ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΟΜΒΩΝ, ΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ $JONES$ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ Η ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΟΜΑΔΩΝ $WEYL$

Αναστασιος Γ. Χρονοπουλος

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ: Σοφια Λαμπροπουλου (Αν. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.)

ΑΘΗΝΑ, Οκτώβριος 2005

Περιεχόμενα

0 *Πρόλογος* **5**

1 *Κόμβοι καί Κρίκοι* **7**
- 1.1 Τοπολογία Κόμβων καί Κρίκων . . . 7
- 1.2 Πράξεις Κόμβων και Αναλλοίωτες Κόμβων . . . 12
  - 1.2.1 Πράξεις Κόμβων και Ειδικές Περιπτώσεις Κόμβων . . . 12
  - 1.2.2 Αναλλοίωτες Κόμβων . . . 14
- 1.3 Κοτσίδες . . . 14

2 *Το Πολυώνυμο Jones* **23**
- 2.1 Βασικοί Ορισμοί . . . 23
- 2.2 Άλγεβρες *Hecke* . . . 27
  - 2.2.1 Η Κατασκευή των Αλγεβρών *Hecke* . . . 29
  - 2.2.2 Κανονική Βάση της Άλγεβρας *Hecke* . . . 31
- 2.3 Η Συνάρτηση Ίχνους του *Ocneanu* . . . 32
- 2.4 Το Πολυώνυμο *Jones* 2–μεταβλητών . . . 34

3 *Ομάδες Weyl* **39**
- 3.1 Ανακλάσεις σε Ευκλείδιους Χώρους . . . 39
- 3.2 Οι Ομάδες των Ανακλάσεων . . . 40
  - 3.2.1 Συστήματα Ριζών . . . 42
  - 3.2.2 Βάσεις των Συστημάτων Ριζών . . . 45
- 3.3 Ομάδες *Weyl* . . . 50
  - 3.3.1 Συνάρτηση Μήκους . . . 52
  - 3.3.2 Συνθήκες Αλλαγής και Διαγραφής . . . 53
  - 3.3.3 Ομάδες *Coxeter* . . . 55
  - 3.3.4 Σχέση των Ομάδων *Weyl* και *Coxeter* . . . 56
- 3.4 Ανάγωγα Συστήματα Ριζών . . . 59
- 3.5 Ταξινόμιση των Ομάδων *Weyl* . . . 61
  - 3.5.1 Γραφήματα *Coxeter* και Διαγράμματα *Dynkin* . . . 61
  - 3.5.2 Ανάγωγες Συνιστώσες . . . 63
  - 3.5.3 Το Θεώρημα Ταξινόμησης . . . 63

Κεφάλαιο 0

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία με θέμα "Εισαγωγή στη Θεωρία Κόμβων, το Πολυώνυμο $\mathcal{JONES}$ δύο Μεταβλητών και η Ταξινόμηση των Ομάδων $\mathcal{WEYL}$" χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος πραγματεύεται την παρουσίαση του πολυωνύμου $\mathcal{J}ones$ δύο μεταβλητών και το δεύτερο την ταξινόμηση των ομάδων $\mathcal{W}eyl$. Τα δύο αυτά μέρη δεν έχουν άμεση σχέση μεταξύ τους (έχουν μόνο έναν συνδετικό κρίκο, το γράφημα $Coxeter$ τύπου A - βλέπε και σχόλιο στο τέλος της εργασίας), ωστόσο είναι εξίσου ενδιαφέροντα.

Για την παρουσίαση του πολυωνύμου $\mathcal{J}ones$ κρίνεται απαραίτητο να γίνει μια εισαγωγή στην Θεωρία Κόμβων (εφόσον και το πολυώνυμο $\mathcal{J}ones$ αποτελεί μια αναλλοίωτη κόμβων). Έτσι, στο Κεφάλαιο 1 περιγράφονται κάποιες βασικές έννοιες της Θεωρίας Κόμβων και παρουσιάζεται σταδιακά το ανοικτό, μέχρι σήμερα, πρόβλημα της ταξινόμησης των κόμβων.

Στο Κεφάλαιο 2 αρχικά θα γίνει μια εισαγωγή στις *άλγεβρες* $Hecke$, μια έννοια καθοριστικής σημασίας για την δημιουργία του πολυωνύμου $Jones$ δύο μεταβλητών, το οποίο και παρουσιάζεται στη συνέχεια. Το πολυώνυμο $\mathcal{J}ones$ δύο μεταβλητών (ή αλλιώς πολυώνυμο $HOMFLYPT$) είναι μια από τις βέλτιστες υπάρχουσες αναλλοίωτες κόμβων. Η αναλλοίωτη αυτή πήρε το όνομά της από τον $V.F.R.\mathcal{J}ones$, ο οποίος και τιμήθηκε το 1985 με το βραβείο $Fields$, λόγω της κατασκευής του ομώνυμου πολυωνύμου μιας μεταβλητής.

Το τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο έχει ως στόχο την ταξινόμηση των ομάδων $\mathcal{W}eyl$. Έτσι, στην αρχή του Κεφαλαίου 3 παρατίθενται οι βασικές έννοιες, όπως: της ανάκλασης, των συστημάτων ριζών κ.λ.π. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι ομάδες $\mathcal{W}eyl$ με κάποιες σημαντικές ιδιότητές τους, και στο τέλος αναλύεται το Θεώρημα Ταξινόμηση των Ομάδων $\mathcal{W}eyl$, το οποίο και αποδεικνύεται.

Προαπαιτούμενες γνώσεις για την ανάγνωση των Κεφαλαίων 1 και 3 δεν είναι απαραίτητες. Ωστόσο, ο αναγνώστης θα ήταν καλό να είχε κάποιες βασικές γνώσεις Αλγεβρας για την καλύτερη κατανόηση του Κεφαλαίου 2.

Κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, ήταν σημαντική η συμπαράσταση της οικογένειάς μου και γι αυτό ευχαριστώ θερμά την μητέρα μου Ελισσάβετ και τον αδελφό μου Παναγιώτη. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους καθηγητές της ΣΕΜΦΕ, Σ. Καρανάσιο, Αν. Καθηγητή και Ε. Αγγελόπουλο, Καθηγητή, για της υποδείξεις τους. Εξαιρέτως δε, οφείλω να ευχαριστήσω την Αν.Καθηγήτρια Σ. Λαμπροπούλου τόσο για την πολύτιμη βοήθειά της, όσο και για τον χρόνο που μου αφιέρωσε καθ' όλη την διάρκεια της μελέτης και εκπόνησης της εργασίας αυτής. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τον φίλο μου Αριστείδη Σεϊμανίδη για τις σημαντικές του παρατηρήσεις.

Κεφάλαιο 1

Κόμβοι καί Κρίκοι

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά θα δοθεί η έννοια του κόμβου, του κρίκου και της ισοδυναμίας αυτών. Ακολούθως θα παρουσιαστεί ο διαισθητικός ορισμός τους και έπειτα ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός αυτών. Εν συνεχεία, θα αναφερθούν κάποιες βασικές πράξεις που ορίζονται στους κόμβους και κάποια παραδείγματα. Τέλος θα δοθεί η έννοια των κοτσίδων (και της ομάδας αυτών) και θα παρουσιαστούν δύο πολύ βασικά θεωρήματα για την συνέχεια· το θεώρημα *Alexander* και το θεώρημα *Markov*.

1.1 Τοπολογία Κόμβων καί Κρίκων

Μπορούμε να φανταστούμε τον κόμβο σαν ένα λεπτό και μπλεγμένο (μπερδεμένο) σκοινί του οποίου οι άκρες είναι ενωμένες. Ακόμα καλύτερα είναι να θεωρήσουμε ότι είναι κατασκευασμένο από λάστιχο και όχι από σκοινί. Αυτή η επιλογή όπως θα γίνει φανερό αργότερα, θα μας διευκολύνει στην μετέπειτα κατανόηση κάποιων τεχνικών που θα εφαρμοστούν σε κάποιους ορισμούς, αποδείξεις και παρατηρήσεις.

Με όμοιο τρόπο ο κρίκος μπορεί να νοηθεί σαν ένα πλήθος από μπλεγμένα λάστιχα με ενωμένες άκρες τα οποία όμως μπορεί να είναι και μπλεγμένα μεταξύ τους. Κατά πάσα πιθανότητα στην προσπάθειά μας να φανταστούμε καποιον κόμβο ή κρίκο τον φανταστήκαμε στις τρεις διαστάσεις. Αυτό είναι απολύτως φυσιολογικό από την στιγμή που η λέξη **μπλεγμένο** μας παραπέμπει αυτόματα στις τρεις διαστάσεις. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι οι κόμβοι "ζούνε" στις τρεις διαστάσεις. Όμως για την μελέτη τους είναι βολικό να χρησιμοποιούμε την κάθετη προβολή τους στο επίπεδο. Έτσι, για να μήν υπάρξει σύγχυση για την απεικόνιση του κόμβου στο επιλεγόμενο επίπεδο προβολής θα πρέπει να λάβουμε σοβαρά υπ' όψιν μας τα ακόλουθα:

(1) Οι εφαπτόμενες ευθείες σε όλα τα σημεία του κόμβου θα πρέπει να προβάλλονται πάνω σε ευθείες του επιπέδου προβολής (δηλαδή οι προβολές των εφαπτομένων δεν εκφυλίζονται ποτέ σε σημείο),

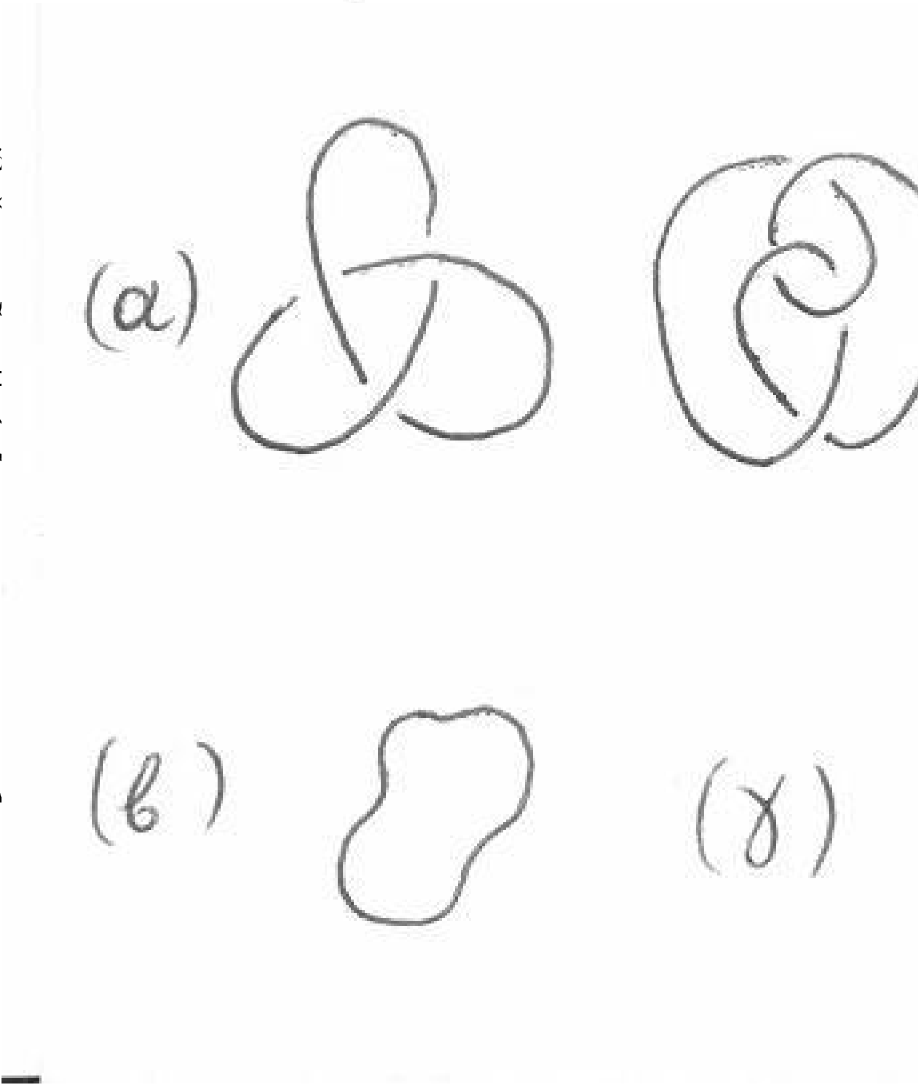
(2) Δεν πρέπει παραπάνω απο δύο διαφορετικά σημεία του κόμβου να προβάλλονται σε ένα και μοναδικό σημείο του επιπέδου,

(3) Δύο διαφορετικά σημεία του κό
επιπέδου μόνον εάν οι προβολές

(4) Το σύνολο των σημείων διασταύ
λονται δύο και μοναδικά σημεία

Συγκεκριμένα οι δύο ακόλουθες κατα
όταν τα σημεία τριών διαφορετικών κλ
σημείο ή όταν οι προβολές δύο κλάδω

Σχήμα 1.1: Α



Σχήμα 1.2: (α) Κόμβοι, (β) Τετριμμένος Κόμβος, (γ) Τετριμμένος Κρίκος.

ΣΧΟΛΙΟ : Οι προβολές κόμβων που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες θα λέγονται "διαγράμματα".

Ένας λίγο πιο αυστηρός διαισθητικός ορισμός του κόμβου είναι ο ακόλουθος: *Κόμβος* ονομάζεται κάθε κλειστή μη-αυτοτεμνόμενη καμπύλη του Ευκλείδιου χώρου $I\!R^3$. Τώρα θυμηθείτε το σχόλιο που κάναμε στον πρώτο διαισθητικό ορισμό του κόμβου, ότι δηλαδή η κατασκευή του είναι ελαστική. Αυτό θα μας βοηθήσει ακολούθως στον ορισμό της ισοδυναμίας των κόμβων.

Παρατηρήσεις

(1) Πολλές φορές ο κόμβος ορίζεται ως μια κλειστή μη-αυτοτεμνόμενη πολυγωνική γραμμή του $I\!R^3$. Αυτό βοηθάει σε πολλά τεχνικά μέρη κάποιων αποδείξεων, υστερεί όμως στο πως τον αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά.

(2) Σε αυτή την εργασία όποτε αναφερόμαστε στον όρο "κόμβο" θα εννοούμε μια λεία κλειστή μη αυτοτεμνόμενη καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ ή ένα σύνολο από (λείες) κλειστές μη αυτοτεμνόμενες καμπύλες του $\mathbb{R}^3$, οι οποίες μπορεί να μπλέκονται και μεταξύ τους (δηλαδή έναν κρίκο). Επίσης, όποτε λέμε "κόμβος" θα εννοούμε "διάγραμμα" ενός κόμβου.

Επιλέγω τώρα δύο σημεία του κόμβου $\mathcal{L}$ (λεία καμπύλη), α και β τέτοια ώστε η (επίπεδη) επιφάνεια που περικλείεται από το ευθύγραμμο τμήμα $\alpha\beta$ και από την καμπύλη με άκρα τα σημεία αυτά, να μην περιέχει κανένα σημείο του κόμβου. Τώρα, αυτή την καμπύλη μπορούμε να την τεντώσουμε και να την συμπιέσουμε προς οποιαδήποτε κατεύθυνση (του επιπέδου), με όποιον τρόπο θέλουμε χωρίς όμως να την κόψουμε και να την ξανακολλήσουμε, διατηρώντας συγχρόνως την αρχική ιδιότητα της επιφάνειας που δημιουργεί με το ευθύγραμμο τμήμα $\alpha\beta$ και λαμβάνοντας υπ' όψην μας τις τέσσερεις περιοριστικές προαναφερθείσες καταστάσεις. Έτσι θα προκύψει ένας νέος κόμβος, ας τον ονομάσουμε $\mathcal{L}'$. Οι δύο αυτοί κόμβοι $\mathcal{L}$ και $\mathcal{L}'$ θα ονομάζονται *ισοδύναμοι* ή *ισοτοπικοί.* Στην γενική περίπτωση δύο κόμβοι $\mathcal{L}$ και $\mathcal{L}'$ θα ονομάζονται *ισοδύναμοι* ή *ισοτοπικοί*, αν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλον από μια πεπερασμένη ακολουθία τέτοιων κινήσεων (κινήσεων ισοτοπίας).

ΣΧΟΛΙΟ : Οι κινήσεις ισοτοπίας που μόλις αναφέρθηκαν θα ονομάζονται *κινήσεις ισοτοπίας στο επίπεδο*[1].

Παρατηρήσεις

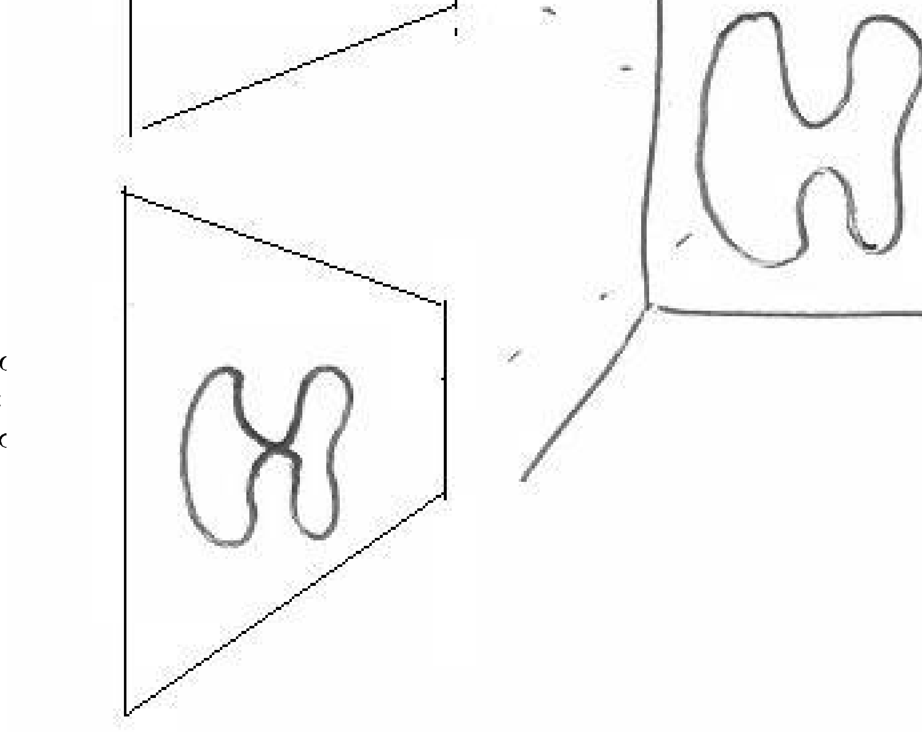
(1) Μιλώντας για κινήσεις ισοτοπίας στο επίπεδο, αυτόματα έχουμε κάνει την παραδοχή ότι δεν ενδιαφερόμαστε για τα ενδιάμεσα στάδια αυτών των κινήσεων (αποφεύγοντας με αυτόν τον τρόπο τις απαγορευμένες καταστάσεις). Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι από ποιά μορφή ξεκινάνε και σε ποιά μορφή καταλήγουν.

(2) Υπάρχουν δύο είδη κόμβων: αυτοί που έχουν πεπερασμένο πλήθος διασταυρώσεων και αυτοί που έχουν άπειρο πλήθος διασταυρώσεων και επιπλέον δεν είναι ισοτοπικοί με κανέναν λείο κόμβο με πεπερασμένο πλήθος διασταυρώσεων (άρα θα έχουν άπειρο πλήθος διασταυρώσεων σε οποιοδήποτε επίπεδο προβολής και να επιλέξουμε). Στην πρώτη περίπτωση λέγονται *ήμεροι κόμβοι* (*tame knots*) ή απλώς *κόμβοι* (*knots*) και στη δεύτερη *άγριοι κόμβοι* (*wild knots*). Εμείς θα ασχοληθούμε με την πρώτη περίπτωση και γι αυτό στη συνέχεια θα δώσουμε έναν αυστηρό μαθηματικό ορισμό του κόμβου έτσι ώστε να αποφεύγονται "άγριες" καταστάσεις.

(3) Πάντα μπορεί να βρεθεί κατάλληλο επίπεδο προβολής του κόμβου έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες (1),(2),(3) και (4). Έστω λοιπόν ότι στο αρχικό επίπεδο προβολής που έχω επιλέξει παρουσιάζονται κάποιες απαγορευμένες καταστάσεις. Τότε με κατάλληλες μικρές στρέψεις του επιπέδου πεπερασμένες το πλήθος (δες σχήμα 1.3),

[1] Ο όρος *επίπεδο* εισάγεται για προφανείς λόγους, από την στιγμή που οι κινήσεις αυτές λαμβάνουν χώρα πάνω σ' ένα επίπεδο.

μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ικανο
αυτό μπορούμε να το εξασφαλίσουμε
θώνουμε κάποια απαγορευμένη κατάσ
και τις ήδη διορθωμένες.



Σχήμα 1.3: Επιλογή κατάλληλου επιπέδου προβολής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 *Ορίζουμε εμφύτευση του κύκλου* S^1 *στο* $\mathbb{R}^3$ *μια οποιαδήποτε συνεχή απεικόνιση* $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$ *τέτοια ώστε κανένα ζευγάρι από διαφορετικά σημεία του κύκλου να μην απεικονίζεται στο ίδιο σημείο στο χώρο (ή με άλλα λόγια είναι ένας ομοιομορφισμός* f *από το* S^1 *στο* $f(S^1) \subseteq \mathbb{R}^3$*).*

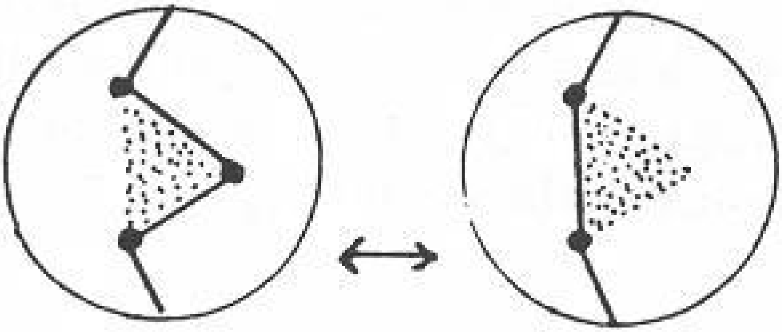
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 *Λείος κόμβος ονομάζεται η εικόνα του κύκλου στο* $\mathbb{R}^3$ *κάτω από μια απείρως διαφορίσιμη εμφύτευση με μη μηδενικά διαφορικά:*

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \neq (0,0,0).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3 *Δύο λείοι κόμβοι* K_0 *και* K_1 *ονομάζονται ισοδύναμοι (ισοτοπικοί) αν υπάρχει μια μονοπαραμετρική αμφιδιαφορίσιμη λείως εξαρτώμενη από την παράμετρο* t*, οικογένεια* $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $t \in [0,1]$ *, που πηγαίνει τον κόμβο* K_0 *στον κόμβο* K_1 *π.χ. τέτοια ώστε* f_0 *να είναι η ταυτοτική δηλαδή* $f_0(K_0) = K_0$ *και* $f_1(K_0) = K_1$ *(εδώ το "λεία" σημαίνει ότι η απεικόνιση* $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ *δίνεται από το* $(x,t) \longmapsto f_t(x)$ *που είναι διαφορίσιμη). Η οικογένεια των αμφιδιαφορίσιμων* f_t *λένε ότι είναι η ισοτοπική αντιστοιχία των κόμβων* K_0 *και* K_1*. Γι΄ αυτό τον λόγο οι ισοδύναμοι κόμβοι επίσης λέγονται και ισοτοπικοί.*

ΣΧΟΛΙΟ : Μπορεί να δειχθεί ότι δύο ισοτοπικοί κόμβοι με κοινό τμήμα μπορούν να ισοτοπηθούν ο ένας στον άλλον από μια ισοτοπία η οποία δεν κινεί σημεία αυτού του τμήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1 *Δύο κόμβοι* $\mathcal{K}_0$ *και* $\mathcal{K}_1$ *είναι ισοτοπικοί* ***αν και μόνο αν*** *τα συμπλήρωματά τους (*$\mathbb{R}^3 - \mathcal{K}_0$ *και* $\mathbb{R}^3 - \mathcal{K}_1$*) είναι ομοιομορφικά.*



Σχήμα 1.4: Κινήσεις ισοτοπίας επιπέδου.

Η απόδειξη είναι δύσκολη και παραλείπεται (δες $[GL]$). Σημειώνεται ότι το παραπάνω θεώρημα δεν ισχύει για κρίκους $[GL]$.

Παρατηρήσεις

(1) Κινήσεις ισοτοπίας επιπέδου θα ονομάζονται μόνο οι κινήσεις της μορφής:

Οι κινήσεις αυτές έχουν το χαρακτηριστικό ότι διατηρούν τα ήδη υπάρχοντα σημεία διασταύρωσης και επιπλέον δεν δημιουργούν κανένα καινούργιο. Συγκεκριμένα οι ακόλουθες καταστάσεις δεν ισχύουν ποτέ:

- να εμφανίζεται νέο σημείο διασταύρωσης ή ένα παλιό να εξαφανίζεται[2],
- να εφάπτονται οι προβολές δύο βραχίονων του κόμβου,
- τρία σημεία τριών βραχίονων να προβάλλονται στο ίδιο σημείο.

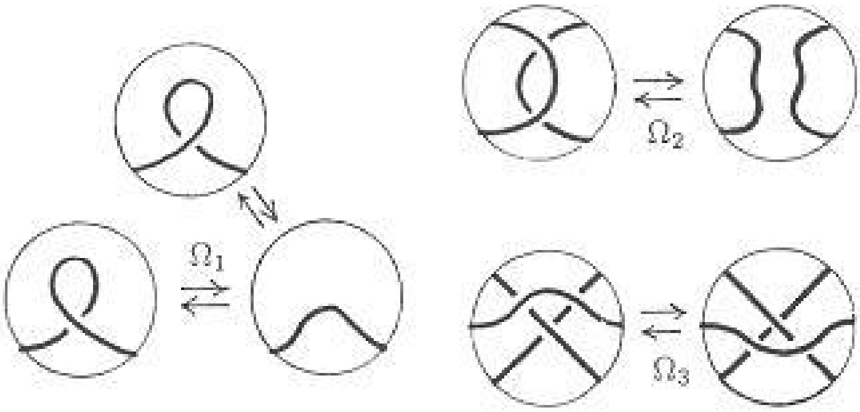
Έτσι, εύκολα κανείς μπορεί να καταλάβει ότι εάν έχουμε έναν δεδομένο κόμβο (σκεφτείτε τον στο $\mathbb{R}^3$) τότε ανάλογα σε ποιό επίπεδο τον προβάλλουμε θα παίρνουμε κατά πάσα πιθανότητα και διαφορετική αναπαράσταση αυτού (όπου θα υπάρχει ενδεχομένως και διαφορά στον αριθμό των διασταυρώσεων). Συνεπώς οι κινήσεις ισοτοπίας επιπέδου που μόλις αναφέραμε, δεν αρκούν για την πλήρη περιγραφή των κινήσεων ισοτοπίας του χώρου. Έτσι μπορούμε να υποψιαστούμε ότι πρέπει να υπάρχουν κάποιες επιπλέον κινήσεις, οι οποίες μετατρέπουν την μια προβολή του κόμβου στην άλλη. Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν τρεις τέτοιες κινήσεις, οι λεγόμενες κινήσεις *Reidemeister* (δες σχ.1.5).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2 *(Θεώρημα Reidemeister) Δύο διαγράμματα κόμβων αντιστοιχούν σε ισοτοπικούς κόμβους* **αν και μόνο αν** *το ένα μπορεί να προκύψει από το άλλο από πεπερασμένη ακολουθία κινήσεων Reidemeister και ισοτοπιών επιπέδου.*

Η απόδειξη παραλείπεται (δες $[PS]$).

(2) Αν λάβουμε υπ' όψιν μας την έννοια των κινήσεων ισοτοπίας στο επίπεδο όπως έχει οριστεί σε αυτές τις σημειώσεις (όχι αυτές της παρατήρησης (1)), εύκολα συμπεραίνουμε ότι καλύπτουν πλήρως τις τρεις κινήσεις *Reidemeister* και τις περιπτώσεις ισοτοπίας επιπέδου, όπως αυτές έχουν οριστεί στην παρατήρηση (1). Συνεπώς, περιγράφουν πλήρως τις κινήσεις ισοτοπίας των κόμβων στον χώρο.

[2] Αυτό και μόνο αυτό, δεν απαγορεύεται στις σημειώσεις αυτές με τον τρόπο που έχουμε ήδη ορίσει τις κινήσεις ισοτοπίας επιπέδου.



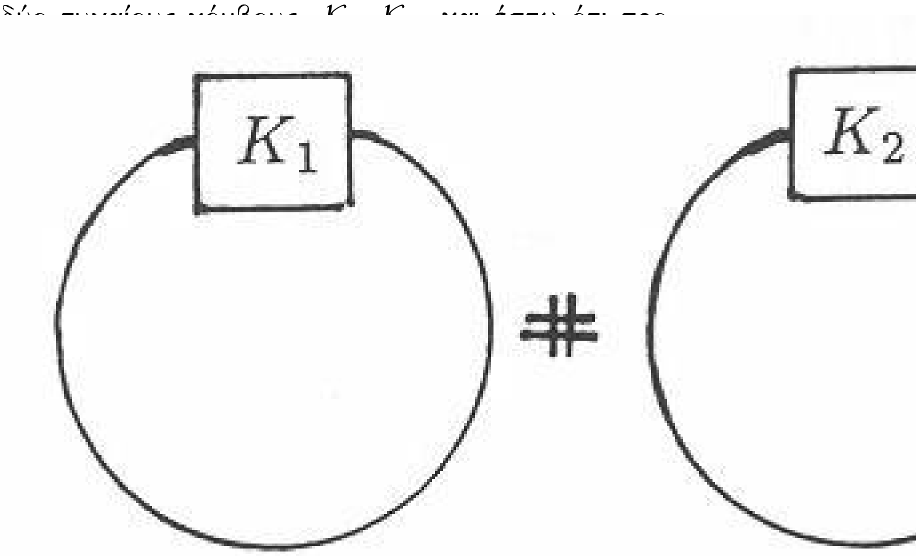
Σχήμα 1.5: Κινήσεις *Reidemeister*.

1.2 Πράξεις Κόμβων και Αναλλοίωτες Κόμβων

Στην ενότητα αυτή, αρχικά θα γίνει αναφορά για κάποιες πράξεις που μπορούν να γίνουν μεταξύ δύο κόμβων. Με αυτό τον τρόπο εμπλουτίζουμε την δομή του συνόλου των κόμβων, όμως δυστυχώς (όπως θα δούμε στη συνέχεια) αυτή η δομή δεν αποτελεί καν δομή ομάδας (μιας και δεν υπάρχει το αντίστροφο στοιχείο). Τέλος θα δοθεί η έννοια της αναλλοίωτης και της πλήρους αναλλοίωτης κόμβων· έννοιες καθοριστικής σημασίας για το πρόβλημα της ταξινόμησης των κόμβων (το οποίο παραμένει ανοιχτό).

1.2.1 Πράξεις Κόμβων και Ειδικές Περιπτώσεις Κόμβων

Έστω ότι έχουμε στην διάθεσή μας
βάλλονται πάνω σ' ένα επίπεδο $\mathcal{P}$ και
τώρα να ορίσουμε μια πράξη μεταξύ
σημείο (όχι σημείο διασταύρωσης των
ντίστοιχα άκρα τους διατηρώντας συγ
μη δημιουργώντας καμία καινούργια,
από κάποιον βραχιόνά τους (δές σχ.1
οποία ονομάζεται σύνθεση ή συνδετικ
το $\#$.



