ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΥΝΕΧΗ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ: ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Διπλωματική Εργασία

Μπιθημήτρη Βασιλική-Στέλλα

Επιβλέπουσα: Λαμπροπούλου Σοφία

Νοέμβριος 2011

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΥΝΕΧΗ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ: ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Διπλωματική Εργασία
Μπιθημήτρη Βασιλική-Στέλλα

Επιβλέπουσα: Λαμπροπούλου Σοφία

Νοέμβριος 2011

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΥΝΕΧΗ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ: ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Διπλωματική Εργασία
Μπιθημήτρη Βασιλική-Στέλλα

Επιβλέπουσα: Λαμπροπούλου Σοφία
Τριμελής εξεταστική επιτροπή:

Σ. Λαμπροπούλου	Α. Παπαϊωάννου	Π. Στεφανέας
Αν. Καθηγήτρια	Αν. Καθηγητής	Λέκτορας

Νοέμβριος 2011

Πρόλογος - Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του σπουδών μου στην Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, στον τομέα των Μαθηματικών. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η μελέτη της θεωρίας των συνεχών κλασμάτων. Ιδιαίτερα, εξετάζεται η προσέγγιση των πραγματικών αριθμών από τα συνεχή κλάσματα. Επιπλέον, μελετάται η εφαρμογή τους στην επίλυση διοφαντικών εξισώσεων.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής: την κ. Λαμπροπούλου Σ., τον κ. Παπαϊωάννου Α. και τον κ. Στεφανέα Π. Ιδιαίτερα, θέλω να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα κ. Σοφία Λαμπροπούλου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Ε.Μ.Π., για την καθοδήγηση και τις συμβουλές που μου προσέφερε και να τονίσω πως χωρίς την συμβολή της, η άρτια ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας δεν θα ήταν δυνατή.

Περίληψη

Τα συνεχή κλάσματα κατέχουν εξέχουσα θέση στον κλάδο των μαθηματικών. Μελετήθηκαν από σημαντικούς μαθηματικούς του 17ου και 18ου αιώνα και παραμένουν έως σήμερα ένας τομέας έντονης μελέτης. Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει έναν απλό τρόπο κατανόησης αυτής της θεωρίας και συγκεκριμένα της θεωρίας των απλών συνεχών κλασμάτων. Έτσι, στο πρώτο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την ιστορία των συνεχών κλασμάτων στο πέρασμα των χρόνων και θα δείξουμε πώς μπορεί να ανακαλυφθεί τυχαία ένα συνεχές κλάσμα. Επιπλέον, θα δώσουμε τον ορισμό του συνεχούς κλάσματος καθώς και τα βασικά χαρακτηριστικά του.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα μελετήσουμε την ανάπτυξη των ρητών αριθμών σε συνεχή κλάσματα και τα βασικά θεωρήματα που τα διέπουν. Στο τρίτο κεφάλαιο θα περιγράψουμε την ανάπτυξη των άρρητων αριθμών σε συνεχή κλάσματα και θα εστιάσουμε στο περίφημο θεώρημα **Lagrange**. Επιπλέον, θα αναλύσουμε τα θεωρήματα προσέγγισης των άρρητων αριθμών από συγκλίνοντες ρητούς και θα παρουσιάσουμε το θεώρημα **Hurwitz**. Επίσης, θα δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία των συνεχών κλασμάτων και θα παραθέσουμε την μορφή συνεχών κλασμάτων γνωστών υπερβατικών αριθμών και της χρυσής τομής.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την γενική θεωρία των διοφαντικών εξισώσεων και θα επικεντρωθούμε στην επίλυση μιας ειδικής κατηγορίας αυτών, την: $\mathrm{x}^2 - \mathrm{N}\mathrm{y}^2 = \pm 1$, γνωστή και ως **εξίσωση Pell**.

Abstract

Continued fractions take pride of place in the field of mathematics. They were studied by prominent mathematicians during the seventeenth and eighteenth century and still nowadays they remain an area of intense study. The purpose of this dissertation is to introduce a simple way of understanding this theory, specifically the theory of the simple continued fractions. So, in the first chapter we will present the history of continued fractions over the years and we will show how a continued fraction might be discovered accidentally. Furthermore, we will give the definition of a continued fraction as well as its basic traits. In the second chapter, we will study the development of rational numbers to continued fractions and the basic theorems that govern them. In the third chapter, we will describe the expansion of irrational numbers into continued fractions and we will focus on the famous **Lagrange** theorem. In addition, we will analyze the theorems of approximating irrational numbers with rational converging numbers and we will present the **Hurwitz** theorem. Further, a geometric definition of continued fractions will be given and we will, also, quote the continued fractions of famous transcendental numbers and the continued fraction of the golden section. Finally, in the fourth chapter, we will deal with the general theory of diophantine equations and we will concentrate on solving a specific diophantine equation: $x^2 - Ny^2 = \pm 1$, known as **Pell equation**.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή –Ιστορικά στοιχεία

1.1.Εισαγωγή

Ας υποθέσουμε πως θέλουμε να επιλύσουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση:

$x^2 - 3x - 1 = 0$,

ως ακολούθως:

Αρχικά, διαιρούμε με x και προκύπτει: $x = 3 + \frac{1}{x}$.

Εν συνεχεία αντικαθιστούμε το άγνωστο x από το ίσο του, $3 + \frac{1}{x}$ και συνεπάγεται ότι:

$$x = 3 + \frac{1}{3+\frac{1}{x}}.$$

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία αρκετές φορές, προκύπτει μια έκφραση της μορφής:

$$x = 3 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\frac{1}{x}}}}}}. \quad (1.1)$$

Ωστόσο, το x εξακολουθεί να εμφανίζεται στο δεξί μέλος της εξίσωσης και η λύση της δεν φαντάζει εφικτή. Αν απομονώσουμε διαδοχικά τα κλάσματα που προκύπτουν παραπάνω και εκτελώντας τις διαιρέσεις, είναι:

$$3, \qquad \frac{10}{3} = 3.333\ldots, \qquad 33/10 = 3.3, \qquad 109/33 = 3.30303.$$

Οι αριθμοί αυτοί δίνουν όλο και καλύτερες προσεγγίσεις στην θετική ρίζα της δοθείσας εξίσωσης. Πράγματι, επιλύοντας με την μέθοδο της διακρίνουσας, η θετική ρίζα της εξίσωσης είναι: $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3.302775638\ldots$,

όπου με στρογγυλοποίηση κατά τρία ψηφία συμφωνεί με το παραπάνω αποτέλεσμα. Κλάσματα όπως αυτά της μορφής (1.1) καλούνται **συνεχή κλάσματα** και η μελέτη τους αποτελεί ένα από τα πιο ενδιαφέροντα κεφάλαια των μαθηματικών.

1.2. Βασικοί ορισμοί

Στα μαθηματικά **συνεχές κλάσμα** είναι μια έκφραση που προκύπτει μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας που αναπαριστά έναν αριθμό x ως το άθροισμα του ακέραιου μέρους του a_0 και του αντιστρόφου ενός άλλου αριθμού, έπειτα γράφοντας τον άλλο αριθμό ως άθροισμα του ακεραίου μέρους του και του αντιστρόφου ενός άλλου αριθμού, κ.ο.κ. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχίζεται επ'άπειρον και προκύπτει η παρακάτω σχέση που αποτελεί την γενική μορφή ενός συνεχούς κλάσματος:

$$x = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \cdots}}}. \tag{1.2}$$

Το a_0 καλείται το ακέραιο μέρος και τα a_n, b_n είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί., μεταβλητές ή συναρτήσεις. Τα a_n καλούνται **μερικά πηλίκα** (partial quotients) του κλάσματος και είναι τα διαδοχικά πηλίκα που προκύπτουν κατά την αναζήτηση του ΜΚΔ του αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος, δηλαδή τα διαδοχικά πηλίκα που προκύπτουν από τον ευκλείδιο αλγόριθμο. Αν η διαδικασία τερματίζεται στο a_n τότε το κλάσμα καλείται **πεπερασμένο συνεχές κλάσμα** (terminating continued fraction). Αν το κλάσμα έχει άπειρους όρους, τότε καλείται **άπειρο συνεχές κλάσμα** (infinite continued fraction).

Μια ειδική και πιο συνήθης περίπτωση είναι τα **απλά συνεχή κλάσματα** (simple continued fractions) που είναι εκφράσεις της παρακάτω μορφής όπου η τιμή των b_n είναι ίση με 1:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}}. \tag{1.3}$$

με τον πρώτο όρο a_0 να είναι ακέραιος, ακόμα και μηδέν και τα υπόλοιπα a_n να είναι θετικοί ακέραιοι.

Λόγω της δυσκολίας που παρουσιάζεται κατά την αναπαράσταση ενός αριθμού σε συνεχές κλάσμα, οι μαθηματικοί υιοθέτησαν πιο βολικούς τρόπους αναπαράστασης των απλών συνεχών κλασμάτων. Ο πιο συνήθης είναι:

$$\sigma = [a_0, a_1, a_2, \ldots]. \tag{1.4}$$

Συχνά, συναντώνται και οι δύο ακόλουθοι τρόποι γραφής ενός συνεχούς κλάσματος: $\sigma = a_0 + \frac{1}{a_1 +} + \frac{1}{a_2 +} + \ldots$ και $\sigma = [a_0\,;\, a_1\,, a_2\,, \ldots]$.

Ένα άπειρο απλό συνεχές κλάσμα $[a_1, a_2, a_3, \dots]$ ονομάζεται **περιοδικό** αν υπάρχουν N, k θετικοί ακέραιοι έτσι ώστε για όλα τα $n \geq N$, $a_n = a_{n+k}$. Αναπαριστούμε το κλάσμα: $[a_1, a_2, \dots, a_N, a_{N+1}, \dots, a_{N+k-1}, a_N, a_{N+1}, \dots]$ με πιο βολικό τρόπο ως εξής:

$[a_1, a_2, \dots \overline{a_N, a_{N+1}, \dots, a_{N+k-1}}]$. (1.5)

Μερικά, όμως, είναι περιοδικά από την αρχή και έτσι ονομάζονται **απόλυτα περιοδικά** συνεχή κλάσματα.

1.3.Ιστορική αναδρομή

Αυτή η ιστορική αναδρομή έχει ως στόχο να παρουσιάσει την γέννηση της θεωρίας των συνεχών κλασμάτων και το πώς αυτή εξελίχθηκε στο πέρασμα του χρόνου.

Τα συνεχή κλάσματα αποτελούν έναν χρήσιμο τρόπο έκφρασης αριθμών και κλασμάτων. Η θεωρία αριθμών διαθέτει πολλά εργαλεία αλλά πιθανόν τίποτα δεν είναι πιο συναρπαστικό από τα συνεχή κλάσματα. Κάποτε ειπώθηκε πως ο Θεός εφηύρε τους ακέραιους αριθμούς και ο άνθρωπος όλα τα υπόλοιπα. Μπορεί να προστεθεί σε αυτό ότι πιθανότατα ο Θεός επινόησε και τα συνεχή κλάσματα. Τα συνεχή κλάσματα αναπτύχθηκαν (ή ανακαλύφθηκαν) εν μέρει ως απάντηση στην ανάγκη μας να προσεγγίσουμε τους άρρητους αριθμούς. Από τότε έχουν διακριθεί ως σημαντικό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων στην θεωρία πιθανοτήτων, στην ανάλυση, και ειδικά στην θεωρία αριθμών. Δίνουν κάτι περισσότερο από λύσεις σε ορισμένα προβλήματα. Προσφέρουν έναν ακόμα τρόπο αναπαράστασης των πραγματικών αριθμών, πέρα από τις κλασικές δεκαδικές αναπαραστάσεις.

Από τα αρχαία χρόνια, οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν αλγόριθμους και μεθόδους για να εκφράσουν αριθμούς και για την εύρεση λύσεων στις διοφαντικές εξισώσεις. Πολλοί από αυτούς τους αλγορίθμους μελετήθηκαν και μοντελοποιήθηκαν για την ανάπτυξη των συνεχών κλασμάτων.

Είναι δύσκολο να προσδιορίσουμε ακριβώς χρονολογικά πότε αναφέρεται για πρώτη φορά η έννοιά τους. Παραδοσιακά, η αρχή τους τοποθετείται στην εποχή της δημιουργίας του αλγορίθμου του Ευκλείδη. Η στενή σχέση του αλγορίθμου με την έκφραση του συνεχούς κλάσματος υποδεικνύει την αρχική δημιουργία των συνεχών κλασμάτων.

1.4.Σημαντικές σχέσεις

Για πάνω από χίλια χρόνια, όποια εργασία σχετιζόταν με τα συνεχή κλάσματα περιοριζόταν σε συγκεκριμένα παραδείγματα. Ο Ινδός μαθηματικός Aryabhata (550 μ. Χ.) χρησιμοποίησε ένα συνεχές κλάσμα για να λύσει μια **γραμμική αόριστη εξίσωση** (indeterminate equation). Βρίσκουμε πολλές αναφορές και παραδείγματα συνεχών κλασμάτων σε Έλληνες και Άραβες μαθηματικούς. Δύο μαθηματικοί από την Μπολόνια, ο Rafael Bombelli (1526-1572) και ο Pietro Cataldi (1548-1626) επίσης συνέβαλαν σε αυτό τον κλάδο καθώς ο πρώτος εξέφρασε την τετραγωνική ρίζα του 13 ως ένα επαναλαμβανόμενο συνεχές κλάσμα ενώ ο δεύτερος έκανε το ίδιο για την τετραγωνική ρίζα του 18.

