k'(x_{i+1}+) - \phi_k'(x_{i+1}-))^2 = \\
 &= \frac{16}{h^3} + \frac{16}{h^3} - \left\{ \left( \frac{4}{h^2} + 0 \right) \cdot \left( -\frac{1}{h} - 0 \right) + \left( \frac{4}{h^2} + \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( -\frac{3}{h} - \frac{3}{h} \right) + \left( 0 + \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( 0 - \frac{1}{h} \right) \right\} + \\
 &+ \frac{4}{h} \cdot \left( -\frac{1}{h} - 0 \right)^2 + \frac{4}{h} \cdot \left( -\frac{3}{h} - \frac{3}{h} \right)^2 + \frac{4}{h} \cdot \left( 0 - \frac{1}{h} \right)^2 = \frac{240}{h^3}.
 \end{aligned}$$

Άρα

$$\alpha_{kk} = \frac{240}{h^3}.$$

Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $A = [\alpha_{jk}]_{3n \times 3n}$  στο σύνορο δίνονται από

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \alpha(\phi_1, \phi_1) = \int_0^1 (\phi_1''(x))^2 dx - 2 \sum_{i=0}^n \langle \phi_1''(x_i) \rangle \cdot [\phi_1'(x_i)] + \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot ([\phi_1'(x_i)])^2 = \\
&= \int_{x_0}^{x_1} (\phi_1''(x))^2 dx - 2 \langle \phi_1''(x_0) \rangle \cdot [\phi_1'(x_0)] - 2 \langle \phi_1''(x_1) \rangle \cdot [\phi_1'(x_1)] + \\
&+ \beta_{x_0} \cdot ([\phi_1'(x_0)])^2 + \beta_{x_1} \cdot ([\phi_1'(x_1)])^2 = \\
&= \int_0^{x_1} (\phi_1''(x))^2 dx - \left\{ \begin{aligned} &2(\phi_1''(x_0+)) \cdot (\phi_1'(x_0+)) + \\ &+ 2 \frac{1}{2} (\phi_1''(x_1+) + \phi_1''(x_1-)) \cdot (\phi_1'(x_1+) - \phi_1'(x_1-)) \end{aligned} \right\} + \\
&+ \beta_{x_0} \cdot (\phi_1'(x_0+))^2 + \beta_{x_1} \cdot (\phi_1'(x_1+) - \phi_1'(x_1-))^2 = \\
&= \frac{16}{h^3} - \left\{ 2 \left( \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( -\frac{3}{h} \right) + \left( 0 + \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( 0 - \frac{1}{h} \right) \right\} + \\
&+ \frac{4}{h} \cdot \left( -\frac{3}{h} \right)^2 + \frac{4}{h} \cdot \left( 0 - \frac{1}{h} \right)^2 = \frac{84}{h^3}.
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\alpha_{3n,3n} &= \alpha(\phi_{3n}, \phi_{3n}) = \int_0^1 (\phi_{3n}''(x))^2 dx - 2 \sum_{i=0}^n \langle \phi_{3n}''(x_i) \rangle \cdot [\phi_{3n}'(x_i)] + \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot ([\phi_{3n}'(x_i)])^2 = \\
&= \int_{x_{n-1}}^{x_n} (\phi_{3n}''(x))^2 dx - 2 \langle \phi_{3n}''(x_{n-1}) \rangle \cdot [\phi_{3n}'(x_{n-1})] - 2 \langle \phi_{3n}''(x_n) \rangle \cdot [\phi_{3n}'(x_n)] + \\
&+ \beta_{x_{n-1}} \cdot ([\phi_{3n}'(x_{n-1})])^2 + \beta_{x_n} \cdot ([\phi_{3n}'(x_n)])^2 = \\
&= \int_{x_{n-1}}^{x_n} (\phi_{3n}''(x))^2 dx - \left\{ \begin{aligned} &2 \frac{1}{2} (\phi_{3n}''(x_{n-1}+) + \phi_{3n}''(x_{n-1}-)) \cdot (\phi_{3n}'(x_{n-1}+) - \phi_{3n}'(x_{n-1}-)) + \\ &+ 2 (\phi_{3n}''(x_n-)) \cdot (\phi_{3n}'(x_n-)) \end{aligned} \right\} + \\
&+ \beta_{x_{n-1}} \cdot (\phi_{3n}'(x_{n-1}+) - \phi_{3n}'(x_{n-1}-))^2 + \beta_{x_n} \cdot (\phi_{3n}'(x_n-))^2 = \\
&= \frac{16}{h^3} - \left\{ \left( \frac{4}{h^2} + 0 \right) \cdot \left( -\frac{1}{h} - 0 \right) + 2 \left( \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( \frac{3}{h} \right) \right\} + \\
&+ \frac{4}{h} \cdot \left( -\frac{1}{h} - 0 \right)^2 + \frac{4}{h} \cdot \left( \frac{3}{h} \right)^2 = \frac{36}{h^3}.
\end{aligned}$$

όπου

$$\phi_1(x) = \frac{x^2 - \frac{3}{2}hx + \frac{h^2}{2}}{\frac{h^2}{2}}, \quad x_0 \leq x \leq x_1 \quad \text{και}$$

$$\phi_{3n}(x) = \frac{x^2 - (x'_{n-1} + x_{n-1})x + x'_{n-1}x_{n-1}}{\frac{h^2}{2}}, \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n.$$

Τα τριςδιαγώνια στοιχεία  $\alpha_{k+1,k}$  του πίνακα  $A = [\alpha_{jk}]_{3n \times 3n}$  δίνονται από