Σχήμα 1.6: Συνδετικό άθροισμα των $\mathcal{K}_1$ και $\mathcal{K}_2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1 : *Οι κόμβοι* $\mathcal{K}_1 \ \# \ \mathcal{K}_2$ *και* $\mathcal{K}_2 \ \# \ \mathcal{K}_1$ *είναι ισοτοπικοί.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2 : *Αν ο κόμβος* $\mathcal{K}_1$ *δεν είναι τετριμμένος, τότε το ίδιο θα ισχύει και για το συνδετικό άθροισμα* $\mathcal{K}_1 \ \# \ \mathcal{K}_2$ *για οποιοδήποτε κόμβο* $\mathcal{K}_2$.

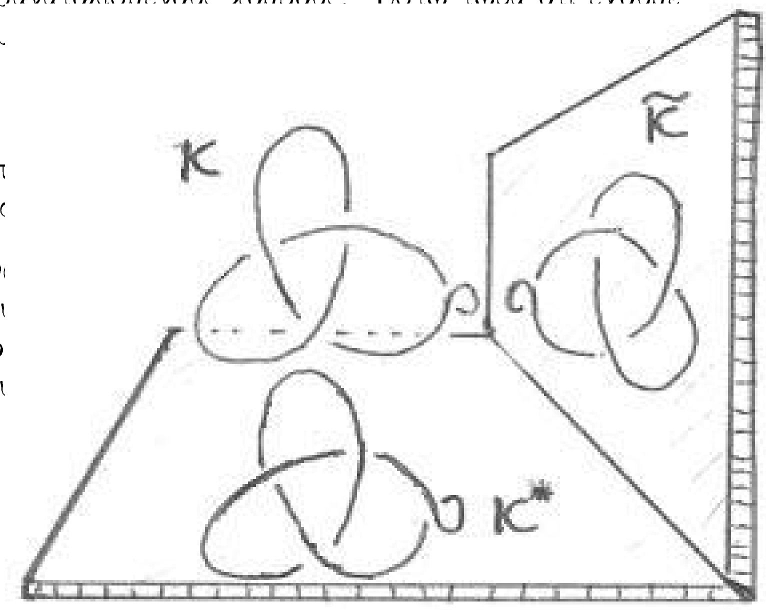
ΣΧΟΛΙΟ : Το $(\{\mathcal{K} \mid$ κόμβοι$\}\ ,\ \#)$, δεν αποτελεί ομάδα.
Πράγματι, έχουμε ότι:

1. Η # είναι προσεταιριστική (προφανές),
2. Η # είναι αντιμεταθετική (Πρόταση 1.1),
3. Υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο (ο τετριμμένος κόμβος),
4. δεν υπάρχει αντίθετο στοιχείο (Πρόταση 2.1).

Έτσι, παρόλο που από (1),(2) και (3) συμπεραίνουμε ότι το $(\{\mathcal{K} \mid$ κόμβοι$\},\ \#)$, είναι μονοειδές, από (4) έχουμε ότι το $(\{\mathcal{K} \mid$ κόμβοι$\}\ \#)$ δεν αποτελεί ομάδα.

Πολλές φορές εφοδιάζουμε τον κόμβο με προσανατολισμό. Έτσι μπορούμε να μιλάμε για προσανατολισμένους και μη προσανατολισμένους κόμβους. Έστω τώρα ότι έχουμε έναν κόμβο $\mathcal{K}$, τότε έχουμε την δι
κόμβων που προέρχονται από αυτόν.

- Αν ο κόμβος $\mathcal{K}$ είναι προσανατ
τότε προκύπτει ένας νέος (προσ
- Με έναν καθρέφτη μπορούμε ν
όμως μπορούν να προκύψουν δι
θετηθεί ο καθρέφτης, κάτω από
θα τους ονομάσουμε είδωλα του



Σχήμα 1.7: Τα είδωλα του $\mathcal{K}$: $\mathcal{K}^*$ και $\widetilde{\mathcal{K}}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1 *Οι κόμβοι $\mathcal{K}^*$ και $\widetilde{\mathcal{K}}$ είναι ισοτοπικοί.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4 *Ενας κόμβος ονομάζεται συμμετρικό είδωλο (amphicheiral ή mirror symmetric) αν είναι ισοτοπικός με το είδωλό του.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5 *Ενας προσανατολισμένος κόμβος $\mathcal{K}$ ονομάζεται αντιστρέψιμος (reversible ή invertible) αν είναι ισοτοπικός με τον $\mathcal{K}'$.*

π.χ. το τριφύλλι είναι αντιστρέψιμος αλλά όχι συμμετρικό είδωλο.

1.2.2 Αναλλοίωτες Κόμβων

Ξεκινάμε την υποενότητα αυτή παρουσιάζοντας κατευθείαν τον ορισμό της αναλλοίωτης κόμβων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6 *Μια συνάρτηση Ι:{κόμβοι} $\rightarrow \mathcal{L}$ (όπου $\mathcal{L}$ μπορεί να είναι σύμβολα, αριθμοί, πολυώνυμα ή πολυώνυμα Laurent), λέγεται* **αναλλοίωτη κόμβων**, *εάν:*

- $K_1 \sim K_2 \Rightarrow I(K_1) = I(K_2)$. *Δηλαδή, αν δύο κόμβοι είναι ισοτοπικοί, τότε οι αναλλοίωτές τους θα ταυτίζονται (θα έχουν την ίδια "ταμπέλα").*
  Υποσημείωση: *Δηλαδή, μια αναλλοίωτη κόμβων είναι καλά ορισμένη πάνω σε κλάσεις ισοτοπίας κόμβων.*

  Ισοδύναμα για την Ι έχουμε:

- *αν* $I(K_1) \neq I(K_2) \Rightarrow K_1 \not\sim K_2$.

Αν όμως $I(K_1) = I(K_2) \implies ???$
Έτσι προκύπτει ο ακόλουθως ορισμός:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7 *Έστω Ι μια αναλλοίωτη κόμβων και έστω ότι ισχύει:*
$K_1 \not\sim K_2 \implies I(K_1) \neq I(K_2)$. *Τότε η Ι θα λέγεται* **πλήρης αναλλοίωτη**.

Στην συνέχεια για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας της αναλλοίωτης, δίνουμε ένα απλό παράδειγμα.

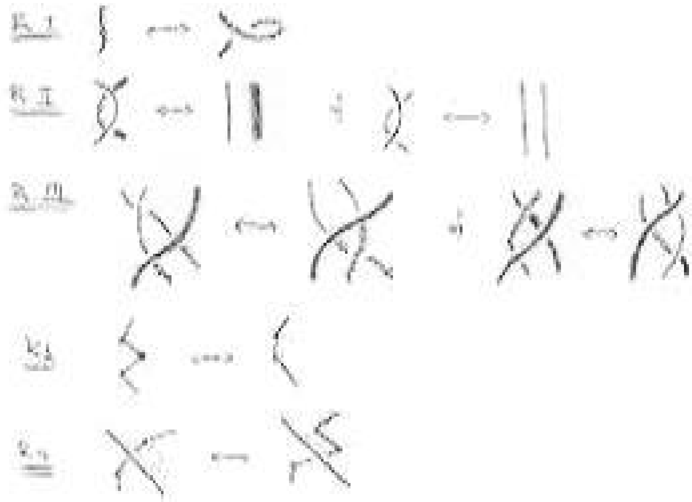
Παράδειγμα
Τριχρωματισμός: Ένας κόμβος λέγεται *τριχρωματίσιμος* αν μπορεί να χρωματιστεί με τρία διαφορετικά χρώματα, ένα για κάθε τόξο (δηλαδή για κάθε συνεκτική συνιστώσα του αντίστοιχου διαγράμματος) έτσι ώστε σε κάθε διασταύρωση να συναντώνται και τα *τρία χρώματα ή μόνο το ένα.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3 *Η τριχρωματισιμότητα είναι αναλλοίωτη κόμβων.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Πράγματι, η τριχρωματισιμότητα είναι αναλλοίωτη μιας και αφήνει αναλλοίωτες τις τρεις κινήσεις *Reidemeister* και τις κινήσεις ισοτοπίας επιπέδου της παρατήρησης (1), (δες σχ.1.8).

1.3 Κοτσίδες

Σε αυτή την ενότητα θα γίνει η παρουσίαση των ομάδων των κοτσίδων (*braid groups*). Έτσι λοιπόν, αρχικά θα δοθεί μια γεωμετρική ερμηνεία του τί είναι κοτσίδα και ποιά η έννοια της ομάδας των κοτσίδων. Εν συνεχεία, θα δοθεί ο αλγεβρικός ορισμός τους, και τέλος θα παρουσιαστούν δύο θεμελιώδη θεωρήματα (τα θεωρήματα *Alexander* και *Markov*), βάσει των οποίων ο *V.F.R.Jones* (με την ευρηματικότητά του) κατάφερε να

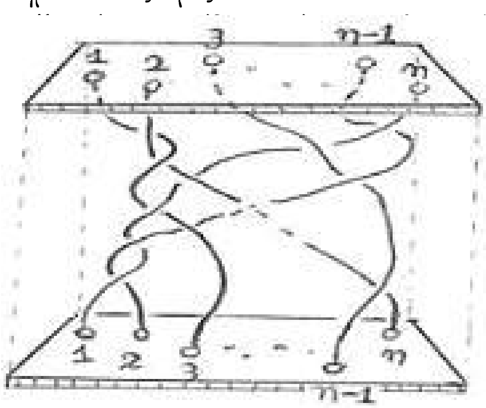


Σχήμα 1.8: Οι βασικές κινήσεις ισοτοπίας παραμένουν αναλλοίωτες στον τριχρωματισμό.

δημιουργήσει μια αναλλοίωτη κόμβων (το πολυώνυμο *Jones* μιάς μεταβλητής), χάριν της οποίας απέκτησε το βραβείο *Fields*. Αυτό το επίτευγμα του *Jones* υπήρξε μόνο η αρχή για την ταχύτατη εύρεση νέων βελτιωμένων αναλλοίωτων κόμβων, σχεδόν ταυτόχρονα, από διαφορετικές ομάδες μεγάλων μαθηματικών. Έτσι δημιουργήθηκε το πολυώνυμο *Jones* δύο μεταβλητών (ή αλλιώς πολυώνυμο *HOMFLYPT*), το οποίο και θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Ας δούμε λοιπόν, λέγοντας κοτσίδα, τί ακριβώς εννοούμε.

Οι κοτσίδες δημιουργούνται όταν n σημεία ενός οριζόντιου επιπέδου είναι συνδεδεμένα με n σημεία ενός άλλου χαμηλότερου (με κατεύθυνση από πάνω προς τα κάτω). Οι ται προς τα πάνω (δηλαδή δεν πρέπει να παρουσιό τοιοδήποτε σημείο τους.



Σχήμα 1.9: Κοτσίδα με n κλωστές.

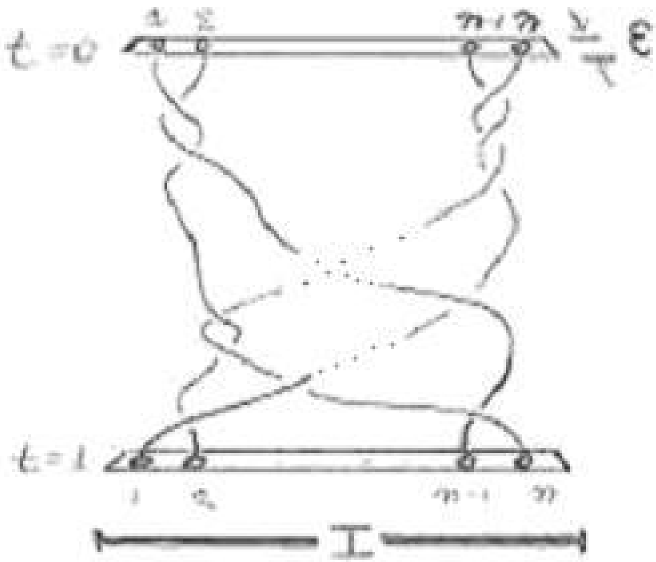
Από το προηγούμενο σχήμα γίνεται φανερό ότι προκειμένου να αναπαραστήσουμε τις κοτσίδες στο επίπεδο, δημιουργούνται κάποια σημεία διασταύρωσης· αναμενόμενο από τον τρόπο που έχουν οριστεί, (θεωρούμε χ.β.τ.γ.[3] ότι από κάθε σημείο διασταύρωσης διέρχονται δύο και μόνο κλωστές). Έτσι μιλώντας για κοτσίδες, δεν ενδιαφερόμαστε απλώς για την αντιστοιχία των n σημείων του πάνω επιπέδου στα n σημεία του κάτω επιπέδου, αλλά ενδιαφερόμαστε και για το τί γίνεται ενδιάμεσα καθ' όλο το μήκος των κλωστών (δηλαδή, ποιά κλωστή περνάει πάνω από ποιά, πόσες φορές και με ποιά σειρά).

[3]Σε αντίθετη περίπτωση διαταράσσουμε τις επιπλέον κλωστές, έτσι ώστε οι παραπάνω διασταυρώσεις που συμπίπτουν όλες σε μία, να μετακινηθούν προς τα πάνω ή προς τα κάτω.

Επομένως βλέπουμε ότι οι κοτσίδες είναι κάτι παραπάνω από τις μεταθέσεις. Μια μετάθεση n στοιχείων μπορούμε να την φανταστούμε σαν την αντιστοιχία (χωρίς να μας ενδιαφέρει τί γίνεται ενδιάμεσα) των n στοιχείων του πάνω επιπέδου μιας κοτσίδας, στα αντίστοιχα n του κάτω επιπέδου.

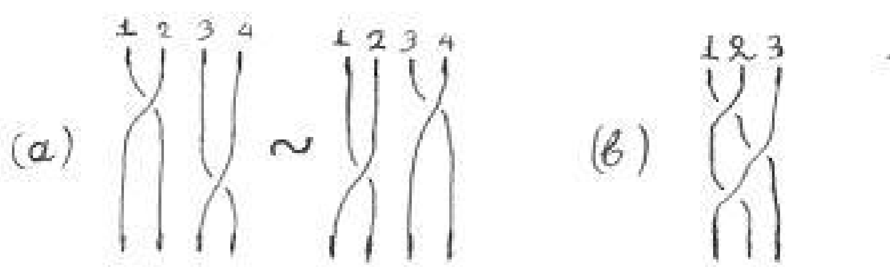
ΣΧΟΛΙΟ : Στον ορισμό των κοτσίδ ποθέσουμε ότι τα n σημεία βρίσκοντ δώσουμε τον παρακάτω ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8 *Μια κοτσίδα με n ι όπου ε=[0,ϵ] με $\epsilon > 0$ και πολύ μικρό, σύνορα (των τόξων) και στο (I×ε)× τόξα θα είναι χωρίς τοπικά ακρότατα (δες σχ.1.10).*



Σχήμα 1.10: Απεικόνιση κοτσίδας.

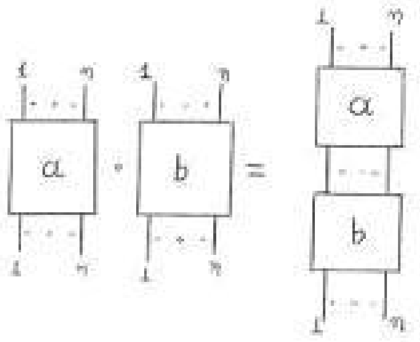
Διαισθητικά, εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι βάσει του πιό πάνω γεωμετρικού ορισμού, υπάρχουν περιπτώσεις όπου κάποιες : στην πραγματικότητα να είναι ισοτοπι



Σχήμα 1.11: Ισοτοπικές κοτσίδες.

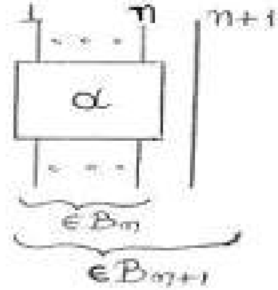
Ως ομάδα κοτσίδων B_n με n κλωστές, θεωρούμε το σύνολο που παράγεται από κλάσεις ισοτοπίας κοτσίδων, με προφανή πράξη την σύνθεση κοτσίδων (δές σχ.1.12). Ας σημειωθεί ότι η πράξη αυτή δεν είναι αντιμεταθετική (π.χ. όπως θα δούμε $\sigma_i\sigma_{i+1} \neq \sigma_{i+1}\sigma_i$).

[4]Ο ορισμός των ισοτοπικών κοτσίδων θα δοθεί αργότερα.



Σχήμα 1.12: Η πράξη “ · ” της ομάδας B_n.

Ο ορισμός 1.8, επάγει με προφανή τρόπο την εμφύτευση της B_n στην B_{n+1} (δες σχ.1.13).



Σχήμα 1.13: Εμφύτευση της B_n στην B_{n+1}.

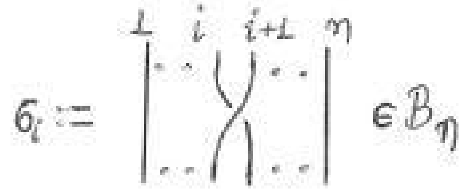
ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4 *Κάθε κοτσίδα σ, μπορεί να διαμεριστεί σε οριζόντιες λωρίδες, έτσι ώστε η κάθε μία να περιέχει μόνο μία διασταύρωση.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Για τρεις γειτονικές κλωστές το συμπέρασμα ισχύει λόγω ορισμού των κοτσίδων. Για μη γειτονικές κλωστές διαταράσσουμε - αν χρειαστεί - (στην περίπτωση που δύο διασταυρώσεις είναι ακριβώς στο ίδιο ύψος) μία από τις τέσσερις κλωστές, με τέτοιον τρόπο ώστε να χαμηλώσουμε ή να υψώσουμε την μία από τις δύο διασταυρώσεις σε σχέση με την άλλη. Κάνοντας αυτή την διαδικασία όσες φορές χρειαστεί, ξεκινώντας χ.β.τ.γ. από την τέταρτη κλωστή και προχωρώντας διαδοχικά, δίχως να χαλάμε τις προηγούμενες διασταυρώσεις, προς την n-ωστή κλωστή, αποδεικνύεται το ζητούμενο. □

Παρατήρηση: Βάσει των παραπάνω, μια φυσιολογική επιλογή γεννητόρων της ομάδας B_n, είναι αυτή των στοιχείων

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \ ,$$

όπου σ_i είναι μια κοτσίδα με n κλωστές, όπου η i-κλωστή καταλήγει στο $i+1$ σημείο του κάτω επιπέδου, και η $i+1$-κλωστή στο i σημείο του κάτω επιπέδου, περνώντας πάνω από την i-κλωστή. Παράλληλα οι υπόλοιπες κλωστές σ_j, ξεκινούν από το j-οστό σημείο του πάνω επιπέδου και καταλήγουν στο j-οστό σημείο του κάτω επιπέδου. Έτσι ο γεννήτορας σ_i έχει την ακόλουθη μορφή:



Σχήμα 1.14: Ο γεννήτορας σ_i.

Εύκολα κανείς μπορεί να πεισθεί ότι τα σ_i για $i = 1, \ldots, n-1$ ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \tag{1.1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \ , \ |i-j| \geq 2. \tag{1.2}$$

Αποδεικνύεται[5] ότι οι σχέσεις (1.1) και (1.2) δίνουν την παράσταση της ομάδας B_n. Έτσι δύο κοτσίδες συνδέονται μεταξύ τους με μια σχέση, αν και μόνο αν, είναι ισοτοπικές, ισοδύναμα αν και μόνο αν, η μία προκύπτει από την άλλη με την διαδοχική εφαρμογή των σχέσεων (2.1) και (2.2), (προφανώς και των σχέσεων $\sigma_i \sigma_i^{-1} = 1$). Άρα έχουμε την παρακάτω πρόταση την οποία θα θεωρούμε ως τον αλγεβρικό ορισμό για την ομάδα B_n.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.5 *Η ομάδα των κοτσίδων με n κλωστές $(B_n, \ \cdot \ )$, έχει την εξής παράσταση:*

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \ \middle| \ \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \ , \ \forall |i-j| \geq 2. \end{array} \right\rangle \tag{1.3}$$

όπου " · " η (διμελής) πράξη της ομάδας, που ορίζεται (με προφανή τρόπο) ως σύνθεση κοτσίδων (γεωμετρικά, βάζοντας τον δεξιό όρο της διμελούς πράξης κάτω από τον αριστερό).

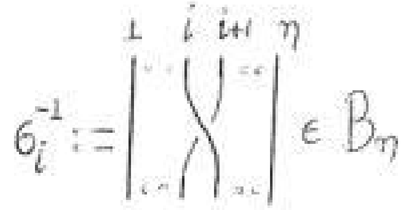
Παρατηρήσεις

(1) Προφανώς η ομάδα των κοτσίδων (B_n , $\forall \ n \in I\!N - \{0,1\}$) είναι άπειρη. Πράγματι, αρκεί κανείς να σκεφτεί ότι παίρνοντας μόνο ένα της στοιχείο, έστω χ.β.τ.γ. το σ_1, τότε αυτό παράγει το σύνολο: $\{{\sigma_1}^{\nu} \mid \nu \in I\!N^*\}$, το οποίο είναι άπειρο υποσύνολο της B_n.

(2) Σαν γεννήτορες της ομάδας B_n ορίσαμε να είναι τα στοιχεία $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$. Όμως από αυτό δεν είναι ποτέ δυνατόν να παραχθούν τα αντίστροφα στοιχεία σ_i^{-1}, $i = 1, \ldots, n-1$. Ακόμα πιο απλά, δεν μπορεί ποτέ να παραχθεί το ουδέτερο στοιχείο[6] από τα σ_i. Γεωμετρικά το στοιχείο σ_i^{-1} ορίζεται να είναι η διασταύρωση μεταξύ i και $i+1$ κλωστής, όπου όμως η αριστερή κλωστή περνάει πάνω από την δεξιά, (δες σχ.1.15).

[5] Αποδείχθηκε από τον *E.Artin*.

[6] Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντα. Για παράδειγμα, αν πάρουμε την κυκλική ομάδα $(G = \langle \alpha \rangle \ , \ \cdot)$ τάξης k ($|G| = k$) με e το ουδέτερο στοιχείο, τότε $\alpha^{-1} = \alpha^{k-1}$ και $e = \alpha^k$



Σχήμα 1.15: Το στοιχείο - γεννήτορας - σ_i^{-1}.

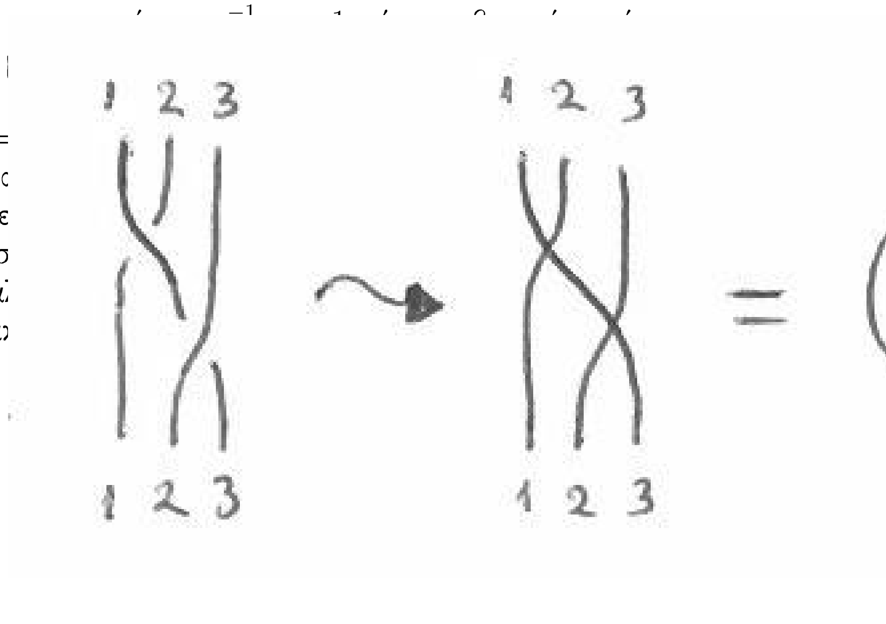
Σχήμα 1.16: Το ουδέτερο στοιχείο e.

Άρα, αν θέλουμε να είμαστε μαθηματικά αυστηροί θα πρέπει να γράψουμε:

$$B_n = \left\langle \begin{array}{c} \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \\ \sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{-1} \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \ , \ \forall |i-j| \geq 2. \end{array} \right\rangle .$$

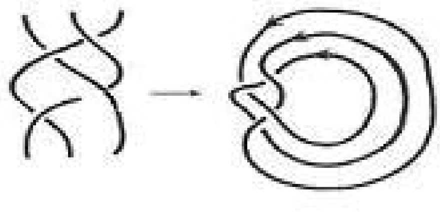
(3) Οι σχέσεις (2.1) και (2.2) μαζί
ισοτοπίας μεταξύ των κοτσίδων (και

(4) Αν στον Ορισμό 1.8, θέσουμε ϵ=
Λόγω του ότι η δεδομένη κοτσίδα θα
θέση να γνωρίζουμε τί ακριβώς γίνε
αυτό τον τρόπο όλες τις διασταυρώσ
είναι από πού ξεκινάει και πού κατα
είναι η μετάθεση των n στοιχείων (ά



Σχήμα 1.17: Η προβολή κοτσίδας είναι μετάθεση.

Από νωρίς είχε παρατηρηθεί ότι κλείνοντας μια κοτσίδα προκύπτει ένας προσανατολισμένος κόμβος. Συγκεκριμένα, δεδομένου μιας κοτσίδας $\alpha \in B_n$, εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν προσανατολισμένο κόμβο $\widehat{\alpha}$, που θα ονομάζεται **το κλείσιμο του** α, με τρόπο αρκετά παραστατικό από την παρακάτω εικόνα.

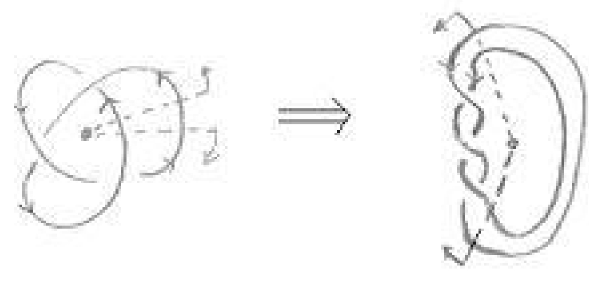


Σχήμα 1.18: Το κλείσιμο κοτσίδας είναι κόμβος.

Αυτή η παρατήρηση ώθησε μεγάλους μαθηματικούς όπως ο *Alexander* και ο *Markov*, να συμβάλουν καθοριστικά στην ανάπτυξη της θεωρίας κόμβων. Έτσι έχουμε τα ακόλουθα θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3 *(Alexander 1923) Κάθε προσανατολισμένος κόμβος (ή κρίκος), μπορεί να ισοτοπηθεί στο κλείσιμο μιας κοτσίδας.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Η απόδειξη που έ ι
όλες όσες υπάρχουν), και παραλείπετ

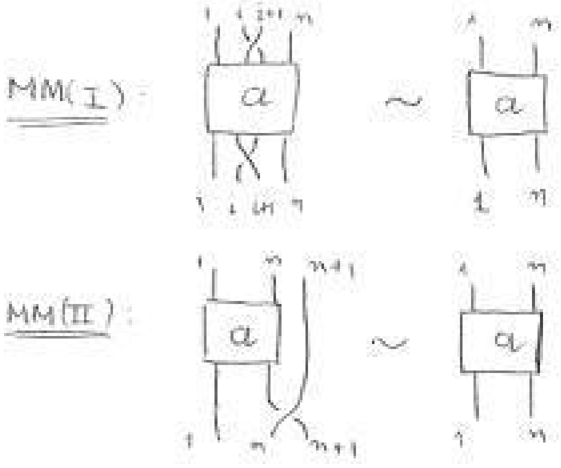


Σχήμα 1.19: Ισοτοπισμός του τριφυλλιού σε κλείσιμο κοτσίδας.

Όμως όλες οι απόπειρες που έγιναν, να χρησιμοποιηθούν οι κοτσίδες για την μελέτη των κόμβων οδήγησαν στο ακόλουθο σοβαρό πρόβλημα: *Η αναπαράσταση ενός κόμβου $\mathcal{L}$ ως το κλείσιμο μιας κοτσίδας δεν είναι μοναδική.* Ευτυχώς, μετά από λίγα χρόνια ο *A.A.Markov* βρήκε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για δύο κοτσίδες $\alpha \in B_n$ και $\beta \in B_m$, ώστε να έχουν ισοτοπικά κλεισίματα. Αυτές οι συνθήκες (δύο το πλήθος) έχουν μείνει με τον όρο "κινήσεις *Markov*" και είναι οι ακόλουθες:

•τύπου **I:** $B_n \ni \alpha \sim \sigma_i \alpha \sigma_i^{-1} \in B_n$, $\forall \sigma_i \in B_n$,

•τύπου **II:** $B_n \ni \alpha \sim \alpha \sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$.



Σχήμα 1.20: Κινήσεις $Markov$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4 *(Markov 1935) Αν $\alpha \in B_n$ και $\beta \in B_m$, έχουν ισοτοπικά κλεισίματα, τότε υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία από κινήσεις $Markov$ τύπου I και τύπου II, που οδηγούν το α στο β.*

Η απόδειξη παραλείπεται.

ΣΧΟΛΙΟ : (1) Το αντίστροφο του Θεωρήματος $Markov$, είναι προφανές.
(2) Η διμελής σχέση " $\sim$ " είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$.
(3) Δυστυχώς, το Θεώρημα $Markov$, δεν είναι εύκολο να εφαρμοστεί απ' ευθείας, διότι οι ακολουθίες των κινήσεων μπορεί να είναι μεγάλες και να πηγαίνουν σε πολλές διαφορετικές ομάδες κοτσίδων.

Κεφάλαιο 2

Το Πολυώνυμο Jones

Σε αυτό το κεφάλαιο στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε το *πολυώνυμο Jones* δύο μεταβλητών. Αρχικά θα δώσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς όπως τον ορισμό της άλγεβρας, του $\mathcal{R}-$πρότυπου ($\mathcal{R} - module$), του τανυστικού γινομένου και άλλους, οι οποίοι είναι απαραίτητοι για την ανάπτυξη της θεωρίας αυτού του κεφαλαίου. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε την συνάρτηση ίχνους του *Ocneanu* και έπειτα την δημιουργία του πολυωνύμου *Jones* δύο μεταβλητών, απ' αυτήν. Τέλος θα παρουσιαστούν κάποια παραδείγματα και θα γίνουν ορισμένες σημαντικές παρατηρήσεις.

2.1 Βασικοί Ορισμοί

Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με βασικές έννοιες όπως την έννοια της ομάδας, του δακτυλίου, του σώματος κ.λ.π. Στα μαθηματικά πολλές φορές μπορούμε από συγκεκριμένες δομές να δημιουργήσουμε κάποιες καινούργιες πιό πλούσιες και πιό χρήσιμες, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Ας δούμε λοιπόν κάποιες τέτοιες επεκτάσεις, αφού πρώτα παρουσιάσουμε τον ορισμό του ιδεώδους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1 *(Ιδεώδες) Ένας υποδακτύλιος N ενός δακτυλίου $(R, +, \cdot)$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες*

$$aN \subseteq N \ \ \textit{και} \ \ Nb \subseteq N \ , \ \forall a, b \in R$$

λέγεται ***ιδεώδες*** .

Έστω $G = \{g_i | i \in I\}$ μια πολλαπλασιαστική ομάδα και R ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Έστω $R(G)$ το σύνολο όλων των τυπικών [1] αθροισμάτων

$$\sum_{i \in I} a_i g_i$$

[1] Το τυπικό άθροισμα δεν ισούται με κάποιο ήδη υπάρχον στοιχείο, είναι από μόνο του ένα νέο στοιχείο (προφανώς της επέκτασης).