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6+\frac{4}{6}+\dots}. \qquad (1.6)$$

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{2}{8+\frac{2}{8+\frac{2}{8+\cdots}}}. \qquad (1.7)$$

Τα συνεχή κλάσματα έγιναν ακριβές πεδίο μελέτης μέσω της δουλειάς του John Wallis (1616-1703). Στο βιβλίο του *Arithmetica Infinitorum* (1655), ο Wallis αναπτύσσει και παρουσιάζει την ταυτότητα:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot9}. \qquad (1.8)$$

Παρόλο που το δεξιό μέλος της (1.8) δεν αποτελεί μορφή συνεχούς κλάσματος, ο Λόρδος Brouncker (1620-1684) μετασχημάτισε αυτή την ταυτότητα στην μορφή:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2+} + \frac{3^2}{2+} + \frac{7^2}{2+} + \dots . \qquad (1.9)$$

Παρόλο που ο Brouncker δεν στάθηκε περαιτέρω στα συνεχή κλάσματα, ο Wallis πήρε την πρωτοβουλία και έθεσε τις βάσεις για την γενίκευση της θεωρίας του συνεχούς κλάσματος. Στο βιβλίο του *Opera Mathematica* (1695) ο Wallis έθεσε κάποια από τα βασικά θεμέλια. Επεξήγησε πώς υπολογίζεται το **αναγώγημα** (convergent) k τάξης ενός συνεχούς κλάσματος και καθόρισε κάποιες από τις βασικές ιδιότητες των **αναγωγημάτων**. Επίσης, σε αυτό το έργο γίνεται για πρώτη φορά αναφορά στον όρο «συνεχές κλάσμα». Ακόμα, στο βιβλίο του *Treatise of Algebra* αφιέρωσε δύο κεφάλαια (10 και 11) στο πρόβλημα της προσέγγισης ενός κλάσματος ή ενός δεκαδικού από κλάσμα που έχει παρονομαστή που δεν υπερβαίνει κάποιον δεδομένο αριθμό.

Ο Δανός μαθηματικός και αστρονόμος Christiaan Huygens (1629-1695) ήταν ο πρώτος που επέδειξε μια πρακτική εφαρμογή για τα συνεχή κλάσματα. Στην εργασία του *Descriptio Automati Planetarii*, τα χρησιμοποιεί προκειμένου να γίνει ακριβής σχεδιασμός των οδοντωτών τροχών ενός πλανηταρίου.

Στην συνέχεια, ο κλάδος άρχισε να ανθεί με τους Leonard Euler (1707-1783), Johan Heinrich Lambert (1728-1777) και Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Ο Euler θεμελίωσε την περισσότερη από την σύγχρονη θεωρία στο έργο του *De Fractionibous Continuis* (1737). Απέδειξε πως κάθε ρητός αριθμός μπορεί να εκφραστεί ως ένα πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα. Παράλληλα, χρησιμοποίησε την έκφραση (1.10) για να δείξει ότι το e και το e^2 είναι άρρητοι. Επίσης, απέδειξε πως μια σειρά γράφεται σαν παράσταση συνεχούς κλάσματος και το αντίστροφο.

1737.

$$e - 1 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{1}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}. \qquad (1.10)$$

$$\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cdots}}}}. \qquad (1.11)$$

Ο Lambert γενίκευσε το έργο του Euler για να αποδείξει ότι τόσο το e^x όσο και το $\tan x$ είναι άρρητοι αν ο x είναι ρητός, από τις εκφράσεις (1.12) και (1.13).

1766.

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \cfrac{1}{\frac{2}{x}+\cfrac{1}{\frac{6}{x}+\cfrac{1}{\frac{10}{x}+\cfrac{1}{\frac{14}{x}+\cdots}}}}. \qquad (1.12)$$

1770.

$$tan\,x = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cdots}}}}. \tag{1.13}$$

$$log(1+x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{1^2x}{2+\cfrac{1^2x}{3+\cfrac{2^2x}{4+\cfrac{2^2x}{5+\cfrac{3^2x}{6+\cfrac{3^2x}{7+\cdots}}}}}}}. \tag{1.14}$$

Ο Lagrange χρησιμοποίησε τα συνεχή κλάσματα για να υπολογίσει την τιμή των άρρητων ριζών. Επίσης, απέδειξε ότι μια πραγματική ρίζα ενός **τετραγωνικού άρρητου** (quadratic irrational) είναι ένα περιοδικό συνεχές κλάσμα. Μερικές από τις εκφράσεις συνεχών κλασμάτων στην διατύπωση των οποίων συνέβαλε ο Lagrange παρουσιάζονται παρακάτω.

1776.

$$(1+x) = \cfrac{1}{1-\cfrac{kx}{1+\cfrac{\frac{1\cdot(1+k)}{1\cdot 2}x}{1+\cfrac{\frac{1\cdot(1-k)}{2\cdot 3}x}{1+\cfrac{\frac{2\cdot(2+k)}{3\cdot 4}x}{1+\cfrac{\frac{2\cdot(2-k)}{4\cdot 5}x}{1+\cdots}}}}}}. \tag{1.15}$$

1813.

$$log\frac{1+x}{1-x} = \cfrac{2x}{1-\cfrac{1x^2}{3-\cfrac{4x^2}{5-\cfrac{9x^2}{7-\cfrac{16x^2}{9-\cdots}}}}}. \tag{1.16}$$

Ο 19^{ος} αιώνας μπορεί να θεωρηθεί ως η χρυσή εποχή των συνεχών κλασμάτων καθώς αυτή την περίοδο συντελείται μια έκρηξη στην ανάπτυξη του κλάδου. Χαρακτηριστικά, ο Claude Brezinski στο έργο του *History of Continued Fractions and Pade Approximants,* αναφέρει: «ο 19^{ος} αιώνας μπορεί να αποκαλείται η πιο δημοφιλής περίοδος για τα συνεχή κλάσματα». Η θεωρία που αφορά στα συνεχή κλάσματα και ειδικότερα εκείνη των αναγωγημάτων αναπτύχθηκε σημαντικά τότε. Επίσης, μελετήθηκαν συνεχή κλάσματα με μιγαδικούς όρους. Κάποιοι από τους πιο διακεκριμένους μαθηματικούς που συνέβαλαν σε αυτό τον κλάδο είναι οι: Jacobi, Perron, Hermite, Gauss, Cauchy και Stieljes.

1.5.Σύγχρονη θεωρία

Με την έναρξη του 20^{ου} αιώνα η θεωρία αναπτύχθηκε ραγδαία με αρχική δουλειά αυτήν του Wallis. Από τότε τα συνεχή κλάσματα έκαναν την εμφάνιση τους και σε άλλους τομείς. Για παράδειγμα, μια εργασία του Rob Corless εξετάζει την σχέση των συνεχών κλασμάτων με την θεωρία του χάους. Στα σύγχρονα μαθηματικά, τα συνεχή κλάσματα αποτελούν βασικό εργαλείο για καινούριες ανακαλύψεις στην θεωρία αριθμών και στον κλάδο των διοφαντικών προσεγγίσεων. Στον τομέα της πληροφορικής, μπορούν να δώσουν γρήγορες και βέλτιστες προσεγγίσεις σε πολύπλοκα προβλήματα, όπως το πρόβλημα της μετατροπής κατά προσέγγιση, των δεκαδικών σε κλάσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ρητοί αριθμοί και συνεχή κλάσματα

Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με την ανάπτυξη των ρητών αριθμών σε συνεχή κλάσματα και θα παρουσιάσουμε τα βασικά θεωρήματα που διέπουν την ανάπτυξή τους.

Αρχικά, παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο του Ευκλείδη και την γενική θεωρία ανάπτυξης των πραγματικών αριθμών προκειμένου να εφοδιαστούμε με τις κατάλληλες γνώσεις ώστε στην συνέχεια να αναπτύξουμε τους ρητούς αριθμούς.

2.1.Αλγόριθμος του Ευκλείδη

Ο **Αλγόριθμος του Ευκλείδη** είναι μια επαναληπτική διαδικασία που μας επιτρέπει να βρίσκουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο ακεραίων a, b. Στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, το *Βιβλίο VII* ξεκινά με αυτό τον αλγόριθμο. Η σπουδαιότητα αυτού του αλγορίθμου έγκειται κυρίως στο ότι δεν απαιτείται παραγοντοποίηση των ακεραίων για την εύρεση του ΜΚΔ.

Δεδομένων των δύο αυτών αριθμών, μπορούμε να βρούμε q_1, r_1 έτσι ώστε:

$$b = a \cdot q_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < |a|.$$

Μπορούμε, τώρα, να επαναλάβουμε την διαδικασία για τους αριθμούς a, r_1 και προκύπτει:

$$a = r_1 \cdot q_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < |r_1|.$$

Συνεχίζουμε την διαδικασία και τελικά θα πρέπει το υπόλοιπο να γίνει μηδέν, εφόσον τα r_i είναι ακέραιοι. Οι δύο τελευταίοι όροι της ακολουθίας είναι:

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n \qquad\qquad r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} + 0,$$

$$\text{όπου: } 0 \leq r_n < |r_{n-1}| \qquad \text{και} \qquad r_{n+1} = 0.$$

Το r_n αποδεικνύεται ότι είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a και b.

2.2. Ανάπτυξη Πραγματικών Αριθμών

Κάθε πραγματικός αριθμός x αναπαριστάται από ένα σημείο στον άξονα των πραγματικών αριθμών και είναι ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς ακεραίους, n και $n+1$:

$$n \le x < n+1. \qquad (2.1)$$

Στην περίπτωση που το x είναι ακέραιος, τότε $n = x$. Ο ακέραιος n είναι το ακέραιο μέρος του x, δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν υπερβαίνει το x και γράφεται ως: $n = \lfloor x \rfloor$.

Ο αριθμός $u = x - n$ ικανοποιεί την $0 \le u < 1$. Επίσης, $u = 0$ αν και μόνο αν ο x είναι ακέραιος. Αυτή η ανάλυση καλείται η *modulo ένα* ανάλυση (mod 1 decomposition) ενός πραγματικού αριθμού. Είναι το πρώτο βήμα στην διαδικασία ανάπτυξης του x σε συνεχές κλάσμα. Δεδομένου του x, ξεκινάμε με την *modulo ένα* ανάλυση:

$$x = n_1 + u_1, \qquad (2.2)$$

με n_1 ακέραιο και $0 \le u_1 < 1$.

Αν το $u_1 = 0$, τότε η επαναληπτική διαδικασία τερματίζεται από το πρώτο βήμα. Αν $u_1 > 0$, τότε για τον αντίστροφο $1/u_1$ ισχύει $1/u_1 > 1$ καθώς το u_1 ανήκει στο $[0,1)$. Σε αυτή την περίπτωση, το δεύτερο βήμα της διαδικασίας είναι η εφαρμογή της *modulo ένα* ανάλυσης στο $1/u_1$, η οποία παράγει την σχέση:

$$1/u_1 = n_2 + u_2, \qquad (2.3)$$

με n_2 ακέραιο και το u_2 να ικανοποιεί την σχέση $0 \le u_2 < 1$.

Συνδυάζοντας τις (2.2) και (2.3), προκύπτει ότι: $x = n_1 + \frac{1}{n_2 + u_2}$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Στην περίπτωση που το $u_k > 0$, μπορούμε να ξαναγράψουμε το $1 / u_k$ ως:

$1 / u_k = n_{k+1} + u_{k+1}$, με n_{k+1} ακέραιο και το u_{k+1} να ικανοποιεί την:

$0 \le u_{k+1} < 1$. Αν $u_k = 0$, τότε η επαναληπτική διαδικασία τερματίζεται με το $x = n_{k-1} + \frac{1}{n_k}$.

Έπειτα από k βήματα, ο πραγματικός αριθμός x διατυπώνεται ως ακολούθως:

$$x = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_{3+\cdots} + \cfrac{1}{n_{k+} u_k}}}. \qquad (2.4)$$

Μπορούμε να εκφράσουμε οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό ως συνεχές κλάσμα χρησιμοποιώντας την ανωτέρω επαναληπτική διαδικασία.

2.3. Ανάπτυξη ρητών αριθμών

Ένας *ρητός* αριθμός είναι της μορφής: p/q με p, q να ανήκουν στο $\boldsymbol{Z}$, $q \neq 0$ και $(p, q) = 1$.

2.3.1. Αριθμητικά παραδείγματα

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $\frac{p}{q} > 0$ και $\frac{p}{q} < 0$.

i) $p/q > 0$.

$A)$ $p/q > 1$.

Έστω το κλάσμα $49/18$. Αρχικά διαιρούμε το 49 με το 18 και προκύπτει:

$$49/18 = 2 + 13/18\,.$$

Έπειτα, $\frac{13}{18} = \frac{1}{\frac{18}{13}}$. Από την διαίρεση έχουμε: $\frac{18}{13} = 1 + \frac{5}{13}$ το οποίο, ομοίως, γράφεται ως εξής: $1 + \frac{1}{\frac{13}{5}}$.

$\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} = 2 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 2 + \frac{1}{\frac{2}{3}+1} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}.$

Άρα, τελικά, ο αριθμός $49/18$ γράφεται ως: $\frac{49}{18} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}} = [2, 1, 2, 1, 2]$.