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1,k} &= \alpha(\phi_k, \psi_k) = \int_0^1 \phi_k''(x) \cdot \psi_k''(x) dx - \sum_{i=0}^n \langle \phi_k''(x_i) \rangle \cdot [\psi_k'(x_i)] \\ &- \sum_{i=0}^n \langle \psi_k''(x_i) \rangle \cdot [\phi_k'(x_i)] + \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot [\phi_k'(x_i)] \cdot [\psi_k'(x_i)] = \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_k''(x) \cdot \psi_k''(x) dx - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (\phi_k''(x_i+) + \phi_k''(x_i-)) \cdot (\psi_k'(x_i+) - \psi_k'(x_i-)) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (\psi_k''(x_i+) + \psi_k''(x_i-)) \cdot (\phi_k'(x_i+) - \phi_k'(x_i-)) + \\ &+ \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot (\phi_k'(x_i+) - \phi_k'(x_i-)) \cdot (\psi_k'(x_i+) - \psi_k'(x_i-)) = \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_k''(x) \cdot \psi_k''(x) dx - \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &(\phi_k''(x_{i-1}+) + \phi_k''(x_{i-1}-)) \cdot (\psi_k'(x_{i-1}+) - \psi_k'(x_{i-1}-)) + \\ &+ (\phi_k''(x_i+) + \phi_k''(x_i-)) \cdot (\psi_k'(x_i+) - \psi_k'(x_i-)) + \\ &+ (\phi_k''(x_{i+1}+) + \phi_k''(x_{i+1}-)) \cdot (\psi_k'(x_{i+1}+) - \psi_k'(x_{i+1}-)) \end{aligned} \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &(\psi_k''(x_{i-1}+) + \psi_k''(x_{i-1}-)) \cdot (\phi_k'(x_{i-1}+) - \phi_k'(x_{i-1}-)) + \\ &+ (\psi_k''(x_i+) + \psi_k''(x_i-)) \cdot (\phi_k'(x_i+) - \phi_k'(x_i-)) + \\ &+ (\psi_k''(x_{i+1}+) + \psi_k''(x_{i+1}-)) \cdot (\phi_k'(x_{i+1}+) - \phi_k'(x_{i+1}-)) \end{aligned} \right\} + \\ &+ \beta_{x_{i-1}} \cdot (\phi_k'(x_{i-1}+) - \phi_k'(x_{i-1}-)) \cdot (\psi_k'(x_{i-1}+) - \psi_k'(x_{i-1}-)) + \\ &+ \beta_{x_i} \cdot (\phi_k'(x_i+) - \phi_k'(x_i-)) \cdot (\psi_k'(x_i+) - \psi_k'(x_i-)) + \\ &+ \beta_{x_{i+1}} \cdot (\phi_k'(x_{i+1}+) - \phi_k'(x_{i+1}-)) \cdot (\psi_k'(x_{i+1}+) - \psi_k'(x_{i+1}-)) = \\ &= -\frac{32}{h^3} - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{4}{h^2} + 0 \right) \cdot (0+0) + \left( \frac{4}{h^2} + \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( \frac{4}{h} - 0 \right) + \left( 0 + \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( 0 + \frac{4}{h} \right) \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \left\{ (0+0) \cdot \left( -\frac{1}{h} - 0 \right) + \left( -\frac{8}{h^2} + 0 \right) \cdot \left( -\frac{3}{h} - \frac{3}{h} \right) + \left( 0 - \frac{8}{h^2} \right) \cdot \left( 0 - \frac{1}{h} \right) \right\} + \\ &+ \frac{4}{h} \cdot \left( -\frac{1}{h} - 0 \right) \cdot (0-0) + \frac{4}{h} \cdot \left( -\frac{3}{h} - \frac{3}{h} \right) \cdot \left( \frac{4}{h} - 0 \right) + \frac{4}{h} \cdot \left( 0 - \frac{1}{h} \right) \cdot \left( 0 + \frac{4}{h} \right) = -\frac{196}{h^3}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\alpha_{k+1,k} = -\frac{196}{h^3}.$$

Τα τριςδιαγώνια στοιχεία του πίνακα  $A = [\alpha_{jk}]_{3n \times 3n}$  στο σύνορο δίνονται από