με $a_i \in R$ και $g_i \in G$, όπου όλα τα a_i, εκτός από πεπερασμένο πλήθος, είναι 0. Ορίζουμε το άθροισμα δύο στοιχείων του $R(G)$ ώς:

$$\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) + \left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) = \sum_{i\in I}(a_i + b_i)g_i.$$

Είναι φανερό ότι $(a_i + b_i) = 0$ αν εξαιρέσουμε πεπερασμένο πλήθος δεικτών i, επομένως το $\sum_{i\in I}(a_i+b_i)g_i$ είναι επίσης στοιχείο του $R(G)$. Επαληθεύουμε αμέσως ότι η $\langle R(G), +\rangle$ είναι αβελιανή ομάδα με προσθετικό ουδέτερο στοιχείο το $\sum_{i\in I} 0g_i$.
Ο πολλαπλασιασμός δύο στοιχείων του $R(G)$ ορίζεται με τη βοήθεια των πολλαπλασιασμών, των δομών R και G, ως εξής:

$$\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i} a_j b_k\right) g_i.$$

Τυπικά επιμερίζουμε το γινόμενο των αθροισμάτων $\sum_{i\in I} a_i g_i$ και $\sum_{i\in I} b_i g_i$ και αντικαθιστούμε κάθε όρο της μορφής $a_j g_j b_k g_k$ με το $a_j b_k g_i$, όπου $g_j g_k = g_i$ στην G. Αφού τα a_i και b_i είναι 0 εκτός απο πεπερασμένο πλήθος δεικτών i, το άθροισμα $\sum_{g_j g_k = g_i} a_j b_k$ περιέχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών προσθετέων $a_j b_k \in R$. Μπορούμε επομένως να το βλέπουμε ως στοιχείο του R. Είναι πάλι φανερό, ότι το πολύ πεπερασμένο πλήθος τέτοιων αθροισμάτων $\sum_{g_j g_k = g_i} a_j b_k$ είναι μη μηδενικά. Έτσι, ο πολλαπλασιασμός είναι κλειστή πράξη στο $R(G)$.
Οι επιμεριστικοί νόμοι έπονται αμέσως από τον ορισμό της πρόσθεσης και τον τυπικό τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιήσαμε την επιμεριστικότητα για να ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό. Τέλος, εύκολα κανείς μπορεί να βεβαιωθεί για την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.

Αποδείξαμε λοιπόν το ακόλουθο θεώρημα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1 *Αν G είναι πολλαπλασιαστική ομάδα , τότε ο $\langle R(G), +, \cdot\ \rangle$ είναι δακτύλιος.*

Αν μετονομάσουμε σε g_j το στοιχείο $\sum_{i\in I} a_i g_i$ του $R(G)$, για το οποίο $a_i = 0$ αν $i \neq j$ και $a_j = 1$, βλέπουμε ότι η $\langle R(G), +\ \rangle$ περιέχει με φυσικό τρόπο την G ως πολλαπλασιαστικό υποσύστημα. Έτσι, αν η G δεν είναι αβελιανή, ο $R(G)$ δεν μπορεί να είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2
*Ο δακτύλιος $R(G)$ που ορίσαμε πιο πάνω, λέγεται **ο δακτύλιος της ομάδας** G **πάνω στον** R.*
*Αν F είναι ένα σώμα, τότε ο $F(G)$ λέγεται **η άλγεβρα της** G **πάνω στο** F.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3 *($R-$ πρότυπο) Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα (**αριστερό**) $R-$πρότυπο ($R-module$) αποτελείται από μια αβελιανή ομάδα M μαζί με μια πράξη εξωτερικού πολλαπλασιασμού στοιχείων της M με στοιχεία του R από αριστερά, τέτοια ώστε, για κάθε $\alpha, \beta \in M$ και $r, s \in R$, να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες :*

1. $(r\alpha) \in M$.

2. $r(\alpha + \beta) = r\alpha + r\beta$.

3. $(r + s)\alpha = r\alpha + s\beta$.

4. $(rs)\alpha = r(s\alpha)$.

Τότε θα μιλάμε για $R-$**πρότυπο** M.

Αν επιπλέον ο R έχει μοναδιαίο στοιχείο τέτοιο ώστε $1\alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in M$, τότε το M θα λέγεται **μοναδοειδές** $R-$**πρότυπο**.

Παρατηρήσεις
(1) Ένα μοναδοειδές $R-$πρότυπο μοιάζει πάρα πολύ με διανυσματικό χώρο, μόνο που εδώ ζητάμε από τους συντελεστές να είναι στοιχεία ενός δακτυλίου, ενώ στο δ.χ. οι συντελεστές είναι από ένα σώμα. *(2)* Ένας δακτύλιος $\mathcal{R}$ με μονάδα είναι πάντοτε $\mathcal{R}-$πρότυπο πάνω στον εαυτό του.
(3) Ορίζω σαν μοναδιαίο στοιχείο του $R(G)$ το $\mathbf{1} := 1e$ τ.ω $1r = r1 = r$ για κάθε $r \in R$ και $eg = ge = e$ για κάθε $g \in G$. Επομένως ο $\langle R(G), +, \cdot \, \rangle$ είναι δακτύλιος με μονάδα ανν ο R είναι δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.
(4) Αν μετονομάσουμε σε r_j το στοιχείο $\sum_{i \in I} r_i g_i$ του $R(G)$, για το οποίο $r_i = 0$ αν $i \neq j$ και $g_j = e$, βλέπουμε ότι η $\langle R(G), +, \cdot \, \rangle$ περιέχει με φυσικό τρόπο τον R ως υποσύστημα. Επομένως από τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο δακτύλιος $\langle R(G), +, \cdot \, \rangle$ αποτελεί μια επέκταση του προτύπου $\langle R, +, \cdot \, \rangle$ και παραμένει ένας σχεδόν διανυσματικός χώρος πάνω στο R (ο οποίος έχει σαν στοιχεία βάσης τα στοιχεία της G). Επιπλέον, το $R(G)$ είναι ένα $R(G)-$**πρότυπο**[2].

Ακολούθως θα παρουσιάσουμε τον ορισμό της **άλγεβρας**:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4 *(Άλγεβρα) Μια* ***άλγεβρα*** *αποτελείται από έναν δυανυσματικό χώρο V πάνω από ένα σώμα F , μαζί με μία διμελή πράξη πολλαπλασιασμού στο σύνολο V των διανυσμάτων τέτοια ώστε $\forall a \in F$ και $\alpha, \beta, \gamma \in V$, να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:*

1. $(a\alpha)\beta = a(\alpha\beta) = \alpha(a\beta)$.

2. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$.

3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Τότε θα μιλάμε για μία άλγεβρα V πάνω από το F. Επίσης, η V λέγεται προσεταιριστική άλγεβρα πάνω από το F, αν εκτός από τις προηγούμενες τρεις συνθήκες, ισχύει και η ακόλουθη,

[2]Όπως θα δούμε στη συνέχεια είναι και $(R(G) - R(G))-$ διπρότυπο.

4. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$.

Παρατήρηση
Για κάθε ομάδα G και κάθε σώμα F , η άλγεβρα ομάδας $F(G)$ που ορίστηκε προηγουμένως είναι μια προσεταιριστική άλγεβρα πάνω από το F.

Στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε τον ορισμό του τανυστικού γινομένου, το οποίο είναι απαραίτητο για την απόδειξη του θεωρήματος του *Ocneanu*. Όμως για να γίνει αυτό πρέπει πρώτα να παρουσιάσουμε κάποιους επιπλέον ορισμούς και παρατηρήσεις. Ας τους δούμε λοιπόν ...

Έστω G ένα δεξί $R-$πρότυπο και H ένα αριστερό $R-$πρότυπο. Τότε το $(G \times H, +)$ είναι μια αβελιανή ομάδα[3], αλλά δεν είναι δεξί ή αριστερό $R-$πρότυπο. Έτσι θα έχουμε στοιχεία της μορφής: (gr_1, r_2h) (Αν G, H είναι και τα δύο αριστερά $R-$πρότυπα, τότε και το $G \times H$ θα είναι αριστερό $R-$πρότυπο. Ομοίως και αν τα G, H ήταν δεξιά $R-$πρότυπα).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5 *Έστω $(T, +)$ μια αβελιανή ομάδα. Ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $\phi : G \times H \to T$ ονομάζεται* ***ισορροπημένος*** *(balanced) αν:*

$$\phi(gr, h) = \phi(g, rh), \forall g \in G, h \in H, r \in R.$$

όπου (gr, h) και (g, rh) ανήκουν στο $G \times H$, όπου G δεξί και H αριστερό $R-$πρότυπο.

ΣΧΟΛΙΟ : Δεν μπορούμε να πούμε ότι $\phi(gr, h) = \phi(g, rh) = r \cdot \phi(g, h)$ αφού, αν μη τι άλλο, η T δεν είναι $R-$πρότυπο. Επίσης η ϕ δεν είναι 1-1.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.6 *Μια αβελιανή ομάδα T ονομάζεται* ***τανυστικό γινόμενο*** *των G και H αν:*
(i) υπάρχει ένας ισορροπημένος ομομορφισμός αβελιανών ομάδων.

$$\tau : G \times H \to T$$

(ii) Αν υποθέσουμε ότι έχουμε κάποια αβελιανή ομάδα A και έναν ισορροπημένο ομομορφισμό $\alpha : G \times H \to A$, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\bar{\alpha} : T \to A$ αβελιανών ομάδων, έτσι ώστε $\bar{\alpha} \circ \tau = \alpha$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2
(1) Το τανυστικό γινόμενο υπάρχει
(2) Είναι μοναδικό (ώς προς ισομορφισμό) και συμβολίζεται ως
$T = G \otimes_R H$.

[3]Η ομάδα $G \times H$ έχεις ως πράξη την "+" που επάγεται με φυσικό τρόπο από τις αβελιανές ομάδες $(G, +)$ και $(H, +)$.

Χάριν ευκολίας θα ορίσουμε $\tau(g,h) := g \otimes h$. Επομένως θα έχουμε
$G \ \otimes_R \ H = \langle g \otimes h | g \in G, h \in H \rangle = \left\{ \sum_{finite} g_i \otimes h_i | g_i \in G, h_i \in H \right\}$.
Το $T = G \ \otimes_R \ H$ είναι μόνο μια αβελιανή ομάδα, τίποτα παραπάνω!

Εμείς θέλουμε να εμπλουτίσουμε αυτή τη δομή. Έτσι θα εξετάσουμε ειδικές περιπτώσεις όπου το T θα μπορεί να αποκτήσει δομή πρότυπου.

Έστω λοιπόν S και R δακτύλιοι. Η (αβελιανή) ομάδα G θα ονομάζεται $(S,R)-$βφ διπρότυπο (*bimodule*), αν η G είναι αριστερό S-και δεξιό-$R-$πρότυπο και επιπλέον να ισχύει $(sg)r = s(gr), \forall s \in S, \ g \in G, \ r \in R$.

ΣΧΟΛΙΟ : Αν R είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος και G είναι δεξιό-$R-$πρότυπο, τότε παίρνοντας $S := R$ και ορίζοντας $r \circ g := g \cdot r, \ \forall r \in R, \ g \in G$, έχουμε ότι το G γίνεται και αριστερό $R-$πρότυπο. Πράγματι,

- $r \circ (s \circ g) = r \circ (gs) = (gs)r = g(sr) = (sr) \circ g = (rs) \circ g$
- $r \circ (g_1 + g_2) = (g_1 + g_2)r = g_1 r + g_2 r = r \circ g_1 + r \circ g_2$
- $(r_1 + r_2) \circ g = g(r_1 + r_2) = g r_1 + g r_2 = r_1 \circ g + r_2 \circ g$

Από αυτόν τον ορισμό ($r \circ g := g \cdot r$) εύκολα μπορεί να συμπεράνει κανείς ότι η G είναι διπρότυπο, αφού $(s \circ g)r = (gs)r = g(sr) = (sr) \circ g = s \circ (r \circ g) = s \circ (gr)$. Έτσι, αν R είναι αντιμεταθετικός $\Longrightarrow$ κάθε $R-$πρότυπο είναι και $R-$διπρότυπο!
Αν επιπλέον $G \equiv R$ τότε δεν χρειάζεται ο R να είναι αντιμεταθετικός. Θα συνεπάγεται αυτόματα ότι ο R είναι $R-$διπρότυπο !

Έστω τώρα G ένα $(S,R)-$διπρότυπο και H ένα αριστερό $R-$πρότυπο. Τότε το $T = G \ \otimes_R \ H$ γίνεται ένα αριστερό $S-$πρότυπο ορίζοντας

$$s(g \otimes h) := (sg) \otimes h \ , \ \forall \ \ s \in S, g \in G, h \in H.$$

Αν επίσης το H είναι ένα $(R,S)-$διπρότυπο $\Longrightarrow$ το $G \otimes_R H$ γίνεται ένα $(S,S)-$διπρότυπο.

2.2 Άλγεβρες *Hecke*

Σε αυτήν την ενότητα θα εισαγάγουμε την έννοια της *άλγεβρας Hecke*, μια έννοια καθοριστικής σημασίας για την δημιουργία του πολυωνύμου *Jones* δύο μεταβλητών. Σύντομα θα διαπιστώσουμε ότι οι άλγεβρες *Hecke* είναι το βέλτιστο από αυτά που έχουμε στην διάθεσή μας (δηλαδή την ομάδα κοτσίδων B_n και την ομάδα μεταθέσεων S_n, $n \in \mathbb{N}$) για την δημιουργία μιας αναλλοίωτης κόμβων.

Όπως έχουμε δει και στο δεύτερο κεφάλαιο η ομάδα των κοτσίδων (B_n) είναι άπειρη. Αντιθέτως η ομάδα των μεταθέσεων (S_n) είναι πεπερασμένη ($|S_n| = n!$). Καί οι δύο αυτές ομάδες έχουν ένα καλό και ένα κακό. Η πρώτη έχει το κακό ότι είναι άπειρη και έτσι αδυνατούμε να έχουμε στα χέρια μας όλα της τα στοιχεία, άρα είναι σαν να μήν την γνωρίζουμε πλήρως! Από την άλλη πλευρά όμως έχουμε μια πλούσια δομή, αφού έχουμε μια σαφή αναπαράσταση της ομάδας αυτής στον χώρο (γνωρίζουμε ποιά κλωστή πάει πάνω από ποιά, πόσες φορές και με ποιά σειρά), και όπως είναι φυσικό αυτή την ιδιότητα δεν θέλουμε να τη χάσουμε. Ο λόγος είναι ότι η ιδιότητα αυτή είναι ο μόνος συνδετικός μας κρίκος με τις τρεις διαστάσεις όπου και ζουν οι κόμβοι. (Ας μην ξεχνάμε ότι η ομάδα των κοτσίδων αναπαριστά τους κόμβους στις τρεις διαστάσεις (Θ.*Alexander*)). Αντιθέτως στην ομάδα S_n χάνουμε αυτήν την πληροφορία, εφόσον $s_i^{-1} = s_i$, για κάθε διασταύρωση s_i, λόγω της σχέσης $s_i^2 = 1$, κερδίζουμε όμως στην ακριβή γνώση των στοιχείων της, μιας και είναι πεπερασμένα στο πλήθος και στο ότι η S_n έχει μελετηθεί πολύ.

Έτσι, σύμφωνα με τα προηγούμενα, το βέλτιστο που θα μπορούσαμε να έχουμε είναι να μην χάσουμε την πληροφορία της γεωμετρικής ερμηνείας της ομάδας των κοτσίδων B_n στις τρεις διαστάσεις και συγχρόνως να μπορούμε να ρίξουμε και την διάστασή της. Με αυτόν τον τρόπο θα έχουμε πετύχει το καλύτερο δυνατό, και όπως θα δούμε στη συνέχεια αυτό πραγματοποιείται με την κατασκευή των αλγεβρών *Hecke*!

…τις άλγεβρες *Hecke* μπορούμε να τις φανταστούμε σαν την q-προβολή των ομάδων B_n πάνω στις ομάδες S_n …

Ένας πολύ δημοφιλής κλάδος των μαθηματικών είναι αυτός της θεωρίας αναπαραστάσεων. Έτσι, από πολύ νωρίς υπήρξε η προσπάθεια να αναπαρασταθούν και οι κοτσίδες υπό μορφή πινάκων. Μια πολύ γνωστή αναπαράσταση των κοτσίδων στην ομάδα $GL_n(\mathbb{C})$ είναι αυτή του *Burau*, για την οποία αρχικά πιστευόταν ότι μπορεί να είναι πιστή (δηλαδή 1-1). Αργότερα όμως αποδείχθηκε από τον *J.Moody* ότι $B_n \overset{1-1}{\not\longrightarrow} \Pi_{n\times n}$. Τελικά πρίν τρία χρόνια ο *D.Krammer* απέδειξε ότι υπάρχει αναπαράσταση $B_n \xrightarrow{1-1} \Pi_{n\times n}$. Λαμβάνοντας τα παραπάνω υπ' όψιν μας μπορούμε να πάρουμε όλες τις αναπαραστάσεις της B_n στις οποίες οι εικόνες των σ_i έχουν το πολύ δύο ιδιοτιμές. Γράφοντας g_i για κάθε εικόνα του σ_i κάτω από μια τέτοια αναπαράσταση θα μας προκύψει μια εξίσωση της μορφής[4] $g_i^2 + ag_i + b = 0$, όπου a και b είναι βαθμωτά μεγέθη. Αποδεικνύεται ότι δεν χρειάζονται δύο παράμετροι και ότι η προηγούμενη σχέση μπορεί να πάρει τη μορφή $g_i^2 = (q-1)g_i + q1$ (όπου q είναι βαθμωτό μέγεθος). Ας ονομάσουμε αυτή τη σχέση τετραγωνική.

[4]προκύπτει από το γνωστό θεώρημα *Cayley – Hamilton*

2.2.1 Η Κατασκευή των Αλγεβρών *Hecke*

Σύμφωνα με την παράγραφο 2.1 έχουμε ότι, αν $\mathbb{C}$ το σώμα των μιγαδικών και B_n η ομάδα των κοτσίδων, τότε $\mathbb{C}[B_n]$ (ή πιό απλά $\mathbb{C}B_n$) θα είναι η άλγεβρα της ομάδας B_n πάνω στο σώμα $\mathbb{C}$. Μάλιστα η $\mathbb{C}B_n$ θα είναι μια προσεταιριστική άλγεβρα. Προφανώς η B_n εμπεριέχεται στην $\mathbb{C}B_n$ με φυσικό τρόπο (κάθε $b \in B_n$ είναι στοιχείο βάσης του διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}B_n$). Έτσι η γενική εικόνα των όσων έχουμε είναι η ακόλουθη:

Έχουμε στα χέρια μας την άλγεβρα $\mathbb{C}B_n$ με την οποία δεν μπορούμε να κάνουμε και πολλά πράγματα (ας μην ξεχνάμε ότι έχει άπειρη διάσταση!). Θα επιχειρήσουμε λοιπόν με κάποιο τρόπο να εξασφαλίσουμε κάποιες νέες πληροφορίες. Αρχικά θα επιβάλλουμε κάποιους περιορισμούς στα στοιχεία της $\mathbb{C}B_n$. Αυτές οι περιοριστικές σχέσεις θα είναι οι γνωστές μας πλέον, τετραγωνικές σχέσεις: $\sigma_i^2 = (q-1)\sigma_i + q1$, $\forall i$. Με αυτόν το τρόπο θα προκύψει μια άλγεβρα-πηλίκο της $\mathbb{C}B_n$. Αυτή θα είναι η $\mathbb{C}B_n \,/\, \langle \sigma_i^2 = (q-1)\sigma_i + q1 \rangle$.

Εδώ όμως γεννιέται ένα σημαντικό ερώτημα. Τί νόημα έχει η ισότητα ανάμεσα σε δύο στοιχεία της άλγεβρας $\mathbb{C}B_n$ (δηλαδή των σ_i^2 και των $(q-1)\sigma_i + q1$) από τη στιγμή που τα στοιχεία της είναι τυπικά αθροίσματα; δηλαδή εξ' ορισμού τα στοιχεία της δεν ισούνται με κάποιο άλλο στοιχείο πέρα από αυτό που αναγράφεται! Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι σχετικά απλή!

Έστω ότι βρισκόμαστε στο διανυσματικό χώρο $X = \mathbb{R}^2$ και έστω $Y = \{(x,y) \mid y = ax, a \in \mathbb{R}\}$ ένας υπόχωρός του (ο οποίος είναι μία ευθεία , έστω $\mathcal{L}$). Μπορούμε τότε να κατασκευάσουμε τον διανυσματικό χώρο πηλίκο (X/Y) ο οποίος ισούται με το σύνολο $\{\mathcal{L}\} \cup \{\epsilon \mid \epsilon // \mathcal{L}, \forall \epsilon\}$, όπου ϵ ευθεία του $\mathbb{R}^2$. Εύκολα κανείς μπορεί να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι ο διανυσματικός χώρος πηλίκο (X/Y) είναι ισομορφικός με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}$ (και θα το συμβολίζουμε $(X/Y) \cong \mathbb{R}$). Αυτό κανείς μπορεί να το δει με το να φανταστεί ότι συμπιέζουμε το χώρο $\mathbb{R}^2$ με τέτοιον τρόπο ώστε όλα τα στοιχεία (διανύσματα) του υπόχωρου Y (δηλ. της ευθείας $y = ax$) να πέσουν στο μηδεν και κατά συνέπεια όλος ο χώρος να συμπιεστεί στον άξονα xx' (που και αυτός είναι υπόχωρός του και φυσικά ταυτίζεται με τον $\mathbb{R}$). Παρατηρείστε ότι ουσιαστικά αυτό που κάναμε ήταν να εξισώσουμε όλα τα στοιχεία του υποχώρου (υποομάδας) με το μηδέν (το οποίο όπως γνωρίζετε είναι γραμμικώς εξαρτημένο – και επίσης μπορούμε να το θεωρήσουμε και σαν αντιπρόσωπο της υποομάδας Y στην ομάδα πηλίκο (X/Y)). Αυτό το τελευταίο όπως θα φανεί αμέσως μετά, είναι πολύ σημαντικό.

Έχοντας λοιπόν στα χέρια μας την τετραγωνική σχέση $\sigma_i^2 = (q-1)\sigma_i + q1$ παρατηρούμε ότι:

$$\sigma_i^2 = (q-1)\sigma_i + q1 \implies \sigma_i^2 + (1-q)\sigma_i + (-q)1 = 0$$

Έτσι λοιπόν βρισκόμενοι στον δ.χ. $\mathbb{C}B_n$ αν επιβάλλουμε σε αυτόν τη τετραγωνική σχέση τότε η ισότητα δύο στοιχείων αυτού, έχει το νόημα της εξίσωσης κάποιων στοιχείων του συγκεκριμένης μορφής, με το μηδέν!

Παρατηρήσεις

(1) Παρατηρείστε ότι τη σχέση $\sigma_i^2 + (1-q)\sigma_i + (-q)1 = 0$ μπορεί κανείς να την δει, είτε σαν ένα στοιχείο (το $\sigma_i^2 + (1-q)\sigma_i + (-q)1$) του $\mathbb{C}B_n$ είτε ως τον γραμμικό συνδυασμό

των σ_i^2, σ_i και 1 που είναι και πάλι στοιχεία του $\mathbb{C}B_n$. Έτσι στη δεύτερη περίπτωση εξισώνοντας τον γραμμικό συνδυασμό με το μηδέν (ή ισοδύναμα, επιβάλλοντας την τετραγωνική σχέση), αναγκάζουμε τα στοιχεία σ_i^2, σ_i και 1 , που αρχικά ήταν γραμμικώς ανεξάρτητα (ως στοιχεία βάσης του δ.χ. $\mathbb{C}B_n$), να γίνουν τώρα (στο νέο χώρο που έχει προκύψει) γραμμικώς εξαρτημένα. Το ίδιο ισχύει και στην πρώτη περίπτωση.

(2) Ας δούμε τώρα, το σύνολο $\langle\sigma_i^2 = (q-1)\sigma_i + q1\rangle$ από ποιά στοιχεία ακριβώς αποτελείται.

Λέγοντας λοιπόν, ότι επιβάλλουμε στην $\mathbb{C}B_n$ την τετραγωνική σχέση $\sigma_i^2 + (1-q)\sigma_i + (-q)1 = 0$, δεν σημαίνει ότι αυτή τη σχέση θα την ικανοποιούν μόνο τα σ_i (δηλαδή οι γεννήτορες της B_n), αλλά και κάθε κατάλληλος συνδυασμός στοιχείων της. Δηλαδή θα την ικανοποιούν χ.β.τ.γ[5] κάθε τριάδα κοτσίδων, έστω $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$)), όπου κάθε συνιστώσα της εμπεριέχει τα σ_i^2, σ_i και 1 αντίστοιχα, σε αντίστοιχες θέσεις και σε όλα τα άλλα τους σημεία θα ταυτίζονται. Έτσι εάν $\alpha := (1\cdot\alpha_1 + (1-q)\cdot\alpha_2 + (-q)\cdot\alpha_3) \in \mathbb{C}B_n$ (ή αλλιώς θα συμβολίζουμε: $\alpha \sim \sigma_i^2 + (1-q)\ \sigma_i + (-q)\ 1$) θα έχουμε ότι $\Longrightarrow \alpha \in \langle\sigma_i^2 = (q-1)\sigma_i + q1\rangle$. Συνεπώς, εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$\left\langle\sigma_i^2 = (q-1)\sigma_i + q1\right\rangle \equiv \left\langle v \in \mathbb{C}B_n \ \mid v \ \sim \ \sigma_i^2 + (1-q)\ \sigma_i + (-q)\ 1\right\rangle.$$

Τέλος, ορίζουμε ώς $V := \langle v \in \mathbb{C}B_n \ \mid v \ \sim \ \sigma_i^2 + (1-q)\ \sigma_i + (-q)\ 1\rangle$.

ΣΧΟΛΙΟ : Το σύμβολο: $\langle\cdot\rangle$, υποδηλώνει την γραμμική θήκη του συνόλου που περιέχει. Δηλαδή ο V είναι ο μικρότερος γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{C}B_n$ που περιέχει το σύνολο $\{v \in \mathbb{C}B_n \ \mid v \ \sim \ \sigma_i^2 + (1-q)\ \sigma_i + (-q)\ 1\}$.

Παρατηρείστε ότι, εξισώνοντας κάθε στοιχείο της V με το μηδέν, ορίζεται με φυσικό τρόπο ένας ομομορφισμός φ από την $\mathbb{C}B_n$ στην άλγεβρα πηλίκο[6] $\mathbb{C}B_n/V$, με πυρήνα τον υπόχωρο V.

(3) Το $1 \notin V$, όμως μπορεί να ισχύει $1 = \alpha_i$, για κάποιο $i \in \{1,2,3\}$.

(4) Το $0 \in V$. Πράγματι, από την στιγμή που ο V είναι υπόχωρος (σχόλιο Παρατήρησης (2)), προφανώς θα περιέχει και το 0. Ομοίως και για το άθροισμα στοιχείων του V.

(5) Αν $\alpha, \beta \in V$ τότε και $\alpha \cdot \beta \in V$. Πράγματι, αν γράψουμε τον έναν από τους δύο όρους[7] του γινομένου ως τυπικό άθροισμα και εφαρμόσουμε στην συνέχεια την επιμεριστική ιδιότητα, εύκολα παρατηρούμε ότι ως αποτέλεσμα θα έχουμε ένα τυπικό άθροισμα όπου κάθε όρος του θα είναι ένα νέο α_i, με $i \in \{1,2,3\}$.

[5] Εν γένει, μπορεί αντί για κοτσίδες να έχουμε *κατάλληλα* στοιχεία της άγεβρας $\mathbb{C}B_n$. Όμως, εύκολα κανείς μπορεί να δει, ότι τελικά καταλήγουμε πάλι σε *κατάλληλο* άθροισμα κοτσίδων.

[6] Δες παρατήρηση (6).

[7] Υποθέτουμε χ.β.τ.γ. ότι ο όρος που αναλύεται ως τυπικό άθροισμα είναι γεννήτορας της V.

(6) Τέλος παρατηρείστε ότι ο V είναι δακτύλιος (πιό συγκεκριμένα υποδακτύλιος του δακτυλίου $\mathbb{C}B_n$) και μάλιστα ικανοποιεί και τον ορισμό του ιδεώδους. Αυτό προκύπτει άμεσα αν στην παρατήρηση (5) γίνει αλλαγή της υπόθεσης $\alpha, \beta \in V$ σε $\alpha \in V$ και $\beta \in \mathbb{C}B_n$, όπου και πάλι θα ικανοποιείται η σχέση $\alpha \cdot \beta \in V$. Επομένως ο $(\ \mathbb{C}B_n/V\ \ ,\ +\ ,\ \cdot\ )$ θα είναι δακτύλιος πηλίκο.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι αφού ο $(\ \mathbb{C}B_n/V\ \ ,\ +\ ,\ \cdot\ )$ είναι δακτύλιος και διανυσματικός χώρος, συνεπάγεται ότι θα έχει δομή άλγεβρας.

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό της άλγεβρας $Hecke$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.7 *Άλγεβρα Hecke $H(q,n)$ είναι μια άλγεβρα πάνω στο $\mathbb{C}$, με γεννήτορες τα στοιχεία $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$,τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις,*

$$g_i^2 = (q-1)g_i + q1, \tag{2.1}$$

$$g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \tag{2.2}$$

$$g_i g_j = g_j g_i\ ,\ \forall |i-j| \geq 2. \tag{2.3}$$

δηλαδή ,

$$H(q,n) = \left\langle g_1, g_2, \ldots, g_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_i^2 = (q-1)g_i + q1, \\ g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \\ g_i g_j = g_j g_i\ ,\ \forall |i-j| \geq 2. \end{array} \right\rangle \tag{2.4}$$

όπου $q \in \mathbb{C}$, μη μηδενικό.

Είναι προφανές ότι η άλγεβρα $Hecke$ $H(q,n)$ είναι ισομορφική με την $\mathbb{C}B_n/V$. Αυτό φαίνεται απλώς αλλάζοντας τα σ_i σε g_i, από τη στιγμή που και οι τρεις σχέσεις που ικανοποιούν καί οι δύο αυτές άλγεβρες είναι ακριβώς οι ίδιες.

2.2.2 Κανονική Βάση της Άλγεβρας $Hecke$

Ας θυμηθούμε τώρα, ότι η ομάδα μεταθέσεων S_n παρίσταται από τα $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$, έτσι ώστε $s_i^2 = 1$, $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, $s_i s_j = s_j s_i$, $\forall |i-j| \geq 2$. Ονομάζουμε μειωμένες λέξεις των g_i και των s_i τις λέξεις με το μικρότερο μήκος. Το θέμα είναι ότι η σχέση (2.1) είναι το ίδιο καλή, όσο και η $s_i^2 = 1$ γι' αυτόν τον σκοπό. Έτσι το σύστημα των μειωμένων λέξεων των s_i της S_n είναι ικανό να εφοδιάσει με μια (γραμμική) βάση την $H(q,n)$, απλώς γράφοντας όπου s_i το g_i. Μια βολική τέτοια βάση είναι η,

$$\{(g_{i_1} g_{i_1-1} \ldots g_{i_1-k_1}) \ldots (g_{i_p} \ldots g_{i_p-k_p}) | 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n-1\}. \tag{2.5}$$

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι η διάσταση της $H(q,n)$ ως δ.χ, είναι $n!$. Παρατηρείστε ακόμα ότι η $H(1,n)$, είναι η $\mathbb{C}S_n$.