Πιο συνοπτικά προκύπτει: $[49{:}\,18] = 2, \rightarrow 49 = 2 \cdot 18 + 13 \rightarrow \left[\frac{18}{13}\right] = 1 \rightarrow 18 = 13 \cdot 1 + 5 \rightarrow \left[\frac{13}{5}\right] = 2 \rightarrow 13 = 5 \cdot 2 + 3 \rightarrow \left[\frac{5}{3}\right] = 1 \rightarrow 5 = 3 \cdot 1 + 2 \rightarrow [\frac{3}{2}] = 1 \rightarrow 3 = 1 \cdot 2 + 1 \rightarrow 2/1 = 2.$

Παρατηρούμε ότι από τις διαδοχικές διαιρέσεις τα υπόλοιπα που προκύπτουν είναι όλα μη αρνητικοί αριθμοί, μικρότεροι από τον αντίστοιχο διαιρέτη τους. Το υπόλοιπο σε κάθε διαίρεση γίνεται ο διαιρέτης στην επόμενη διαίρεση ώστε να έχουμε ακριβώς μια φθίνουσα ακολουθία υπολοίπων. Η διαδικασία τερματίζεται όταν προκύψει υπόλοιπο ίσο με μηδέν. Η μοναδικότητα των υπολοίπων εξασφαλίζεται από τον αλγόριθμο διαίρεσης του Ευκλείδη.

$B)\ p/q\ <\ 1.$

Έστω πως αναζητούμε το συνεχές κλάσμα του $18/49$. Ο τρόπος είναι απλός. Ισχύει:

$18/49\ =\ 0\ +\ 1/(49/18)$ και αναπτύσσουμε το $49/18$ όπως ανωτέρω.

Άρα, πρώτο γενικό συμπέρασμα:

αν $p/q\ =\ [a_1, a_2, \dots, a_n],\ q/p\ =\ [0, a_1, a_2, \dots, a_n].$

Έστω, ο ρητός $49/18$ που αναπτύχθηκε ανωτέρω σε συνεχές κλάσμα: $[2, 1, 2, 1, 1, 2]$. Υποθέτουμε πως θέλουμε να αναπτύξουμε σε συνεχές κλάσμα κάποιο ισοδύναμό του, για παράδειγμα το $196/72 = 4 \cdot 49/4 \cdot 18$.

$196\ /\ 72 =\ 2\ +\ 52\ /\ 72\ =\ 2\ +\ 1\ /\ 72\ /\ 52\ =\ 2\ +\ 1\ /\ (\ 1 + 20/52\ )$

$=\ 2\ +\ 1\ /\ (\ 1 + 1/(\ 2\ +\ 12\ /\ 20)) =\ 2\ +\ 1\ /\ (\ 1 + 1/(\ 2\ +\ 1\ /\ (\ 1\ +\ 8/12)))$

$=\ 2\ +\ 1\ /\ (\ 1 + 1/(\ 2 + 1\ /\ (\ 1 + 1\ /\ (\ 1\ +\ 4/8\ ))))$

$=\ 2\ +\ 1\ /\ (\ 1 + 1/(\ 2 + 1\ /\ (\ 1 + 1\ /\ (\ 1\ +\ 1/2\ )))).$

Άρα, $196/72 = 49/18 = [2, 1, 2, 1, 1, 2]$.

Αν κάνουμε πράξεις καταλήγουμε στην απλοποιημένη έκφραση $49/18$ και όχι στο $196/72$. Συμπεραίνουμε πως με τις πράξεις πάντα καταλήγουμε σε έναν ρητό στην πιο απλοποιημένη του μορφή, δηλαδή σε ένα ανάγωγο κλάσμα.

ii) $p/q\ <\ 0.$

Ας πάρουμε, για παράδειγμα, τον αριθμό $-\frac{27}{40}$. Σκεφτόμαστε το μικρότερο αρνητικό πηλίκο το οποίο όταν πολλαπλασιαστεί με το 40 και αφαιρεθεί από το -27 να αφήνει το μικρότερο θετικό υπόλοιπο. Άρα,

$-\frac{27}{40} =\ -1\ + \frac{13}{40} =\ -1\ +\ 1/40/13 =\ -1\ +\ 1/(3 + 1/13).$

Άρα, γενικότερα όταν θέλουμε να αναπτύξουμε έναν αρνητικό ρητό p/q σε συνεχές κλάσμα, τότε: $p/q\ =\ [a_1, a_2, \dots, a_n]$ με a_1 αρνητικό.

2.3.2. Βασικά θεωρήματα

Θεώρημα 2.1:

Κάθε απλό, πεπερασμένο συνεχές κλάσμα αναπαριστά έναν ρητό αριθμό. Αντίστροφα, κάθε ρητός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα απλό, πεπερασμένο συνεχές κλάσμα. Αυτή η αναπαράσταση είναι μοναδική.

Απόδειξη:

⇨ Το ευθύ θα αποδειχθεί με την μέθοδο της επαγωγής.

Έστω $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ ένα απλό, πεπερασμένο συνεχές κλάσμα. Για $n = 1$, έχουμε:

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1},$$

που είναι ένας ρητός αριθμός.

Στο σημείο αυτό υποθέτουμε ότι κάθε απλό, πεπερασμένο συνεχές κλάσμα με k μερικά υπόλοιπα είναι ένας ρητός αριθμός, $k \geq 1$. Τότε,

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}]}.$$

Αφού η έκφραση $[a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}]$ περιέχει k μερικά υπόλοιπα, είναι ένας ρητός αριθμός r/s, με $s \neq 0$. Τότε:

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{\frac{r}{s}} = a_0 + \frac{s}{r} = \frac{a_0r + s}{r},$$

που είναι ένας ρητός αριθμός.

Επαγωγικά, απεδείχθη ότι το $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ αναπαριστά έναν ρητό αριθμό για κάθε θετικό ακέραιο n. ▪

⇦ Έστω $p/q, q > 0$.

$p/q = a_1 + r_1/q,$ με $a_1 < 0, > 0$ ή $= 0$ και $0 \leq r_1 < q$.

Αν $r_1 = 0$, τότε $\frac{p}{q} = [a_1]$.

Αν $r_1 \neq 0, p/q = a_1 + 1/\, q/r_1,$

$q/r_1 = a_2 + r_2/r_1.$

Παρατηρούμε ότι το q/r_1 είναι θετικό κλάσμα και το a_2 είναι ο μοναδικός μέγιστος θετικός ακέραιος που κάνει το υπόλοιπο r_2 να είναι μεταξύ 0 και r_1. Αν $r_2 = 0$, τότε σταματούμε και $p/q = [a_1, a_2]$. Αν $r_2 \neq 0$, τότε $p/q = a_1 + 1/a_2 + 1/r_1\, /\, r_2$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρι να φτάσουμε σε $r_n = 0$. Η διαδικασία τερματίζεται σίγουρα κάποια στιγμή γιατί έχουμε μια φθίνουσα ακολουθία θετικών ακεραίων που είναι όλοι μικρότεροι από έναν θετικό ακέραιο q. Άρα, για κάποιον n έχω $r_n = 0$.

$$\begin{aligned} p &= a_1 \cdot q + r_1, \quad 0 \le r_1 < q \\ q &= a_2 \cdot r_1 + r_2, \quad 0 \le r_2 < r_1 \\ r_1 &= a_3 \cdot r_2 + r_3, \quad 0 \le r_3 < r_2 \\ &\ \ . \\ &\ \ . \\ &\ \ . \\ r_{n-3} &= a_{n-1} \cdot r_{n-2} + r_{n-1}, \quad 0 \le r_{n-1} < r_{n-2} \\ r_{n-2} &= a_n \cdot r_{n-1} + r_n = a_n \cdot r_{n-1}, \ r_n = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Η μοναδικότητα της έκφρασης απορρέει από τον τρόπο με τον οποίο έχουν υπολογιστεί τα a_i, δηλαδή μέσω του αλγορίθμου διαίρεσης. ▪

Αυτή η πρόταση πρέπει να συνοδευτεί και από την παρατήρηση πως μπορούμε πάντα να καθορίσουμε τον τελευταίο όρο στο συνεχές κλάσμα προκειμένου ο αριθμός των όρων να είναι άρτιος ή περιττός. Αν $a_n > 1$, τότε:

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + 1/1}$,

και $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ γράφεται ως: $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$.

Αν $a_n = 1$, τότε:

$\frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{a_{n-1} + 1}$,

και $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1]$.

Πόρισμα 1:

Αν ένας πραγματικός αριθμός είναι άρρητος, τότε το συνεχές κλάσμα του είναι άπειρο.

Απόδειξη:

Η απόδειξη είναι προφανής από το Θεώρημα 2.1. ▪

2.4.Τα αναγωγήματα (convergents) και οι ιδιότητές τους

Οι σχέσεις (2.5) αποτελούν τις εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη (Μ.Κ.Δ), (p, q), δυο ακεραίων p, q μέσω του αλγορίθμου του Ευκλείδη. Τα συνεχή κλάσματα διαθέτουν μια σειρά αξιοσημείωτων ιδιοτήτων που σχετίζονται με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη. Αποδεικνύεται εύκολα από τις σχέσεις (2.5) ότι $(p, q) = r_{n-1}$. Με τα μερικά πηλίκα a_i δημιουργούμε τα κλάσματα:

$c_1 = \frac{a_1}{1} = [\alpha_1]$,

$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = [\alpha_1, \alpha_2]$,

$c_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + 1/a_3} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$,

που τα παίρνουμε διαδοχικά απομονώνοντας την ανάπτυξη του αριθμού σε συνεχές κλάσμα μετά το πρώτο, δεύτερο βήμα κ.ο.κ. Αυτά τα κλάσματα ονομάζονται **αναγωγήματα** ή **συγκλίνοντες αριθμοί** (convergents) του συνεχούς κλάσματος. Το συνεχές κλάσμα $[\, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k]$ με k έναν μη αρνητικό ακέραιο μικρότερο ή ίσο του n καλείται το k τάξης αναγώγημα του συνεχούς κλάσματος: $[\, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$. Το k τάξης αναγώγημα συμβολίζεται και ως C_k.

Το αναγώγημα n τάξης συμβολίζεται ως:

$$c_n = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_{3+\cdots+\frac{1}{a_n}}}}, \tag{2.6}$$

και ουσιαστικά αποτελεί το ίδιο το συνεχές κλάσμα, $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$.

Θα δούμε έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού των αναγωγημάτων. Έχουμε ότι:

$$c_1 = a_1 = \frac{p_1}{q_1}, \quad \text{όπου } p_1 = a_1 \quad \text{και} \quad q_1 = 1.$$

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2}, \quad \text{όπου } p_2 = a_1 a_2 + 1 \text{ και } q_2 = a_2.$$

$$c_3 = a_1 + \frac{1}{a_{2+\frac{1}{a_3}}} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2\, a_3 + 1}$$

$$= \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3(a_1\, a_2 + 1) + a_1}{a_2\, a_3 + 1} = \frac{a_3\, p_2 + p_1}{a_3\, q_2 + q_1}.$$

Επαγωγικά, καταλήγουμε στην έκφραση:

$$c_n = \frac{a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}. \tag{2.7}$$

Θεώρημα 2.2:

Για ένα δεδομένο συνεχές κλάσμα $[\,a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n]$, ο αριθμητής p_i και ο παρονομαστής q_i του i-οστού αναγωγήματος C_i δίνονται, για όλα τα $i \geq 1$, από τους επαναληπτικούς τύπους:

$$p_i = a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2},$$

$$(2.8)$$

$$q_i = a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2},$$

όπου, κατά σύμβαση, θέτουμε: $p_{-1} = 0, \quad p_0 = 1, \quad q_{-1} = 1$ και $q_0 = 0$.

<u>Απόδειξη:</u>

Θα γίνει με την μέθοδο της επαγωγής. Όπως είδαμε παραπάνω, οι τύποι (2.8) για $i = 1, 2$ ισχύουν. Πράγματι:

$C_1 = p_1/q_1 = a_1 = a_1 \cdot 1 + \frac{0}{a_1 \cdot 0 + 1}$,

$C_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{q_1 \cdot q_2 + 1}{q_2} = \frac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0}$.

Υποθέτουμε ότι οι τύποι (2.8) αληθεύουν για κάθε

$i = k$ και θα δείξουμε ότι αληθεύουν για $k + 1$.

Εξ ορισμού, είναι: $C_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}]$.

Μπορούμε να ξαναγράψουμε το παραπάνω κλάσμα με τον ακόλουθο τρόπο:

$C_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, (a_k + \frac{1}{a_{k+1}})]$.

Τώρα, το συνεχές κλάσμα έχει k όρους και από την επαγωγική υπόθεση:

$$C_{k+1} = \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}) \cdot p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}) \cdot q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{(a_k \cdot a_{k+1} + 1) \cdot p_{k-1} + a_{k+1} \cdot p_{k-2}}{(a_k \cdot a_{k+1} + 1) \cdot q_{k-1} + a_{k+1} \cdot q_{k-2}} =$$

$$\frac{a_k \cdot a_{k+1} \cdot p_{k-1} + p_{k-1} + a_{k+1} \cdot p_{k-2}}{a_k \cdot a_{k+1} \cdot q_{k-1} + q_{k-1} + a_{k+1} \cdot q_{k-2}} = \frac{a_{k+1} \cdot (a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1} \cdot (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}.$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε επαγωγική αντικατάσταση. Έτσι, αφού το θεώρημα αληθεύει για $k + 1$, με επαγωγή, πρέπει να αληθεύει για όλους τους ακεραίους. ▪

Η σύμβαση στις σχέσεις (2.8) έγινε διότι εάν βάλουμε $i = 1, 2$ στις (2.8) παίρνουμε τις απροσδιόριστες ποσότητες p_{-1}, p_0, q_{-1} και q_0. Ωστόσο, εκχωρώντας τις τιμές $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$, $q_{-1} = 1$ και $q_0 = 1$ τότε οι σχέσεις (2.8) θα αληθεύουν για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Για $i = 1, C_1 = p_1/q_1 = \frac{a_1 \cdot p_0 + p_{-1}}{a_1 \cdot q_0 + q_{-1}} = \frac{a_1 + 0}{a_1 \cdot 0 + 1} = \frac{a_1}{1}$.