$$\begin{aligned}
 \alpha_{21} = \alpha(\phi_1, \phi_2) &= \int_0^1 \phi_1''(x) \cdot \phi_2''(x) dx - \sum_{i=0}^n \langle \phi_1''(x_i) \rangle \cdot [\phi_2'(x_i)] \\
 &- \sum_{i=0}^n \langle \phi_2''(x_i) \rangle \cdot [\phi_1'(x_i)] + \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot [\phi_1'(x_i)] \cdot [\phi_2'(x_i)] = \\
 &= \int_0^{x_1} \phi_1''(x) \cdot \phi_2''(x) dx - \langle \phi_1''(x_0) \rangle \cdot [\phi_2'(x_0)] - \langle \phi_1''(x_1) \rangle \cdot [\phi_2'(x_1)] - \\
 &- \langle \phi_2''(x_0) \rangle \cdot [\phi_1'(x_0)] - \langle \phi_2''(x_1) \rangle \cdot [\phi_1'(x_1)] + \\
 &+ \beta_{x_0} \cdot [\phi_1'(x_0)] \cdot [\phi_2'(x_0)] + \beta_{x_1} \cdot [\phi_1'(x_1)] \cdot [\phi_2'(x_1)] = \\
 &= \int_0^{x_1} \phi_1''(x) \cdot \phi_2''(x) dx - \left\{ \begin{aligned} &(\phi_1''(x_0+)) \cdot (\phi_2'(x_0)) + \\ &+ \frac{1}{2} (\phi_1''(x_1+) + \phi_1''(x_1-)) \cdot (\phi_2'(x_1) - \phi_2'(x_1-)) \end{aligned} \right\} - \\
 &- \left\{ \begin{aligned} &(\phi_2''(x_0+)) \cdot (\phi_1'(x_0+)) + \\ &+ \frac{1}{2} (\phi_2''(x_1+) + \phi_2''(x_1-)) \cdot (\phi_1'(x_1) - \phi_1'(x_1-)) \end{aligned} \right\} + \\
 &+ \beta_{x_0} \cdot (\phi_1'(x_0+)) \cdot (\phi_2'(x_0+)) + \\
 &+ \beta_{x_1} \cdot (\phi_1'(x_1+) - \phi_1'(x_1-)) \cdot (\phi_2'(x_1+) - \phi_2'(x_1-)) = \\
 &= -\frac{32}{h^3} - \left\{ \left( \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( \frac{4}{h} \right) + \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( 0 + \frac{4}{h} \right) \right\} - \\
 &- \left\{ \left( -\frac{8}{h^2} \right) \cdot \left( -\frac{3}{h} \right) + \frac{1}{2} \left( 0 - \frac{8}{h^2} \right) \cdot \left( 0 - \frac{1}{h} \right) \right\} + \\
 &+ \frac{4}{h} \cdot \left( -\frac{3}{h} \right) \cdot \left( \frac{4}{h} \right) + \frac{4}{h} \cdot \left( 0 - \frac{1}{h} \right) \cdot \left( 0 + \frac{4}{h} \right) = -\frac{148}{h^3}.
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\alpha_{3n,3n-1} &= \alpha(\phi_{3n-1}, \phi_{3n}) = \int_0^1 \phi_{3n-1}''(x) \cdot \phi_{3n}''(x) dx - \sum_{i=0}^n \langle \phi_{3n-1}''(x_i) \rangle \cdot [\phi_{3n}'(x_i)] - \\
&- \sum_{i=0}^n \langle \phi_{3n}''(x_i) \rangle \cdot [\phi_{3n-1}'(x_i)] + \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot [\phi_{3n-1}'(x_i)] \cdot [\phi_{3n}'(x_i)] = \\
&= \int_{x_{n-1}}^{x_n} \phi_{3n-1}''(x) \cdot \phi_{3n}''(x) dx - \langle \phi_{3n-1}''(x_{n-1}) \rangle \cdot [\phi_{3n}'(x_{n-1})] - \langle \phi_{3n-1}''(x_n) \rangle \cdot [\phi_{3n}'(x_n)] - \\
&- \langle \phi_{3n}''(x_{n-1}) \rangle \cdot [\phi_{3n-1}'(x_{n-1})] - \langle \phi_{3n}''(x_n) \rangle \cdot [\phi_{3n-1}'(x_n)] + \\
&+ \beta_{x_{n-1}} \cdot [\phi_{3n-1}'(x_{n-1})] \cdot [\phi_{3n}'(x_{n-1})] + \beta_{x_n} \cdot [\phi_{3n-1}'(x_n)] \cdot [\phi_{3n}'(x_n)] = \\
&= \int_{x_{n-1}}^{x_n} \phi_{3n-1}''(x) \cdot \phi_{3n}''(x) dx - \left\{ \frac{1}{2} (\phi_{3n-1}''(x_{n-1}+) + \phi_{3n-1}''(x_{n-1}-)) \cdot (\phi_{3n}'(x_{n-1}+) - \phi_{3n}'(x_{n-1}-)) + \right. \\
&\quad \left. + (\phi_{3n-1}''(x_n-)) \cdot (\phi_{3n}'(x_n-)) \right\} - \\
&- \left\{ \frac{1}{2} (\phi_{3n}''(x_{n-1}+) + \phi_{3n}''(x_{n-1}-)) \cdot (\phi_{3n-1}'(x_{n-1}+) - \phi_{3n-1}'(x_{n-1}-)) + \right\} + \\
&\quad \left. + (\phi_{3n}''(x_n-)) \cdot (\phi_{3n-1}'(x_n-)) \right\} + \\
&+ \beta_{x_{n-1}} \cdot (\phi_{3n-1}'(x_{n-1}+) - \phi_{3n-1}'(x_{n-1}-)) \cdot (\phi_{3n}'(x_{n-1}+) - \phi_{3n}'(x_{n-1}-)) + \\
&+ \beta_{x_n} \cdot (\phi_{3n-1}'(x_n-)) \cdot (\phi_{3n}'(x_n-)) = \\
&= -\frac{32}{h^3} - \left\{ \frac{1}{2} \left( -\frac{8}{h^2} + 0 \right) \cdot \left( -\frac{1}{h} - 0 \right) + \left( -\frac{8}{h^2} \right) \cdot \left( \frac{3}{h} \right) \right\} - \\
&- \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{4}{h^2} + 0 \right) \cdot \left( \frac{4}{h} - 0 \right) + \left( \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( -\frac{4}{h} \right) \right\} + \\
&+ \frac{4}{h} \cdot \left( \frac{4}{h} - 0 \right) \cdot \left( -\frac{1}{h} - 0 \right) + \frac{4}{h} \cdot \left( -\frac{4}{h} \right) \cdot \left( \frac{3}{h} \right) = -\frac{68}{h^3}.
\end{aligned}$$

όπου

$$\phi_2(x) = \frac{-x^2 + hx}{\frac{h^2}{4}}, \quad x_0 \leq x \leq x_1 \quad \text{και}$$

$$\phi_{3n-1}(x) = -\frac{x^2 - (x_{n-1} + x_n)x + x_{n-1}x_n}{\frac{h^2}{4}}, \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n.$$

Τα πενταδιαγώνια στοιχεία  $\alpha_{k+2,k}$  του πίνακα  $A = [\alpha_{jk}]_{3n \times 3n}$  δίνονται από