ΣΧΟΛΙΟ : (1) Η άλγεβρα *Hecke* του Ορισμού 2.7 ονομάζεται άλγεβρα *Hecke* τύπου A_{n-1} , καθώς οι σχέσεις του ορισμού της αντιστοιχούν στα διαγράμματα $Coxeter-Dynkin$ τύπου A_{n-1}. Τέλος υπάρχουν άλγεβρες *Hecke* και για άλλα διαγράμματα $Coxeter-Dynkin$ (βλέπε σχόλιο στο τέλος της εργασίας).

ΣΧΟΛΙΟ : (2) Κάθε λέξη της βάσης της $H(q, n+1)$, περιέχει το στοιχείο g_n, το πολύ μία φορά.

2.3 Η Συνάρτηση Ίχνους του *Ocneanu*

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε το θεώρημα του *Ocneanu* το οποίο είναι το πλέον βασικό για την κατασκευή του πολυωνύμου *Jones* δύο μεταβλητών. Η συνάρτηση ίχνους του *Ocneanu* πάνω στην $H(q,n)$, εμπνεύστηκε από το πολυώνυμο *Jones* μιάς μεταβλητής, που κατασκεύασε ο ίδιος ο *Jones*, μέσω της θεωρίας των Αλγεβρών *von Neumann*.

Όταν αναφερόμαστε σε μία συνάρτηση ίχνους tr, ανεξαρτήτως ποιό είναι το πεδίο ορισμού της (το πεδίο τιμών της είναι συνήθως το $\mathbb{C}$), αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση με τις ακόλουθες ιδιότητες:
(i) $tr(\alpha+\beta) = tr(\alpha) + tr(\beta)$,
(ii) $tr(\lambda\cdot\alpha) = \lambda\cdot tr(\alpha)$,
(iii) $tr(\alpha\beta) = tr(\beta\alpha)$.
δηλαδή η συνάρτηση ίχνους είναι πάντα **γραμμική** και έχει την κύρια ιδιότητα του ίχνους πινάκων.

Ακολούθως θα παρουσιάσουμε το θεώρημα του *Ocneanu* και την απόδειξή του, όπως την είδε απο τη σκοπιά του ο *Jones*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3 *(Ocneanu) Γιά κάθε* $z\in\mathbb{C}$ *υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση* $tr : \cup_{n=1}^{\infty} H(q,n) \longrightarrow \mathbb{C}$ *μοναδικά ορισμένη από τους κανόνες:*
1) $tr(ab) = tr(ba)$,
2) $tr(1) = 1$,
3) $tr(xg_n) = z\, tr(x)$, $\forall x\in H(q,n)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Το πρώτο πράγμα που παρατηρούμε είναι ότι η συνάρτηση $\mathcal{C} : H_n \oplus \left(H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n\right) \to H_{n+1}$ η οποία δίνεται από τον τύπο $\mathcal{C}(x\oplus y_1\otimes y_2) = x + y_1 g_n y_2$, είναι ισομορφισμός ανάμεσα σε $(H_n\ ,\ H_n)-$ διπρότυπα. Αυτό προκύπτει από την εξέταση του συνόλου (2.5) και με το να παρατηρήσει κανείς ότι κάθε λέξη της $H(q,n+1)$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων (λέξεων) της βάσης (2.5), όπου το g_n, εμφανίζεται το πολύ μία φορά. Το ότι είναι επί είναι άμεσο και το ότι είναι 1-1 προκύπτει από τον υπολογισμό των διαστάσεων.

Τώρα είμαστε ελεύθεροι να ορίσουμε τη γραμμική συνάρτηση επαγωγικά από τους τύπους $tr(1) = 1$ και $tr(xg_ny) = z\ tr(xy)\quad,\ \forall\ x, y \in H(q,n)$. Τότε το θέμα είναι να δείξουμε την ιδιότητα *1)* . Από υπόθεση επαγωγής μπορούμε να το υποθέσουμε για $a, b \in H_n$. Τώρα αν S είναι ένα υποσύνολο μιας άλγεβρας A, το οποίο την παράγει σαν άλγεβρα (το S είναι ένα σύνολο γεννητόρων της A), τότε για να δείξουμε ότι η γραμμική συνάρτηση είναι συνάρτηση ίχνους, αρκεί να δείξουμε ότι $f(xs) = f(sx),\ \forall s \in S$ και $x \in A$. Εφαρμόζοντας αυτό και βάζοντας όπου $S = H_n \cup \{g_n\}$, βλέπουμε ότι η μόνη μη τετριμμένη περίπτωση που προκύπτει από τον ορισμό της tr, είναι η $tr(g_nxg_ny) = tr(xg_nyg_n), \forall x, y \in H_n$. Αλλά, από την παρατήρηση στην αρχή της απόδειξης, αρκεί να εξετάσουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

a) $x \in H_{n-1}\ ,\ y \in H_{n-1}$,

b) $x = ag_{n-1}b\ \ ,\ a, b \in H_{n-1}$ και $y \in H_{n-1}$,

c) όμοια με την περίπτωση *b)* με τη διαφορά ότι οι ρόλοι των x και y να είναι αντεστραμμένοι ,

d) $x = ag_{n-1}b, y = cg_{n-1}d\ \ ,\ \ a, b, c, d \in H_{n-1}$.

Η περίπτωση *a)* είναι τετριμμένη, καθώς το g_n αντιμετατίθεται με την H_{n-1}. Έτσι αυτό που χρειάζεται να εξετάσουμε είναι μόνο τις περιπτώσεις *b)* και *d)*. Έχουμε λοιπόν,

$$
\begin{aligned}
b)\qquad tr(g_nag_{n-1}bg_ny) &= tr(ag_ng_{n-1}g_nby)\\
&= tr(ag_{n-1}g_ng_{n-1}by)\\
&= z\ tr(ag_{n-1}^2by)\\
&= (q-1)\ z\ tr(ag_{n-1}by) + qz\ tr(aby)
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
tr(ag_{n-1}bg_nyg_n) &= tr(ag_{n-1}bg_n^2y)\\
&= (q-1)tr(ag_{n-1}bg_ny) + q\ tr(ag_{n-1}by)\\
&= z(q-1)tr(ag_{n-1}by) + qz\ tr(aby).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d)\quad tr(g_nag_{n-1}bg_ncg_{n-1}d) &= z\ tr(ag_{n-1}^2bcg_{n-1}d)\\
&= z(q-1)\ tr(ag_{n-1}bcg_{n-1}d) + z^2q\ tr(aby)
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
tr(ag_{n-1}bg_ncg_{n-1}dg_n) &= z\ tr(ag_{n-1}bg_{n-1}^2d)\\
&= z(q-1)tr(ag_{n-1}bg_{n-1}d) + z^2tr(abcd).
\end{aligned}
$$

ο.ε.δ.

ΣΧΟΛΙΟ : Αυτή η απόδειξη διαφέρει από την αυθεντική του *Ocneanu*.

Είναι προφανές από την απόδειξη ότι οι ιδιότητες 1),2), και 3) αρκούν για να υπολογίσουμε το ίχνος οποιουδήποτε στοιχείου της $H(q,n)$. Για να φανεί αυτό ας κάνουμε κάποιους απλούς υπολογισμούς για την εύρεση του ίχνους της λέξης $g_2g_1g_3g_2$ η οποία έχει ελάχιστο μήκος στην ομάδα των κοτσίδων:

$$\begin{aligned} tr(g_2g_1g_3g_2) &= tr(g_2^2g_1g_3) && \text{(ιδιότητα 1)}\\ &= z\ tr(g_2^2g_1) && \text{(ιδιότητα 3)}\\ &= z(q-1)tr(g_2g_1)+zq\ tr(g_1) &&\\ &= (z^2(q-1)+zq)tr(g_1) &&\\ &= z^3(q-1)+z^2q && \text{(ιδιότητα 1 και 3)}. \end{aligned}$$

2.4 Το Πολυώνυμο *Jones* 2–μεταβλητών

Η παρατήρηση κλειδί εδώ, είναι η ομοιότητα μεταξύ της συνθήκης 3) του θεωρήματος 2.3 και της δεύτερης κίνησης *Markov*. Θα ονομάζουμε αυτό το ίχνος, ίχνος *Markov*. Ο πιο φυσικός τρόπος για να εξασφαλίσουμε μια αναλλοίωτη (κόμβων), είναι να κανονικοποιήσουμε τα g_i έτσι ώστε και οι δύο τύποι του δεύτερου τύπου *Markov*, να επηρεάζουν την συνάρτηση ίχνους με τον ίδιο τρόπο. Έστω λοιπόν θ τέτοιο ώστε : $tr(\theta g_i) = tr((\theta g_i)^{-1})$. Τότε έχουμε :

$$\theta^2 = tr(g_i^{-1})/tr(g_i) = tr(g_i/q-(1-1/q))/z = (1-q+z)/qz\ .$$

Αυτή την ποσότητα ας την ονομάσουμε λ. Από αυτό προκύπτει ότι $z = ((q-1)/(1-\lambda q))$. Έτσι $tr(\sqrt{\lambda}g_i) = tr((\sqrt{\lambda}g_i)^{-1})$ και $tr(\sqrt{\lambda}g_i) = z\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}(1-q)/(1-\lambda q))$.

Τώρα είναι άμεσο ότι αν αναπαραστήσουμε την B_n στην $H(q,n)$ με την π_λ έτσι ώστε, $\pi_\lambda(\sigma_i) = \sqrt{\lambda}g_i \in H(q,n)$, τότε η συνάρτηση των q και λ που δίνεται από την σχέση:

$$(-(1-\lambda q)/\sqrt{\lambda}(1-q))^{n-1}\ tr(\pi_\lambda(\alpha))\ ,\ \alpha \in B_n,$$

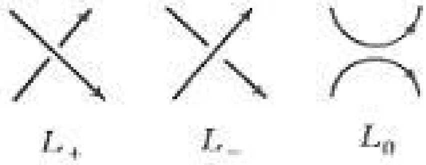
εξαρτάται μόνο από τον κόμβο $\widehat{\alpha}$. Η αναπαράσταση π ($\pi(\sigma_i) = g_i$) έχει το πλεονέκτημα ότι εμπλέκει μόνο την μεταβλητή q · έτσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8 *(Πολυώνυμο Jones 2–μεταβλητών) Η αναλλοίωτη δύο μεταβλητών $X_L(q,\lambda)$ ενός προσανατολισμένου κόμβου L είναι η συνάρτηση,*

$$X_L(q,\lambda) = \left(-\frac{1-\lambda q}{\sqrt{\lambda}(1-q)}\right)^{n-1}\left(\sqrt{\lambda}\right)^e tr(\pi(\alpha))$$

όπου $\alpha \in B_n$ είναι κάθε κοτσίδα τ.ώ. $\widehat{\alpha} = L$, e είναι το εκθετικό άθροισμα του α ως λέξη των σ_i και π η αναπαράσταση της B_n στην $H(q,n)$: $\sigma_i \longmapsto g_i$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1 *Για κάθε προσανατολισμένο κόμβο L (ως προς ισοτοπία) υπάρχει ένα πολυώνυμο Laurent $P_L(t,x)$ δύο μεταβλητών t και x τ.ώ. αν λ και q ικανοποιούν τις σχέσεις $t = \sqrt{\lambda}\sqrt{q}$, $x = (\sqrt{q}-1/\sqrt{q})$ τότε $P_L(t,x) = X_L(q,\lambda)$. Επιπλέον, το $P_L(t,x)$ είναι μοναδικά ορισμένο από τον "γραφικό κανόνα" (γ.κ): "Αν L_+, L_- και L_0 είναι κόμβοι οι οποίοι έχουν ταυτόσημες προβολές, εκτός από μία διασταύρωση όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1, τότε $t^{-1}P_{L_+} - tP_{L_-} = xP_{L_0}$".*



Σχήμα 2.1: $t^{-1}P_{L_+} - tP_{L_-} = xP_{L_0}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Θα ξεκινήσουμε εξετάζοντας την συμπεριφορά της X κάτω από τις γραφικές κινήσεις (δες σχ. 2.1). Παρατηρείστε ότι η επιλογή μιας μεμονωμένης διασταύρωσης του διαγράμματος ενός προσανατολισμένου κόμβου, μπορεί να μετατραπεί σε μορφή κοτσίδας έτσι ώστε η διασταύρωση να γίνει ένας όρος σ_i (ή σ_i^{-1} ανάλογα με το αν είναι θετική ή αρνητική διασταύρωση) στην έκφραση μιάς κοτσίδας ώς λέξη των σ_j. Έτσι μετά από κινήσεις *Markov* πρώτου τύπου, μπορούμε να υποθέσουμε $L_+ = \widehat{\alpha\sigma_i^2}, L_- = \widehat{\alpha}$ και $L_0 = \widehat{\alpha\sigma_i}$ για κάποιο $\alpha \in B_n$. Από την τετραγωνική σχέση έχουμε $tr(\pi(\alpha\sigma_i^2)) - q\ tr(\pi(\alpha)) = (q-1)tr(\pi(\alpha\sigma_i))$. Ας ονομάσουμε το εκθετικό άθροισμα του α e. Πολλαπλασιάζοντας αυτή την εξίσωση με $T(\sqrt{\lambda})^{e+1}/\sqrt{q}$ όπου

$$T = \Big(-(1-\lambda q)/\sqrt{\lambda}(1-q)\Big)^{n-1}$$

τότε έχουμε,

$$\frac{T}{\sqrt{q}\sqrt{\lambda}}(\sqrt{\lambda})^{e+2}tr(\pi(\alpha\sigma_i^2)) - \sqrt{q}\sqrt{\lambda}T(\sqrt{\lambda})^{e}tr(\pi(\alpha))$$
$$= (\sqrt{q} - 1/\sqrt{q})\,T(\sqrt{\lambda})^{e+1}tr(\pi(\alpha\sigma_i)).$$

Έτσι, από τον ορισμό της X, προκύπτει ότι: $t^{-1}X_{L_+} - tX_{L_-} = xX_{L_0}$. □

Παράδειγμα 2.1 *(Συνδετικό άθροισμα)* Ισχυριζόμαστε ότι αν L_1 και L_2 είναι προσανατολισμένοι κόμβοι τότε:

$$X_{L_1\#L_2}(q,\lambda) = X_{L_1}(q,\lambda)X_{L_2}(q,\lambda).$$

Αυτό είναι ανεξάρτητο από το ποιές συνιστώσες των L_1 και L_2, έχει κάποιος επιλέξει για να εκτελέσει το συνεκτικό άθροισμα.

Ο ισχυρισμός καταλήγει να γίνει τετριμμένος εξαιτίας των ακόλουθων δύο περιπτώσεων :

(i) Αν $L_1 = \hat{\alpha}_1,\ \alpha_1 \in B_n$ και $L_2 = \hat{\alpha}_2,\ \alpha_2 \in B_m$ τότε, $L_1\#L_2 = \alpha_1\mathcal{J}^{n-1}(\alpha_2) \in B_{n+m}$, όπου $\mathcal{J}$ είναι η συνάρτηση μετατόπισης με τον επαγωγικό περιορισμό στις B_n, $\mathcal{J}(\sigma_i) = \sigma_{i+1}$. Για παράδειγμα, το συνδετικό άθροισμα του κόμβου $figure-8$ και του τριφυλλιού είναι ο κόμβος $\hat{\alpha}$ όπου $\alpha = \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3^3 \in B_4$.

(ii) Αν w_1 είναι μια λέξη των $1, g_1, \ldots, g_n$ και w_2 είναι μια λέξη των $1, g_{n+1}, \ldots, g_{n+m}$,

τότε $tr(w_1w_2) = tr(w_1)tr(w_2)$. Ο ευκολότερος τρόπος να το δει κανείς είναι να παρατηρήσει ότι η αντιστοιχεία $x \longmapsto tr(xw_2)$ ορίζει ένα μη κανονικοποιημένο ίχνος $Markov$ στην $H_{n+1}(q)$. Η κανονικοποίησή του εξασφαλίζεται σαν αποτέλεσμα της μοναδικότητας του ίχνους $Markov$.

Παράδειγμα 2.2 *(Αντιστροφή του προσανατολισμού)* Αντιστρέφοντας όλα τα βέλη του προσανατολισμού στο σχήμα 2.1, το διάγραμμα προφυλάσσεται. Έτσι από την Πρόταση 3 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $P_L = P_{L'}$, όπου L' είναι ο προσανατολισμένος κόμβος (ή κρίκος) που προκύπτει, αν αντιστρέψουμε στον L τον προσανατολισμό όλων του των διασταυρώσεων. Παρατηρείστε ότι αν αντιστρέψουμε τον προσανατολισμό μιας συγκεκριμένης συνιστώσας (και μόνο αυτής) τότε, το P_L μπορεί να αλλάξει **δραστικά!** Αυτό είναι φυσικό, από την στιγμή που αν αντιστρέψουμε τον προσανατολισμό μιας συγκεκριμένης συνιστώσας, τότε οι διασταυρώσεις που προέρχονται από δύο διαφορετικές συνιστώσες **δεν** παραμένουν οι ίδιες (αφού σε αυτές αλλάζει μόνο ο ένας κλάδος). Ουσιαστικά οι νέες αυτές διακλαδώσεις
αρχικών τους. Αυτά φυσικά έχουν νό
ή περισσότερες συνιστώσες, (δες σχ.

Σχήμα 2.2: Αντιπαράδειγμα.

Το αποτέλεσμα $P_L = P_{L'}$ μπορεί να φανεί και στις άλγεβρες $Hecke$ το ίδιο καλά. Η συμμετρία της παράστασης της B_n μέσω των σχέσεων (2.2) και (2.3) υπονοεί την ύπαρξη ενός αντιαυτομορφισμού θ στην B_n ο οποίος στέλνει το σ_i στο σ_{n-i}. Είναι γεωμετρικά προφανές ότι $\widehat{\theta(\alpha)} = (\hat{\alpha})'$. Από τις σχέσεις (2.1) , (2.2) και (2.3), το θ ορίζει επίσης έναν αντιαυτομορφισμό στην $H_n(q)$ ο οποίος προφυλάσσει το ίχνος (μοναδικότητα του ίχνους $Markov$). Έτσι έχουμε $X_L = X_{L'}$.

ΣΧΟΛΙΟ : Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να νοηθεί σαν αρνητικό αποτέλεσμα του συγκεκριμένου πολυωνύμου, αφού δεν μπορεί να ανιχνεύσει την διαφορά ανάμεσα στους δύο διαφορετικούς προσανατολισμούς του κόμβου. Αλλά ενδεχομένως, μια πιό διεξοδική ανάλυση των σχέσεων Markov στις Hecke άλγεβρες να είναι πιό επιτυχής.

Παράδειγμα 2.3 *(Καθρεφτισμός)* Ένα από τα χαρακτηριστικά του P_L είναι ότι είναι πολύ ευαίσθητο στον καθρεφτισμό ενός κόμβου.

Έστω L ένας προσανατολισμένος κόμβος, και έστω $\widetilde{L}$ άλλος ένας προσανατολισμένος κόμβος, ο οποίος προέκυψε ως το είδωλο του L σε ένα καθρέφτη, ή ισοδύναμα, αντιστρέφοντας όλες τις διασταυρώσεις κάποιας προβολής του L. Είναι φανερό από το σχήμα 2.1 ότι $P_{\widetilde{L}}(t,x) = P_L(t^{-1}, -x)$. Αυτό θα το δείξουμε χρησιμοποιώντας τις άλγεβρες *Hecke*. Αν και αυτή η μέθοδος είναι λιγότερο εύκολη, είναι αρκετά αποκαλυπτική.

Αν $\alpha \in B_n$ τότε το είδωλο του $\hat{\alpha}$ είναι $\theta(\alpha^{-1}) \in B_n$ αλλά όπως έχουμε δει μπορούμε να πάρουμε $\alpha^{-1} \in B_n$. Έτσι εάν $L = \hat{\alpha}$ και e είναι το εκθετικό άθροισμα του α τότε,

$$X_{\widetilde{L}}(q,\lambda) = \left(-\frac{1-\lambda q}{\sqrt{\lambda}(1-q)}\right)^{n-1} \left(\sqrt{\lambda}\right)^{-e} tr(\pi(\alpha^{-1}))\ .$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2 : $X_{\widetilde{L}}(q,\lambda) = X_L(1/q, 1/\lambda)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Έστω $f(q,\lambda) = tr(\pi(\alpha))$. Γράφουμε το $\pi(\alpha)$ ως γινόμενο, με κάθε g_i να γράφεται $(q+1)e_i - 1$ όπου $e_i = (1+g_i)/(1+q)$. Τά e_i ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$e_i^2 = e_i \tag{2.6}$$

$$e_i e_{i+1} e_i - q/(1+q)^2 e_i = e_{i+1} e_i e_{i+1} - q/(1+q)^2 e_{i+1} \tag{2.7}$$

$$e_i e_j = e_j e_i \qquad |i-j| \geq 2 \tag{2.8}$$

$$tr(e_i) = \frac{q(1-\lambda)}{(1+q)(1-\lambda q)}\ . \tag{2.9}$$

Τότε το $\pi(\alpha^{-1})$ θα έχει την ίδια έκφραση ως προς τα e_i αρκεί το q να αντικατασταθεί από το q^{-1}. Και οι δύο οι εκφράσεις $q/(1+q)^2$ και $q(1-\lambda)/(1+q)(1-\lambda q)$ είναι αναλλοίωτες κάτω από την αλλαγή των μεταβλητών $q \mapsto 1/q$, $\lambda \mapsto 1/\lambda$. Επιπλέον οι σχέσεις (2.6) , (2.7) και (2.8) είναι ισοδύναμες, για $q \neq -1$, με τις σχέσεις (2.1),(2.2) και (2.3). Έτσι αρκούν για τον υπολογισμό του ίχνους για κάθε λέξη των e_i, το οποίο θα είναι το άθροισμα δυνάμεων του q επί δυνάμεις του $q(1-\lambda)/(1+q)(1_\lambda q)$. Έτσι $tr(\pi(\alpha^{-1}) = f(1/q,\lambda) = f(1/q, 1/\lambda)$. Τελικά, η έκφραση $(1-\lambda q)/\sqrt{\lambda}(1-q)$ είναι αναλλοίωτη κάτω από την αλλαγή των μεταβλητών και το $(\sqrt{\lambda})^e$ γίνεται $(\sqrt{\lambda})^{-e}$, το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

ΣΧΟΛΙΟ :$(Morton, Franks - Williams)$: Αν $|e| > n-1$ τότε το $\hat{\alpha}$ δεν είναι *amphicheral* $(\alpha \in B_n)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Βλέπουμε στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης ότι το $tr(\pi(\alpha))$, σάν συνάρτηση των q και λ, έχει πεπερασμένο όριο, για σταθερό $q \neq 0$, όταν το $\lambda \to 0$ (σχέση (2.9)). Ας υποθέσουμε ότι $e > 0$ και $e > n-1$. Τότε καθώς το $\lambda \to 0$ βλέπουμε ότι το $X_L(q,\lambda) \to 0$. Αλλά καθώς το X_L είναι πολυώνυμο *Laurent* του $\sqrt{\lambda}$, αυτό σημαίνει ότι μόνο αυστηρά θετικές δυνάμεις του λ μπορούν να προκύψουν. Και γι΄ αυτό $X_L \neq X_{\widetilde{L}}$. Αν $e < 0$, τότε χρησιμοποιούμε τον ίδιο τύπο για το X_L. □

ΣΧΟΛΙΟ : Ο *Bennequin* έχει δείξει ότι ο $\hat{\alpha}$ είναι μη–τετριμμένος εάν $|e| > n-1$. Το προηγούμενο σχόλιο δίνει μια αρκετά διαφορετική απόδειξη αυτού.

Πράγματι, τα δύο τελευταία σχόλια σχετίζονται από τη στιγμή που αν ένας κόμβος είναι *amphicheral* (δηλ. σύμφωνα με το πρώτο σχόλιο μπορεί να ισχύει $|e| \leq n-1$) τότε ενδέχεται να είναι και ο τετριμμένος (σύμφωνα με το δεύτερο σχόλιο). $\square$

Κεφάλαιο 3

Ομάδες Weyl

Στόχος του κεφάλαιου αυτού είναι η ταξινόμηση των ομάδων *Weyl*. Οι ομάδες *Weyl*, όπως θα δούμε είναι υποομάδες των πεπερασμένων ομάδων ανακλάσεων, οι οποίες με τη σειρά τους είναι υποομάδες των ομάδων *Coxeter*. Γι αυτόν τον λόγο θα εισαχθούν κάποιες απαραίτητες έννοιες όπως, οι ανακλάσεις σε Ευκλείδιους διανυσματικούς χώρους, τα συστήματα ριζών και άλλες.

3.1 Ανακλάσεις σε Ευκλείδιους Χώρους

Σε αυτήν την παράγραφο θα εισάγουμε την έννοια της ανάκλασης σε Ευκλείδιο χώρο E, πεπερασμένης διάστασης. Η εισαγωγή αυτή είναι μεγάλης σημασίας για την διατύπωση επόμενων εννοιών μέσω των οποίων θα αναπτυχθεί μια θεωρία με την οποία θα επιτευχθεί η ταξινόμηση των ομάδων *Weyl*.

Γεωμετρικά, η ανάκλαση σ'εναν Ευκλείδιο διανυσματικό χώρο E πεπερασμένης διάστασης, είναι ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος αφήνει σημειακά σταθερό κάποιο υπερεπίπεδο (υπόχωρος συνδιάστασης ένα) και στέλνει κάθε κάθετο διάνυσμα του υπερεπιπέδου αυτού, στο αρνητικό του. Η ανάκλαση είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός δηλαδή διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο στον E. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα α δημιουργεί μια ανάκλαση σ_α, με αντίστοιχο υπερεπίπεδο ανάκλασης P_α, όπου

$$P_\alpha = \{\gamma \in E | (\gamma, \alpha) = 0\}.$$

Φυσικά, μη μηδενικά διανύσματα συγγραμμικά του α δημιουργούν την ίδια ανάκλαση. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η ανάκλαση μπορεί να δοθεί από τον ακόλουθο τύπο :

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \tag{3.1}$$

(Αυτός ο τύπος είναι σωστός εφόσον αντιστοιχεί το α στο $-\alpha$, αφήνει όλα τα σημεία του υπερεπιπέδου P_α αμετάβλητα και ο σ_α είναι γραμμικός).

Επειδή η έκφραση $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ εμφανίζεται συχνά, θα την συμβολίσουμε ως $\langle\beta,\alpha\rangle$, δηλαδή:

$$\langle\beta,\alpha\rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}.$$

Παρατηρείστε ότι το $\langle\beta,\alpha\rangle$ είναι γραμμικό μόνο ως προς την πρώτη μεταβλητή.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1 *Έστω Φ ένα πεπερασμένο σύνολο το οποίο παράγει τον E. Υποθέτουμε ότι όλες οι ανακλάσεις σ_α $(\alpha \in \Phi)$ αφήνουν το Φ αναλλοίωτο. Αν $\sigma \in GL(E)$ τέτοιο ώστε:*
(i) αφήνει το Φ αναλλοίωτο,
(ii) σταθεροποιεί σημειακά ένα υπερεπίπεδο P του E, και
(iii) στέλνει κάποιο μη μηδενικό $\alpha \in \Phi$ στο αρνητικό του ,
τότε $\sigma = \sigma_\alpha$ (και $P = P_\alpha$).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Έστω $\tau = \sigma\sigma_\alpha$ $(= \sigma\sigma_\alpha^{-1})$. Τότε έχουμε ότι $\tau(\Phi) = \Phi$, $\tau(\alpha) = \alpha$ και ότι το τ δρα ως ταυτοτικός (μετασχηματισμός) στον υπόχωρο $\mathbb{R}\alpha$, όπως και στον διανυσματικό χώρο πηλίκο $E/\mathbb{R}\alpha$. Έτσι όλες οι ιδιοτιμές του τ είναι 1, και το ελάχιστο πολυώνυμο αυτού διαιρεί το $(\lambda-1)^\ell$, όπου $\ell = dimE$. Από την άλλη μεριά όμως, από τη στιγμή που το Φ είναι πεπερασμένο, τα διανύσματα $\beta, \tau(\beta), \ldots, \tau^k(\beta)$ $(\beta \in \Phi\ , k \geq |\Phi|)$, δεν μπορεί να είναι όλα διαφορετικά, έτσι κάποια δύναμη του τ σταθεροποιεί το β (δηλαδή, $\tau^k(\beta) = \beta$). Επιλέγουμε το k αρκετά μεγάλο έτσι ώστε $\tau^k(\beta) = \beta$, $\forall\beta \in \Phi$. Επειδή όμως το σύνολο Φ παράγει τον χώρο Ε, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\tau^k = 1$. Έτσι, το ελάχιστο πολυώνυμο του τ διαιρεί το $\lambda^k - 1$. Συνδυάζοντας αυτό με τα προηγούμενα βήματα, συμπεραίνουμε ότι το τ έχει ώς ελάχιστο πολυώνυμο το $\lambda - 1 =$ μ.κ.δ.$(\lambda^k - 1,\ (\lambda-1)^\ell)$. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\tau = 1$.

ο.ε.δ.

3.2 Οι Ομάδες των Ανακλάσεων

Στην ενότητα αυτή, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια δομή στο σύνολο των ανακλάσεων (ως αφηρημένου συνόλου). Αρχικά λοιπόν, θα δούμε ποιοί περιορισμοί υπεισέρχονται προκειμένου να επιτευχθεί αυτό, και στην συνέχεια προσθέτοντας και κάποιους επιπλέον περιορισμούς, θα καταλήξουμε στον ορισμό των *συστημάτων ριζών*. Τέλος, θα παρουσιαστεί ο ορισμός της *βάσης ενός συστήματος ριζών*, έννοια καθοριστικής σημασίας για την δημιουργία των ομάδων $Weyl$.

Έστω ότι θέλουμε να ταξινομήσουμε όλες τις πεπερασμένες ομάδες ανακλάσεων σε Ευκλείδιους διανυσματικούς χώρους. Για να το πετύχουμε αυτό θα πρέπει πρώτα να κατανοήσουμε την εσωτερική δομή (κατασκευή) αυτών των ομάδων. Έστω λοιπόν $\widetilde{\mathcal{W}}$ μία τέτοια ομάδα (με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων). Καταρχήν θέλουμε η ομάδα $\widetilde{\mathcal{W}}$ να έχει όσο το δυνατόν πιο απλή έκφραση, μέσω της οποίας θα παίρνουμε όσο το δυνατόν περισσότερες πληροφορίες. Έτσι, προκειμένου να γνωρίζουμε (πλήρως) τη δράση κάθε στοιχείου μιας τέτοιας ομάδας στον χώρο Ε, θα ήταν βολικό να είχαμε ένα κατάλληλο σύνολο Φ, διανυσμάτων του Ε τέτοιο ώστε: πρώτον, να παράγει τον χώρο Ε (έτσι ώστε κάθε στοιχείο του Ε να εκφράζεται μέσω αυτών), και δεύτερον, κάποια από τα στοιχεία του Φ να ορίζουν (μέσω της απεικόνισης $\alpha \mapsto \sigma_\alpha$) ένα σύνολο γεννητόρων της ομάδας αυτής (φυσικά πεπερασμένο, διαφορετικά θα είχαμε μια άπειρη ομάδα). Δεν αρκεί όμως μόνο αυτό. Θέλουμε κάθε ανάκλαση να δρα με ωραίο τρόπο πάνω στα στοιχεία του Ε.