Για $i = 2, C_2 = p_2/q_2 = \frac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0} = \frac{a_2 \cdot a_1 + 1}{a_2 \cdot 1 + 0} = \frac{a_2 \cdot a_1 + 1}{a_2}$.

Σημειώνεται ότι τα p_{-1}/q_{-1} και p_0/q_0 δεν είναι αναγωγήματα.

Ο υπολογισμός των διαδοχικών αναγωγημάτων συστηματοποιείται και αυτό μας δείχνει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.3 (Θεμελιώδης επαναληπτική σχέση)**:**

Έστω $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ τα αναγωγήματα ενός συνεχούς κλάσματος με:

$p_i = a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2}$, $\quad q_i = a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2}$.

Τότε ισχύει: $p_i \cdot q_{i-1} - p_{i-1} \cdot q_i = (-1)^i$, με $i \geq 0$.

Απόδειξη :

Η πρόταση αυτή θα αποδειχθεί με την μέθοδο της επαγωγής.

Ελέγχουμε αρχικά τις δύο βασικές περιπτώσεις, για $i = 0$ και $i = 1$:

$p_0 \cdot q_{-1} - p_{-1} \cdot q_0 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 = (-1)^0$.

$p_1 \cdot q_0 - p_0 \cdot q_1 = (a_1 \cdot p_0 + p_{-1}) \cdot 0 - 1 \cdot (a_1 \cdot q_0 + q_1)$
$= 0 - 1 \cdot (0 + 1) = -1 = -(1)^1$.

Και οι δύο περιπτώσεις είναι αληθείς. Υποθέτουμε, τώρα, πως η πρόταση αληθεύει για όλα τα $i \leq k$ και θα δείξουμε πως αληθεύει και για $k + 1$:

$p_{k+1} \cdot q_k - p_k \cdot q_{k+1} =$
$(a_{k+1} \cdot p_k + p_{k-1}) \cdot q_k - p_k \cdot (a_{k+1} \cdot q_k + q_{k-1}) = a_{k+1} \cdot p_k \cdot q_k + p_{k-1} \cdot q_k - a_{k+1} \cdot q_k \cdot p_k - p_k \cdot q_{k-1} = p_{k-1} \cdot q_k - p_k \cdot q_{k-1} = -(p_k \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$.

Αφού ο ισχυρισμός αληθεύει για $k + 1$, ισχύει και για όλους τους ακεραίους, επαγωγικά. ▪

Πόρισμα 2:

Τα αναγωγήματα $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ ενός συνεχούς κλάσματος ικανοποιούν την αναδρομική σχέση: $c_i - c_{i-1} = \frac{(-1)^i}{q_i \cdot q_{i-1}}, \ \ i \geq 2.$

<u>Απόδειξη:</u>

Ισχύει: $c_i - c_{i-1} = \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i}{q_i q_{i-1}}$ και από Θεώρημα 2.3 προκύπτει: $\frac{p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i}{q_i q_{i-1}} = \frac{(-1)^i}{q_i \cdot q_{i-1}}$. ▪

Θεώρημα 2.4:

Για κάθε $k \geq 1$, ισχύει η αναδρομική σχέση:

$p_{k-2} q_k - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k.$

<u>Απόδειξη:</u>

Από Θεώρημα 2.3 ισχύει:

$p_{k-2} q_k - p_k q_{k-2} = q_k (a_{k-2} p_{k-1} + p_k) - (a_{k-2} q_{k-1} + q_k) p_k =$
$a_{k-2} (q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1}) = (-1)^{k-1} a_{k-2}.$ ▪

Πόρισμα 3:

Κάθε αναγώγημα $c_i = p_i / q_i, \ \ i \geq 1$, ενός απλού συνεχούς κλάσματος είναι ένα ανάγωγο κλάσμα, δηλαδή τα p_i και q_i δεν έχουν κοινό διαιρέτη εκτός του ± 1.

<u>Απόδειξη:</u>

Αφού $p_i \cdot q_{i-1} - p_{i-1} \cdot q_i = (-1)^i$, συνεπάγεται ότι κάθε αριθμός που διαιρεί τόσο τα p_i όσο και τα q_i πρέπει να είναι διαιρέτης του $(-1)^i$. Αλλά οι μόνοι διαιρέτες του $(-1)^i$ είναι το ± 1. Άρα είναι και οι μόνοι κοινοί διαιρέτες των p_i και q_i με μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1. ▪

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Άρρητοι αριθμοί και συνεχή κλάσματα

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την ανάπτυξη των άρρητων αριθμών σε απλά συνεχή κλάσματα και θα δούμε πως αυτά τα κλάσματα δεν είναι πεπερασμένα. Θα δείξουμε ότι τα συνεχή κλάσματα των τετραγωνικών άρρητων αριθμών είναι περιοδικά μέσω του θεωρήματος **Lagrange** καθώς και θα παραθέσουμε την αναπαράσταση σε συνεχή κλάσματα γνωστών υπερβατικών αριθμών και της χρυσής τομής. Τέλος, θα παρουσιάσουμε τα βασικά θεωρήματα προσέγγισης των άρρητων αριθμών από συγκλίνοντες ρητούς, το θεώρημα **Hurwitz** και επιπλέον θα δοθεί μια γεωμετρική ερμηνεία των συνεχών κλασμάτων.

3.1.Άρρητοι αριθμοί - Βασικοί ορισμοί

Άρρητος ονομάζεται ένας αριθμός που δεν μπορεί να παρασταθεί ως το πηλίκο δύο ακεραίων. Οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}+1$, (3 - $\sqrt{11})/5$ είναι όλοι άρρητοι. Κάθε αριθμός της μορφής: $\frac{P\,+-\sqrt{D}}{Q}$ με P, D, Q ακεραίους και με D θετικό ακέραιο, όχι τέλειο τετράγωνο, είναι άρρητος.

Ο όρος **τετραγωνικός άρρητος** (quadratic irrational) αναφέρεται σε όλους τους αριθμούς της μορφής: $\frac{(A+D\sqrt{B})}{C}$, όπου οι A, C και D είναι αυθαίρετοι ακέραιοι αριθμοί ενώ το B είναι ένας σταθερός θετικός ακέραιος, όχι τέλειο τετράγωνο. Καλούνται τετραγωνικοί άρρητοι αφού είναι οι ρίζες δευτεροβάθμιων εξισώσεων με ρητούς συντελεστές, συγκεκριμένα:

$$C^2 \cdot x^2 - 2 \cdot A \cdot C \cdot x + (A^2 - D^2 B) = 0. \quad (3.1)$$

Κάθε τετραγωνικός άρρητος $a = \frac{(A+D\sqrt{B})}{C}$ έχει έναν **συζυγή** $a' = \frac{(A-D\sqrt{B})}{C}$, που σχηματίζεται απλά αλλάζοντας το πρόσημο του συντελεστή D του $\sqrt{B}$.

Ένας **αλγεβρικός αριθμός** (algebraic number) είναι ένας αριθμός x που ικανοποιεί μια αλγεβρική εξίσωση, δηλαδή μια εξίσωση της μορφής:

$a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$ (3.2) όπου $a_0, a_1, \dots, a_n$ ακέραιοι και όχι όλοι μηδέν. Ο άρρητος $\sqrt{2}$ είναι η λύση της αλγεβρικής εξίσωσης: $x^2 - 2 = 0$, συνεπώς καλείται αλγεβρικός αριθμός. Προφανώς, κάθε ρητός αριθμός $\frac{p}{q}$ είναι αλγεβρικός αφού προκύπτει ως λύση της εξίσωσης: $qx - p = 0$. Επίσης, αν διαιρέσουμε την (3.1) με το Ε.Κ.Π. των συντελεστών του x, εύκολα διαπιστώνεται πως κάθε τετραγωνικός άρρητος αριθμός είναι αλγεβρικός.

Ένας αριθμός που δεν είναι αλγεβρικός λέγεται **υπερβατικός αριθμός** (transcendental number). Λίγες κλάσεις υπερβατικών αριθμών είναι γνωστές, κυρίως επειδή είναι εξαιρετικά δύσκολο να αποδειχθεί ένας αριθμός ότι είναι υπερβατικός. Ωστόσο, σχεδόν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι υπερβατικοί. Οι πιο διακεκριμένοι υπερβατικοί αριθμοί είναι το π και το e. Χρησιμοποιώντας δεκαδικές προσεγγίσεις, όπως $\pi = 3.14159\ldots$ και $e = 2.71828\ldots$ μπορούμε να υπολογίσουμε μερικούς από τους πρώτους όρους της ανάπτυξής τους σε συνεχή κλάσματα. Άλλοι γνωστοί υπερβατικοί αριθμοί είναι:

- e^{a}, με a αλγεβρικό, μη μηδενικό αριθμό (από το Θεώρημα *Lindemann - Weierstrass).*
- e^{π}, σταθερά *Gelfond* και $e^{-\pi/2} = i^{i}$ *(*Θεώρημα *Gelfond - Schneider).*
- a^{b}, με a αλγεβρικό αλλά όχι 0 ή 1 και b άρρητο αλγεβρικό.
- $2^{\sqrt{2}}$, σταθερά *Gelfond - Schneider.*
- $\sin a, \cos a$ και $\tan a$ και οι αντίστροφές τους εκφράσεις $\csc \alpha$, $\sec \alpha$ και $\cot \alpha$ για κάθε μη μηδενικό αλγεβρικό αριθμό a.

3.2.Ανάπτυξη άρρητων σε συνεχή κλάσματα

Όπως θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο μέσω του Θεωρήματος Lagrange, κάθε άρρητος αλγεβρικός αριθμός έχει περιοδικό ανάπτυγμα συνεχούς κλάσματος και αντίστροφα. Ενώ, κάθε υπερβατικός δεν παρουσιάζει κάποια περιοδικότητα.

Η διαδικασία ανάπτυξης ενός άρρητου είναι θεμελιωδώς ανάλογη με αυτή των ρητών. Έστω x δεδομένος άρρητος. Υπολογίζουμε το α_1, τον μεγαλύτερο ακέραιο μικρότερο του x και εκφράζουμε το x στην μορφή:

$x = \alpha_1 + \frac{1}{x_2},\ 0 < 1/x_2 < 1,$

όπου ο: $x_2 = \frac{1}{x - \alpha_1} > 1$ είναι άρρητος, αφού όταν ένας ακέραιος αφαιρεθεί από έναν άρρητο, το αποτέλεσμα και το αντίστροφο του αποτελέσματος είναι άρρητοι.

Συνεχίζουμε υπολογίζοντας το α_2, τον μεγαλύτερο ακέραιο μικρότερο του x_2 και εκφράζουμε το x_2 στην μορφή:

$x_2 = \alpha_2 + \frac{1}{x_3},\ 0 < 1/x_3 < 1,\ \alpha_2 \geq 1$, με $x_3 = \frac{1}{x_2 - \alpha_2} > 1$, άρρητο.

Οι υπολογισμοί αυτοί μπορούν να επαναλαμβάνονται επ'αόριστον, παράγοντας διαδοχικά τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 > 1, \\
x_2 &= \alpha_2 + \frac{1}{x_3}, \quad x_3 > 1, \quad \alpha_2 \geq 1, \\
x_3 &= \alpha_3 + \frac{1}{x_4}, \quad x_4 > 1, \quad \alpha_3 \geq 1, \\
&\ \ \vdots \\
x_n &= \alpha_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad x_{n+1} > 1, \quad \alpha_n \geq 1,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

όπου τα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ είναι όλοι ακέραιοι και οι αριθμοί $x, x_2, x_3, \ldots$ όλοι άρρητοι. Αυτή η διαδικασία δεν μπορεί να τερματιστεί, καθώς αυτό θα συνέβαινε μόνο αν κάποιος ακέραιος α_n ήταν ίσος με το x_n, το οποίο όμως είναι αδύνατο αφού κάθε x_i είναι άρρητος.

Αντικαθιστώντας το x_2 από την δεύτερη εξίσωση των σχέσεων (3.3) στην πρώτη σχέση, έπειτα το x_3, κ.ο.κ, παράγεται το ζητούμενο άπειρο, απλό συνεχές κλάσμα:

$$x = \alpha_1 + \frac{1}{x_2} = \alpha_1 + \frac{1}{a_{2+\frac{1}{x_3}}} = \alpha_1 + \frac{1}{a_{2+\frac{1}{a_{3+\frac{1}{x_4}}}}} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]. \quad (3.4)$$

3.2.1. Το θεώρημα Lagrange

Θεώρημα 3.1 (Lagrange)

Οι τετραγωνικοί άρρητοι είναι οι πραγματικοί αριθμοί που αναπαριστώνται από περιοδικά συνεχή κλάσματα.

Απόδειξη:

Για την απόδειξη του Θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε κάποια λήμματα, ως ενδιάμεσα στάδια.