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+2,k} &= \alpha(\phi_k, \phi_{k+1}) = \int_0^1 \phi_k''(x) \cdot \phi_{k+1}''(x) dx - \sum_{i=0}^n \langle \phi_k''(x_i) \rangle \cdot [\phi_{k+1}'(x_i)] - \\
& - \sum_{i=0}^n \langle \phi_{k+1}''(x_i) \rangle \cdot [\phi_k'(x_i)] + \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot [\phi_k'(x_i)] \cdot [\phi_{k+1}'(x_i)] = \\
& = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_k''(x) \cdot \phi_{k+1}''(x) dx - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (\phi_k''(x_{i+}) + \phi_k''(x_{i-})) \cdot (\phi_{k+1}'(x_{i+}) - \phi_{k+1}'(x_{i-})) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (\phi_{k+1}''(x_{i+}) + \phi_{k+1}''(x_{i-})) \cdot (\phi_k'(x_{i+}) - \phi_k'(x_{i-})) + \\
& + \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot (\phi_k'(x_{i+}) - \phi_k'(x_{i-})) \cdot (\phi_{k+1}'(x_{i+}) - \phi_{k+1}'(x_{i-})) = \\
& = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_k''(x) \cdot \phi_{k+1}''(x) dx - \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left( (\phi_k''(x_{i-1+}) + \phi_k''(x_{i-1-})) \cdot (\phi_{k+1}'(x_{i-1+}) - \phi_{k+1}'(x_{i-1-})) + \right. \\ & \left. + (\phi_k''(x_i+) + \phi_k''(x_i-)) \cdot (\phi_{k+1}'(x_i+) - \phi_{k+1}'(x_i-)) + \right. \\ & \left. + (\phi_k''(x_{i+1+}) + \phi_k''(x_{i+1-})) \cdot (\phi_{k+1}'(x_{i+1+}) - \phi_{k+1}'(x_{i+1-})) + \right. \\ & \left. + (\phi_k''(x_{i+2+}) + \phi_k''(x_{i+2-})) \cdot (\phi_{k+1}'(x_{i+2+}) - \phi_{k+1}'(x_{i+2-})) \right) \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left( (\phi_{k+1}''(x_{i-1+}) + \phi_{k+1}''(x_{i-1-})) \cdot (\phi_k'(x_{i-1+}) - \phi_k'(x_{i-1-})) + \right. \\ & \left. + (\phi_{k+1}''(x_i+) + \phi_{k+1}''(x_i-)) \cdot (\phi_k'(x_i+) - \phi_k'(x_i-)) + \right. \\ & \left. + (\phi_{k+1}''(x_{i+1+}) + \phi_{k+1}''(x_{i+1-})) \cdot (\phi_k'(x_{i+1+}) - \phi_k'(x_{i+1-})) + \right. \\ & \left. + (\phi_{k+1}''(x_{i+2+}) + \phi_{k+1}''(x_{i+2-})) \cdot (\phi_k'(x_{i+2+}) - \phi_k'(x_{i+2-})) \right) \\ & + \beta_{x_{i-1}} \cdot (\phi_k'(x_{i-1+}) - \phi_k'(x_{i-1-})) \cdot (\phi_{k+1}'(x_{i-1+}) - \phi_{k+1}'(x_{i-1-})) + \\ & + \beta_{x_i} \cdot (\phi_k'(x_i+) - \phi_k'(x_i-)) \cdot (\phi_{k+1}'(x_i+) - \phi_{k+1}'(x_i-)) + \\ & + \beta_{x_{i+1}} \cdot (\phi_k'(x_{i+1+}) - \phi_k'(x_{i+1-})) \cdot (\phi_{k+1}'(x_{i+1+}) - \phi_{k+1}'(x_{i+1-})) + \\ & + \beta_{x_{i+2}} \cdot (\phi_k'(x_{i+2+}) - \phi_k'(x_{i+2-})) \cdot (\phi_{k+1}'(x_{i+2+}) - \phi_{k+1}'(x_{i+2-})) = \\ & = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_k''(x) \cdot \phi_{k+1}''(x) dx - \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left( (\phi_k''(x_i+) + \phi_k''(x_i-)) \cdot (\phi_{k+1}'(x_i+) - \phi_{k+1}'(x_i-)) + \right. \\ & \left. + (\phi_k''(x_{i+1+}) + \phi_k''(x_{i+1-})) \cdot (\phi_{k+1}'(x_{i+1+}) - \phi_{k+1}'(x_{i+1-})) \right) \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left( (\phi_{k+1}''(x_i+) + \phi_{k+1}''(x_i-)) \cdot (\phi_k'(x_i+) - \phi_k'(x_i-)) + \right. \\ & \left. + (\phi_{k+1}''(x_{i+1+}) + \phi_{k+1}''(x_{i+1-})) \cdot (\phi_k'(x_{i+1+}) - \phi_k'(x_{i+1-})) \right) \\ & + \beta_{x_i} \cdot (\phi_k'(x_i+) - \phi_k'(x_i-)) \cdot (\phi_{k+1}'(x_i+) - \phi_{k+1}'(x_i-)) + \\ & + \beta_{x_{i+1}} \cdot (\phi_k'(x_{i+1+}) - \phi_k'(x_{i+1-})) \cdot (\phi_{k+1}'(x_{i+1+}) - \phi_{k+1}'(x_{i+1-})) = \\ & = \frac{16}{h^3} - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{4}{h^2} + \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( -\frac{1}{h} - 0 \right) + \left( 0 + \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( -\frac{3}{h} - \frac{3}{h} \right) \right\} - \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{4}{h^2} + 0 \right) \cdot \left( -\frac{3}{h} - \frac{3}{h} \right) + \left( \frac{4}{h^2} + \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( 0 - \frac{1}{h} \right) \right\} + \\ & + \frac{4}{h} \cdot \left( -\frac{3}{h} - \frac{3}{h} \right) \cdot \left( -\frac{1}{h} - 0 \right) + \frac{4}{h} \cdot \left( 0 - \frac{1}{h} \right) \cdot \left( -\frac{3}{h} - \frac{3}{h} \right) = \frac{96}{h^3}. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\alpha_{k+2,k} = \frac{96}{h^3}.$$