Έστω, λοιπόν, $x \in E$ με,

$$x = \sum_{\alpha \in \Phi} \lambda_\alpha \alpha$$

και $\sigma \in \widetilde{\mathcal{W}}$. Θέλουμε να ισχύει,

$$\sigma(x) = \sum_{\alpha \in \Phi} \lambda_\alpha \sigma(\alpha),$$

με $\sigma(\alpha) \in \Phi$, εφόσον τότε δεν θα παρουσιάζεται πρόβλημα ύπαρξης διαφορετικών τιμών στους συντελεστές αυτού του γραμμικού συνδυασμού· το μόνο που θα συμβαίνει, θα είναι μια μετάθεση αυτών. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν παίρναμε $\alpha, \beta, \ldots$(πεπερασμένα στο πλήθος) τυχαία διανύσματα του Ε, τότε με τις ανακλάσεις $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$, κ.τ.λ. πιθανότατα δεν θα είχαμε μια τέτοια ωραία δράση. Αλλά όχι μόνο αυτό! Θα υπήρχε το ενδεχόμενο να δημιουργηθεί μια άπειρη ομάδα, πράγμα που δεν θέλουμε. Αρκεί να σκεφτούμε ότι επιλέγοντας δύο μόνο διανύσματα τυχαία, ενδέχεται να δημιουργήσουν νέα διανύσματα, τα οποία με τη σειρά τους να δημιουργήσουν πάλι νέα διανύσματα. Πράγματι,αν a, b δύο διανύσματα στο Φ και θ η μεταξύ τους σχηματιζόμενη γωνία, με π/θ=ν, ν∈$I\!N$, τότε $(\sigma_a \sigma_b)^\nu = 1$, όπου ν, ο μικρότερος τέτοιος εκθέτης (απόδειξη όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 3.3). Έστω τώρα ότι επιλέγουμε δύο διανύσματα α, β τα οποία σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία ϑ $(0 < \vartheta < 180^o)$, όπου ϑ άρρητος αριθμός μοιρών. Ας σημειωθεί ότι επιλέγοντας η ϑ να είναι άρρητος αριθμός μοιρών, εφόσον έτσι εξασφαλίζουμε την άπειρη δημιουργία νέων διανυσμάτων (που θα ανήκουν στο "κατάλληλο" σύνολο διανυσμάτων). Έτσι τελικά, αν επιλέξουμε δύο γειτονικά διανύσματα του συνόλου, έστω x, y, με ϑ' τη μεταξύ τους σχηματιζόμενη γωνία, τότε θα έχουμε, $\pi/\vartheta' \to \infty$. Δηλαδή η τάξη του $(\sigma_x \sigma_y)$ θα είναι άπειρη, και άρα, άπειρη θα είναι και η προκύπτουσα ομάδα ανακλάσεων.

Παρατηρήσεις

Καταρχήν, από τη στιγμή που ασχολούμαστε με πεπερασμένες ομάδες ανακλάσεων, θα έχουμε ότι, αν $\sigma_1, \sigma_2 \in \widetilde{\mathcal{W}}$, τότε θα υπάρχει $\sigma \in \widetilde{\mathcal{W}}$ τέτοιο ώστε: $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma$.

(1) Το γινόμενο δύο ανακλάσεων, έστω $\sigma_\alpha, \sigma_\beta \in \widetilde{\mathcal{W}}$, δεν είναι ανάκλαση, αλλά στροφή κατά γωνία 2ϑ, όπου ϑ=$(\widehat{\alpha, \beta})$.

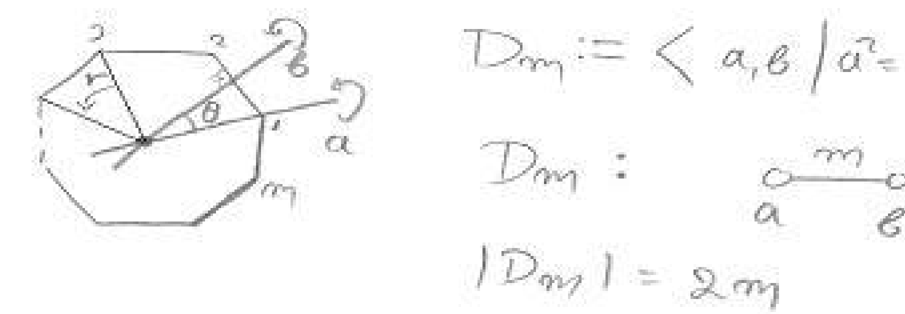
(2) Το γινόμενο δύο ανακλάσεων που ανήκουν στο $\widetilde{\mathcal{W}}$, δεν έχει μοναδική έκφραση (το ίδιο ισχύει και για κάθε γινόμενο στοιχείων του $\widetilde{\mathcal{W}}$).

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, κάθε ανάκλαση σ′ έναν Ευκλείδιο χώρο Ε είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός. Ακολούθως θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε μια πρόταση, της οποίας το νόημα θα το δώσουμε αμέσως μετά.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2 *Έστω $t \in O(E)$ (όπου $O(E)$ είναι το σύνολο των ορθογώνιων μετασχηματισμών του χώρου E) και έστω α ένα μη μηδενικό διάνυσμα του E. Τότε $t\sigma_\alpha t^{-1} = \sigma_{t\alpha}$. Συγκεκριμένα, αν $w \in \widetilde{W}$, τότε $\sigma_{w\alpha} \in \widetilde{W}$, αν και μόνο αν, το $\sigma_\alpha \in \widetilde{W}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Προφανώς το $t\sigma_\alpha t^{-1}$ στέλνει το $t\alpha$ στο αρνητικό του. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι το $t\sigma_\alpha t^{-1}$ σταθεροποιεί το $P_{t\alpha}$ σημειακά. Παρατηρείστε ότι λ$\in P_\alpha$ αν και μόνο αν $t\lambda \in P_{t\alpha}$, μιας και $(\lambda, \alpha) = (t\lambda, t\alpha)$ (αφού t ορθογώνιος). Από την άλλη μεριά, $(t\sigma_\alpha t^{-1})(t\lambda) = t\sigma_\alpha\lambda = t\lambda$, όποτε λ$\in P_\alpha$. □

ΣΧΟΛΙΟ : Το σημαντικό που μας λέει η προηγούμενη Πρόταση είναι ότι αν $w \in \widetilde{W}$, τότε $\sigma_{w\alpha} \in \widetilde{W}$, αν και μόνο αν, το (
κατάλληλο σύνολο διανυσμάτων του
δημιουργούν, να τα μεταθέτει.



Σχήμα 3.1: Παράδειγμα πεπερασμένης ομάδας ανακλάσεων.

3.2.1 Συστήματα Ριζών

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν πιο πριν, ο ακόλουθος ορισμός έχει νόημα ύπαρξης (αν και παρουσιάζεται ένας επιπλέον περιορισμός, για την γωνία που σχηματίζουν τα κατάλληλα επιλεγμένα διανύσματα (της προηγούμενης συζήτησης) μεταξύ τους - αξίωμα ($\mathcal{R}4$)).

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1 *Ένα υποσύνολο Φ ενός Ευκλείδιου διανυσματικού χώρου E ονομάζεται* ***σύστημα ριζών*** *του E, αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα :*

($\mathcal{R}1$) *Το Φ είναι πεπερασμένο, παράγει τον E και δεν περιέχει το 0.*
($\mathcal{R}2$) *Αν $\alpha \in$Φ, τότε τα μόνα πολλαπλάσια του α που να ανήκουν στο Φ, είναι τα $\pm\alpha$.*
($\mathcal{R}3$) *Αν $\alpha \in$Φ, τότε η ανάκλαση σ_α αφήνει το Φ αναλλοίωτο.*
($\mathcal{R}4$) *Αν $\alpha, \beta \in$Φ, τότε $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.*

Παρατηρείστε ότι υπάρχει κάποιος πλεονασμός στα αξιώματα. Συγκεκριμένα τα ($\mathcal{R}2$) και ($\mathcal{R}3$), υπονοούν και τα δύο ότι Φ$=-$Φ. Συνηθίζεται λοιπόν (όπως γίνεται και σε αυτές τις σημειώσεις), πολλές φορές το αξίωμα ($\mathcal{R}2$) να παραλείπεται, και αυτό που αποκαλούμε "σύστημα ριζών" να αναφέρεται στο "μειωμένο σύστημα ριζών". Παρατηρείστε ότι η αντικατάσταση του εσωτερικού γινομένου από ένα θετικό πολλαπλάσιό του, δεν θα επηρέαζε τα αξιώματα, εφόσον εμφανίζονται μόνο πηλίκα εσωτερικών γινομένων.

Έστω Φ ένα σύστημα ριζών στον E. Ορίζουμε με $\mathcal{W}$ την υποομάδα των $GL(E)$ η οποία παράγεται από τις ανακλάσεις σ_α $(\alpha \in \Phi)$. Από το $(\mathcal{R}3)$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η $\mathcal{W}$ μεταθέτει το Φ, το οποίο από το $(\mathcal{R}1)$ είναι πεπερασμένο και παράγει τον E. Αυτό μας επιτρέπει να ταυτίσουμε την $\mathcal{W}$ με μια υποομάδα της ομάδας μεταθέσεων του συνόλου Φ. Συγκεκριμένα η $\mathcal{W}$ είναι πεπερασμένη $(|\mathcal{W}| \leq |\Phi|!)$. Η ομάδα $\mathcal{W}$ ονομάζεται **ομάδα** $Weyl$ του Φ, και παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην θεωρία των αλγεβρών Lie.

Το ακόλουθο θεώρημα παρουσιάζει έναν αυτομορφισμό του E, ο οποίος δρα πάνω στον $\mathcal{W}$ με συζυγία.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1 *Έστω Φ ένα σύστημα ριζών στον E, με ομάδα $Weyl$ την $\mathcal{W}$. Αν $\sigma \in GL(E)$ αφήνει το Φ αναλλοίωτο, τότε $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$, $\forall \alpha \in \Phi$, και $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \sigma(\beta), \sigma(\alpha) \rangle$, $\alpha, \beta \in \Phi$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Έχουμε ότι $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$ μιας και $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$. Αλλά αυτό είναι ισούται με $\sigma(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) = \sigma(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle \sigma(\alpha)$. Αφού το $\sigma(\beta)$ ανήκει στο Φ καθώς το β ανήκει στο Φ, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ αφήνει το Φ αναλλοίωτο, ενώ σταθεροποιεί σημειακά το υπερεπίπεδο $\sigma(P_\alpha)$ και στέλνει το $\sigma(\alpha)$ στο $-\sigma(\alpha)$. Από την Πρόταση 1.1 συμπεραίνουμε ότι, $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$. Όμως τότε, συγκρίνοντας την πιο πάνω εξίσωση με την εξίσωση $\sigma_{\sigma(\alpha)}(\sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - \langle \sigma(\beta), \sigma(\alpha) \rangle\ \sigma(\alpha)$, τότε παίρνουμε το δεύτερο μέρος του θεωρήματος. □

Για την καλύτερη κατανόηση των συστημάτων ριζών, δίνουμε παρακάτω κάποια παραδείγματα. Έτσι, υποθέτουμε ότι E είναι ένας Ευκλείδιος διανύσματικός χώρος με $dimE = l$ και έστω Φ ενα αντίστοιχο σύστημα ριζών. Το l θα λέγεται **βαθμός** του συστήματος ριζών Φ. Όταν $l \leq 3$, τότε προφανώς μπορούμε να περιγράψουμε το Φ, απλώς με το να το σχεδιάσουμε.

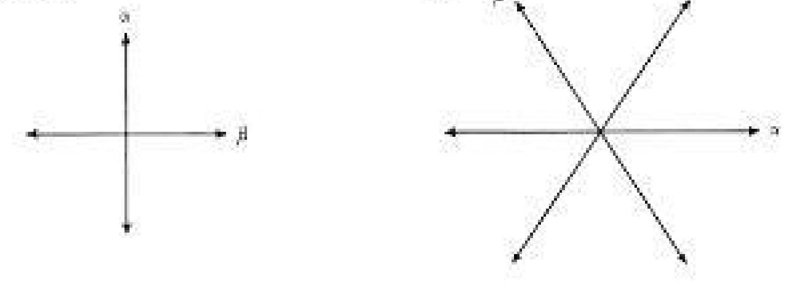
Παραδείγματα

- $l = 1$: Με τη χρήση του ορισμού του Φ, εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει μόνο ένα σύστημα ριζών για $l = 1$, το οποίο και συμβολίζουμε ώς A_1 :

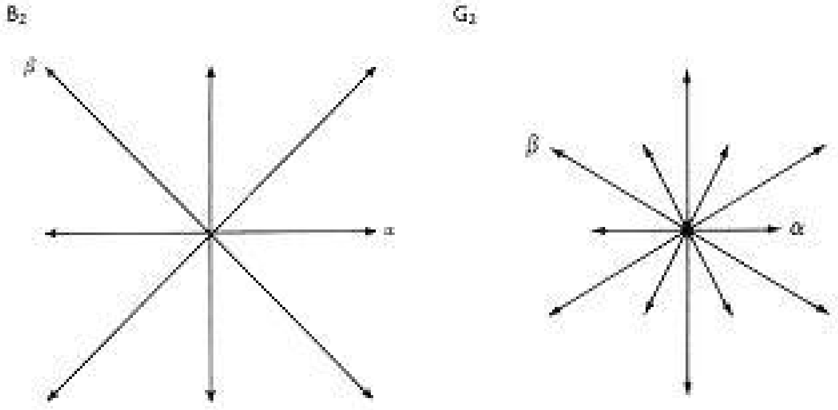
  Αυτό είναι το απλούστερο σύστημα ριζών, με ομάδα $Weyl$ τάξης 2.

- $l = 2$: Σε αυτή την περίπτωση παρουσιάζονται περισσότερα πιθανά συστήματα ριζών, για την ακρίβεια τέσσερα (δείτε σχήμα). Σε κάθε περίπτωση επαληθεύονται εύκολα τα τρία αξιώματα του ορισμού, και εύκολα μπορούν να προσδιοριστούν οι αντίστοιχες ομάδες $\mathcal{W}$.

Ας δούμε λοιπόν τι συμπεράσματα μπορούμε να εξάγουμε βάσει των όσων έχουμε πει μέχρι στιγμής.



Σχήμα 3.2:



Σχήμα 3.3: Συστήματα ριζών βαθμού 2.

Το αξίωμα ($\mathcal{R}4$) είναι ένας σημαντικός περιορισμός για τις πιθανές γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ δύο ριζών του συστήματος. Έστω λοιπόν δύο διανύσματα $\alpha, \beta \in$E, και έστω ϑ η γωνία που σχηματίζεται από αυτά. Τότε προφανώς έχουμε ότι $\|\alpha\|\,\|\beta\|\cos\vartheta = (\alpha, \beta)$. Έτσι έπεται ότι

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}\cos\vartheta$$

και επομένως:

$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4\cos^2\vartheta \ .$$

Η τελευταία αυτή σχέση μας δίνει έναν μη αρνητικό ακέραιο αριθμό. Όμως έχουμε ότι $0 \leq \cos^2\vartheta \leq 1$ και $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\langle \beta, \alpha \rangle$ είναι στον Πίνακα 1 (Σχήμα 3.3), είναι τα

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$
0	0	$\pi/2$	undetermined
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Σχήμα 3.4: Πίνακας 1.

Εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι γωνίες και τα αντίστοιχα μήκη του Πίνακα 1 είναι αυτά που απεικονίζονται στο σχήμα 3.2. Σημειώστε ότι για την περίπτωση $A_1 \times A_1$

είναι ακίνδυνο να αλλάξουμε το μήκος ενός διανύσματος προς κάποια κατεύθυνση. Έτσι υποθέτουμε ότι $\|\alpha\| = \|\beta\|$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3 *Η τάξη του $\sigma_\alpha\sigma_\beta \in W$, είναι 2,3,4,6 όταν $\theta = \pi/2, \pi/3$ (ή $2\pi/3$), $\pi/4$ (ή $3\pi/4$), $\pi/6$ (ή $5\pi/6$). (Παρατηρείστε ότι το $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ είναι στροφή κατά 2θ).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Για $\theta = \pi/2$ αρκεί να δείξω ότι $(\sigma_\alpha\sigma_\beta)^2 = 1$ ή, ισοδύναμα ότι $\sigma_\alpha\sigma_\beta = \sigma_\beta\sigma_\alpha$.
Έστω λοιπόν $\gamma \in E$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha\sigma_\beta(\gamma) &= \sigma_\alpha(\sigma_\beta(\gamma)) \\
&= \sigma_\alpha(\gamma - \langle\gamma,\beta\rangle\,\beta) \\
&= \sigma_\alpha(\gamma) - \langle\gamma,\beta\rangle\,\sigma_\alpha(\beta) \\
&= \gamma - \langle\gamma,\alpha\rangle\,\alpha - \langle\gamma,\beta\rangle\,[\beta - \underbrace{\langle\beta,\alpha\rangle}_{0}\,\alpha] \\
&= \gamma - \langle\gamma,\alpha\rangle\,\alpha - \langle\gamma,\beta\rangle\,\beta.
\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned}
\sigma_\beta\sigma_\alpha(\gamma) &= \sigma_\beta(\gamma - \langle\gamma,\alpha\rangle\,\alpha) \\
&\ \ \vdots \\
&= \gamma - \langle\gamma,\beta\rangle\,\beta - \langle\gamma,\alpha\rangle\,\alpha.
\end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε ότι $\sigma_\alpha\sigma_\beta = \sigma_\beta\sigma_\alpha$.
Οι υπόλοιπες περιπτώσεις, αποδεικνύονται με το ίδιο ακριβώς σκεπτικό. □

Ακολούθως θα παρουσιάσουμε ένα απλό αλλά συγχρόνως και πολύ βασικό θεώρημα, που εύκολα κανείς μπορεί να το διαπιστώσει κοιτάζοντας το σχήμα 3.2.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2 *Έστω α, β δύο ρίζες μη ανάλογες (δηλαδή $\beta \neq \pm\alpha$). Αν $(\alpha, \beta) > 0$ (το οποίο συμβαίνει στη περίπτωση που η γωνία μεταξύ των α και β είναι αυστηρά οξεία), τότε το $\alpha - \beta$ είναι ρίζα. Αν $(\alpha, \beta) < 0$ τότε το $\alpha + \beta$ είναι ρίζα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Παρατηρούμε ότι το δεύτερο συμπέρασμα προκύπτει από το πρώτο εάν στη θέση του β βάλουμε το $-\beta$. Το (α, β) είναι θετικό, αν και μόνο αν, το $\langle\alpha, \beta\rangle$ είναι θετικό. Επίσης από τον Πίνακα 1 (Σχήμα 3.3), μπορούμε να δούμε ότι είτε το $\langle\alpha, \beta\rangle$ είτε το $\langle\beta, \alpha\rangle$ είναι ίσο με τη μονάδα. Αν $\langle\alpha, \beta\rangle = 1$, τότε $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$ $(R3)$. Όμοια αν $\langle\beta, \alpha\rangle = 1$, τότε $\beta - \alpha \in \Phi$, κι έτσι $\alpha - \beta = \sigma_{\beta-\alpha}(\beta - \alpha) \in \Phi$. □

3.2.2 Βάσεις των Συστημάτων Ριζών

Εν συνεχεία θα παρουσιαστεί η έννοια της *βάσης* και των *απλών ριζών*, ενός συστήματος ριζών Φ, έννοιες απαραίτητες για την καλύτερη κατανόηση της δομής των ομάδων *Weyl*, και όπως θα δούμε, και για την ταξινόμησή τους. Από εδώ και στο εξής, με Φ θα συμβολίζουμε ένα σύστημα ριζών, βαθμού ℓ σ' έναν Ευκλείδιο χώρο Ε και με αντίστοιχη ομάδα *Weyl* W.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2 *Ένα υποσύνολο Δ του Φ θα ονομάζεται* ***βάση*** *αν :*

($\mathcal{B}1$) το Δ είναι βάση του E,

($\mathcal{B}2$) κάθε ρίζα β μπορεί να γραφεί ως : $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ με όλους τους συντελεστές k_α να είναι μη αρνητικοί ή μη θετικοί.

Οι ρίζες που ανήκουν στο Δ θα ονομάζονται ***απλές****.*

Παρατηρούμε ότι, λόγω του ($\mathcal{B}1$) θα έχουμε $Card(\Delta) = \ell$, και στο ($\mathcal{B}2$) η έκφραση για το β θα είναι μοναδική. Τα παραπάνω μας οδηγούν στους ακόλουθους ορισμούς,

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3 *(i) Έστω $\beta \in \Phi$. Ορίζουμε ως* ***ύψος*** *του β (σε σχέση με τη βάση Δ), το $ht(\beta) = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha$.*
(ii) Αν όλα τα $k_\alpha \geq 0$ (αντ. $k_\alpha \leq 0$), τότε τη ρίζα β θα την ονομάζουμε ***θετική*** *(αντ.* ***αρνητική****), και θα γράφουμε $\beta \succ 0$ (αντ. $\beta \prec 0$).*

Παρατηρήσεις

(1) Η συλλογή των θετικών και των αρνητικών ριζών (σε σχέση πάντα με το Δ), θα συμβολίζεται ως Φ^+ και Φ^- αντίστοιχα. Συγκεκριμένα έχουμε,

$$\Phi^+ = \Big\{\beta \in \Phi \Big| \; \beta = \sum k_\alpha \alpha, \; k_\alpha \geq 0, \; \forall \alpha \in \Delta\Big\}$$

και

$$\Phi^- = \Big\{\beta \in \Phi \Big| \; \beta = \sum k_\alpha \alpha, \; k_\alpha \leq 0, \; \forall \alpha \in \Delta\Big\}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι: $\Phi^- = -\Phi^+$.

(2) Παρατηρούμε ότι αν $\alpha, \beta \in \Phi^+$ και $\alpha + \beta \in \Phi$, τότε $\alpha + \beta \in \Phi^+$. Συγκεκριμένα έχουμε ότι η βάση Δ ορίζει μια **μερική**[1] **διάταξη** $(\prec)$ στον χώρο E (προσοχή, όχι μόνο στο Φ), και θα γράφουμε: $\mu \prec \lambda$, αν το $\lambda - \mu$, είναι άθροισμα θετικών ριζών (ισοδύναμα, άθροισμα απλών ριζών με θετικούς συντελεστές) ή αν $\mu = \lambda$.

Το μόνο πρόβλημα με τον ορισμό της βάσης, είναι ότι αποτυγχάνει να εγγυηθεί την ύπαρξή της. Στα παραδείγματα που παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.3, οι απλές ρίζες συμβολίζονται με τα γράμματα α, β. Παρατηρείστε ότι η γωνία που σχηματίζουν οι απλές ρίζες μεταξύ τους είναι αμβλεία ($(\alpha, \beta) \leq 0$). Αυτό, όπως θα δούμε στην συνέχεια, δεν είναι τυχαίο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.4 *Αν Δ είναι μια βάση ενός συστήματος ριζών Φ, τότε $(\alpha, \beta) \leq 0$ για όλα τα $\alpha, \beta \in\Delta$ με $\alpha \neq \beta$, και επιπλέον το $\alpha - \beta$ δεν είναι ρίζα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Έστω ότι $(\alpha, \beta) > 0$. Εφόσον $\alpha \neq -\beta$, τότε από Θεώρημα 1.2 , έχουμε ότι το $\alpha - \beta$ είναι ρίζα. Άτοπο, αφού αυτό αντιβαίνει στην υπόθεση ($\mathcal{B}2$). □

Εφόσον η ύπαρξη της βάσης δεν εξασφαλίζεται αυτόματα από τον ορισμό της, θα επιχειρήσουμε να την αποδείξουμε, αφού όμως πρώτα δώσουμε τον ορισμό κάποιων απαραίτητων εννοιών, που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη.

[1] Η διάταξη αυτή δεν είναι *ολική!* Αρκεί να παρατηρήσετε ότι αν $\alpha, \beta \in \Delta$, τότε (τα α, β) δεν μπορούν να διαταχθούν.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4 *Έστω E ένας Ευκλείδιος διανυσματικός χώρος και Φ ένα αντίστοιχο σύστημα ριζών.*
(i) Αν $\gamma \in E \backslash \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$, τότε το γ θα ονομάζεται **σύνηθες** *ή* **κανονικό** *(regular)· διαφορετικά θα ονομάζεται* **ιδιόμορφο** *(αντ.singular).*
Αν $\gamma \in E$, τότε $\Phi^+(\gamma){:=}\{\alpha \in \Phi | (\gamma,\alpha) > 0\}$. Δηλαδή το $\Phi^+(\gamma)$ είναι το σύνολο των ριζών που βρίσκονται στον θετικό ημίχωρο που δημιουργεί ο κάθετος υπόχωρος (συνδιάστασης 1), του γ.
ΣΧΟΛΙΟ : Θεωρούμε ως στοιχειώδη γνώση ότι η πεπερασμένη ένωση υπερεπιπέδων P_α , $\alpha \in \Phi$, δεν μπορεί να καλύψει τον αντίστοιχο Ευκλείδιο χώρο E. Έτσι το σύνολο των συνήθων διανυσμάτων είναι μη κενό. Επιπλέον παρατηρούμε ότι αν το γ είναι **σύνηθες***, τότε $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$.*
(ii) Αν $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ και αν $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ για κάποια $\beta_i \in \Phi^+(\gamma)$, τότε το α θα λέγεται **σύνθετο***· διαφορετικά θα λέγεται* **ανάγωγο***.*

Επιπλέον $\Delta(\gamma){:=}\{\chi \in \Phi^+(\gamma) |\ \chi \neq \beta_1 + \beta_2$ για $\beta_i \in \Phi^+(\gamma)\ , i = 1, 2\}$.
Δηλαδή το $\Delta(\gamma)$ είναι το σύνολο όλων των ανάγωγων ριζών του συνόλου $\Phi^+(\gamma)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3 *Έστω το $\gamma \in E$ είναι σύνηθες. Τότε το $\Delta(\gamma)$ είναι βάση του Φ· επιπλέον κάθε βάση προκύπτει με αυτόν τον τρόπο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα:

(1) Κάθε ρίζα που ανήκει στο σύνολο $\Phi^+(\gamma)$, είναι ένας μη αρνητικός $\mathbb{Z}$-γραμμικός συνδυασμός του συνόλου $\Delta(\gamma)$.
Πράγματι, έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ το οποίο δεν μπορεί να γραφεί με τον προαναφερθέντα τρόπο. Επιλέγουμε το α έτσι ώστε το (γ, α) να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Προφανώς το $\alpha \notin \Delta(\gamma)$, μιας και αν $\alpha \in \Delta(\gamma) \Longrightarrow \alpha = 1 \cdot \alpha$, όπου $1 \in \mathbb{Z}^*$ και $\alpha \in \Delta(\gamma)$, άτοπο. Έτσι $\alpha = \beta_1 + \beta_2$, $(\beta_i \in \Phi^+(\gamma))$, κι έτσι $(\gamma, \alpha) = (\gamma, \beta_1) + (\gamma, \beta_2)$. Όμως κάθε (γ, β_i) είναι θετικό. Άρα τα β_1 και β_2 θα πρέπει να είναι μη αρνητικοί $\mathbb{Z}$-γραμμικοί συνδυασμοί του $\Delta(\gamma)$ (για να αποφευχθεί η αντίφαση με την ελαχιστοποίηση του (γ, α)), επομένως και το α θα είναι. Άτοπο!

(2) Αν $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ τότε $(\alpha, \beta) \leq 0$, εκτός και αν $\alpha = \beta$.
Πάλι θα το αποδείξουμε με άτοπο. Έστω λοιπόν ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε από το Θεώρημα 1.2 προκύπτει ότι το $\alpha - \beta$ είναι ρίζα. Εφόσον όμως $\beta \neq -\alpha$, τότε το $\alpha - \beta$ ή το $\beta - \alpha$ θα ανήκει στο $\Phi^+(\gamma)$. Όμως στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι, $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι τι α είναι σύνθετο· γιά την άλλη περίπτωση έχουμε ότι το β είναι σύνθετο ($\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$). Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

(3) Το $\Delta(\gamma)$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.
Υποθέτουμε ότι $\sum \lambda_\alpha \alpha = 0$ με, $\alpha \in \Delta(\gamma)$ και $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$. Διαχωρίζοντας τους δείκτες α για τους οποίους $\lambda_\alpha > 0$ και $\lambda_\alpha < 0$, η προηγούμενη σχέση μπορεί να πάρει τη μορφή: $\sum s_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta$, όπου $s_\alpha, t_\beta > 0$ (τα σύνολα των α, β είναι διαφορετικά). Έστω $\epsilon := \sum s_\alpha \alpha$· τότε $(\epsilon, \epsilon) = \sum_{\alpha,\beta} s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta) \leq 0$, από το βήμα (2), οδηγώντας έτσι το $\epsilon = 0$. Τότε $0 = (\gamma, \epsilon) = \sum s_\alpha (\gamma, \alpha)$, οδηγώντας όλα τα $s_\alpha = 0$. Ομοίως όλα τα $t_\beta = 0$.

Υποσημείωση: *Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε, ότι εάν έχουμε ένα σύνολο διανυσμάτων τα οποία βρίσκονται αυστηρώς σε μια πλευρά ενός υπερεπιπέδου στον χώρο E και σχηματίζουν μεταξύ τους ανά ζεύγη, αμβλείες γωνίες ή ορθές, τότε αυτά θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

(4) Το $\Delta(\gamma)$ είναι βάση του Φ.

Αφού $\Phi=\Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$, τότε βάση του βήματος (1), η συνθήκη ($\mathcal{B}2$) ικανοποιείται. Επίσης προκύπτει ότι το $\Delta(\gamma)$ παράγει τον E (λόγω βήματος (1))· και σε συνδυασμό με το βήμα (3) έχουμε ότι ικανοποιείται και η συνθήκη ($\mathcal{B}1$).

(5) Κάθε βάση Δ του Φ έχει τη μορφή $\Delta(\gamma)$, για κάποιο σύνηθες $\gamma \in$E.

Έστω Δ μια βάση. Επιλέγουμε $\gamma \in$E τέτοιο ώστε, $(\gamma,\alpha) > 0$, $\forall \alpha \in \Delta$. (Αυτό μπορεί να επιτευχθεί, επειδή η τομή των ανοιχτών θετικών ημιχώρων, συσχετιζόμενη με κάθε βάση του E, είναι μη κενή). Λόγω του ($\mathcal{B}2$), το γ είναι σύνηθες και $\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$, $\Phi^- \subset -\Phi^+(\gamma)$(έτσι ισοδύναμα πρέπει να συμβαίνει σε κάθε περίπτωση). Εφόσον το $\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$, τότε σίγουρα το Δ αποτελείται από ανάγωγα στοιχεία, επομένως $\Delta \subset \Delta(\gamma)$. Από την άλλη όμως, $\Delta = Card\Delta(\gamma) = \ell$, κι έτσι $\Delta = \Delta(\gamma)$.

ο.ε.δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.1 *Ένα σύστημα ριζών Φ, έχει βάση. Η βάση δεν είναι μοναδική· για την ακρίβεια το σύστημα ριζών Φ έχει τόσες βάσεις όσο είναι και το πλήθος των διαμερισμάτων*[2] *της, (δες [Hm2] Θεώρημα σελ. 8).*

ΣΧΟΛΙΟ : Η απόδειξη του θεωρήματος παρέχει μια συγκεκριμένη μέθοδο για την κατασκευή όλων των πιθανών βάσεων ενός καθορισμένου, κάθε φορά, συστήματος ριζών.

Έχοντας λοιπόν ένα σύστημα ριζών Φ, είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι τα υπερεπίπεδα P_α ($\alpha \in \Phi$), διαμερίζουν τον χώρο E σε πεπερασμένο το πλήθος περιοχές (αφού Φ πεπερασμένο)· αυτές είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του $E - \cup_\alpha P_\alpha$, τις οποίες και ονομάζουμε (ανοικτά) **διαμερίσματα** *Weyl* (*Weyl chambers*). Έτσι, κάθε σύνηθες $\gamma \in E$, ανήκει ακριβώς σ' ένα διαμέρισμα *Weyl*, το οποίο και θα συμβολίζουμε ως $\mathfrak{C}(\gamma)$. Γράφοντας $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$, είναι το ίδιο με το να λέμε ότι τα γ, γ' βρίσκονται στην ίδια πλευρά κάθε υπερεπιπέδου P_α ($\alpha \in \Phi$), το οποίο με τη σειρά του συνεπάγεται ότι, $\Phi^+(\gamma)=\Phi^+(\gamma')$, ή ισοδύναμα $\Delta(\gamma)=\Delta(\gamma')$ (εύκολο).