Λήμμα 1:

Αν x είναι ένας τετραγωνικός άρρητος και a_1 ένας ακέραιος, τότε ο: $a_1 + \frac{1}{x}$ είναι τετραγωνικός άρρητος.

Απόδειξη:

Έστω $x = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$ με $a, b, c \in \mathbb{Z},\ \ c \neq 0$ και b όχι τέλειο τετράγωνο. Τότε:

$$a_1 + \frac{1}{x} = a_1 + \frac{1}{\frac{a+\sqrt{b}}{c}} = a_1 + \frac{c}{a+\sqrt{b}} = \frac{(a_1 a^2 + ac - a_1 b) - c\sqrt{b}}{a^2 - b},$$

που έχει την μορφή ενός τετραγωνικού άρρητου. Σημειώνεται ότι: $a^2 - b \neq 0$ γιατί το b δεν είναι τέλειο τετράγωνο. ▪

Λήμμα 2:

Αν x τετραγωνικός άρρητος και $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ ακέραιοι, τότε ο αριθμός:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{x}}}}$$ είναι τετραγωνικός άρρητος.

Απόδειξη:

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n. Για $n = 1$, η σχέση ισχύει όπως προκύπτει από το Λήμμα 1. Έστω $n > 0$ και υποθέτουμε ότι η σχέση αληθεύει για n. Τότε, στο $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{x}}}}$, το υποκλάσμα $z = a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{x}}}$ είναι τετραγωνικός άρρητος, από υπόθεση. Συνεπώς, το αρχικό κλάσμα γράφεται ως: $a_1 + \frac{1}{z}$, που είναι ένας τετραγωνικός άρρητος, όπως προκύπτει από το Λήμμα 1. Άρα, ισχύει για κάθε $n > 0$. ▪

Λήμμα 3:

Έστω $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ ακέραιοι αριθμοί.

Τότε, ο αριθμός: $[a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, x]$ μπορεί να γραφεί ως: $\frac{ax+b}{cx+d}$, με $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη:

Για $n = 1$, $a_1 + \frac{1}{x} = \frac{a_1 x + 1}{x}$ που ισχύει. Έστω $n > 0$ και δεχόμαστε ότι η σχέση αληθεύει για n. Τότε: $a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{x}}} = a_1 + \frac{1}{m}$, όπου το

$m = a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{x}}}$ μπορεί, από επαγωγή, να γραφτεί στην μορφή: $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Συνεπώς, το αρχικό κλάσμα γράφεται: $a_1 + \frac{1}{m} = a_1 + \frac{1}{\frac{ax+b}{cx+d}} = \frac{(a_1 a + c)x + (a_1 b + d)}{ax+b}$,

δηλαδή έχει την ζητούμενη μορφή. Άρα, το λήμμα αληθεύει για κάθε $n > 0$. ▪

Λήμμα 4:

Αν $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{Z}$, τότε ο αριθμός $x = [\overline{a_1, a_2 \dots, a_{n+1}}]$ είναι ένας τετραγωνικός άρρητος.

Απόδειξη:

Από Λήμμα 3, $x = [\overline{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}}] = [a_1, a_2, \dots, a_n, x] = \frac{ax+b}{cx+d}$,

με $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς, $cx^2 + dx = ax + b \rightarrow cx^2 + (d-a)x - b = 0$.

Άρα, ο x είναι τετραγωνικός άρρητος. ▪

Στην γενική περίπτωση, ο αριθμός x δεν εμφανίζει περιοδικότητα, απ'ευθείας.

Λήμμα 5:

Αν $b_1, b_1, \dots, b_{m+1}, a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{Z}$, τότε ο αριθμός $x = [b_1, b_2, \dots, b_{m+1}, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}}]$ είναι ένας τετραγωνικός άρρητος.

Απόδειξη:

Από Λήμμα 4, γνωρίζουμε ότι: ο $y = [\overline{a_1, a_2 \dots, a_{n+1}}]$ είναι τετραγωνικός άρρητος. Ωστόσο, από Λήμμα 2, ο $x = [b_1, b_2, \dots, b_{m+1}, y]$ είναι τετραγωνικός άρρητος. ▪

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος Lagrange, κατά την μία κατεύθυνση. Ισχύει και το αντίστροφο, όμως εδώ θα περιοριστούμε σε παραδείγματα τετραγωνικών άρρητων που καταλήγουν σε μορφή περιοδικά συνεχών κλασμάτων.

3.2.2. Ανάπτυξη τετραγωνικών άρρητων σε συνεχή κλάσματα

Παράδειγμα 1. Ανάπτυξη του $\sqrt{2}$ σε ένα άπειρο απλό συνεχές κλάσμα.

Λύση: Ο μεγαλύτερος ακέραιος, μικρότερος του $\sqrt{2} = 1.414\ldots$, είναι ο $a_1 = 1$, άρα: $\sqrt{2} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{x_2}$.

Επιλύοντας την εξίσωση για x_2, έχουμε: $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1 > 1$.

Άρα, $\sqrt{2} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

Ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος του $x_2 = \sqrt{2} + 1 = 2.414\ldots$, είναι ο $a_2 = 2$, επομένως: $x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} = 2 + \frac{1}{x_3}$,

όπου: $x_3 = \frac{1}{x_2 - 2} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1 > 1$.

Σε αυτό το σημείο γνωρίζουμε ότι: $\sqrt{2} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}}$.

Αφού $x_3 = \sqrt{2} + 1$ όπως και το $x_2 = \sqrt{2} + 1$, οι υπολογισμοί των $x_4, x_5, \ldots$ θα παράγουν όλοι το ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή τον αριθμό $\sqrt{2} + 1$. Έτσι, όλα τα επόμενα μερικά υπόλοιπα θα είναι ίσα με 2 και η ανάπτυξη του $\sqrt{2}$ θα είναι: $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = [1, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}]$.

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι:

$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1, \overline{1, 2}]$,

$\sqrt{15} = [3, 1, 6, 1, 6, \ldots] = [3, \overline{1, 6}]$,

$\sqrt{31} = [5, \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}]$.

Τα ανωτέρω παραδείγματα αποτελούν εφαρμογή του θεωρήματος Lagrange.

Παράδειγμα 2. Να ευρεθεί η ανάπτυξη σε συνεχές κλάσμα του αριθμού:
$x = \frac{24 - \sqrt{15}}{17}$.

Λύση: Αφού $3 < \sqrt{15} < 4$, ο μεγαλύτερος ακέραιος $< x$ είναι ο $a_1 = 1$. Άρα, $x = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{x_2}$, όπου: $x_2 = \frac{1}{x-1} = \frac{17}{7-\sqrt{15}} \cdot \frac{7+\sqrt{15}}{7+\sqrt{15}} = \frac{119 + 17\sqrt{15}}{34} > 5$.

Ο μεγαλύτερος ακέραιος $< x_2$ είναι ο $a_2 = 5$, οπότε: $x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}$ και προκύπτει: $x_3 = \frac{1}{x_2 - 5} = \frac{34}{17\sqrt{15} - 51} \cdot \frac{17\sqrt{15} + 51}{17\sqrt{15} + 51} = \frac{1734 + 578\sqrt{15}}{1734} > 2$.

Άρα, $a_3 = 2$ και $x_3 = a_3 + \frac{1}{x_4}$ με: $x_4 = \frac{1}{x_3 - 2}$.

Συνεπώς: $x_4 = \frac{1734}{-1734 + 578\sqrt{15}} \cdot \frac{-1734 - 578\sqrt{15}}{-1734 - 578\sqrt{15}} > 3$.

Επομένως, $a_4 = 3$ και $x_4 = a_4 + \frac{1}{x_5}$ όπου: $x_5 = \frac{1}{x_4 - 3} = \ldots = \frac{1734 + 578\sqrt{15}}{1734}$
$= x_3 > 2$, οπότε, $a_5 = 2$ και $x_5 = a_4 + \frac{1}{x_6}$, με $x_6 = \frac{1}{x_5 - 2} = \ldots = x_4$.

Συμπερασματικά, η απαιτούμενη έκφραση που προκύπτει είναι:

$$x = 1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{x_3}} = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_4}}} = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x_5}}}} = \ldots \; [1, 5, \overline{2, 3}\,].$$

3.3.Τα αναγωγήματα των άρρητων αριθμών (convergents)

3.3.1. Αριθμητικό παράδειγμα

Τα αναγωγήματα στο άπειρο συνεχές κλάσμα: $x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots} = [a_1, a_2, \dots]$, υπολογίζονται με παρόμοιο τρόπο όπως έχουν υπολογιστεί ανωτέρω για τα πεπερασμένα συνεχή κλάσματα. Το $\boldsymbol{c_n} = \frac{\boldsymbol{p_n}}{\boldsymbol{q_n}}$ αναγώγημα n τάξης: υπολογίζεται από τους ίδιους αναδρομικούς τύπους:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},$$
$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \tag{3.5}$$

για κάθε $n \geq 1$, όπου έχουμε ορίσει: $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$, $q_{-1} = 1$ και $q_0 = 0$.

Παράδειγμα 3. Το άπειρο συνεχές κλάσμα για το $e = 2.7182818 \dots$ αρχίζει ως εξής: $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots]$.

Στον πίνακα που ακολουθεί έχουν υπολογιστεί τα πέντε πρώτα αναγωγήματα για το e, μέσω των αναδρομικών τύπων (3.5). Αυτοί οι υπολογισμοί δίνουν διαδοχικώς όλο και καλύτερες προσεγγίσεις για το e.

i	-1	0	1	2	3	4	5
a_i			2	1	2	1	1
p_i	0	1	1	1	3	4	7
q_i	1	0	2	1	4	5	9
c_i			1/2	1/1	3/4	4/5	7/9

3.3.2. Θεμελιώδεις ιδιότητες των αναγωγημάτων

Θεώρημα 3.2:

Οι αριθμητές p_n και οι παρονομαστές q_n των αναγωγημάτων $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ του άπειρου, απλού συνεχούς κλάσματος $[a_1, a_2, \dots]$ ικανοποιούν την θεμελιώδη επαναληπτική σχέση:

$$p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^n, \qquad n \geq 0.$$

Επιπλέον, τα c_n ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}, \ n \geq 1.$$

Απόδειξη:

Η απόδειξη είναι προφανής από το Θεώρημα 2.3 και από το Πόρισμα 2, διότι εκεί δόθηκε ανεξάρτητα από το αν το συνεχές κλάσμα είναι πεπερασμένο ή όχι. ▪

Θεώρημα 3.3:

Για τα αναγωγήματα $c_n = \frac{p_n}{q_n}$, για $n \geq 2$, πληρείται η αναδρομική σχέση:

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-2}}.$$

Απόδειξη:

Έχουμε: $c_n - c_{n-2} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n}{q_n q_{n-2}}$.

Από τις σχέσεις (3.5), προκύπτει:

$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = a_n(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = a_n(-1)^{n-1}$. ▪

Τα παραπάνω θεωρήματα μας δίνουν σημαντικές πληροφορίες για το πώς μεταβάλλονται τα αναγωγήματα καθώς το n αυξάνει. Αν θέσουμε $n = 2$ και έπειτα $n = 3$ στην σχέση του Θεωρήματος 3.2 και θυμηθούμε ότι τα q_n είναι θετικά, συμπεραίνουμε ότι:

$$c_2 - c_1 = \frac{1}{q_2 q_1} > 0 \quad \text{και} \quad c_3 - c_2 = -\frac{1}{q_3 q_2} < 0 \quad (3.6)$$

Αντίστοιχα, από αυτές τις ανισώσεις διαπιστώνουμε ότι: $c_1 < c_2$ και $c_3 < c_2$.

Από την άλλη, θέτοντας $n = 3$ στο Θεώρημα 3.3 προκύπτει ότι:

$$c_3 - c_1 = \frac{a_3(-1)^2}{q_3 q_1} = \frac{a_3}{q_3 q_1} > 0,$$

αφού q_3, q_1, a_3 είναι όλοι θετικοί αριθμοί και σε συνδυασμό με την σχέση (3.6) συμπεραίνουμε ότι: $c_1 < c_3 < c_2$.

Προχωρώντας βήμα βήμα με αυτό τον τρόπο, έχουμε τις ανισώσεις:

$$c_3 < c_4 < c_2,$$

$$c_5 < c_6 < c_4,$$

$$\dots .$$

Συνδυάζοντας αυτές τις ανισώσεις, καταλήγουμε στο θεμελιώδες συμπέρασμα:

$c_1 < c_3 < c_5 < \cdots < c_{2n+1} < c_{2n} < \cdots < c_6 < c_4 < c_2.$

Το ανωτέρω συμπέρασμα διατυπώνεται και ως θεώρημα.

Θεώρημα 3.4:

Τα περιττά αναγωγήματα c_{2n+1} ενός άπειρου απλού συνεχούς κλάσματος σχηματίζουν μια αύξουσα ακολουθία και τα άρτια αναγωγήματα c_{2n} σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία. Επίσης, κάθε περιττό αναγώγημα είναι μικρότερο από κάθε άρτιο και κάθε αναγώγημα τάξης $k \geq 3$, βρίσκεται ανάμεσα στα δύο προηγούμενά του αναγωγήματα.

3.4. Άρρητοι αριθμοί και θεωρήματα προσέγγισης

Μέσω των αναγωγημάτων, ένας άρρητος προσεγγίζεται πιο γρήγορα από ότι με τις αντίστοιχες δεκαδικές προσεγγίσεις του και αυτό είναι το αντικείμενο αυτής της ενότητας.