Τα πενταδιαγώνια στοιχεία του πίνακα  $A = [\alpha_{jk}]_{3n \times 3n}$  στο σύνορο δίνονται από

$$\begin{aligned} \alpha_{31} = \alpha(\phi_1, \phi_3) &= \int_0^1 \phi_1''(x) \cdot \phi_3''(x) dx - \sum_{i=0}^n \langle \phi_1''(x_i) \rangle \cdot [\phi_3'(x_i)] \\ &- \sum_{i=0}^n \langle \phi_3''(x_i) \rangle \cdot [\phi_1'(x_i)] + \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot [\phi_1'(x_i)] \cdot [\phi_3'(x_i)] = \\ &= \int_0^{x_1} \phi_1''(x) \cdot \phi_3''(x) dx - \langle \phi_1''(x_0) \rangle \cdot [\phi_3'(x_0)] - \langle \phi_1''(x_1) \rangle \cdot [\phi_3'(x_1)] - \\ &- \langle \phi_1''(x_2) \rangle \cdot [\phi_3'(x_2)] - \langle \phi_3''(x_0) \rangle \cdot [\phi_1'(x_0)] - \\ &- \langle \phi_3''(x_1) \rangle \cdot [\phi_1'(x_1)] - \langle \phi_3''(x_2) \rangle \cdot [\phi_1'(x_2)] + \\ &+ \beta_{x_0} \cdot [\phi_1'(x_0)] \cdot [\phi_3'(x_0)] + \beta_{x_1} \cdot [\phi_1'(x_1)] \cdot [\phi_3'(x_1)] + \beta_{x_2} \cdot [\phi_1'(x_2)] \cdot [\phi_3'(x_2)] = \\ &= \int_0^{x_1} \phi_1''(x) \cdot \phi_3''(x) dx - \left\{ \begin{aligned} &(\phi_1''(x_0+)) \cdot (\phi_3'(x_0)) + \\ &+ \frac{1}{2} (\phi_1''(x_1+) + \phi_1''(x_1-)) \cdot (\phi_3'(x_1) - \phi_3'(x_1-)) \end{aligned} \right\} - \\ &- \left\{ \begin{aligned} &(\phi_3''(x_0+)) \cdot (\phi_1'(x_0+)) + \\ &+ \frac{1}{2} (\phi_3''(x_1+) + \phi_3''(x_1-)) \cdot (\phi_1'(x_1) - \phi_1'(x_1-)) \end{aligned} \right\} + \\ &+ \beta_{x_0} \cdot (\phi_1'(x_0+)) \cdot (\phi_3'(x_0+)) + \\ &+ \beta_{x_1} \cdot (\phi_1'(x_1+) - \phi_1'(x_1-)) \cdot (\phi_3'(x_1+) - \phi_3'(x_1-)) = \\ &= \frac{16}{h^3} - \left\{ \left( \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( -\frac{1}{h} \right) + \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( -\frac{3}{h} - \frac{3}{h} \right) \right\} - \\ &- \left\{ \left( \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( -\frac{3}{h} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{4}{h^2} + \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( 0 - \frac{1}{h} \right) \right\} + \\ &+ \frac{4}{h} \cdot \left( -\frac{3}{h} \right) \cdot \left( -\frac{1}{h} \right) + \frac{4}{h} \cdot \left( 0 - \frac{1}{h} \right) \cdot \left( -\frac{3}{h} - \frac{3}{h} \right) = \frac{84}{h^3}. \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\alpha_{3n,3n-2} &= \alpha(\phi_{3n-2}, \phi_{3n}) = \int_0^1 \phi_{3n-2}''(x) \cdot \phi_{3n}''(x) dx - \sum_{i=0}^n \langle \phi_{3n-2}''(x_i) \rangle \cdot [\phi_{3n}'(x_i)] - \\
&- \sum_{i=0}^n \langle \phi_{3n}''(x_i) \rangle \cdot [\phi_{3n-2}'(x_i)] + \sum_{i=0}^n \beta_{x_i} \cdot [\phi_{3n-2}'(x_i)] \cdot [\phi_{3n}'(x_i)] = \\
&= \int_{x_{n-1}}^{x_n} \phi_{3n-2}''(x) \cdot \phi_{3n}''(x) dx - \langle \phi_{3n-2}''(x_{n-2}) \rangle \cdot [\phi_{3n}'(x_{n-2})] - \\
&- \langle \phi_{3n-2}''(x_{n-1}) \rangle \cdot [\phi_{3n}'(x_{n-1})] - \langle \phi_{3n-2}''(x_n) \rangle \cdot [\phi_{3n}'(x_n)] - \\
&- \langle \phi_{3n}''(x_{n-2}) \rangle \cdot [\phi_{3n-2}'(x_{n-2})] - \langle \phi_{3n}''(x_{n-1}) \rangle \cdot [\phi_{3n-2}'(x_{n-1})] - \\
&- \langle \phi_{3n}''(x_n) \rangle \cdot [\phi_{3n-2}'(x_n)] + \beta_{x_{n-2}} \cdot [\phi_{3n-2}'(x_{n-2})] \cdot [\phi_{3n}'(x_{n-2})] + \\
&+ \beta_{x_{n-1}} \cdot [\phi_{3n-2}'(x_{n-1})] \cdot [\phi_{3n}'(x_{n-1})] + \beta_{x_n} \cdot [\phi_{3n-2}'(x_n)] \cdot [\phi_{3n}'(x_n)] = \\
&= \int_{x_{n-1}}^{x_n} \phi_{3n-2}''(x) \cdot \phi_{3n}''(x) dx - \left\{ \frac{1}{2} (\phi_{3n-2}''(x_{n-1}+) + \phi_{3n-2}''(x_{n-1}-)) \cdot (\phi_{3n}'(x_{n-1}+) - \phi_{3n}'(x_{n-1}-)) + \right. \\
&\quad \left. + (\phi_{3n-2}''(x_n-)) \cdot (\phi_{3n}'(x_n-)) \right\} - \\
&- \left\{ \frac{1}{2} (\phi_{3n}''(x_{n-1}+) + \phi_{3n}''(x_{n-1}-)) \cdot (\phi_{3n-2}'(x_{n-1}+) - \phi_{3n-2}'(x_{n-1}-)) + \right\} + \\
&\quad \left\{ + (\phi_{3n}''(x_n-)) \cdot (\phi_{3n-2}'(x_n-)) \right\} + \\
&+ \beta_{x_{n-1}} \cdot (\phi_{3n-2}'(x_{n-1}+) - \phi_{3n-2}'(x_{n-1}-)) \cdot (\phi_{3n}'(x_{n-1}+) - \phi_{3n}'(x_{n-1}-)) + \\
&+ \beta_{x_n} \cdot (\phi_{3n-2}'(x_n-)) \cdot (\phi_{3n}'(x_n-)) = \\
&= \frac{16}{h^3} - \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{4}{h^2} + \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( -\frac{1}{h} - 0 \right) + \left( \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( \frac{3}{h} \right) \right\} - \\
&- \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{4}{h^2} + 0 \right) \cdot \left( -\frac{3}{h} - \frac{3}{h} \right) + \left( \frac{4}{h^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{h} \right) \right\} + \\
&+ \frac{4}{h} \cdot \left( -\frac{3}{h} - \frac{3}{h} \right) \cdot \left( -\frac{1}{h} - 0 \right) + \frac{4}{h} \cdot \left( \frac{1}{h} \right) \cdot \left( \frac{3}{h} \right) = \frac{52}{h^3}.
\end{aligned}$$