Έτσι προκύπτει η ακόλουθη πρόταση.

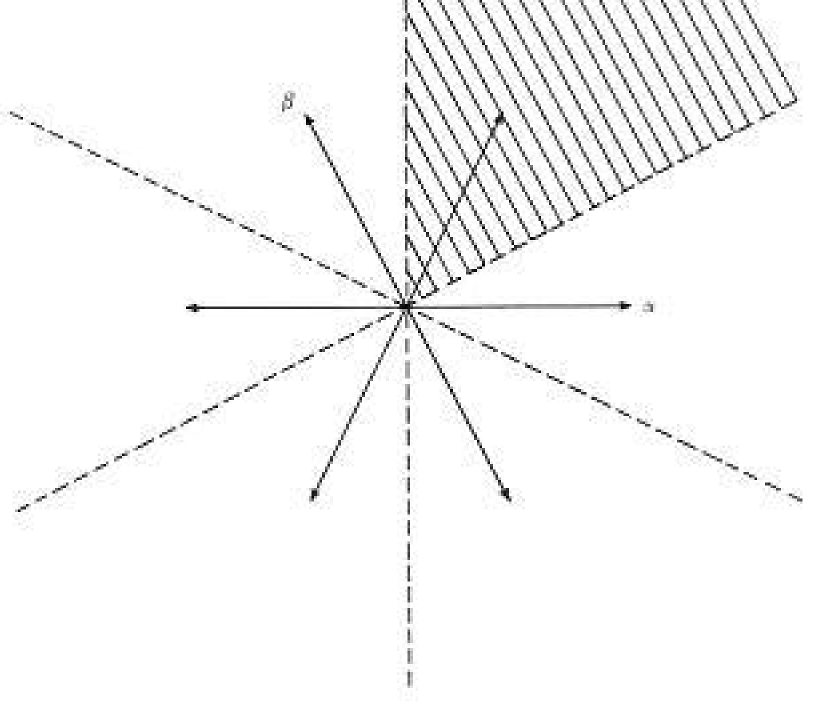
ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5 *Τα διαμερίσματα Weyl βρίσκονται σε φυσική 1-1 αντιστοιχία με τις βάσεις.*

Γράφουμε $\mathfrak{C}(\Delta) = \mathfrak{C}(\gamma)$, αν $\Delta=\Delta(\gamma)$, και το ονομάζουμε **θεμελιώδες διαμέρισμα** *Weyl* **σε σχέση με το Δ**.

ΛΗΜΜΑ 3.1 *Το $\mathfrak{C}(\Delta)$, είναι ένα ανοιχτό, κυρτό σύνολο (ως τομή ανοιχτών ημιχώρων), αποτελούμενο από όλα τα $\gamma \in E$, τα οποία ικανοποιούν τις ανισότητες $(\gamma,\alpha) > 0$ ($\alpha \in \Delta$).*

[2] Ο ορισμός των *διαμερισμάτων* δίνεται μετά το σχόλιο.

Παράδειγμα 3.1 Για βαθμό 2, τα δ
νονται στο Σχήμα 3.5. Εύκολα μπορ
Weyl, εκ των οποίων το γραμμοσκια
ρισμα *Weyl* σε σχέση με τη βάση Δ=



Σχήμα 3.5: Διαμερίσματα *Weyl*.

Ακολούθως θα αναφέρουμε κάποιες χρήσιμες προτάσεις, στις οποίες θα συμβολίζουμε με Δ, μια βάση ενός συστήματος ριζών Φ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.6 *Αν α είναι μια θετική αλλά όχι απλή ρίζα, τότε το $\alpha - \beta$ είναι ρίζα, για κάποιο $\beta \in \Delta$ και μάλιστα θετική.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Αν $(\alpha, \beta) \leq 0$, $\forall \beta \in \Delta$, τότε από την υποσημείωση του βήματος (3) του προηγούμενου θεωρήματος, θα έχουμε ότι το σύνολο $\Delta \cup \alpha$ θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Αυτό όμως οδηγεί σε άτοπο, αφού το Δ είναι ήδη βάση του Ε. Έτσι έχουμε ότι $\exists \beta \in \Delta$ τέτοιο ώστε $(\alpha, \beta) > 0$. Τότε όμως από το Θεώρημα 3.2 (μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε απ΄ τη στιγμή που το β δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσιο του α) έχουμε ότι $\alpha - \beta \in \Phi$. Το α όμως γράφεται και ως $\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$ όπου όλα τα $k_\gamma \geq 0$ και $\exists \gamma \neq \beta$ τέτοιο ώστε $k_\gamma > 0$. Επομένως αφαιρώντας το β από το α, προκύπτει ένας $\mathbb{Z}$-γραμμικός συνδυασμός από απλές ρίζες με τουλάχιστον έναν συντελεστή θετικό. Αυτό όμως, αναγκάζει όλους τους συντελεστές να είναι μη αρνητικοί, λόγω της μοναδικότητας της έκφρασης της $(\mathcal{B}2)$. □

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.2 *Κάθε $\beta \in \Phi^+$ μπορεί να γραφεί στη μορφή: $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ (όπου $\alpha_i \in \Delta$, όχι απαραίτητα διαφορετικά) με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε μερικό άθροισμα $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i$, να είναι ρίζα.*

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή και με χρήση του προηγούμενου πορίσματος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7 *Έστω α μια απλή ρίζα. Τότε το σ_α μεταθέτει τις θετικές ρίζες, εκτός από το α (αντ. τις αρνητικές εκτός από την $-\alpha$).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Έστω $\beta \in \Phi^+ - \{\alpha\}$. Έχουμε ότι $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$ ($k_\gamma \in \mathbb{Z}^+$). Είναι σαφές ότι το β δεν είναι πολλαπλάσιο του α. Επομένως υπάρχει κάποιο $k_\gamma \neq 0$ για κάποιο $\gamma \neq \alpha$ (διαφορετικά ή β =πολ.α ή $\beta = 0$ και άρα $\beta \notin \Phi$). Όμως ο συντελεστής του γ στη σχέση $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$ παραμένει k_γ. Με άλλα λόγια το $\sigma_\alpha(\beta)$ έχει τουλάχιστον έναν θετικό συντελεστή (σε σχέση με την Δ), οδηγώντας το έτσι να είναι θετικό. Επιπλέον $\sigma_\alpha(\beta) \neq \alpha$, εφόσον το α είναι η εικόνα του $-\alpha(\in \Phi^-)$. □

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.3 *Ορίζουμε* $\delta := \frac{1}{2}\sum_{\beta \succ 0} \beta$ *(όπου* β *όλες οι θετικές ρίζες). Τότε* $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$, $\forall \alpha \in \Delta$.

Η απόδειξη προκύπτει εύκολα από τη προηγούμενη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.8 *Έστω* $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \Delta$ *(όχι απαραίτητα διαφορετικά). Ορίζουμε* $\sigma_i := \sigma_{\alpha_i}$. *Αν το* $\sigma_1 \ldots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$, *είναι αρνητικό, τότε* $\exists s,\ 1 \leq s < t$ *τέτοιο ώστε:*

$$\sigma_1 \ \ldots \ \sigma_t = \sigma_1 \ \ldots \ \widehat{\sigma_s} \ldots \ \sigma_{t-1},$$

όπου $\widehat{\sigma}_s$, *σημαίνει ότι ο όρος* σ_s *λείπει.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Ορίζουμε $\beta_i := \sigma_{i+1} \ \ldots \ \sigma_{t-1}(\alpha_t),\ 0 \leq i \leq t-2$, και $\beta_{t-1} := \alpha_t$. Εφόσον $\beta_0 \prec 0$ και $\beta_{t-1} \succ 0$, μπορούμε να βρούμε έναν ελάχιστο δείκτη s τέτοιον ώστε $\beta_s \succ 0$. Τότε όμως $\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1} \prec 0$, επομένως λόγω της προηγούμενης Πρότασης, συνεπάγεται ότι $\beta_s = \alpha_s$. Στη γενική περίπτωση όμως από το Θεώρημα 1.1 έχουμε ότι, αν $\sigma \in \mathcal{W}$, τότε $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$. Έτσι στη προκειμένη περίπτωση έχουμε:

$$\sigma_s = (\sigma_{s+1} \ \ldots \ \sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{t-1} \ \ldots \ \sigma_{s+1})$$

το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα της πρότασής μας.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι,

$$\begin{aligned} \sigma_1 \ \ldots \ \sigma_t &= \sigma_1 \ \ldots \ \hat{\sigma}_s \ldots \ \sigma_{t-1} \Leftrightarrow \\ \sigma_1 \ \ldots \ \sigma_{t-1} &= \sigma_1 \ \ldots \ \hat{\sigma}_s \ldots \ \sigma_t. \end{aligned}$$

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.4 *Αν* $\sigma = \sigma_1 \ \ldots \ \sigma_t$ *είναι μια έκφραση ενός* $\sigma \in \mathcal{W}$, *του οποίου οι όροι είναι ανακλάσεις που αντιστοιχούν σε απλές ρίζες, με* t *όσο το δυνατόν μικρότερο, τότε* $\sigma(\alpha_t) \prec 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Η απόδειξη θα γίνει με εις άτοπον απαγωγή.
Έστω λοιπόν ότι $\sigma(\alpha_t) \succ 0$, όπου $\sigma := \sigma_1 \ldots \sigma_t$. Τότε $\sigma(\alpha_t) = \sigma_1 \ldots \sigma_t(\alpha_t) = -\sigma_1 \ldots \sigma_{t-1}(\alpha_t)\ (\succ 0) \ \Rightarrow \ \sigma_1 \ldots \sigma_{t-1}(\alpha_t) \prec 0$. Από το τελευταίο όμως, λόγω της Πρότασης 3.8, συνεπάγεται ότι $\exists s :\ 1 \leq s < t$, τέτοι ώστε, $\sigma_1 \ldots \sigma_t = \sigma_1 \ldots \hat{\sigma}_s \ldots \sigma_{t-1}$. Άτοπο! □

3.3 Ομάδες *Weyl*

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τις ομάδες $Weyl$. Συγκεκριμένα θα δούμε πως επιδρούν σε μια βάση Δ, ενός συστήματος ριζών Φ, καθώς και στο ίδιο το σύστημα Φ. Επίσης θα αποδειχθούν κάποιες προτάσεις, μέσω των οποίων θα κατανοηθεί καλύτερα η δομή των ομάδων $Weyl$ (με την εύρεση των γεννητόρων τους), και θα γίνει φανερή η άμεση συσχέτισή τους με τις ομάδες $Coxeter$.

Θα ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας κατευθείαν ένα πολύ σημαντικό θεώρημα,

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4 *Έστω Δ μια βάση ενός συστήματος ριζών Φ, σ'έναν Ευκλείδιο διανυσματικό χώρο E και $\mathcal{W}$ η ομάδα Weyl του Φ.*
(a) Αν $\gamma \in E$ και είναι σύνηθες, τότε υπάρχει $\sigma \in \mathcal{W}$, τέτοιο ώστε $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$, $\forall \alpha \in \Delta$. (Τότε η $\mathcal{W}$ δρα μεταβατικά στα διαμερίσματα Weyl).
(b) Αν Δ' είναι μια άλλη βάση του Φ, τότε $\exists\ \sigma \in \mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $\sigma(\Delta') = \Delta$. (Έτσι η $\mathcal{W}$ δρα μεταβατικά στις βάσεις).
(c) Αν α είναι μια τυχαία ρίζα, τότε υπάρχει $\sigma \in \mathcal{W}$, τέτοια ώστε $\sigma(\alpha) \in \Delta$.
(d) Τα σ_α ($\alpha \in \Delta$) είναι γεννήτορες της $\mathcal{W}$.
(e) Αν $\sigma(\Delta)=\Delta$, με $\sigma \in \mathcal{W}$, τότε $\sigma=\mathbf{1}$. (Έτσι η $\mathcal{W}$ δρα, απλά και μόνο μεταβατικά στις βάσεις).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Έστω $\mathcal{W}'$ υποομάδα της $\mathcal{W}$ (θα συμβολίζουμε:$\mathcal{W}' \leq \mathcal{W}$), η οποία παράγεται από όλες τις σ_ℓ ($\ell \in \Delta$). Θα αποδείξουμε τα $(a) - (c)$ για την $\mathcal{W}'$, κι επομένως τα συμπεράσματα θα ισχύουν και για την $\mathcal{W}$.

(a) Έστω $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \succ 0} \alpha$. Επιλέγουμε $\sigma \in \mathcal{W}'$ για το οποίο το $(\sigma(\gamma), \delta)$ να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Αν το α είναι απλή ρίζα, τότε σίγουρα το $\sigma\sigma_\alpha \in \mathcal{W}'$. Έτσι, λόγω της επιλογής του σ, συνεπάγεται ότι:

$$(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma_\alpha \sigma(\gamma), \delta) =^{(*)} (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta)) = (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) = (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)$$

(λόγω του Πορίσματος 3.3). Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$, $\forall \alpha \in \Delta$. Αφού όμως το γ είναι σύνηθες, δεν μπορούμε να έχουμε $(\sigma(\gamma), \alpha) = 0$, $\forall \alpha$· μιας και τότε το γ θα ήταν ορθογώνιο (κάθετο) στο $\sigma^{-1}\alpha$. Έτσι όλες οι ανισότητες είναι αυστηρές. Συνεπώς το $\sigma(\gamma)$ βρίσκεται σ' ένα θεμελιώδες διαμέρισμα *Weyl* $\mathfrak{C}(\Delta)$, και το σ στέλνει το $\mathfrak{C}(\gamma)$ στο $\mathfrak{C}(\Delta)$, όπως είναι επιθυμητό.

(b) Εφόσον η $\mathcal{W}'$ μεταθέτει τα διαμερίσματα *Weyl*, τότε, λόγω του (a), το ίδιο θα κάνει και για τις βάσεις του Φ (αφού βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τις βάσεισ-δες Πρόταση 3.5).

(c) Λόγω του (b), αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ρίζα ανήκει σε τουλάχιστον μια βάση. Αφού οι μόνες ρίζες που είναι πολλαπλάσια του α, είναι (μόνο) οι $\pm\alpha$ τότε τα υπερεπίπεδα P_β ($\beta \neq \pm\alpha$) είναι διαφορετικά από το P_α· έτσι $\exists \gamma \in P_\alpha$ με $\gamma \notin P_\beta$, $\forall \beta \neq \pm\alpha$. Ακολούθως επιλέγουμε γ' αρκετά κοντά στο γ έτσι ώστε $(\gamma', \alpha) = \epsilon > 0$, ενώ $|(\gamma', \beta)| > \epsilon$, $\forall \beta \neq \pm\alpha$. Συνεπώς το α ανήκει στη βάση $\Delta(\gamma')$.

(d) Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathcal{W}=\mathcal{W}'$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι κάθε ανάκλαση $\sigma_\alpha \in \mathcal{W}'$. Με χρήση όμως του (c), μπορούμε να βρούμε $\sigma \in \mathcal{W}'$ (και άρα $\sigma \in \mathcal{W}$) τέτοιο ώστε $\beta = \sigma(\alpha) \in \Delta$. Τότε όμως θα έχουμε,

$$\sigma_\beta = \sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} \Longrightarrow \sigma_\alpha = \sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \ \in \ \mathcal{W}'.$$

(e) Έστω ότι $\sigma(\Delta) = \Delta$ και $\sigma \neq \mathbf{1}$. Αν τώρα, το σ γραφεί ως γινόμενο μιας ή περισσοτέρων απλών ανακλάσεων με ελάχιστο μήκος (το οποίο είναι δυνατό λόγω του (d)), τότε λόγω του Πορίσματος 3.4, οδηγούμαστε σε άτοπο.

ο.ε.δ.

3.3.1 Συνάρτηση Μήκους

Σε αυτήν την υποενότητα θα παρουσιαστούν κάποιες βασικές έννοιες, που θα διευκρινίζουν σε μεγαλύτερο βαθμό την δομή μιας ομάδας *Weyl*. Επιπλέον θα κριθούν απαραίτητες για την απόδειξη δύο θεμελιωδών θεωρημάτων (τα Θεωρήματα Αλλαγής και Διαγραφής).

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.5 *Έστω ένα τυχαίο $w \in \mathcal{W}$, το οποίο μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο απλών ανακλάσεων ως $w = \sigma_1 \ldots \sigma_r$ (όπου $\sigma_i := \sigma_{\alpha_i}$ για $\alpha_i \in \Delta$). •Ορίζουμε ως* **μήκος** *του w (συμβολίζουμε $\ell(w)$)-σε σχέση με την βάση Δ- να είναι το μικρότερο τέτοιο r για το οποίο υπάρχει αυτή η έκφραση. •Τότε την έκφραση αυτή θα την ονομάζουμε* **μειωμένη** *(reduced). •Τέλος ορίζουμε $\ell(1)$:=0.*

Παρατηρήσεις
(1) Προφανώς $\ell(w)$=1 αν και μόνο αν $w = \sigma_\alpha$ για κάποιο $\alpha \in \Delta$.
(2) Επίσης είναι προφανές ότι $\ell(w) = \ell(w^{-1})$, εφόσον $w^{-1} = \sigma_r \ldots \sigma_1$ υπονοώντας ότι $\ell(w^{-1}) \leq \ell(w)$, και αντίστροφα (μιας και η έκφραση $\sigma_r \ldots \sigma_1$, ενδεχομένως να μειώνεται κι άλλο).
(3) Γνωρίζουμε ότι κάθε ανάκλαση σαν ορθογώνιος μετασχηματισμός, έχει ορίζουσα ίση με -1. Επομένως έχουμε ότι: $det(w) = (-1)^{\ell(w)}$.
(4) Αν $\ell(w) = r$ και $\alpha \in \Delta$, τότε το $\ell(\sigma_\alpha w)$ θα είναι ίσο είτε με $r + 1$ είτε με $r - 1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.6 *Έστω $w \in \mathcal{W}$, Φ^+ ένα θετικό σύστημα ριζών και Δ μια βάση αυτού. Ορίζουμε $n(w) := Card(\Phi^+ \cap w^{-1}(-\Phi^+))$ = ο αριθμός των θετικών ριζών που στέλνονται σε αρνητικές ρίζες από το w ή, $n(w) = Card(\{\alpha |\ (\alpha \in \Phi^+) \wedge (w(\alpha) \prec 0)\})$.*

Παρατηρήσεις
(1) Η ισότητα στον ορισμό είναι σωστή αφού έχουμε:

$$\beta \in w^{-1}(-\Phi^+) \Rightarrow \exists \alpha \in -\Phi^+ \ :\ \beta = w^{-1}(\alpha) \Rightarrow w(\beta) = \alpha \in -\Phi^+.$$

Επομένως ορίζουμε:

$$\mathcal{A}(w) := \Phi^+ \cap w^{-1}(-\Phi^+) = \left\{\beta | (\beta \in \Phi^+) \wedge (w(\beta) \in (-\Phi^+)\right\}.$$

(2) Παρατηρείστε ότι $n(w^{-1}) = n(w)$, μιας και $\Phi^+ \cap w^{-1}(-\Phi^+) = w^{-1}(w\Phi^+ \cap -\Phi^+) = -w^{-1}(\Phi^+ \cap w(-\Phi^+))$, το οποίο έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το $\Phi^+ \cap w(-\Phi^+)$ (εφόσον οι w, w^{-1} είναι ισομορφισμοί ως σύνθεση ισομορφικών (δηλ. των σ_α , $\alpha \in \Delta$).

Ακολούθως θα παρουσιάσουμε ένα αρκετά χρήσιμο λήμμα,

ΛΗΜΜΑ 3.2 *Έστω $\alpha \in \Delta$ και $w \in \mathcal{W}$. Τότε:*
(a) $w\alpha > 0 \Rightarrow n(w\sigma_\alpha) = n(w) + 1.$
(b) $w\alpha < 0 \Rightarrow n(w\sigma_\alpha) = n(w) - 1.$
(c) $w^{-1}\alpha > 0 \Rightarrow n(\sigma_\alpha w) = n(w) + 1.$
(d) $w^{-1}\alpha < 0 \Rightarrow n(\sigma_\alpha w) = n(w) - 1.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Όπως είχαμε ορίσει στην προηγούμενη παρατήρηση, $\mathcal{A}(w) = \Phi^+ \cap w^{-1}(-\Phi^+)$. Έτσι έχουμε ότι $n(w) = Card(\mathcal{A}(w))$. Αν $w\alpha > 0$, παρατηρούμε ότι το $\mathcal{A}(w\sigma_\alpha)$, είναι η ξένη ένωση των $\sigma_\alpha\mathcal{A}(w)$ και α, λόγω της Πρώτασης 3.7. Αν $w\alpha < 0$, τότε βάση του ίδιου σκεπτικού έχουμε ότι, $\sigma_\alpha\mathcal{A}(w\sigma_\alpha) = \mathcal{A}(w)\backslash\{\alpha\}$, ενώ το α βρίσκεται στο $\mathcal{A}(w)$. Αυτό αποδεικνύει τα (a) και (b). Τέλος για να αποδείξουμε τα (c) και (d), αρκεί να αντικαταστήσουμε το w από το w^{-1} και να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $n(w^{-1}\sigma_\alpha) = n(\sigma_\alpha w)$. □

ΣΧΟΛΙΟ : Στη περίπτωση που $w = \sigma_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$, η ουσία του $n(w)$ είναι η Πρόταση 3.7.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.9 *Για κάθε $w \in \mathcal{W}$, ισχύει ότι $\ell(w) = n(w)$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο μήκος $\ell(w)$:
•$\ell(w)$=0: η περίπτωση αυτή είναι προφανής ($\ell(w) = 0 \Rightarrow w = \mathbf{1} \Rightarrow n(w) = 0$.
• $\ell(\tau)$: δεχόμαστε ότι η πρόταση ισχύει για κάθε $\tau \in \mathcal{W}$ με $\ell(\tau) < \ell(w)$,
και θα δείξουμε ότι:
• η πρόταση ισχύει και για $w \in \mathcal{W}$ με $\ell(w) > \ell(\tau)$.

Έστω λοιπόν ότι η w ως μειωμένη λέξη έχει τη μορφή $w = \sigma_{\alpha_1} \ldots \sigma_{\alpha_t}$ με $t > \ell(\tau)$, και ορίζουμε $\alpha := \alpha_t$. Όμως από το Πόρισμα 3.4, έχουμε ότι $w(\alpha) \prec 0$. Τότε από την Πρόταση 3.7, έχουμε ότι $n(w\sigma_\alpha) = n(w) - 1$ (λόγω Λήμματος 3.2(b)). Από την άλλη πλευρά όμως $\ell(w\sigma_\alpha) = \ell(w) - 1 < \ell(w)$. Έτσι, από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\ell(w\sigma_\alpha) = n(w\sigma_\alpha)$. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, συμπεραίνουμε ότι $\ell(w) = n(w)$. □

3.3.2 Συνθήκες Αλλαγής και Διαγραφής

Το θεώρημα που ακολουθεί αποκαλύπτει με ποιόν τρόπο το γινόμενο απλών ανακλάσεων μπορεί να μειωθεί, αν δεν είναι ήδη όσο το δυνατόν μικρότερο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.5 *Έστω Δ μια βάση ενός συστήματος ριζών Φ (δηλαδή, ένα απλό σύστημα Δ). Έστω ακόμα $w = \sigma_1 \ldots \sigma_r$ μια τυχαία έκφραση ενός $w \in \mathcal{W}$, ως γινόμενο απλών ανακλάσεων (όπου ορίζουμε $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$, με την επανάληψη, επιτρεπόμενη). Υποθέτουμε ότι $n(w) < r$. Τότε υπάρχουν δείκτες i, j με $1 \leq i < j \leq r$ για τους οποίους:*
 (a) $\alpha_i = (\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{j-1})\alpha_j$,
 (b) $\sigma_{i+1}\sigma_{i+2} \ldots \sigma_j = \sigma_i\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{j-1}$,
 (c) $w = \sigma_1 \ldots \widehat{\sigma_i} \ldots \widehat{\sigma_j} \ldots \sigma_r$ *(όπου το καπέλο υπονοεί ότι παραλείπεται).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : (a) Επειδή $n(w) < r$, επαναλαμβάνεται από το μερος (a) του προηγούμενου λήμματος μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, για κάποιο $j \leq r$, έχουμε ότι $(\sigma_1 \ldots \sigma_{j-1})\alpha_j < 0$. Όμως εφόσον $\alpha_j > 0$, τότε υπάρχει ένας δείκτης $i < j$, για τον οποίο $\sigma_i(\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{j-1})\alpha_j < 0$, ενώ $(\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{j-1})\alpha_j > 0$. (Στην περίπτωση $i = j - 1$, το $\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{j-1}$ ερμηνεύεται ως $\mathbf{1}$). Τώρα, αν η Πρόταση 1.3 εφαρμοστεί στο σ_i, τότε οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η θετική ρίζα $(\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{j-1})\alpha_j$ γίνεται αρνητική από την σ_i. Επομένως θα πρέπει να ισούται με το α_i.

(b) Ορίζουμε $\alpha := \alpha_j$ και $w' := \sigma_{i+1} \ \ldots \ \sigma_{j-1}$, κι επομένως λόγω του (a) έχουμε $w'\alpha = \alpha_i$. Όμως από το Θεώρημα 1.1, έχουμε ότι $w'\sigma_\alpha w'^{-1} = \sigma_{w'\alpha} = \sigma_i$, από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$(\sigma_{i+1} \ \ldots \ \sigma_{j-1})\sigma_j(\sigma_{j-1} \ \ldots \ \sigma_{i+1}) = \sigma_i \ .$$

Συνεπώς, πολλαπλασιάζοντας και τις δυό μεριές, από τα δεξιά, με το $\sigma_{i+1} \ \ldots \ \sigma_{j-1}$, εξάγουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

(c) Αυτός είναι ένας άλλος τρόπος για να εκφράσουμε το (b): πολλαπλασιάζοντας από τα δεξιά και τις δυό πλευρές του (b) με την σ_i, εξασφαλίζουμε την σχέση $\sigma_{i+1} \ \ldots \ \sigma_{j-1} = \sigma_i \ \ldots \ \sigma_j$, και με την αντικατάσταση αυτής, στην αρχικά έκφραση της w, προκύπτει το ζητούμενο.

ο.ε.δ.

Παρατηρήσεις

(1) Έχοντας αποδείξει ότι οι συναρτήσεις ℓ και n ταυτίζονται, μπορούμε να ξαναδιατυπώσουμε το Θεώρημα 3.5, απλώς αντικαθιστώντας το ℓ στη θέση του n. Τότε το (c') που προκύπτει στη θέση του (c), θα ονομάζεται συνθήκη διαγραφής· επομένως έχουμε,

Συνθήκη Διαγραφής: έστω $w = \sigma_1 \ \ldots \ \sigma_r$ μια έκφραση του w, η οποία δεν είναι μειωμένη - ελαττωμένη (δηλ. $\ell(w) < r$). Τότε υπάρχουν δείκτες $1 \leq i < j \leq r$, τέτοιοι ώστε $w = \sigma_1 \ \ldots \ \widehat{\sigma_i} \ \ldots \ \widehat{\sigma_j} \ \ldots \ \sigma_r$. Συνεπώς η επιτυχής διαγραφή ζευγών παραγόντων του w, εν τέλει θα δώσει την μειωμένη έκφρασή του. Η έκφραση αυτή δεν είναι μοναδική. Σαν αντιπαράδειγμα ας πάρουμε το σύστημα ριζών $A_1 \times A_1$ (=Φ). Στο σύστημα αυτό, αν $\{\alpha, \beta\} = \Delta$ (δες σχήμα 3.2), ισχύει $\sigma_\alpha\sigma_\beta = \sigma_\beta\sigma_\alpha$

(2) Για την καλύτερη κατανόηση της Πρότασης 3.7 αναφέρουμε τα ακόλουθα:
Από τη στιγμή που $Card(\mathcal{A}(w)) = n(w) = \ell(w)$, το νόημα της συνάρτησης $n(w)$, βρίσκεται στην ελαττωμένη έκφραση $w = \sigma_1 \ \ldots \ \sigma_\nu$ ($\sigma_i := \sigma_{\alpha_i}$). Πράγματι, δεδομένης μιας τέτοιας έκφρασης, εξετάζουμε τις ακόλουθες ρίζες:

$$\begin{cases} \beta_i := \sigma_\nu\sigma_{\nu-1}\ldots\sigma_{i+1}(\alpha_i), \ i = 1, \ldots, \nu - 1, \\ \beta_\nu := \alpha_\nu \ . \end{cases}$$

Ισχυρισμός: $\mathcal{A}(w) = \{\beta_1, \ldots, \beta_\nu\}$, όπου τα β_i είναι διαφορετικά.
Απόδειξη Ισχυρισμού: Έστω $\beta \in \mathcal{A}(w)$. Εφόσον $\beta > 0$ αλλά $w\beta < 0$, μπορούμε να βρούμε δείκτη $i \leq \nu$ τέτοιον ώστε $(\sigma_{i+1}\ldots\sigma_\nu)\beta > 0$, ενώ $(\sigma_i\sigma_{i+1}\ldots\sigma_\nu)\beta < 0$. Στην περίπτωση που $i = \nu$, ερμηνεύουμε το $\sigma_{i+1}\ldots\sigma_\nu$ ως 1. Έτσι η θετική ρίζα $(\sigma_{i+1}\ldots\sigma_\nu)\beta$, στέλνεται από το σ_i σε αρνητική ρίζα. Συνεπώς λόγω της Πρότασης 1.3, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $(\sigma_{i+1}\ldots\sigma_\nu)\beta = \alpha_i$, ενώ $\beta = \beta_i$. Και επομένως $\mathcal{A}(w) \subset \{\beta_1, \ldots, \beta_\nu\}$. Γνωρίζοντας όμως ότι $Card\mathcal{A}(w) = \nu$, συμπεραίνουμε ότι η ισότητα πρέπει να ισχύει (και τα β_i πρέπει να είναι διαφορετικά). □

(3) Στην αρχή της απόδειξης του μέρους (a) είδαμε ότι υπάρχει δείκτης j τέτοιος ώστε $(\sigma_1\ldots\sigma_{j-1})\alpha_j \prec 0$.

Ισχυρισμός: Αυτή η σχέση θα ισχύει $\forall k$ όπου $j \leq k \leq \nu$. Δηλαδή θα έχουμε $(\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})\alpha_k \prec 0$, $\forall k$ με $j \leq k \leq \nu$.
Απόδειξη Ισχυρισμού: (εύκολο).

(4) Παρατηρούμε ότι αν στην συνθήκη διαγραφής ο δείκτης j πάρει την τιμή r, τότε η συνθήκη Διαγραφής θα είναι ισοδύναμη με την Πρόταση 3.8.