3.4.1. Από την σκοπιά του ορίου

Αρχικά, θα εξετάσουμε την προσέγγιση ενός άρρητου αριθμού από την σκοπιά του ορίου. Υπενθυμίζεται πως ένα μη κενό υποσύνολο S των πραγματικών αριθμών καλείται **άνω φραγμένο** αν και μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον ένας πραγματικός αριθμός x έτσι ώστε $a \leq x, \forall a \in S$.

Η μετατροπή ενός άρρητου αριθμού x σε συνεχές κλάσμα μας έδωσε διαδοχικά:

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2},$$

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3},$$

$$\dots$$

$$x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n},$$

$$\dots,$$

έτσι ώστε στον $n-1$ υπολογισμό προέκυπτε:

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \dots \frac{1}{+ a_n +} \frac{1}{x_n}, \quad (3.7)$$

όπου ο x_n είναι άρρητος και όπως είδαμε αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί, επ'αόριστον. Συνειδητοποιώντας αυτό, επιχειρούμε να γράψουμε το x ως εξής:

$x = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \dots \frac{1}{+ a_n +} \dots$, που υπονοεί ότι το άπειρο συνεχές κλάσμα στο δεξιό μέλος της παράστασης αναπαριστά τον αριθμό x. Αυτή η δήλωση υπονοεί ότι μπορούμε να εκτελέσουμε άπειρο αριθμό βημάτων και τελικά να φτάσουμε σε έναν συγκεκριμένο αριθμό που προσεγγίζει τον δεδομένο αριθμό x. Αυτή η προσέγγιση ουσιαστικά θα γίνει μέσω της έννοιας του ορίου.

Αρχικά, εξετάζουμε το νόημα των παρακάτω αθροισμάτων.

$A = 1 + 1 + 1 + \dots,$

$B = 1 + (1/2)^1 + (1/2)^2 + \dots + (1/2)^n + \cdots.$

Αν προσθέσουμε το 1 στον εαυτό του ξανά και ξανά, μπορούμε να κάνουμε το «άθροισμα» όσο μεγάλο επιθυμούμε έτσι ώστε το A να γίνει άπειρο καθώς ο αριθμός των προστιθέμενων όρων αυξάνεται αόριστα και ένα τέτοιο αποτέλεσμα δεν μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμο. Από την άλλη, προσθέτοντας τους αριθμούς: $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$ παίρνουμε διαδοχικά τα *μερικά αθροίσματα*:

$$s_1 = 1,$$
$$s_2 = 1 + (1/2)^1,$$
$$s_3 = 1 + (1/2)^1 + (1/2)^2,$$
$$\ldots$$
$$s_n = 1 + (1/2)^1 + (1/2)^2 + \ldots + (1/2)^{n-1},$$
$$\ldots$$

όπου: $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_n < \ldots,$

άρα έχουμε μια αύξουσα ακολουθία μερικών αθροισμάτων.

Όμως, κάθε μερικό άθροισμα s_n είναι μικρότερο του 2, δηλαδή είναι όλα άνω φραγμένα από το 2.

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι τα ανωτέρω μερικά αθροίσματα συνεχώς προσεγγίζουν το άνω φράγμα 2, έχουμε:

$s_n = 1 + (1/2)^1 + (1/2)^2 + \ldots + (1/2)^{n-1} \rightarrow$

$\left(\frac{1}{2}\right) s_n = (1/2)^1 + (1/2)^2 + \ldots + (1/2)^{n-1} + (1/2)^n.$

Αφαιρώντας την δεύτερη γραμμή από την πρώτη στην προηγούμενη σχέση, προκύπτει:

$$s_n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - (1/2)^n,$$

που συνεπάγεται ότι:

$$s_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{½} = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1}.$$

Όσο το n τείνει στο άπειρο, το $(\frac{1}{2})^{n-1}$ τείνει στο μηδέν και έτσι το s_n τείνει στο 2

(ή το όριο της ακολουθίας s_n είναι το 2).

Δηλαδή, με σύμβολα έχουμε : $lim_{n\to\infty} s_n = 2.$

Άρα το άθροισμα του $B = 1 + (1/2)^1 + (1/2)^2 + \ldots + (1/2)^n + \cdots = 2.$

Αυτή η διαδικασία περιγράφει την έννοια του ορίου που απαιτείται για την ενασχόληση με τα άπειρα συνεχή κλάσματα.

Επίσης, σκιαγραφεί και ένα θεμελιώδες θεώρημα της ανάλυσης, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 3.5:
Αν έχουμε μια αύξουσα ακολουθία αριθμών $s_1, s_2, s_3, \ldots$ και για κάθε n, το s_n είναι μικρότερο ενός δεδομένου αριθμού U, τότε οι $s_1, s_2, s_3, \ldots$ έχουν όριο έναν αριθμό l_U, με $l_U \leq U$. Αν οι αριθμοί $s_1, s_2, s_3, \ldots$ αποτελούν όρους μιας φθίνουσας ακολουθίας και όλοι είναι μεγαλύτεροι από έναν αριθμό L, τότε έχουν όριο έναν αριθμό l_L, όπου ισχύει $l_L \leq L$.
(L. Zippin, *Uses of Infinity*).

3.4.2. Βασικά θεωρήματα προσέγγισης άρρητων αριθμών

Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να παραθέσουμε τα βασικά θεωρήματα προσέγγισης που διέπουν τα άπειρα συνεχή κλάσματα:
$a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots + \frac{1}{a_n} + \cdots}$.

Θεώρημα 3.6:
Κάθε άπειρο, απλό, συνεχές κλάσμα συγκλίνει σε ένα όριο l το οποίο είναι μεγαλύτερο από κάθε περιττό αναγώγημά του και μικρότερο από κάθε άρτιο.

<u>Απόδειξη:</u>
Τα περιττά αναγωγήματα σχηματίζουν μια αύξουσα ακολουθία όπου όλοι οι όροι είναι άνω φραγμένοι από το $c_2 = U$, άρα συγκλίνουν όλοι σε ένα όριο $l_U \leq U$, όπως είδαμε από το Θεώρημα 3.5. Επίσης, αφού όλα τα περιττά αναγωγήματα είναι μικρότερα από όλα τα άρτια, το όριο l_U πρέπει να είναι μικρότερο από όλα τα άρτια αναγωγήματα. Από την άλλη, τα άρτια c_{2n} αποτελούν όρους μιας φθίνουσας ακολουθίας κάτω φραγμένης από το $c_1 = L$, δηλαδή:

$$L = c_1 < c_3 < \cdots < c_{2n+1} < c_{2n} < \cdots < c_4 < c_2 = U,$$

έτσι ώστε τα c_{2k} να προσεγγίζουν το όριο $l_L = L$, όπου το l_L είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος από κάθε περιττό αναγώγημα. Μένει να αποδείξουμε ότι $l_L = l_U$. Για αυτό από το Θεώρημα 3.2 αντικαθιστούμε το n με $2k$ και το $n-1$ με $2k-1$ και προκύπτει:

$$c_{2k} - c_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k}}{q_{2k}q_{2k-1}} = \frac{1}{q_{2k}q_{2k-1}}.$$

Τα q_n υπολογίζονται από την σχέση (3.5).

Αφού κάθε a_n $(n \geq 2)$ και κάθε q_n $(n \geq 1)$ είναι θετικός ακέραιος, η ακολουθία των q_n αυξάνεται χωρίς όριο, καθώς το n τείνει στο άπειρο. Άρα, το $q_{2k}q_{2k-1}$ αυξάνει χωρίς όριο με το k να τείνει στο άπειρο και άρα προκύπτει ότι:

$$lim_{k\to\infty} c_{2k} - c_{2k-1} = 0 \Rightarrow lim_{k\to\infty} c_{2k} = lim_{k\to\infty} c_{2k-1} \Rightarrow l_L = l_U \ ▪$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτό το όριο l είναι ουσιαστικά ο αριθμός x που αρχικά αναπτύξαμε σε συνεχές κλάσμα.

Έστω x ο δοσμένος άρρητος αριθμός με την έκφραση:

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\frac{1}{+a_{n-1}+}\frac{1}{x_n},$$

όπου το x_n είναι το «υπόλοιπο» του κλάσματος, δηλαδή:

$$x_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1}+}\frac{1}{a_{n+2}+\cdots} = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \qquad (3.8)$$

όπου, ξανά, ισχύει:

$$x_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}+\cdots}. \qquad (3.9)$$

Από την σχέση (3.8) συμπεραίνουμε ότι $x_n > a_n$, αφού $x_{n+1} > 0$.

Ομοίως, από την σχέση (3.9) ισχύει: $x_{n+1} > a_{n+1}$ ή $\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}}$,

άρα: $x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}} < a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$.

Συμπερασματικά, προκύπτει:

$$a_n < x_n < a_n + \frac{1}{a_{n+1}}. \qquad (3.10)$$

Το επόμενο βήμα στην απόδειξη είναι να δείξουμε ότι το x βρίσκεται ανάμεσα στο c_n και στο c_{n+1}.

$$c_n = a_1 + \frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{+a_{n-1}+}\frac{1}{a_n},$$

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{+a_{n-1}+}\frac{1}{x_n}, \qquad (3.11)$$

$c_{n+1} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots} \frac{1}{+ a_{n-1} +} \frac{1}{a_n +} \frac{1}{a_{n+1}}$.

Οι ανωτέρω εκφράσεις διαφέρουν μόνο στους όρους: $\frac{1}{a_n}, \frac{1}{x_n}, \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1}}}$.

Αλλά γνωρίζουμε πως $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{x_n} > \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1}}}$, επομένως συμπεραίνουμε ότι ισχύει:

$c_n < x < c_{n+1}$ ή $c_n > x > c_{n+1}$.

Ένας άμεσος υπολογισμός μας δείχνει ότι: $c_1 < x < c_2$ και από την σχέση (3.10) προκύπτει ότι: $a_1 < x_1$ και αφού $c_1 = a_1$ και $x_1 = x$, θα είναι $c_1 < x$. Από την άλλη, $x = a_1 + \frac{1}{x_2}$, από όπου έχουμε: $a_2 < x_2$ ή $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{a_2}$.

Άρα, $x = a_1 + \frac{1}{x_2} < a_1 + \frac{1}{a_2} = c_2$.

Συνεπώς, $c_1 < x < c_2$.

Ομοίως, οι σχέσεις (3.11) μας δείχνουν ότι το x βρίσκεται ανάμεσα στα c_2 και c_3, ανάμεσα στα c_3 και c_4, ανάμεσα στα c_4 και c_5, κ.ο.κ.

Αφού όλα τα περιττά αναγωγήματα είναι μικρότερα από τα άρτια, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα:

$$c_{2k-1} < x < c_{2k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

ή σε αναπτυγμένη μορφή:

$c_1 < c_3 < \dots < c_{2k-1} < x < \dots < c_{2k} < \dots < c_4 < c_2$.

Συμπεραίνουμε ότι τα c_{2k-1} προσεγγίζουν το x από τα αριστερά και τα c_{2k} από τα δεξιά. Αλλά γνωρίζουμε πως όσο το k αυξάνει, τα c_{2k-1} και τα c_{2k} πλησιάζουν ένα όριο l. Συνεπώς, το x και το l πρέπει να είναι ίσα. Μπορούμε, λοιπόν, να γράφουμε:

$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots \frac{1}{a_n}}}$.

Αποδείξαμε ότι:

Θεώρημα 3.7:

Αν ένας άρρητος αριθμός x αναπτυχθεί σε συνεχές κλάσμα $[a_1, a_2, \dots]$ σύμφωνα με τους παραπάνω κανόνες, τότε το όριο στο οποίο συγκλίνουν τα αναγωγήματα του κλάσματος είναι ουσιαστικά το ίδιο το x.

Η ενασχόληση με τα συνεχή κλάσματα και πιο συγκεκριμένα με την μελέτη των Θεωρημάτων 3.6 και 3.7, μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι κάθε αναγώγημα του συνεχούς κλάσματος ενός άρρητου αριθμού x προσεγγίζει καλύτερα την τιμή του x

από το αμέσως προηγούμενο αναγώγημά του. Πράγματι, έστω η ανάπτυξη του x να είναι:

$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x_{n+1}}}}$, όπου $x_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \ldots}$.

Υποθέτουμε ότι τα $x_2, x_3, \ldots$ είναι όλοι θετικοί αριθμοί. Επίσης, τονίζουμε ότι $x_1 = x$. Παρά το γεγονός ότι το x_{n+1} περιέχει έναν άπειρο αριθμό ακέραιων μερικών πηλίκων $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ δεν σημαίνει απαραίτητα πως είναι και το ίδιο ακέραιος αριθμός. Ωστόσο, το x γράφεται στην συμπαγή μορφή ενός «πεπερασμένου» συνεχούς κλάσματος, ως: $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}]$, όπου το x_{n+1} αντιμετωπίζεται ως ένα γνήσιο μερικό υπόλοιπο. Αν υπολογίσουμε τα αναγωγήματα από την αναδρομική σχέση (3.5), το τελευταίο αναγώγημα (για $i = n+1$ και $a_{n+1} = x_{n+1}$) θα είναι: $\frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}}$, και, αναλογικά με την μελέτη των πεπερασμένων συνεχών κλασμάτων, αυτή η ποσότητα θα πρέπει να είναι ίση με το x, τον δοσμένο άρρητο αριθμό. Συνεπώς, ισχύει:

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}] = \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}}, \qquad (3.12)$$

όπου πρέπει να τονιστεί ότι τα p_n, q_n, p_{n-1}, q_{n-1} εξαρτώνται μόνο από τους ακεραίους $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Συγκεκριμένα, όταν $n = 0$, η σχέση (3.12) μας δίνει: $\frac{x_1 p_0 + p_{-1}}{x_1 q_0 + q_{-1}} = \frac{x_1 \cdot 1 + 0}{x_1 \cdot 0 + 1} = x_1$ και εξ ορισμού ισχύει: $x_1 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots} = x$. Για $n = 1$, είναι:

$$[a_1, x_2] = \frac{x_2 p_1 + p_0}{x_2 q_1 + q_0} = \frac{x_2 \cdot a_1 + 1}{x_2 \cdot 1 + 0} = a_1 + \frac{1}{x_2} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots} = x.$$

Μπορεί να αποδειχθεί, με τρόπο παρόμοιο όπως και στο Θεώρημα 2.2, ότι η σχέση (3.12) ισχύει για όλα τα n.