όπου

$$\phi_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \frac{h}{2}x}{\frac{h^2}{2}}, & x_0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{x^2 - \frac{7}{2}hx + 3h^2}{\frac{h^2}{2}}, & x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

και



$$\phi_{3n-2}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - (x'_{n-1} + x_n)x + x'_{n-1}x_n}{\frac{h^2}{2}}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ \frac{x^2 - (x'_{n-2} + x_{n-1})x + x'_{n-2}x_{n-1}}{\frac{h^2}{2}}, & x_{n-2} \leq x \leq x_{n-1} \end{cases}$$

Επίσης  $\alpha_{jk} = 0$  όταν  $|j-k| > 2 \quad \forall j, k$ .

Επομένως ο  $A = [\alpha_{jk}]_{3n \times 3n}$  είναι ένας πενταδιαγώνιος πίνακας της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} \frac{84}{h^3} & -\frac{148}{h^3} & \frac{84}{h^3} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{148}{h^3} & \frac{240}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{96}{h^3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{84}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{240}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{96}{h^3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{96}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{240}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{96}{h^3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{96}{h^3} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{96}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{240}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{52}{h^3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{96}{h^3} & -\frac{196}{h^3} & \frac{240}{h^3} & \frac{240}{h^3} & -\frac{68}{h^3} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{52}{h^3} & -\frac{68}{h^3} & \frac{36}{h^3} \end{pmatrix}_{3n \times 3n}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε τα  $[b_j]_{3n \times 1}$ . (Χρησιμοποιώντας ότι  $f(x) = x$  και  $x_i = ih$ ,  $i = 0, \dots, n$  όπου  $x_0 = 0$ ,  $x_n = 1$ ).

Αρχικά, υπολογίζουμε τα συνοριακά  $b_j$ , δηλαδή τα  $b_1, b_{3n}$ .

$$b_1 = l(\phi_1) = \int_0^1 f(x) \cdot \phi_1(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} x \left( \frac{x^2 - \frac{3}{2}hx + \frac{h^2}{2}}{\frac{h^2}{2}} \right) dx = \int_0^{x_1} x \left( \frac{x^2 - \frac{3}{2}hx + \frac{h^2}{2}}{\frac{h^2}{2}} \right) dx = 0.$$

$$b_{3n} = l(\phi_{3n}) = \int_0^1 f(x) \cdot \phi_{3n}(x) dx = \int_{x_{n-1}}^{x_n} x \left( \frac{x^2 - (2nh - \frac{3}{2}h)x + (n - \frac{1}{2})(n-1)h^2}{\frac{h^2}{2}} \right) dx = \frac{n}{6} h^2$$

Έπειτα, υπολογίζουμε τα  $b_2, \dots, b_{3n-1}$ . Υπενθυμίζουμε ότι ανάλογα με τη συνάρτηση που χρησιμοποιούμε και το φορέα της, θα αλλάζουν και τα  $b_j$ .

$$\text{Αν } \phi_k(x) = \frac{x^2 - (x'_{i-1} + x_{i-1})x + x'_{i-1}x_{i-1}}{\frac{h^2}{2}}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

$$\text{τότε } b_j = \int_{x_{i-1}}^{x_i} x \left( \frac{x^2 - (x'_{i-1} + x_{i-1})x + x'_{i-1}x_{i-1}}{\frac{h^2}{2}} \right) dx = \frac{i}{6} h^2.$$

$$\text{Αν } \phi_k(x) = \frac{x^2 - (x'_i + x_{i+1})x + x'_i x_{i+1}}{\frac{h^2}{2}}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

$$\text{τότε } b_j = \int_{x_i}^{x_{i+1}} x \left( \frac{x^2 - (x'_i + x_{i+1})x + x'_i x_{i+1}}{\frac{h^2}{2}} \right) dx = \frac{i}{6} h^2.$$

$$\text{Αν } \psi_k(x) = -\frac{x^2 - (x_i + x_{i+1})x + x_i x_{i+1}}{\frac{h^2}{4}}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

$$\text{τότε } b_j = \int_{x_i}^{x_{i+1}} x \left( -\frac{x^2 - (x_i + x_{i+1})x + x_i x_{i+1}}{\frac{h^2}{4}} \right) dx = \frac{2i+1}{3} h^2$$