Μια άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι η ακόλουθη συνθήκη:

Συνθήκη Αλλαγής Έστω $w = \sigma_1 \dots \sigma_r$ (όχι απαραίτητα μειωμένη), όπου κάθε σ_i είναι μια απλή ανάκλαση. Αν $\ell(w\sigma) < \ell(w)$, για κάποια απλή ανάκλαση $\sigma = \sigma_\alpha$, τότε υπάρχει δείκτης i τέτοιος ώστε, $w\sigma = \sigma_1 \dots \widehat{\sigma_i} \dots \sigma_r$ (και έτσι $w = \sigma_1 \dots \widehat{\sigma_i} \dots \sigma_r \sigma$, με τον παράγοντα σ να παίρνει τη θέση του παράγοντα σ_i). Συγκεκριμένα, ο w έχει μειωμένη έκφραση που τελειώνει σε σ *αν και μόνο αν* $\ell(w\sigma) < \ell(w)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Μας είναι πλέον γνωστό ότι η υπόθεση $\ell(w\sigma) < \ell(w)$, υπονοεί ότι: $w\alpha < 0$. Συνεπώς επαναλαμβάνοντας την απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος για την έκφραση $w\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r \sigma$, μπορούμε να πάρουμε $j = r + 1$ (λόγω της παρατήρησης (3)) στο μέρος (a) και έπειτα να συμπεράνουμε στο μέρος (c) ότι

$$w\sigma = \sigma_1 \dots \widehat{\sigma_i} \dots \sigma_r,$$

το οποίο αποφέρει την επιθυμητή έκφραση για το w. □

ΣΧΟΛΙΟ : Σύμφωνα με την Παρατήρηση (4) και την προηγούμενη απόδειξη, εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\sigma_i = \sigma$. Επομένως, ο δείκτης i είναι μοναδικά προσδιορίσιμος.

3.3.3 Ομάδες *Coxeter*

Ορίζουμε ως **σύστημα** *Coxeter* ένα ζεύγος $(\mathcal{C}, S)$ αποτελούμενο από μια ομάδα $\mathcal{C}$ και από ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων αυτής $S \subseteq \mathcal{C}$, το οποίο υπακούει μόνο σε σχέσεις της μορφής

$$(ss')^{m(s,s')} = 1 \ ,$$

όπου $m(s,s) = 1$, $m(s,s') = m(s',s) \geq 2$, $\forall s, s' \in S$ με $s \neq s'$.

Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει σχέση μεταξύ των s και s', τότε κάνουμε τη σύμβαση ότι $m(s,s') = \infty$. Ας παρατηρήσουμε ότι η ομάδα $\mathcal{C}$, είναι η ομάδα πηλίκο F/N , όπου η F είναι η ελεύθερη ομάδα που παράγεται από το σύνολο S και N είναι η κανονική υποομάδα που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής

$$(ss')^{m(s,s')} \ .$$

Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου S (το συμβολίζουμε $|S|$), θα ονομάζεται βαθμός του $(\mathcal{C}, S)$.

Έτσι λοιπόν καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.7 *Μιά ομάδα $\mathcal{C}$ που έχει παράσταση της μορφής*

$$\langle w_1, \ldots, w_n | (w_i w_j)^{m_{ij}} = 1 \ , \ m_{ii} = 1 \ , \ i = 1, \ldots, n \rangle$$

ονομάζεται ομάδα Coxeter.

ΣΧΟΛΙΟ : Οι ομάδες *Coxeter* είναι καλά ορισμένες. Πράγματι, αν πάρουμε μια ομάδα με δύο στοιχεία[3] $(G = \{a, e\}, *)$, τότε $a * a = e$, ή αν βάλουμε όπου $e = 1$, τότε θα έχουμε $a * a = 1$. Ισοδύναμα $(a * a)^1 = 1$ (δηλαδή $m(a, a) = 1$, όπως και απαιτείται). Επομένως, μια ομάδα με δύο στοιχεία είναι μια ομάδα *Coxeter*.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 *Αν μια ομάδα Coxeter περιέχει τουλάχιστον ένα ζεύγος γεννητόρων, έστω s, s', με $m(s, s') = \infty$, τότε η ομάδα αυτή είναι άπειρη. Αυτό είναι προφανές αφού $(ss')^m \neq (ss')^n$, $\forall\ m \neq n \in \mathbb{N}^*$ (εφόσον $(ss')^t \neq 1$, $\forall t \in \mathbb{N}^*$).*

3.3.4 Σχέση των Ομάδων *Weyl* και *Coxeter*

Έχοντας μέχρι στιγμής δει ότι η ομάδα ανακλάσεων $\mathcal{W}$ μπορεί να παραχθεί από σχετικά λίγες ανακλάσεις (όσες και η διάσταση του χώρου Ε στον οποίο έχει οριστεί το Φ), θα επιχειρήσουμε να βρούμε μια ικανοποιητική-πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{W}$ ως αφηρημένου συνόλου, χρησιμοποιώντας κατάλληλες σχέσεις των γεννητόρων της. Κάποιες σχέσεις μεταξύ των $\sigma_\alpha (\alpha \in \Delta)$ είναι προφανείς*: είναι αυτές της μορφής

$$(\sigma_\alpha \sigma_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1, \tag{3.2}$$

όπου με $m(\alpha, \beta)$ συμβολίζουμε την τάξη του γινομένου στην $\mathcal{W}$ (μπορούμε επίσης να γράφουμε $m(\sigma_\alpha, \sigma_\beta)$). Όπως θα δούμε στη συνέχεια (Θεώρημα 3.6), αυτές οι προφανείς σχέσεις, προσδιορίζουν το $\mathcal{W}$ απόλυτα. (Αυτό δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί για την περίπτωση της διεδρικής ομάδας (δες σχ. 3.1) $\mathcal{D}_m$ - αφού έχουν δύο μόνο γεννήτορες - αλλά είναι πολύ πιο δύσκολο για την περίπτωση της ομάδας μεταθέσεων $\mathcal{S}_n$).

$(\star)$ΣΧΟΛΙΟ : Οι σχέσεις $(\sigma_\alpha \sigma_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1$, είναι προφανείς. Πράγματι, έστω $\sigma_\alpha \sigma_\beta \in \Delta$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\exists m \in \mathbb{Z}^*$ τέτοιο ώστε, $(\sigma_\alpha \sigma_\beta)^m = 1$.
- Για $\beta = \alpha$, έχουμε ότι $m(\alpha, \beta) = 1$, αφού $(\sigma_\alpha \sigma_\alpha) = \sigma_\alpha^2 = 1$.
- Έστω λοιπόν ότι $\beta \neq \alpha$ και ότι δεν υπάρχει τέτοιο m. Τότε,

$$(\sigma_\alpha \sigma_\beta)^\kappa \neq (\sigma_\alpha \sigma_\beta)^\lambda \ (\neq 1) \ , \ \forall \kappa \neq \lambda \in \mathbb{Z}^*$$

[3] Όπως γνωρίζουμε, όλες οι ομάδες με δύο στοιχεία είναι ισομορφικές.

μιας και αν

$$(\sigma_\alpha\sigma_\beta)^\kappa = (\sigma_\alpha\sigma_\beta)^\lambda \Longrightarrow$$

$$(\sigma_\alpha\sigma_\beta)^{\kappa-\lambda} \equiv (\sigma_\alpha\sigma_\beta)^m = 1 \ ,$$

• Επομένως $\forall\kappa \in \mathbb{Z}^*$ το στοιχείο $(\sigma_\alpha\sigma_\beta)^\kappa$ θα είναι διαφορετικό από τα άλλα (δεύτερο πουά), επομένως $|\langle\sigma_\alpha\sigma_\beta\rangle| = \aleph_0$. Όμως $|\langle\sigma_\alpha\sigma_\beta\rangle| \le |\mathcal{W}|$ και συνεπώς, $|\mathcal{W}| \ge \aleph_0$, που οδηγεί σε **άτοπο**, αφού $|\mathcal{W}| < \aleph_0$. Άρα $\exists m \in \mathbb{Z}^*$ τέτοιο ώστε, $(\sigma_\alpha\sigma_\beta)^m = 1$, και μάλιστα το μικρότερο τέτοιο m θα το συμβολίζουμε $m(\alpha,\beta)$.

Υποσημείωση: Με $\langle\sigma_\alpha\sigma_\beta\rangle$, συμβολίζουμε την ομάδα που παράγεται από τα σ_α και σ_β (προσοχή μην γίνει σύγχυση με το $\langle\alpha,\beta\rangle = \frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$).

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.6 *Έστω Φ ένα σύστημα ριζών σ′ έναν Ευκλείδιο χώρο E, και Δ μια βάση αυτού. Τότε η ομάδα Weyl $\mathcal{W}$ παράγεται από το σύνολο $S := \{\sigma_\alpha, \alpha \in \Delta\}$, το οποίο υπακούει μόνο στις σχέσεις:*

$$(\sigma_\alpha\sigma_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1, \ (\alpha,\beta \in \Delta).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Προσοχή! Δεν θέλουμε να δείξουμε ότι το $\mathcal{W}$ παράγεται από το σύνολο $S := \{\sigma_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ (αυτό το έχουμε ήδη δείξει στο Θεώρημα 3.4). Αυτό που θέλουμε να δείξουμε είναι ότι πράγματι το σύνολο S, υπακούει στις σχέσεις $(\sigma_\alpha\sigma_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1$, $(\alpha.\beta \in \Delta)$ και μόνο αυτές. Αυτό όμως είναι ισοδύναμο* με το να δείξουμε ότι κάθε σχέση στην ομάδα $\mathcal{W}$, είναι μια ακολουθία τέτοιων σχέσεων. Και πάλι όμως το τελευταίο είναι ισοδύναμο** με το να δείξουμε ότι κάθε σχέση

$$\sigma_1 \dots \sigma_r = 1 \ (\sigma_i = \sigma_{\alpha_i} \ , \ \forall\alpha_i \in \Delta) \tag{3.3}$$

είναι μια ακολουθία των δοσμένων σχέσεων.
Ισχυρισμός: Οι ισοδυναμίες $(\star)$ και $(\star\star)$ ισχύουν.
Απόδειξη Ισχυρισμού:

$(\star\star)$ Έστω $\sigma_1 \dots \sigma_\ell = \sigma_n \dots \sigma_m$, μια σχέση στην ομάδα $\mathcal{W}$ (με $\sigma_i, \sigma_j \ , \ i \neq j, \ i,j \in \{1 \dots r\}$, όχι κατ′ ανάγκη διαφορετικά).
Αυτή προφανώς είναι ισοδύναμη με την $\sigma_1 \dots \sigma_\ell \sigma_m^{-1} \dots \sigma_n^{-1} = 1$ ή $\sigma_1 \dots \sigma_\ell \sigma_m \dots \sigma_n = 1$, μιας και $\sigma_i^{-1} = \sigma_i$ αφού $\sigma_i^2 = 1$. Συνεπώς χ.β.τ.γ. κάθε σχέση της $\mathcal{W}$ έχει την μορφή $\sigma_1 \dots \sigma_r = 1$ (προκύπτει θέτοντας $m := \ell + 1$ κ.ο.κ.), το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη της $(\star\star)$ ισοδυναμίας.

$(\star)$ Μένει να δείξουμε ότι η $(\star)$ ισοδυναμία ισχύει. Πράγματι, έστω F η ελεύθερη ομάδα που έχει σαν σύνολο γεννητόρων το $S = \{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$. Έστω ακόμα, $N = \left\langle (\sigma_\alpha\sigma_\beta)^{m(\alpha,\beta)} \mid \alpha,\beta \in \Delta \right\rangle$ μια υποομάδα αυτής, και έστω $\bar{N}$[4] το κανονικό κλείσιμο συζυγίας της N. Δηλαδή,

$$\bar{N} = \left\langle \left\{ \sigma_\gamma (\sigma_\alpha\sigma_\beta)^{m(\alpha,\beta)} \sigma_\gamma^{-1} \mid \alpha,\beta,\gamma \in \Delta \right\} \cup \left\{ (\sigma_\alpha\sigma_\beta)^{m(\alpha,\beta)} \mid \alpha,\beta \in \Delta \right\} \right\rangle.$$

[4]Η $\bar{N}$, από τη φύση της είναι κανονική.

Θα συμβολίζουμε με G, την ομάδα πηλίκο $F/\bar{N}$, δηλαδή $G := F/\bar{N}$. Στην G ισχύουν ακριβώς οι βασικές σχέσεις (σχέσεις 3.2), και μόνο αυτές. Για την ακρίβεια, είναι η μεγαλύτερη ομάδα με αυτές τις ιδιότητες. Από την άλλη μεριά, στην ομάδα $\mathcal{W}$, ισχύουν οι βασικές σχέσεις, ενδέχεται όμως να έχει και επιπλέον σχέσεις· έστω r. Τότε θα ισχύει ότι $\mathcal{W} = G/\langle r\rangle$. Σε περίπτωση που $r = \emptyset$ τότε $\mathcal{W} = G$. Συνεπώς δείχνοντας ότι κάθε σχέση της ομάδας $\mathcal{W}$, είναι μια ακολουθία σχέσεων της μορφής (3.2), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\mathcal{W} = G$ και άρα ότι το σύνολο S υπακούει μόνο στις σχέσεις $(\sigma_\alpha\sigma_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1,\ (\alpha, \beta \in \Delta)$.

Η απόδειξη του θεωρήματος θα γίνει με επαγωγή στο μήκος της σχέσης (3.2).

Κατ' αρχήν, παρατηρούμε ότι κάθε σχέση στην ομάδα $\mathcal{W}$, έχει άρτιο πλήθος στοιχείων. Πράγματι, έστω $\sigma_1 \ldots \sigma_r = 1$, μια σχέση της $\mathcal{W}$. Λαμβάνοντας όμως υπ' όψιν το γεγονός ότι $det(\sigma_i) = -1\ ,\ \forall \sigma_i \in \mathcal{W}$, θα πρέπει $(-1)^r = 1$, το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν το r είναι άρτιος.

•Έστω λοιπόν $r = 2$. Τότε η σχέση (3.3) παίρνει τη μορφή $\sigma_1\sigma_2 = 1$, το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\sigma_1 = \sigma_2^{-1} = \sigma_2$, λόγω της σχέσης $\sigma_2^2 = 1$. Έτσι η (3.2) γίνεται $\sigma_1^2 = (\sigma_i\sigma_i)^1 = 1$, που έχει την ζητούμενη μορφή.
•Υποθέτουμε ότι ισχύει το ζητούμενο για $r = 2(q-1)\ ,\ q > 1$.
•Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει και για $r = 2q$.

Απόδειξη:
Έχουμε λοιπόν ότι $\sigma_1 \ldots \sigma_r = 1$ ή ισοδύναμα $\sigma_1 \ldots \sigma_{2q} = 1$. Αυτό όμως είναι ισοδύναμο με το

$$\sigma_1 \ldots \sigma_{q+1} = \sigma_r \ldots \sigma_{q+2}.$$

Εφόσον όμως το μήκος του δεξιού μέλους είναι το πολύ $q-1$, η έκφραση του αριστερού μέλους δεν μπορεί να είναι μειωμένη. Όμως από το Θεώρημα 1.5(b) (που είναι ισοδύναμο με την συνθήκη διαγραφής), συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν δείκτες $i, j\ :\ 1 \leq i < j \leq q+1$, για τους οποίους,

$$\sigma_{i+1} \ldots \sigma_j = \sigma_i \ldots \sigma_{j-1},$$

το οποίο με τη σειρά του είναι ισοδύναμο με το

$$\sigma_i \ldots \sigma_{j-1}\sigma_j \ldots \sigma_{i+1} = 1.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στη σχέση (1.3) προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned} \sigma_1 \ldots \sigma_r &= \sigma_1 \ldots \sigma_i(\sigma_i \ldots \sigma_{j-1})\sigma_{j+1} \ldots \sigma_r \\ &= \sigma_1 \ldots \widehat{\sigma_i} \ldots \widehat{\sigma_j} \ldots \sigma_r = 1. \end{aligned}$$

Όμως η τελευταία σχέση , έχει μήκος το πολύ $2(q-1)$. Έτσι, από επαγωγική υπόθεση, μπορεί να γραφεί στη ζητούμενη μορφή. Συνεπώς και η $\sigma_1 \ldots \sigma_r = 1$, μπορεί να γραφεί στη ζητούμενη μορφή.

ο.ε.δ.

Παρατηρήσεις
(1.α) Αν στον Ορισμό 3.1 , αφαιρέσουμε το αξίωμα ($\mathcal{R}4$) τότε παίρνουμε ένα επεκτεταμένο σύστημα ριζών, έστω $\widetilde{\Phi}$. (Συνήθως ως σύστημα ριζών ονομάζουμε το $\widetilde{\Phi}$, και το Φ αναφέρεται ως **κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών**). Σε αυτή τη περίπτωση οι ορισμοί όπως: βάση (ενός συστήματος ριζών), διαμερίσματα *Weyl*, θετικές - αρνητικές ρίζες και άλλοι, παραμένουν οι ίδιοι.
(1.β) Το ίδιο ισχύει και για αρκετές προτάσεις και θεωρήματα, όπως π.χ για το βασικό Θεώρημα 3.6 (όπου η απόδειξη παραμένει η ίδια, απλώς κάνοντας τις αντικαταστάσεις: $\Phi \mapsto \widetilde{\Phi}$, $\Delta \mapsto \widetilde{\Delta}$ και $\mathcal{W} \mapsto \widetilde{\mathcal{W}}$ όπου $\widetilde{\mathcal{W}} = \langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \widetilde{\Phi} \rangle$).
(2) Το σύνολο των ομάδων *Weyl*, αποτελέι υποσύνολο (και μάλιστα γνήσιο[5]) του συνόλου των ομάδων $\widetilde{\mathcal{W}}$.
(3) Το σύνολο των πεπερασμένων ομάδων ανακλάσεων ταυτίζεται με το σύνολο των $\langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \widetilde{\Phi} \rangle$.
(4) Από τις παρατηρήσεις (1β), (2) και τον ορισμό των ομάδων *Coxeter* εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, οι ομάδες $\widetilde{\mathcal{W}}$ (και προφανώς οι ομάδες $\mathcal{W}$, ως υποσύνολο των $\widetilde{\mathcal{W}}$), αποτελούν υποσύνολο των ομάδων *Coxeter*. Πιο συγκεκριμένα οι ομάδες $\widetilde{\mathcal{W}}$ ταυτίζονται με τις πεπερασμένες ομάδες *Coxeter* (δες Θεώρημα 6.4 [$Hm2$]).

3.4 Ανάγωγα Συστήματα Ριζών

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε σε μια ειδική περίπτωση ενός συστήματος ριζών Φ, τα " ανάγωγα συστήματα ριζών". Αυτή η καινούργια έννοια θα φανεί χρήσιμη στην ταξινόμηση των ομάδων *Weyl*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.8 *Ένα σύστημα ριζών Φ, ονομάζεται* **ανάγωγο** *(απλό ή μη απλοποιήσιμο-irreducible), αν δεν μπορεί να διαμεριστεί σε δύο σύνολα, τέτοια ώστε κάθε ρίζα ενός συνόλου να είναι κάθετη με κάθε ρίζα του άλλου συνόλου.*

Για παράδειγμα, στο σχήμα 3.3 τα A_1, A_2, B_2, G_2 είναι ανάγωγα, ενώ το $A_1 \times A_1$ είναι μη ανάγωγο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.7 *Το Φ είναι ανάγωγο, αν και μόνο αν, η βάση Δ δεν μπορεί να διαμεριστεί σε δύο σύνολα, τέτοια ώστε κάθε ρίζα ενός συνόλου να είναι κάθετη με κάθε ρίζα του άλλου συνόλου.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : ($\Longleftarrow$) Έστω ότι το Φ=$\Phi_1 \cup \Phi_2$, με $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Εάν υποθέσουμε χ.β.τ.γ. ότι $\Delta \subset \Phi_1$, τότε $(\Delta, \Phi_2) = 0$, ή ισοδύναμα $(E, \Phi_2) = 0$, αφού το Δ παράγει τον E· το οποίο οδηγεί σε άτοπο. Σε αντίθετη περίπτωση (δηλ. αν το Δ δεν ανήκει εξ' ολοκλήρου σ' ένα από τα Φ_1, Φ_2), το Δ μπορεί να διαμεριστεί με όμοιο τρόπο (δηλαδή θα $\exists \Delta_1, \Delta_2 :\ \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ και $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$), το οποίο αντιβαίνει με την υπόθεση·

[5]Αν πάρουμε το σύστημα ριζών τάξης 2, B_2, με όλες τις ρίζες να έχουν το ίδιο μήκος, τότε το προκύπτον σύνολο διανυσμάτων αποτελεί ένα σύστημα ριζών (δηλ. χωρίς την ($\mathcal{R}4$)) αλλά όχι και κρυσταλλογραφικό σύστημα ριζών (δηλ. μέ την ($\mathcal{R}4$)), δες [$Hm2$] Πρόταση σελ.7.

επομένως οδηγούμαστε και πάλι σε άτοπο.
($\Longrightarrow$) Έστω ότι το Φ είναι ανάγωγο, αλλά $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ και $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$. Όμως γνωρίζουμε ότι κάθε ρίζα είναι συζυγής με μια απλή ρίζα (δες απόδειξη Θεωρήματος 3.4(b)), κι έτσι Φ=$\Phi_1 \cup \Phi_2$, με Φ_i να είναι είναι το σύνολο των ριζών, που έχουν τα αντίστοιχα συζυγή τους στο Δ_i.
Ισχυρισμός: Κάθε ρίζα που ανήκει στο Φ_i προέρχεται από κάποια ρίζα του Δ_i, προσθέτοντας ή αφαιρώντας απ΄ αυτήν, στοιχεία του Δ_i.
Απόδειξη Ισχυρισμού:
Έστω $\Delta_1 = \{\alpha_1 \ldots \alpha_r\}$ και $\Delta_2 = \{\beta_1 \ldots \beta_q\}$ με τις ιδιότητες που αναφέρονται πιο πάνω. Τότε παρατηρούμε τα ακόλουθα:
•Έστω $\alpha, \beta \in \Delta_i,\ i = 1, 2$.Τότε $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle\, \alpha$, δηλαδή ισούται με έναν γραμμικό συνδυασμό στοιχείων του Δ_i.
•Έστω $\alpha \in \Delta_1$ και $\beta \in \Delta_2$. Τότε $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \underbrace{\langle \beta, \alpha \rangle}_{0} \alpha \;=\; \beta$. Ομοίως $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \underbrace{\langle \alpha, \beta \rangle}_{0} \beta \;=\; \alpha$.
Ας θυμηθούμε τώρα ότι αν (α, β)=0, συνεπάγεται ότι $\sigma_\alpha \sigma_\beta = \sigma_\beta \sigma_\alpha$. Έστω τώρα $\gamma \in \Phi_i$. Τότε θα υπάρχει $\alpha \in \Delta_i$ και $\sigma \in \mathcal{W}$ τέτοιο ώστε,

$$\sigma(\gamma) = \alpha \Longrightarrow \gamma = \sigma^{-1}(\alpha).$$

Όμως κάθε $\sigma \in \mathcal{W}$ γράφεται ως γινόμενο απλών ανακλάσεων (Θεώρημα 3.4)· έστω $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_t$. Συνεπώς σύμφωνα με τα προηγούμενα και (χ.β.τ.γ.), το σ μπορεί να πάρει την μορφή, $\sigma^{-1} = \underbrace{\sigma_{\alpha_1} \ldots \sigma_{\alpha_\ell} \sigma_{\beta_1} \ldots \sigma_{\beta_m}}_{\#t}$, (ή και ανάποδα). Επομένως, αν υποθέσουμε (χ.β.τ.γ.) ότι $\alpha \in \Delta_1$ έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \gamma &= \sigma^{-1}(\alpha) \\ &= \sigma_{\alpha_1} \ldots \sigma_{\alpha_\ell} \sigma_{\beta_1} \ldots \sigma_{\beta_m}(\alpha) \\ &= \sigma_{\alpha_1} \ldots \sigma_{\alpha_\ell}(\alpha), \end{aligned}$$

όπου το τελευταίο (σύμφωνα με το πρώτο πουά) είναι ένας γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Δ_1, που περιέχει προφανώς και το α, το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Επομένως, βάσει του ισχυρισμού, το Φ_i ζει στον υπόχωρο $E_i \hookrightarrow$E, που παράγεται από το Δ_i. Από το τελευταίο συνεπάγεται ότι $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$, το οποίο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\Phi_1 = \emptyset$ ή $\Phi_2 = \emptyset$, και άρα $\Delta_1 = \emptyset$ ή $\Delta_2 = \emptyset$· από το οποίο συμπεραίνουμε το ζητούμενο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.10 *Έστω Φ ένα ανάγωγο σύστημα ριζών. Σε σχέση με την μερική διάταξη $\prec$, υπάρχει μοναδική μεγιστική ρίζα β (συγκεκριμένα, $\alpha \neq \beta$ υπονοεί ότι $ht(\alpha) < ht(\beta),\ \forall\ \alpha \in \Phi$ και $(\beta, \alpha) \geq 0,\ \forall\ \alpha \in \Delta$). Αν $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Delta)$, τότε όλα τα $k_\alpha > 0$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.11 *Έστω Φ, ένα ανάγωγο σύστημα ριζών στον Ευκλείδιο χώρο Ε. Τότε η ομάδα $\mathcal{W}$, δρα ανάγωγα στον Ε. Συγκεκριμένα, η $\mathcal{W}$-τροχιά μιας ρίζας α παράγει τον Ε.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Κατ΄ αρχήν, ο E είναι ένα $\mathcal{W}$-σύνολο. Γνωρίζουμε ότι $\mathcal{W}(\Phi)$=Φ. Επίσης για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ έχουμε ότι υπάρχει $\sigma \in \mathcal{W}$, τέτοιο ώστε $\sigma\beta = \alpha$· μιας και αυτό δεν θα ίσχυε, μόνο στην περίπτωση που το Φ θα ήταν ανάγωγο. (Αφού αν $\alpha \in \Delta_1$ και $\beta \in \Delta_2$, με $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$, τότε $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$ και $\sigma_\gamma(\beta) = \beta + \lambda\gamma$ $(\lambda \geq 0)$, για $\gamma \in \Delta_2$). Συνεπώς $\sigma\beta = \sum_{\gamma\in\Delta_2} k_\gamma\gamma \neq \alpha$. Άρα όλες οι ρίζες ανήκουν στην ίδια τροχια και, λόγω του ότι οι ρίζες παράγουν τον E, καταλήγουμε στο συμπέρασμα. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.12 *Έστω Φ, ένα ανάγωγο σύστημα ριζών στον Ευκλείδιο χώρο E. Τότε υπάρχουν το πολύ δύο μήκη ριζών, και όλες οι ρίζες δεδομένου μήκους, είναι συζυγείς στο $\mathcal{W}$.*

Η αποδείξη παραλείπεται.

3.5 Ταξινόμιση των Ομάδων *Weyl*

Στόχος αυτής της ενότητας είναι η ταξινόμιση των ομάδων *Weyl*. Εφόσον όμως οι ομάδες *Weyl* παράγονται (εξ΄ ορισμού) από συστήματα ριζών Φ, αρκεί λοιπόν να ταξινομήσουμε τα τελευταία. Πρώτα όμως ας παρουσιάσουμε κάποιες απαραίτητες έννοιες για την συνέχεια.

Από εδώ και στο εξής όταν αναφερόμαστε σ΄ ένα σύστημα ριζών ενός Ευκλείδιου διανυσματικού χώρου E, θα γράφουμε Φ, και για μια βάση αυτού θα γράφουμε Δ.

3.5.1 Γραφήματα *Coxeter* και Διαγράμματα *Dynkin*

Έστω α, β διαφορετικές απλές ρίζες. Τότε, όπως έχουμε δει

$$\langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle = 0, 1, 2, 3$$

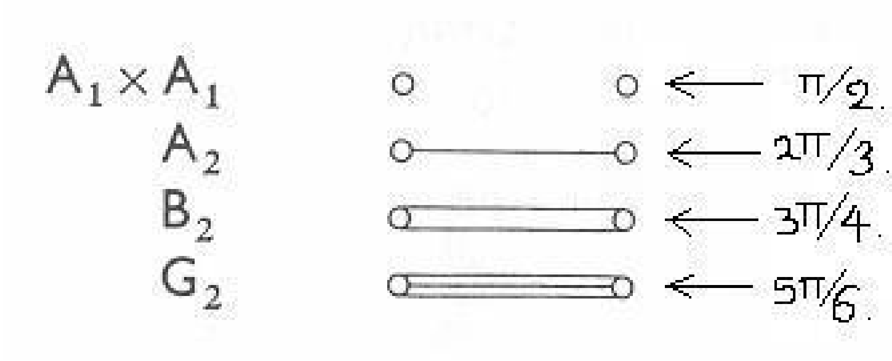
Έτσι λοιπόν μπορούμε να έχουμε τον ακόλουθο ορισμό,

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.9 *Ορίζουμε ως* **γράφημα** *Coxeter του Φ, να είναι ένα γράφημα με ℓ το πλήθος κορυφές (όπου $\ell = |\Delta|$), στο οποίο η i-κορυφή του, είναι ενωμένη με την j-κορυφή του $(i \neq j)$ με $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle$ πλευρές*[6].

Παράδειγμα:

Στην περίπτωση που όλες οι ρίζες έχουν ίσο μήκος, τότε από το γράφημα *Coxeter*, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τους αριθμούς $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$, μιας και στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = \langle\alpha_j,\alpha_i\rangle$. Στην αντίθετη περίπτωση όμως, δηλαδή όταν έχουμε περισσότερα από ένα μήκος ριζών (π.χ. B_2 ή G_2), τότε το γράφημα *Coxeter* αποτυγχάνει

[6] Πολλές φορές στα γραφήματα *Coxeter* η i-κορυφή, είναι ενωμένη με την j-κορυφή με μία πλευρά στην οποία αναγράφεται ο αριθμός $m(\alpha_i, \alpha_j)$. Οι δύο αυτοί εκ πρώτης όψεως διαφορετικοί συμβολισμοί, είναι ισοδύναμοι.



Σχήμα 3.6: Παραδείγματα.

στο να προσδιορίσει (στις περιπτώσεις όπου οι κορυφές είναι συνδεδεμένες με δύο ή περισσότερες πλευρές) ποιές κορυφές αντιστοιχούνε σε απλές ρίζες με μικρό μήκος (αντ. μεγάλο μήκος).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3 *Παρόλα αυτά, αν λάβουμε υπ΄ όψιν μας τα ακόλουθα:*
- *Βάσει του ορισμού των γραφημάτων Coxeter,*
- *βάσει της Πρότασης 3.1 , και τέλος*
- *βάσει του Θεωρήματος 3.6 ,*

μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι τα γραφήματα Coxeter προσδιορίζουν πλήρως τις ομάδες Weyl.

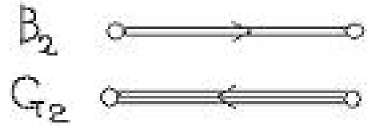
Στις περιπτώσεις που συμβαίνει να έχουμε δύο ή και τρεις πλευρές σ΄ ένα γράφημα *Coxeter* ενός Φ, έχουμε την δυνατότητα να προσθέσουμε ένα βέλος στις πλευρές αυτές, με κατεύθυνση από την κορυφή (ρίζα) με το μεγαλύτερο μήκος, σε αυτή με το μικρότερο μήκος[7]. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός,

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.10 *Τα διαγράμματα που προκύπτουν από τα διαγράμματα Coxeter, με την επιπλέον ιδιότητα, οι κορυφές που ενώνονται με περισσότερες από μία πλευρές να έχουν προσανατολισμό από την μεγαλύτερου μήκους πρός την μικρότερου μήκους πλευρά, θα ονομάζονται* **διαγράμματα** *Dynkin του Φ.*

Παράδειγμα: Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζονται δύο διαγράμματα *Dynkin*.
Ακολούθως θα παρουσιάσουμε μια πρόταση, της οποίας η χρησιμότητα έγκειται στο γεγονός ότι μας δείχνει ότι ανεξάρτητα από το ποιό σύστημα ριζών και αν επιλέξουμε, μεταξύ κάποιων ισομορφικών, τα γραφήματα *Coxeter* (αντ. διαγράμματα *Dynkin*) που αντιστοιχούν σε αυτά, είναι όλα ίδια.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.13 *Έστω Φ και Φ', δύο συστήματα ριζών με αντίστοιχες βάσεις $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ και $\Delta'=\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_\ell\}$. Αν $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \left\langle \alpha'_i, \alpha'_j \right\rangle$ με $1 \leq i, j \leq \ell$, τότε η **1-1** και **επί** απεικόνιση $\alpha_i \mapsto \alpha'_i$, επεκτείνεται (μοναδικά) σ'έναν ισομορφισμό $\phi : E \to E'$, αντιστοιχώντας το Φ στο Φ' και ικανοποιώντας συγχρόνως τη σχέση $\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$, $\forall\ \alpha, \beta \in \Phi$.*

[7] Αυτή η συνθήκη μας δίνει τη δυνατότητα να ανακαλύψουμε τους λεγόμενους πίνακες *Cartan* [*Hm*1].