Θεώρημα 3.8:

Κάθε αναγώγημα προσεγγίζει καλύτερα την τιμή ενός άπειρου, απλού συνεχούς κλάσματος από το προηγούμενο αναγώγημά του.

Απόδειξη :

Έστω η ανάπτυξη του δοσμένου άρρητου αριθμού x να είναι:

$x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}]$, όπου: $x_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$.

Έτσι, σύμφωνα με την σχέση (3.12), $x = \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}}$, και συνεπώς έχουμε:

$x(x_{n+1}q_n + q_{n-1}) = x_{n+1}p_n + p_{n-1}$,

ή, αναδιατάσσοντας έχουμε, για $n \geq 2$:

$x_{n+1}(xq_n - p_n) = -(xq_{n-1} - p_{n-1}) = - q_{n-1}(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}})$.

Διαιρώντας με $x_{n+1}q_n$, προκύπτει: $x - \frac{p_n}{q_n} = (-\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n})(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}})$.

Ισχύει: $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n} \right| \cdot \left| x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|$.

Γνωρίζουμε ότι για $n \geq 2$, $x_{n+1} > 1$, και ότι $q_n > q_{n-1} > 0$.

Άρα, $0 < \frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n} < 1$ και συνεπώς: $0 < \left| \frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n} \right| < 1$.

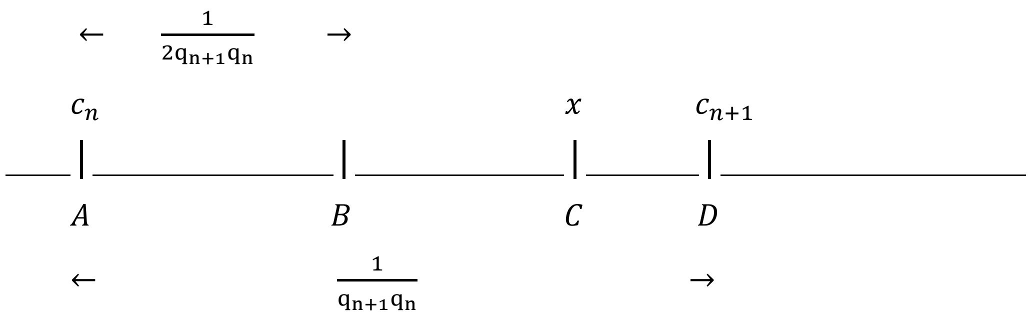
Από την σχέση (3.12) προκύπτει:

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|, \ n \geq 2,$$

$$\leftrightarrow \ | x - c_n | < | x - c_{n-1} |, \ n \geq 2. \qquad (3.13)$$

Η σχέση (3.13) μας δείχνει ότι το c_n είναι πιο κοντά στο x από ότι το c_{n-1}. ▪

Θα ήταν ενδιαφέρον να είχαμε και κάποια γραφική απεικόνιση για το πόσο καλά προσεγγίζεται το x από το c_n. Στην πραγματικότητα, όπως γνωρίζουμε από το Θεώρημα 3.2, ισχύει: $c_{n+1} - c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n+1}q_n}$. Παίρνοντας απόλυτες τιμές και στα δύο μέλη, προκύπτει: $\left| c_{n+1} - c_n \right| = \frac{1}{q_{n+1}q_n}$, $n \geq 1$. Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει την προσέγγιση της απόστασης δύο διαδοχικών αναγωγημάτων c_n, c_{n+1} από τον όρο $\frac{1}{q_{n+1}q_n}$.



Επιπροσθέτως, όπως γνωρίζουμε από το Θεώρημα 3.8, το x είναι πιο κοντά στο c_{n+1} από ότι είναι το c_n, και συνεπώς η απόλυτη τιμή της διαφοράς του x από το c_n θα είναι πάντα μεγαλύτερη από το μισό της απόλυτης τιμής της διαφοράς του c_n από το

c_{n+1}. Το παραπάνω σχήμα μας πληροφορεί για αυτό όταν το n είναι περιττός έτσι ώστε το c_n να είναι στα αριστερά του c_{n+1}. Βλέπουμε καθαρά ότι $AB < AC < AD$, ή

$$\frac{1}{2q_n q_{n+1}} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Αφού το $q_{n+1} > q_n \rightarrow q_{n+1}\, q_n < q_{2n}$ και άρα $\frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{{q_n}^2}$. Έτσι, οδηγούμαστε στο παρακάτω συμπέρασμα:

Θεώρημα 3.9:

$$\frac{1}{2q_n q_{n+1}} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{{q_n}^2}, \qquad n \geq 1.$$

Επισημαίνεται ότι το θεώρημα αληθεύει τόσο για ρητούς όσο και για άρρητους αριθμούς.

Αν το x είναι άρρητος, τότε υπάρχει ένας άπειρος αριθμός αναγωγημάτων $\frac{p_n}{q_n}$ που ικανοποιούν το Θεώρημα 3.9. Συνεπώς, έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.10:

Αν ο x είναι άρρητος, τότε υπάρχει ένας άπειρος αριθμός ρητών κλασμάτων $\frac{p}{q}$, $q > 0,\ (p, q) = 1$, έτσι ώστε $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.

Το Θεώρημα 3.10 αποτελεί την αρχή στην μελέτη της θεωρίας προσέγγισης των άρρητων αριθμών από συγκλίνοντες ρητούς.

3.4.3. Προσέγγιση άρρητων – Παραδείγματα

Παράδειγμα 4. Να δειχθεί ότι τα πρώτα αναγωγήματα του αριθμού e προσεγγίζουν όλο και καλύτερα τον αριθμό.

Λύση: Ο αριθμός e ορίζεται, κατά τα γνωστά, ως: $e = lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ και $e = 2.718282$ η προσέγγισή του στο έκτο δεκαδικό ψηφίο. Άρα, θα πρέπει να υπολογίσουμε τα επτά πρώτα αναγωγήματά του. Στο παράδειγμα 3, υπολογίσαμε τα πέντε πρώτα αναγωγήματα της έκφρασης του συνεχούς κλάσματος του $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \dots]$. Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε το έκτο και το έβδομο αναγώγημα. Οπότε έχουμε αντίστοιχα την ακολουθία των ρητών:

$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \cdots$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.9, παρατηρούμε ότι: $\frac{p_7}{q_7} = \frac{106}{39}$ και συνεπώς θα πρέπει να αληθεύει ότι: $\left| e - \frac{p_7}{q_7} \right| < \frac{1}{{q_7}^2}$, ή $\left| e - \frac{106}{39} \right| < \frac{1}{39^2}$.

Ο αριθμητικός υπολογισμός μας δίνει ότι $e - \frac{106}{39} = 0.00033264\ldots$, το οποίο είναι σαφώς μικρότερο από το $\frac{1}{39^2} = 0.00065746\ldots$.

Παρατηρούμε ότι η τιμή του $e - \frac{106}{39}$ είναι περίπου το μισό του $\frac{1}{39^2}$ και αυτό μας δείχνει ότι το Θεώρημα 3.9 δικαίως θεωρείται ως θεώρημα προσέγγισης.

Παράδειγμα 5. Υπολογισμός των αναγωγημάτων του π και σύγκριση με την δεκαδική του προσέγγιση.

Λύση: Το συνεχές κλάσμα του π είναι: $\pi = [3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,\dots]$. Η δεκαδική του προσέγγιση, στρογγυλοποιώντας στο ένατο δεκαδικό ψηφίο, είναι: $\pi \cong 3.141592654$. Απομονώνοντας το κλάσμα, μετά το δεύτερο, τρίτο και τέταρτο αναγώγημα, είναι: $\pi \cong [3,7] = \frac{22}{7} \cong 3.142857142$,

$\pi \cong [3,7,15] = \frac{333}{106} \cong 3.141509434$,

$\pi \cong [3,7,15,1] = \frac{355}{113} \cong 3.14159292$.

Όσο ο αριθμός των όρων στο συνεχές κλάσμα αυξάνεται, τόσο πιο ακριβή προσέγγιση επιτυγχάνουμε. Επίσης, παρατηρούμε ότι πετύχαμε ακριβή προσέγγιση μέχρι και το 6^{o} δεκαδικό ψηφίο απομονώνοντας μόνο τα 4 πρώτα αναγωγήματα στο συνεχές κλάσμα.

3.5.Επέκταση της θεωρίας προσέγγισης των άρρητων αριθμών

Σε αυτή την ενότητα, έστω a ένας δεδομένος άρρητος αριθμός. Είναι προφανές ότι μπορεί πάντα να ευρεθεί ένα κλάσμα p/q, $(p, q) = 1$ και με q θετικό, που να προσεγγίζει όσο κοντά θέλουμε τον αριθμό a. Με άλλα λόγια, αν ε είναι ένας θετικός αριθμός οσοδήποτε μικρός, μπορούν να ευρεθούν κατάλληλοι αριθμοί p, q πρώτοι μεταξύ τους έτσι ώστε να ισχύει: $| a - \frac{p}{q} | < \varepsilon$.

Στο Θεώρημα 3.10, αποδείξαμε ότι αν a άρρητος, υπάρχει ένας άπειρος αριθμός ανάγωγων ρητών κλασμάτων p/q, $q > 0$, ώστε: $| a - \frac{p}{q} | < \frac{1}{q^2}$. Το παρακάτω θεώρημα τονίζει περαιτέρω το νόημα της παραπάνω ανισότητας. Παρατίθεται εδώ χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 3.11:

Από οποιαδήποτε δύο διαδοχικά αναγωγήματα $\frac{p_n}{q_n}$ και $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ του συνεχούς κλάσματος του a, τουλάχιστον ένα ικανοποιεί την ανισότητα:

$$| a - \frac{p}{q} | < \frac{1}{2q^2}. \qquad (3.14)$$

Επί πλέον, η ανισότητα (3.14) διαθέτει ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον στοιχείο: Αν a είναι ένας οποιοσδήποτε άρρητος και $\frac{p}{q}$ είναι ένα ανάγωγο ρητό κλάσμα με $q \geq 1$, ώστε να ισχύει: $| a - \frac{p}{q} | < \frac{1}{2q^2}$, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι το $\frac{p}{q}$ είναι απαραιτήτως ένα από τα αναγωγήματα της έκφρασης του a σε απλό συνεχές κλάσμα.

3.5.1. Το θεώρημα Hurwitz

Η ανισότητα του Θεωρήματος 3.10 δημιουργεί αυτομάτως το ερώτημα περί καλύτερης προσέγγισης.

Δεδομένου ενός άρρητου αριθμού a, αναζητείται κατάλληλος αριθμός $k > 2$ προκειμένου η ανισότητα:

$$| a - \frac{p}{q} | < \frac{1}{kq^2}, \quad q \geq 1 \qquad (3.15)$$

να έχει άπειρες λύσεις $\frac{p}{q}$. Επίσης, τίθεται το ερώτημα του πόσο μεγάλος μπορεί να είναι αυτός ο αριθμός k.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν το συνεχές κλάσμα του a είναι $[a_1, a_2, \ldots]$ και αν $\frac{p_n}{q_n}$ είναι το αναγώγημα n τάξης, τότε:

$$| a_n - \frac{p_n}{q_n} | < \frac{1}{a_n q_n{}^2}. \qquad (3.16)$$

Έτσι, μπορούμε να έχουμε όλο και καλύτερες προσεγγίσεις για τον αριθμό a αν τα $a_1, a_2, \ldots$ μεγαλώνουν πολύ γρήγορα. Από την άλλη, αν υπάρχουν μικροί αριθμοί στην ακολουθία $a_1, a_2, \ldots$ ανεξάρτητα από το πόσο μακριά προχωράμε, τότε οι ρητές προσεγγίσεις $\frac{p_n}{q_n}$, δεν μπορούν να είναι τόσο καλές για μικρά a_n.

Από την σκοπιά της προσέγγισης, οι πιο «απλοί» αριθμοί είναι οι χειρότεροι με την παρακάτω έννοια: Ο πιο απλός άρρητος αριθμός είναι η χρυσή τομή: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, \ldots] = [\bar{1}]$. Το συνεχές κλάσμα του φ έχει τον μικρότερο δυνατό όρο $(= 1)$ σε καθέναν από τους άπειρους παρονομαστές του και κατά συνέπεια δίνει αναγωγήματα που συγκλίνουν πιο αργά από οποιοδήποτε άλλο συνεχές κλάσμα.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για πολύ μεγάλο n, η έκφραση:

$$| \varphi - \frac{p_n}{q_n} | = | \frac{\sqrt{5} - 1}{2} - \frac{p_n}{q_n} |$$

πλησιάζει όλο και περισσότερο τον αριθμό $\frac{1}{\sqrt{5} q_n{}^2}$.