Τα διαγώνια, τριδιαγώνια και πενταδιαγώνια στοιχεία του πίνακα  $A = [\alpha_{jk}]_{3n \times 3n}$  μπορούν να γραφούν με τη μορφή διανυσμάτων ως

$$t = \left( \frac{84}{h^3}, \frac{240}{h^3}, \dots, \frac{240}{h^3}, \frac{36}{h^3} \right),$$

όπου το πλήθος των εσωτερικών μη μηδενικών στοιχείων είναι  $3n - 2$ .

$$y = \left( -\frac{148}{h^3}, -\frac{196}{h^3}, \dots, -\frac{196}{h^3}, -\frac{68}{h^3} \right),$$

όπου το πλήθος των εσωτερικών μη μηδενικών στοιχείων είναι  $3n - 3$ .

$$z = \left( \frac{84}{h^3}, \frac{96}{h^3}, \dots, \frac{96}{h^3}, \frac{52}{h^3} \right),$$

όπου το πλήθος των εσωτερικών μη μηδενικών στοιχείων είναι  $3n - 4$ .

Επίσης, δίνουμε δύο προγράμματα σε Matlab τα οποία μας δίνουν τον πίνακα  $A = [\alpha_{jk}]_{3n \times 3n}$  και επιλύουν το σύστημα  $Ac = b$ .

$$n = n_0;$$

$$h = 1/n_0;$$

$$b = [0, (2i+1)h^2/3, ih^2/6, ih^2/6, \dots, (2i+1)h^2/3, nh^2/6];$$

$$t = [84/h^3, 240/h^3, \dots, 240/h^3, 36/h^3];$$

$$y = [-148/h^3, -196/h^3, \dots, -196/h^3, -68/h^3];$$

$$z = [84/h^3, 96/h^3, \dots, 96/h^3, 52/h^3];$$

$$a = \text{diag}(t);$$

$$q = \text{diag}(y, 1);$$

$$r = \text{diag}(y, -1);$$

$$s = \text{diag}(z, 2);$$

$$w = \text{diag}(z, -2);$$

$$A = a + q + r + s + w;$$

$$A2 = \text{sparse}(A);$$

$$c = A2 \setminus b$$

και

```

% Ypologismos toy pinaka akampsias A kai
% epilysh toy systhmatos Ac=b
% Dinoume to n
n=3;
% Me h symbolizoyme to step
h=1/n;
% Dinoume ta synoriaka stoixeia toy pinaka
A(1,1)=84/h^3;
A(1,2)=-148/h^3;
A(2,1)=-148/h^3;
A(3,1)=84/h^3;
A(1,3)=84/h^3;
A(3*n,3*n)=36/h^3;
A(3*n,3*n-1)=-68/h^3;
A(3*n-1,3*n)=-68/h^3;
A(3*n,3*n-2)=52/h^3;
A(3*n-2,3*n)=52/h^3;
% Ypologizoyme ta eswterika stoixeia toy symmetrikoy pinaka
for k=2:3*n-1
    A(k,k)=240/h^3;
end
for k=2:3*n-2
    A(k+1,k)=-196/h^3;
    A(k,k+1)=-196/h^3;
end
for k=2:3*n-3
    A(k+2,k)=96/h^3;
    A(k,k+2)=96/h^3;
end
% grafoyme ton pinaka se araih morfh
A2=sparse(A);
% Ypologizoyme to dianysma tw'n stathervn orwn b
% b(1) kai b(3*n) einai oi synoriakoi statheroi oroi
b(1)=0;
b(2)=h^2/3;
b(3*n)=n*h^2/6;
% Ypologizoyme ta eswterika stoixeia toy dianysmatos b
for i=1:n-1
    b(3*i+2)=(2*i+1)*h^2/3;
    b(3*(i-1)+3)=i*h^2/6;
    b(3*(i-1)+4)=i*h^2/6;
end
% Lynoume to systhma
c=A2\b'

```

$c =$

1.0e-003 \*

-0.1345

-0.0654

0.0194

0.0098

-0.0369

0.0121

0.1605

0.2266

0.2534

Επομένως, η προσεγγιστική λύση  $u_h$  θα είναι

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^9 c_j \phi_j(x) = \frac{1}{1000} \cdot \begin{pmatrix} -2.421 \cdot (x - \frac{1}{6})(x - \frac{1}{3}) + 2.3544 \cdot x(x - \frac{1}{3}) \\ + 0.3492 \cdot x(x - \frac{1}{6}) + 0.1764 \cdot (x - \frac{1}{2})(x - \frac{2}{3}) \\ + 1.3284 \cdot (x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3}) + 0.2178 \cdot (x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2}) \\ + 2.889 \cdot (x - \frac{5}{6})(x - 1) - 8.1576 \cdot (x - \frac{2}{3})(x - 1) \\ + 4.5612 \cdot (x - \frac{5}{6})(x - \frac{2}{3}) \end{pmatrix}.$$