Σχήμα 3.7: Παραδείγματα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Η απόδειξη παραλείπεται, (δες [$Hm1$] σελ.55).

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.14 *Έστω E' ένας υπόχωρος του Εκλείδιου διανυσματικολυ χώρου E. Αν η ανάκλαση σ_α αφήνει τον E' αναλλοίωτο, τότε είτε $\alpha \in E'$ είτε $E' \subset P_\alpha$.*

3.5.2 Ανάγωγες Συνιστώσες

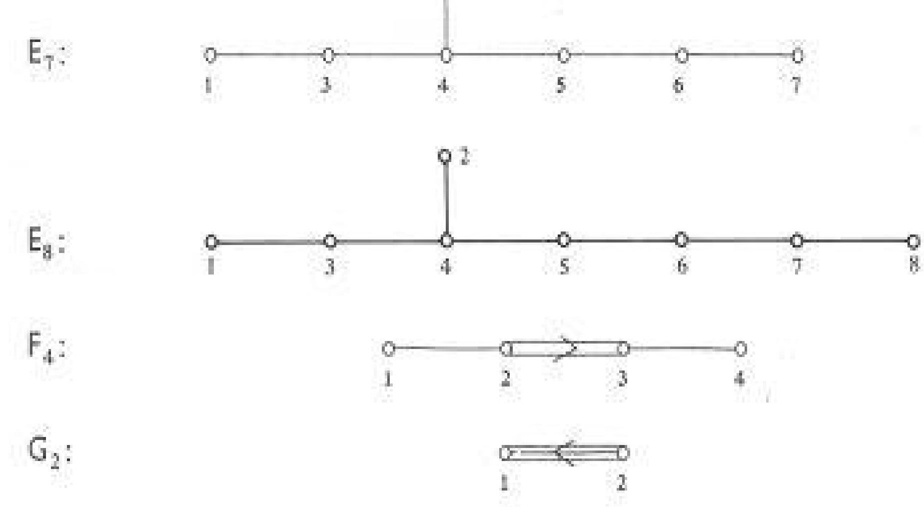
Ενθυμούμενοι τον ορισμό ενός ανάγωγου συστήματος ριζών Φ, εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι "*ένα σύστημα ριζών Φ είναι ανάγωγο, αν και μόνο αν, το αντίστοιχο γράφημα Coxeter είναι συνεκτικό (με την συνηθισμένη έννοια).*" Γενικά ένα γράφημα *Coxeter*, αποτελείται από ένα σύνολο από συνεκτικές συνιστώσες. Έστω λοιπόν $\Delta = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_t$, η αντίστοιχη διαμέριση του Δ σε αμοιβαία ορθογώνια υποσύνολα (όπου το Δ_i αντιστοιχεί στην i-συνιστώσα του αντίστοιχου διαγράμματος *Coxeter*). Αν E_i είναι ο χώρος που παράγεται από το Δ_i, τότε είναι σαφές ότι $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_t$ (το ευθύ άθροισμα). Επιπλέον, οι $\mathbb{Z}$-γραμμικοί συνδυασμοί του Δ_i (που είναι ρίζες - ονομάζουμε αυτό το σύνολο Φ_i), προφανώς δημιουργούν ένα σύστημα ριζών στο E_i, του οποίου η ομάδα *Weyl*, είναι ο περιορισμός της υποομάδας της $\mathcal{W}$, που παράγεται από όλα τα σ_α ($\alpha \in \Delta_i$), στο E_i. Τέλος, έχουμε ότι κάθε E_i είναι $\mathcal{W}$-αναλλοίωτο, εφόσον αν $\alpha \notin \Delta_i$, συνεπάγεται ότι το σ_α δρα τετριμμένα επί του E_i (λόγω των παρατηρήσεων του ισχυρισμού στο Θεώρημα 1.7). Έτσι, λόγω της Πρότασης 3.14 εύκολα προκύπτει το συμπέρασμα ότι κάθε ρίζα ανήκει σ' έναν και μόνο υπόχωρο E_i· συνεπώς $\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_t$.

ΛΗΜΜΑ 3.3 *Το Φ αναλύεται (μοναδικά) ως ένωση ανάγωγων συστημάτων ριζών Φ_i (του υπόχωρου E_i του E), έτσι ώστε $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_t$ (ορθογώνιο ευθή άθροισμα).*

3.5.3 Το Θεώρημα Ταξινόμησης

Σύμφωνα με την προηγούμενη υποενότητα, προκειμένου να ταξινομήσουμε τα συστήματα ριζών Φ, αρκεί να ταξινομήσουμε τα ανάγωγα συστήματα ριζών ή, ισοδύναμα, (λόγω της Πρότασης 3.9) τα συνεκτικά διαγράμματα *Dynkin*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.8 (*Θεώρημα Ταξηνόμισης) Αν Φ είναι ένα ανάγωγο σύστημα ριζών βαθμού ℓ, τότε το διάγραμμα Dynkin που του αντιστοιχεί (με ℓ κορυφές σε κάθε περίπτωση), είναι ένα από τα ακόλουθα:*



Σχήμα 3.8: Γραφήματα *Dynkin*.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Η ιδέα της απόδειξης είναι, πρώτα να ταξινομήσουμε όλα τα πιθανά γραφήματα *Coxeter* (όπου τα μήκη όλων των ριζών είναι ίσα), και έπειτα να δούμε ποιά διαγράμματα *Dynkin* μπορεί να προκύψουν. Έτσι, απλώς θα χρησιμοποιήσουμε κάποια στοιχειώδη Ευκλείδια γεωμετρία για πεπερασμένα σύνολα διανυσμάτων των οποίων οι γωνίες που σχηματίζονται ανά ζεύγη καθορίζονται από τα γραφήματα *Coxeter*. Από την στιγμή που παραβλέπουμε τα μήκη των ριζών (εφόσον στα γραφήματα *Coxeter* όλες οι ρίζες - κορυφές, έχουν το ίδιο μήκος), είναι ευκολότερο να εργαστούμε με σύνολα μοναδιαίων διανυσμάτων. Επιπλέον για μεγαλύτερη ευκολία, δεχόμαστε μόνο τις ακόλουθες υποθέσεις:

Ο Ε είναι ένας Ευκλείδιος χώρος (με αφθαίρετη διάσταση), $\mathcal{U} = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ είναι ένα σύνολο με n γραμμικά ανεξάρτητα μοναδιαία διανύσματα, που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$(\epsilon_i, \epsilon_j) \leq 0 \ , \ i \neq j \tag{3.4}$$

και

$$4(\epsilon_i, \epsilon_j)^2 = 0, 1, 2, 3 \ \ , \ i \neq j \tag{3.5}$$

Ένα τέτοιο σύνολο διανυσμάτων για συντομία θα το λέμε **αποδεκτό** (*admissible*) (π.χ. τα στοιχεία μιας βάσης ενός συστήματος ριζών, διαιρεμένα με το μήκος τους). Στο σύνολο $\mathcal{U}$ αντιστοιχούμε ένα γράφημα Γ (όπως είχαμε κάνει και πιο πρίν για τις απλές ρίζες ενός συστήματος ριζών), με τις κορυφές i και j , $(i \neq j)$, να ενώνονται με $4(\epsilon_i, \epsilon_j)^2$ πλευρές. Σκοπός μας λοιπόν είναι, να προσδιορίσουμε όλα τα συνεκτικά γραφήματα τα οποία συσχετίζονται με αποδοτικά σύνολα διανυσμάτων (αυτό συμπεριλαμβάνει όλα τα συνεκτικά γραφήμματα *Coxeter*). Αυτό θα γίνει σε βήματα, το πρώτο από τα οποία είναι προφανές.

Υποσημείωση: Το Γ κατ΄ αρχάς δεν υποτίθεται συνεκτικό.

(1) Αν κάποια από τα ϵ_i απορριφθούν, τότε τα εναπομείναντα εξακολουθούν να αποτελούν ένα αποδεκτό σύνολο, του οποίου το γράφημα (πιθανώς μη συνεκτικό) προκύπτει από το Γ παραλείποντας τις αντίστοιχες κορυφές και τις αντίστοιχες πλευρές.

(2) Ο αριθμός των ζευγών των κορυφών του Γ, που συνδέονται με τουλάχιστον μια πλευρά είναι αυστηρά μικρότερος του n.
Πράγματι, ορίζουμε $\epsilon = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$. Από τη στιγμή που τα ϵ_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητα,

συνεπάγεται ότι $\epsilon \neq 0$. Έτσι

$$0 < (\epsilon, \epsilon) = n + 2\sum_{i<j}(\epsilon_i, \epsilon_j).$$

Έστω τώρα i, j $(i \neq j)$, ένα ζεύγος δεικτών για τους οποίους $(\epsilon_i, \epsilon_j) \neq 0$ (π.χ. έστω ότι οι κορυφές i και j είναι συνδεδεμένες). Τότε $4(\epsilon_i, \epsilon_j)^2 = 1, 2$ ή 3, συνεπώς θα πρέπει $2(\epsilon_i, \epsilon_j) \leq -1$. Βάσει λοιπόν της τελευταίας ανισότητας, ο αριθμός τέτοιων ζευγών δεν πρέπει να υπερβαίνει το $n-1$.

(3) Το Γ δεν μπορεί να περιέχει κύκλους.
Πράγματι, έστω ότι το Γ περιέχει κύκλο. Ο κύκλος θα είναι ένα γράφημα Γ' ενός αποδεκτού υποσυνόλου $\mathcal{U}'$ του $\mathcal{U}$. Τότε όμως το γράφημα Γ' θα παραβιάζει το (2), με το n να έχει αντικατασταθεί από το $Card\,\mathcal{U}'$.

(4) Από κάθε κορυφή του Γ, δεν μπορούν να ξεκινούν περισσότερες από τρεις πλευρές.
Πράγματι, έστω λοιπόν $\epsilon \in \mathcal{U}$ και $\eta_1, \ldots, \eta_k$, διανύσματα που ανήκουν στο $\mathcal{U}$ και συνδέονται με το ϵ (με 1,2 ή 3 πλευρές το καθένα), επομένως $(\epsilon, \eta_i) < 0$ (μιας και αν $(\epsilon, \eta_i) = 0 \Rightarrow \epsilon \perp \eta_i$ και άρα τα ϵ, η_i δεν ενώνονται) με $\epsilon, \eta_1, \ldots, \eta_k$ ανά δύο διαφορετικά. Όμως, λόγω του (3), κανένα ζεύγος των η_i δεν συνδέονται, και έτσι $(\eta_i, \eta_j) = 0$, $\forall i \neq j$. Επειδή όμως το $\mathcal{U}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο, θα υπάρχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα η_0 στο χώρο που παράγεται από τα $\epsilon, \eta_1, \ldots, \eta_k$, το οποίο θα είναι κάθετο στα $\eta_1, \ldots, \eta_k$. Προφανώς $(\epsilon, \eta_0) \neq 0$, για ένα τέτοιο η_0. Τώρα,

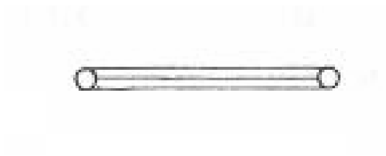
$$\begin{array}{ll} \epsilon = \sum_{i=0}^{k}(\epsilon, \eta_i)\eta_i & \Longrightarrow \\ 1 = (\epsilon, \epsilon) = \sum_{i=0}^{k}(\epsilon, \eta_i)^2 & \Longrightarrow \\ \sum_{i=1}^{k}(\epsilon, \eta_i)^2 < 1 & \Longrightarrow \\ \sum_{i=1}^{k} 4(\epsilon, \eta_i)^2 < 4 \ . & \end{array}$$

Όμως το $4(\epsilon, \eta_i)^2$ είναι ο αριθμός των πλευρών που ενώνουν το ϵ με το η_i στο γράφημα Γ. Έτσι προκύπτει το ζητούμενο.

(5) Το μόνο συνεκτικό γράφημα Γ ενός αποδεκτού συνόλου $\mathcal{U}$ το οποίο μπορεί να περιέχει τριπλή πλευρά είναι το γράφημα $Coxeter\ \ G_2$ (Σχήμα 3.9). Αυτό προκύπτει από το (4).

(6) Έστω ότι το $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k\} \subset \mathcal{U}$ έχει υπογράφημα της μορφής:
(δηλαδή μια απλή αλυσίδα στο Γ). Αν $\mathcal{U}' = (\mathcal{U} - \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k\}) \cup \{\epsilon\}$, όπου $\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i$, τότε το $\mathcal{U}'$ είναι αποδεκτό.

Υποσημείωση: Το γράφημα του $\mathcal{U}'$ προέρχεται από το Γ, συμπτύσσοντας την απλή αλυσίδα σ′ ένα σημείο.



Σχήμα 3.9:

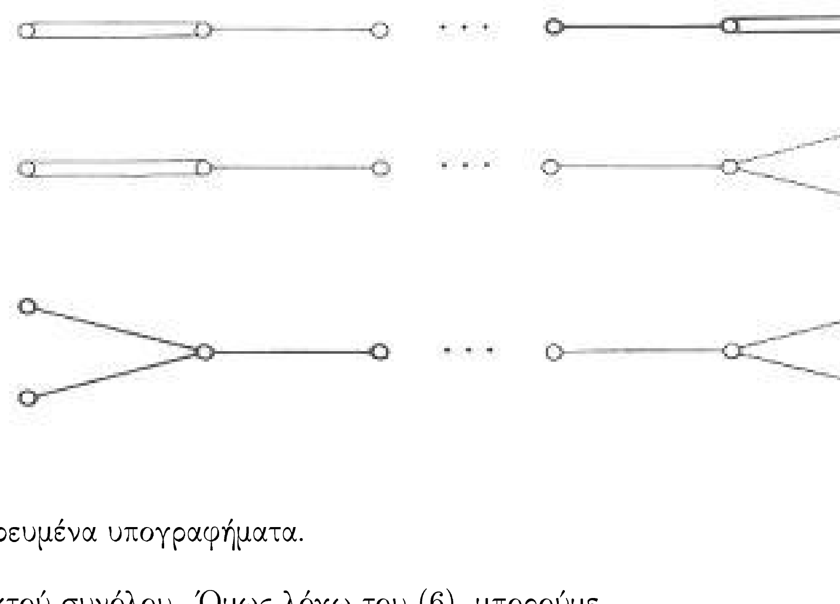
Σχήμα 3.10: Το γράφημα *Coxeter* A_ℓ.

Η γραμμική ανεξαρτησία του $\mathcal{U}'$ είναι προφανής. Επίσης, από την υπόθεση έχουμε ότι $2(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) = -1$ $(1 \leq i \leq k-1)$. Έτσι,

$$\begin{aligned} (\epsilon, \epsilon) &= k + 2\sum_{i<j}(\epsilon_i, \epsilon_j) \\ &= k - (k-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Επομένως το ϵ είναι μοναδιαίο διάνυ
(3), μπορεί να συνδεθεί το πολύ με
$(\eta, \epsilon) = (\eta, \epsilon_i)$, για $1 \leq i \leq k$. Σε κά
$\mathcal{U}'$ αποδεκτό.

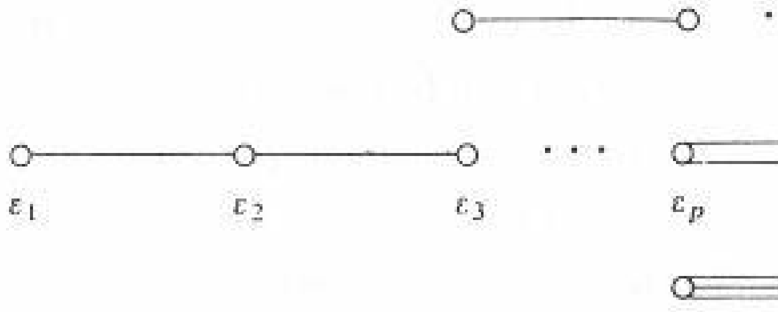
(7) Το Γ δεν περιέχει υπογραφή
Υποθέτουμε ότι κάποιο από αυτά τα



Σχήμα 3.11: Απαγορευμένα υπογραφήματα.

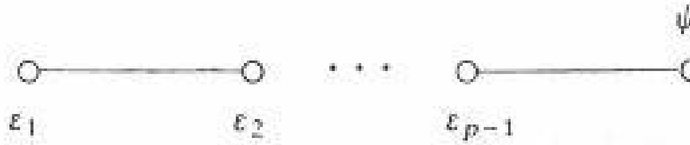
γεται ότι θα είναι ένα γράφημα ενός αποδεκτού συνόλου. Όμως λόγω του (6), μπορούμε να αντικαταστήσουμε την απλή αλυσίδα από ένα σημείο (κορυφή), δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο (αντίστοιχα) τα γραφήματα του Σχήματος 3.12, τα οποία παραβιάζουν το

(4).



Σχήμα 3.12:

(8) Κάθε συνεκτικό γράφημα Γ εν
θες μορφές:



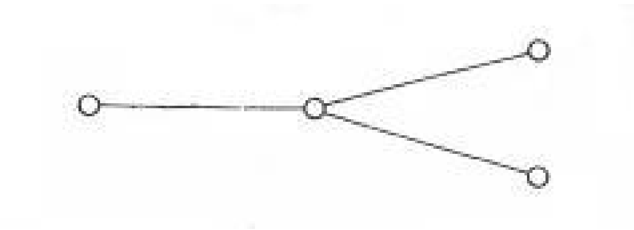
Σχήμα 3.13: Αποδεκτά συνεκτικά γραφήματα.

Πράγματι: από το (5) συμπεραίνουμε ότι μόνο το G_2 (δες σχ.3.9) περιέχει τριπλή πλευρά. Ένα συνεκτικό γράφημα που περιέχει παραπάνω από μία διπλή πλευρά, θα περιέχει το υπογράφημα:

Σχήμα 3.14: Απαγορευμένο υπογράφημα.

το οποίο απαγορεύεται λόγω της (7). Έτσι το πολύ μια διπλή πλευρά θα υπάρχει. Επιπλέον, αν το Γ έχει μια διπλή πλευρά, τότε δεν μπορεί συγχρόνως να έχει και ένα σημείο διακλάδωσης (κόμβο):

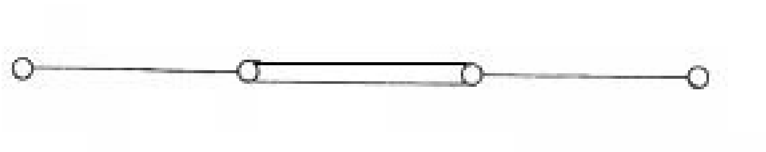
πάλι λόγω του (7)· Έτσι το δεύτερο γράφημα που απεικονίζεται, είναι το μόνο πιθανό (οι κύκλοι απαγορεύονται λόγω του (3)). Τέλος, έστω ότι το Γ έχει μόνο απλές (μονές)



Σχήμα 3.15: Υπογράφημα διακλάδωσης.

πλευρές. Αν το Γ δεν έχει σημείο διακλάδωσης, τότε θα πρέπει να είναι μια απλή αλυσίδα (πάλι λόγω του ότι δεν επιτρέπονται κύκλοι). Επιπλέον δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από ένα σημεία διακλάδωσης (λόγω του (7))· έτσι το τέταρτο γράφημα είναι το μόνο πιθανό-επιτρεπτό, που απομένει.

(9) Το μόνο συνεκτικό Γ, του δεύτερου τύπου του (8), είναι το γράφημα *Coxeter* F_4:



Σχήμα 3.16: Γράφημα *Coxeter* F_4.

ή το γράφημα *Coxeter* B_n $(= C_n)$:

Σχήμα 3.17: Γράφημα *Coxeter* B_n $(= C_n)$.

Πράγματι, ορίζουμε $\epsilon = \sum_{i=1}^{p} i\epsilon_i$, $\eta = \sum_{i=1}^{q} i\eta_i$. Από υπόθεση έχουμε, $2(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) = -1 = 2(\eta_i, \eta_{i+1})$, και τα υπόλοιπα ζεύγη είναι ορθογώνια (κάθετα).Έτσι έχουμε,

$$\begin{aligned} (\epsilon, \epsilon) &= \textstyle\sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) \\ &= p(p+1)/2, \\ (\eta, \eta) &= q(q+1)/2 \end{aligned}$$

Από τη στιγμή που έχουμε ότι $4(\epsilon_p, \eta_q)^2 = 2$, τότε θα έχουμε, $(\epsilon, \eta)^2 = p^2q^2(\epsilon_p, \eta_q)^2 = p^2q^2/2$. Όμως, με χρήση της ανισότητας $Cauchy - Schwartz$ (από την στιγμή που τα ϵ, η είναι προφανώς ανεξάρτητα) έχουμε ότι:

$$\begin{array}{rcll} (\epsilon, \eta)^2 & < & (\epsilon, \epsilon)(\eta, \eta) & \Longrightarrow \\ p^2q^2/2 & < & p(p+1)q(q+1)/4 & \Longrightarrow \\ (p-1)(q-1) & < & 2 \, . & \end{array}$$

Συνεπώς, τα πιθανά ενδεχόμενα είναι:
•$p = q = 2$, απ' όπου προκύπτει το F_4,
•$p = 1,\ q =$αυθαίρετο,
•$q = 1,\ p =$αυθαίρετο.
όπου από τα δύο τελευταία (τα οποία είναι ισοδύναμα) προκύπτει το γράφημα $Coxeter$ B_n $(= C_n)$.

(10) Τα μόνα συνεκτικά γραφήματα Γ του τέταρτου τύπου του (8) είναι το γράφημα $Coxeter$ D_n:

Σχήμα 3.18: Γράφημα $Coxeter$ D_n.

ή το γράφημα $Coxeter$ E_n ($n = 6, 7$ ή 8):

Σχήμα 3.19: Γράφημα $Coxeter$ E_n ($n = 6, 7$ ή8).

Ορίζουμε $\epsilon = \sum i\epsilon_i,\quad \eta = \sum i\eta_i,\quad \zeta = \sum i\zeta_i$. Είναι σαφές ότι, τα ϵ, η, ζ είναι ανά δύο ορθογώνια, γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, και ότι το ψ δεν ανήκει στον χώρο που παράγουν. Συνεπώς, όμοια με το βήμα (4) εξασφαλίζουμε ότι:

$$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3<1$$

με

$$\theta_1=(\widehat{\psi,\epsilon})\ ,\ \theta_2=(\widehat{\psi,\eta})\ ,\ \theta_3=(\widehat{\psi,\zeta}).$$

Κάνοντας τους ίδιους υπολογισμούς όπως στο (9), βάζοντας $p-1$ αντί για p, βρίσκουμε ότι $(\epsilon,\epsilon)=p(p-1)/2$· ομοίως και για τα η,ζ. Άρα,

$$\begin{aligned}\cos^2\theta_1 &= \frac{(\epsilon,\psi)^2}{(\epsilon,\epsilon)(\psi,\psi)}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^{p-1}(i\epsilon_i,\psi)^2}{(\epsilon,\epsilon)\cdot 1}\\ &= (p-1)^2(\epsilon_{p-1},\psi)^2/(\epsilon,\epsilon)\\ &= \tfrac{1}{4}(2(p-1)^2/p(p-1))\\ &= (p-1)/2p\\ &= \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{p}).\end{aligned}$$

Ομοίως και για τα θ_2,θ_3. Αθροίζοντας τα προηγούμενα προκύπτει η ανισότητα:

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}+1-\frac{1}{q}+1-\frac{1}{r}\right)<1\iff$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1.\quad(\star)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας (απλώς με αλλαγή ονομασίας των γραμμάτων), μπορούμε να υποθέσουμε ότι $1/p\le 1/q\le 1/r(\le 1/2$-ισοδύναμα $p\ge q\ge r$· αν p,q ή r είναι ισοδύναμα με το 1, επιστρέφουμε στον τύπο A_n). Συγκεκριμένα η ανισότητα $(\star)$, υπονοεί ότι $3/2\ge 3/r>1$ και άρα $r=2$. Τότε $1/p+1/q>1/2$, $2/q>1/2$, και $2\le q<4$. Αν $q=3$, τότε $1/p>1/6$ και απαραίτητα $p<6$. Επομένως οι πιθανές τριάδες είναι:

•$(p,2,2)=D_n$
•$(3,3,2)=E_6$
•$(4,3,2)=E_7$
•$(5,3,2)=E_8$.

Η προηγούμενη επιχειρηματολογία μας δείχνει ότι τα συνεκτικά γραφήματα των αποδεκτών συνόλων (σύνολα αποτελούμενα από διανύσματα ενός Ευκλείδιου χώρου), βρίσκονται ανάμεσα στα γραφήματα *Coxeter* τύπων $A-G$. Συγκεκριμένα το γράφημα *Coxeter* ενός συστήματος ριζών, πρέπει να είναι ένας από αυτούς τους τύπους. Όμως με μια πιό προσεκτική ματιά των Ορισμών 3.9 και 3.10 προκύπτει ότι, σε κάθε περίπτωση εκτός από τις περιπτώσεις B_ℓ και C_ℓ, τα γραφήματα *Coxeter*, προσδιορίζουν μοναδικά τα διαγράμματα *Dynkin*. Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη.

ο.ε.δ.

Παρατηρήσεις

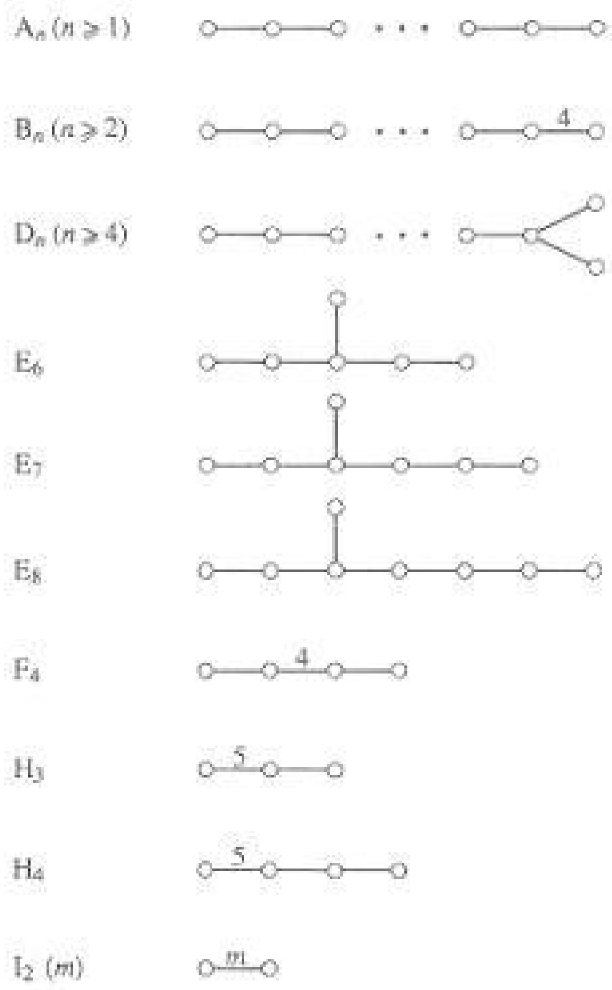
(1) Ο περιορισμός στο ℓ στους τύπους $A_\ell - D_\ell$, επιβάλλεται προκειμένου να αποφευχθεί το ενδεχόμενο (μη κενό) της επανάλη

(2) Εξετάζοντας όλα τα πιθανά διο όλες οι περιπτώσεις, εκτός από τις B_ℓ διοριστούν από τα γραφήματα $Coxet$ ένα και μόνο γράφημα $Coxeter$, και μικρού και μεγάλου μήκους αντίστοιχ το άλλο (συγκεκριμένα για τους πίνα

(3) Προκειμένου να ταξινομηθούν ο πεπερασμένες ομάδες $Coxeter$), ακολ ομάδων $Weyl$. Το σκεπτικό είναι το κορυφών S, $|S| = n$, αντιστοιχούμε (με στοιχεία,

$$\alpha(s, s$$

Η στρατηγική της ταξινόμησης στηρί πιθανά συνεκτικά, θετικά ορισμένα γρ καθένα από αυτά αντιστοιχεί σε κάπ πτουν τα γραφήματα $Coxeter$ του σχ



Σχήμα 3.20: Θετικά ορισμένα γραφήματα.

Παρατηρείστε ότι η λίστα των ταξινομιμένων ομάδων $Coxeter$, είναι η ίδια με αυτή των ομάδων $Weyl$, με την διαφορά ότι περιέχουν και δύο επιπλέον γραφήματα. Αυτά είναι τα γραφήματα H_3, H_4 και $I_2(m)$ για $m \geq 7$. Γινεται εύκολα αντιληπτό, γιατί υπάρχει αυτή η διαφορά· είναι άμεση απόρροια του περιορισμού - αξιώματος ($\mathcal{R}4$).

ΣΧΟΛΙΟ : Η ταξινόμηση των διαγραμμάτων ριζών χρησιμοποιήθηκε από τον Ε. ῭αρταν περί το τέλος του 19ου αιώνα για την ταξινόμηση των απλών αλγεβρών Λιε.

ΣΧΟΛΙΟ : Στο άρθρο [Jon] ο $Jones$, ρωτά εάν υπάρχουν ανάλογες κατασκευές για διαφορετικούς τύπους ομάδων $Coxeter$. Το ερώτημα αυτό απαντήθηκε πρώτα από την Σ.Λαμπροπούλου το 1994 (βλέπε [Lam] και τις αναφορές εκεί), συνδέοντας τις άλγεβρες $Hecke$ και τις κυκλοτομικές άλγεβρες $Hecke$ τύπου B καθώς και τις αφφινικές άλγεβρες $Hecke$ τύπου A με την θεωρία κόμβων μέσα στον τόρο. Στη συνέχεια κατασκεύασε ίχνη $Markov$ και όλα τα δυνατά ανάλογα του πολυωνύμου $Jones$ δύο μεταβλητών για τον τόρο.

Κατασκευή ιχνών $Markov$ έχει γίνει και για την σειρά D_n από τον $M.Geck$.

Βιβλιογραφία

[Fr] John B. Fraleigh, "Εισαγωγή στην Άλγεβρα", *Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2002, 3η έκδοση.*

[GL] C.McA. Gordon and J. Luecke, "*Knots are determined by their complements*", J. Amer. Math. Soc., **2** (1989), 371-415.

[$Hm1$] James E. Humphreys, "*Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*", Springer, seventh corrected printing, 1997.

[$Hm2$] James E. Humphreys, "*Reflection Groups and Coxeter Groups*", Camb. Stud. in Adv. Math. **29**, Cambridge University Press, 1992.

[Jon] V.F.R. Jones, "*Hecke algebra representations of braids groups and link polynomials*", Ann. of Math. **126**, 335-388, 1987.

[Λαμ] *Σ. Λαμπροπούλου, Σημειώσεις του μεταπτυχιακού μαθήματος (ΜΔΕ)* "Θεωρία Κόμβων και Εφαρμογές", *ΣΕΜΦΕ 2001.*

[Lam] S. Lambropoulou, "*Knots theory related to generalized and cyclotomic Hecke algebra of type $\mathcal{B}$*", J. of Knots Theory and Its Ramifications, **8**, No.5, 621-658, 1999.

[PS] V.V.Prasolov A.B.Sossinsky, "*Knots, Links, Braids and $3-Manifolds$*", Transaction of Mathematical Monography of the AMS **154**, 1997.