Η ισχυρή λύση της διαρμονικής εξίσωσης

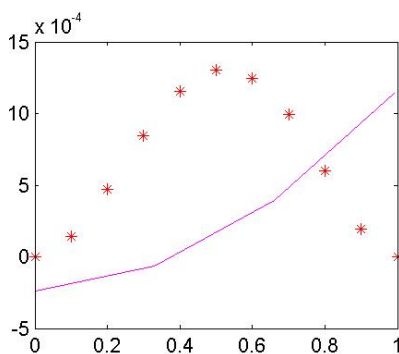
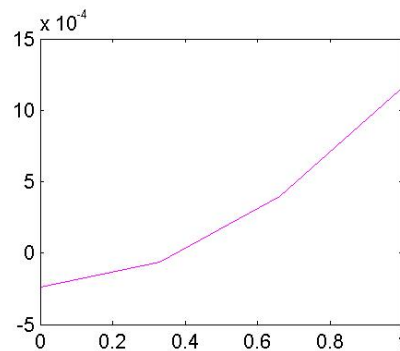
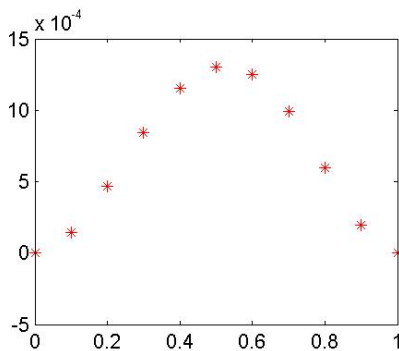
$$u^{(4)} = x, \quad x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$$

η οποία προκύπτει με τη βοήθεια του αόριστου ολοκληρώματος είναι η

$$u(x) = \frac{1}{120}(x^5 - 3x^3 + 2x^2).$$

Τέλος, δίνουμε τις γραφικές παραστάσεις των λύσεων. Η γραφική παράσταση της ισχυρής λύσης είναι η πάνω αριστερά, της προσεγγιστικής λύσης είναι η πάνω δεξιά και η κοινή γραφική τους παράσταση είναι η κάτω αριστερά, αντίστοιχα. Επομένως, παρατηρούμε ότι η λύση  $u_h$  (με βήμα  $h = \frac{1}{3}$ ) προσεγγίζει ικανοποιητικά την ισχυρή

λύση  $u(x) = \frac{1}{120}(x^5 - 3x^3 + 2x^2)$ , με σφάλμα όχι μεγαλύτερο της τάξης του  $10^{-3}$ .



## BIBΛIOΓΡΑΦΙΑ

- [1] R. A. ADAMS. Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.
- [2] GARTH A. BAKER. Finite Element Methods for Elliptic Equations Using Nonconforming Elements. MATHEMATICS OF COMPUTATION, VOLUME 31, NUMBER 137, PAGES 45-59, JANUARY 1977.
- [3] H. BLUM AND R. RANNACHER. On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners. Meth. Meth. Appl. Sci., 2:556 – 581, 1980.
- [4] D. BRAESS. Finite Elements. Theory, Fast Solvers and Application in Solid Mechanics. Cambridge University Press, 1977.
- [5] HAIM BREZIS. Analyse Fonctionnelle, theorie et applications. Masson , editeur, Paris, 1983.
- [6] SUSANNE C. BRENNER AND L. RIDGWAY SCOTT. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer.
- [7] X. –L. CHENG, W. HAN, and H. –C. HUANG. Some mixed finite element methods for the biharmonic equation. Journal of Comp. and Appl. Math., 126:91 – 109, 2000.
- [8] P. G. CIARLET. The Finite Element Method for Elliptic Problems. North – Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1978.
- [9] DOUGLAS N. ARNOLD, FRANCO BREZZI , BERNANDO COCKBURN AND L. DONATELLA MARINI. UNIFIED ANALYSIS OF DISCONTINUOUS GALERKIN METHODS FOR ELLIPTIC PROBLEMS. SIAM J. NUMER, ANAL. VOL. 39, No. 5, pp. 1749-1779. 2002 Society For Industrial and Applied Mathemaics.
- [10] J. DOUGLAS, JR. AND T. DUPONT. Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods. In Lectures Notes in Physics, Vol. 58. Springer-Verlog, 1976.

- [11] G. ENGEL, K. GARIKIPATI, T. J. R. HUGHES, M. G. LARSON, L. MAZZEI. Continuous/Discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problem in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191:3669-3750, 2002.
- [12] EMMANUIL GEORCOULIS. Discontinuous Galerkin Methods on Shape-Regular and Anisotropic Meshes. D. Phil. Thesis. University of Oxford, 2003.
- [13] P. HOUSTON, C. SCHWAB AND E.SULI. Discontinuous hp-finite element methods for advection - diffusion problems. Technical Report 00/15, Oxford University Computing Laboratory, 2000.
- [14] C. JOHNSON and J. PITKARANTA. Analysis of some mixed finite element methods related to reduced integration. *Math. Comp.*, 38:375 – 400, 1982.
- [15] D. MALKUS and T. J. R. HUGHES. Mixed finite element methods, reduced and selective integration techniques: A unification of concepts. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 15:63 – 81, 1978.
- [16] ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ ΜΑΡΚΟΛΕΦΑΣ ΚΑΙ Γ. ΤΣΑΜΑΣΦΥΡΟΣ. Μαθηματική Ανάλυση Γενικών Μικτών Μεθόδων Πεπερασμένων Στοιχείων. ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ, ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ. ΑΘΗΝΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2004.
- [17] IGOR MOZOLEVSKI AND ENDRE SULI. Hp-Version Interior Penalty DGFEMs for the Biharmonic Equation. OXFORD UNIVERSITY COMPUTING LABORATORY NUMERICAL ANALYSIS GROUP, (WOLFSON BUILDING. RARKS ROAD OXFORD, ENGLAND), Technical Report, FEBRUARY 2004.
- [18] Α. ΜΠΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΚΑΙ Ι. ΧΡΥΣΟΒΕΡΓΗΣ. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ. Πεπερασμένα στοιχεία και διαφορές. ΑΘΗΝΑ 2003.
- [19] ENDRE SULI. FINITE ELEMENT METHODS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. FEBRUARY 16, 2003.