Οι ανωτέρω παρατηρήσεις μας επιτρέπουν την διατύπωση του παρακάτω θεωρήματος, που απέδειξε πρώτος ο Hurwitz το 1891.

Θεώρημα 3.12 (Hurwitz):

Κάθε άρρητος αριθμός a έχει έναν άπειρο αριθμό ρητών προσεγγίσεων $\frac{p}{q}$ που ικανοποιούν την ανισότητα:

$$| a - \frac{p}{q} | < \frac{1}{\sqrt{5} q^2}. \qquad (3.17)$$

Ο αριθμός $\sqrt{5}$ είναι ο καλύτερος δυνατός. Το θεώρημα δεν θα ήταν αληθές αν αντικαθιστούσαμε στην θέση του οποιονδήποτε άλλο αριθμό, μεγαλύτερό του. Για την ακρίβεια, για κάποιο $k > \sqrt{5}$, υπάρχει μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός $\frac{p}{q}$ ρητών προσεγγίσεων για το a. Ο Niven στο βιβλίο του: *An Introduction to Diophantine Approximations*, παραθέτει μια στοιχειώδη απόδειξη για το ότι το $\sqrt{5}$ είναι η καλύτερη δυνατή επιλογή, υπό αυτή την έννοια.

Μια απόδειξη (μέσω της μεθόδου των συνεχών κλασμάτων) στηρίζεται στο γεγονός ότι στην ανάπτυξη του a τουλάχιστον ένα από κάθε τρία διαδοχικά αναγωγήματα, πέραν του πρώτου, ικανοποιούν την ανισότητα (3.17).

Ωστόσο, ο Hurwitz στην αρχική απόδειξη του θεωρήματος, στηρίχτηκε στις ιδιότητες συγκεκριμένων κλασμάτων, γνωστές και ως **ακολουθίες Farey** (Farey sequences).

Ορισμός: Για κάθε θετικό ακέραιο n, η ακολουθία Farey F_n είναι ένα σύνολο από ρητούς αριθμούς $\frac{a}{b}$ με: $0 \leq a \leq b \leq n$, $(a,b) = 1$, διατεταγμένους κατά αύξουσα σειρά. Οι τέσσερις πρώτες ακολουθίες είναι:

$$F_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1},$$
$$F_2 = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1},$$
$$F_3 = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1},$$
$$F_4 = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}.$$

Αυτές οι ακολουθίες έχουν κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες. Η πιο σπουδαία για την απόδειξη του θεωρήματος είναι: Αν για κάθε n, ο άρρητος αριθμός $b, 0 < b < 1$ βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικά κλάσματα $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ της ακολουθίας F_n, τότε τουλάχιστον ένα από τα τρία κλάσματα: $\frac{p}{q}, \frac{p+r}{q+s}, \frac{r}{s}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην θέση του $\frac{x}{y}$, στην ανισότητα:

$$\left|b - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}y^2}.$$

Προκειμένου αυτή η ανισότητα να ισχύει για κάποιον άρρητο $a > 1$, θέτουμε $b = a - n$, όπου το n είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος, μικρότερος του a. Αντικαθιστώντας το b στην παραπάνω ανισότητα, προκύπτει:

$$\left|a - (n + \frac{x}{y})\right| < \frac{1}{\sqrt{5}y^2}.$$

Αυτή είναι η κεντρική ιδέα στην απόδειξη του Θεωρήματος Hurwitz. Για την πλήρη απόδειξη, παραπέμπουμε στο βιβλίο: *Topics in number theory,* William Judson LeVeque (1956).

Ορισμός: Ένας αριθμός x είναι ισοδύναμος με έναν αριθμό y (συμβολ. $x \sim y$) αν υπάρχουν ακέραιοι a, b, c, d που να ικανοποιούν την συνθήκη:

$$ad - bc = \pm 1,$$

έτσι ώστε: $$x = \frac{ay+b}{cy+d}.$$

Αν ένας πραγματικός a έχει την ακόλουθη έκφραση σε συνεχές κλάσμα:

$a = [a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}]$ τότε από τις σχέσεις:

$$a = \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}} \qquad \text{και} \qquad p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^n$$

συμπεραίνουμε ότι $a \sim a_{n+1}$.

Συνεπώς, αν a και b είναι δύο τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί με εκφράσεις:

$a = [a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}]$, $b = [b_1, b_2, \dots, b_m, b_{m+1}]$,

και αν $a_{n+1} = b_{m+1}$, τότε $a \sim a_{n+1} = b_{m+1} \sim b$, άρα $a \sim b$.

Ειδικότερα, αν δύο ρητοί x, y είναι ισοδύναμοι, τότε οι εκφράσεις τους παίρνουν την μορφή: $x = [a_1, a_2, \dots, a_n, 1]$, $y = [b_1, b_2, \dots, b_m, 1]$,

και επειδή $1 \sim 1 \rightarrow x \sim y$.

Θεώρημα 3.13:

Δύο άρρητοι αριθμοί είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν:

$a = [a_1, a_2, \dots, a_m, c_0, c_1, c_2, \dots]$,

$b = [b_1, b_2, \dots, b_n, c_0, c_1, c_2, \dots]$,

δηλαδή, αν και μόνο αν η ακολουθία των πηλίκων του a μετά το m τάξης πηλίκο είναι ίδια με αυτή των πηλίκων του b μετά το n τάξης πηλίκο.

Μελετώντας, έπειτα από αυτές τις παρατηρήσεις, το Θεώρημα Hurwitz παρατηρούμε ότι υπάρχουν απείρως πολλοί άρρητοι αριθμοί που είναι ισοδύναμοι με το $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ας υποθέσουμε ότι καθένας από αυτούς αναπτύσσεται σε απλό συνεχές κλάσμα. Τότε από το Θεώρημα 3.13, από ένα σημείο και έπειτα, καθεμιά από αυτές τις εκφράσεις θα περιέχει την ίδια ακολουθία υπολοίπων $c_0, c_1, c_2, \dots$ και συνεπώς όλοι αυτοί οι ισοδύναμοι άρρητοι ουσιαστικά παίζουν τον ίδιο ρόλο με το a, στο Θεώρημα Hurwitz.

3.5.2. Γενίκευση του θεωρήματος Hurwitz

Αν αποκλείσουμε τον αριθμό φ και όλους τους άρρητους που είναι ισοδύναμοι, τότε η σταθερά $\sqrt{5}$ μπορεί να αντικατασταθεί από έναν μεγαλύτερο αριθμό.

Το ακόλουθο θεώρημα το αποδεικνύει αυτό.

Θεώρημα 3.14:

Κάθε άρρητος αριθμός b που δεν είναι ισοδύναμος με τον αριθμό φ διαθέτει έναν άπειρο αριθμό ρητών προσεγγίσεων $\frac{p}{q}$ που επαληθεύουν την ανισότητα:

$$|\,b\;-\;\frac{p}{q}\;|\;<\;\frac{1}{\sqrt{8}q^2}. \qquad (3.18)$$

Υπάρχει μια σειρά παρόμοιων θεωρημάτων. Για παράδειγμα, αν το b δεν είναι ισοδύναμο τόσο με το φ όσο και με το $\sqrt{2}$, τότε ο αριθμός $\sqrt{8}$ στην σχέση (3.18) μπορεί να αντικατασταθεί με οποιονδήποτε αριθμό μικρότερο ή ίσο του $\frac{\sqrt{221}}{5}$.

Για αρκετά χρόνια το ενδιαφέρον έχει επικεντρωθεί στις ασύμμετρες ή «μονομερείς» (lop-sided) προσεγγίσεις των αρρήτων αριθμών. Τυπικό παράδειγμα αποτελεί το παρακάτω θεώρημα που απέδειξε ο B.Segre το 1946 και αργότερα ο Ivan Niven μέσω των ακολουθιών Farey.

Θεώρημα 3.15:
Για κάθε πραγματικό αριθμό $r\;\geq\;0$, ένας άρρητος αριθμός a μπορεί να προσεγγιστεί από απείρως πολλές ρητές προσεγγίσεις $\frac{p}{q}$, εις τρόπον ώστε:

$$-\;\frac{1}{\sqrt{1+4r}q^2}\;<\;\frac{p}{q}\;-\;a\;<\;\frac{r}{\sqrt{1+4r}q^2}.$$

(Segre, 1946).
Για $r\;=\;1$, έχουμε το θεώρημα Hurwitz. Για $r\;\neq\;1$, παρατηρούμε ότι το κάτω όριο είναι το αρνητικό του άνω ορίου και η έκφραση είναι ασύμμετρη.
Χρησιμοποιώντας συνεχή κλάσματα, ο R.M.Robinson απέδειξε το Θεώρημα Segre και επίσης απέδειξε ότι για κάθε $\varepsilon\;>\;0$, η ανισότητα:

$$-\;\frac{1}{(\sqrt{5}-\,\varepsilon)q^2}\;<\;\frac{p}{q}\;-\;a\;<\;\frac{1}{(\sqrt{5}+1)q^2},$$

έχει απείρως πολλές λύσεις.

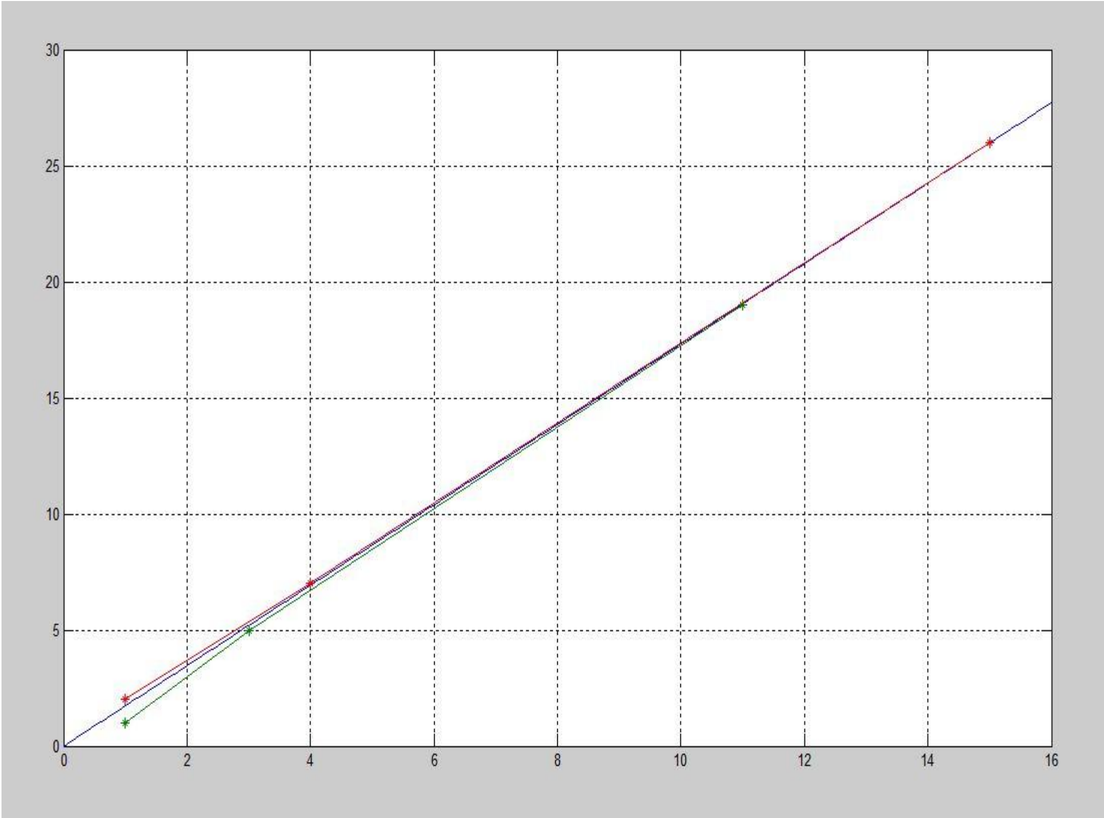
Το θεώρημα Hurwitz αποτελεί ένα παράδειγμα μιας ολόκληρης κατηγορίας θεωρημάτων και προβλημάτων με τον γενικό τίτλο **Διοφαντικές προσεγγίσεις** (Diophantine approximations). Ο τομέας αυτός έχει μακρά ιστορία, ωστόσο πολλά προβλήματα παραμένουν άλυτα. Τα τελευταία χρόνια έχουν επινοηθεί αρκετές νέες μέθοδοι για την επίλυσή τους. Αδιαμφισβήτητα, όμως, για πολύ καιρό ακόμα τα συνεχή κλάσματα θα εξακολουθήσουν να αποτελούν το βασικό εργαλείο για όσους επιθυμούν να ασχοληθούν με αυτόν τον κλάδο των διοφαντικών προσεγγίσεων.

3.6.Γεωμετρική ερμηνεία των συνεχών κλασμάτων

Στα 1897, δόθηκε από τον εξέχοντα μαθηματικό Felix Klein μια εντυπωσιακή γεωμετρική ερμηνεία του τρόπου με τον οποίο τα αναγωγήματα του συνεχούς κλάσματος ενός άρρητου αριθμού συγκλίνουν στην τιμή αυτού του αριθμού.

Έστω a ένας άρρητος αριθμός και έστω η ανάπτυξή του: $[a_1, a_2, \ldots]$ και τα αναγωγήματά του $c_1 = \frac{p_1}{q_1}, c_2 = \frac{p_2}{q_2}, \ldots$.

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, αρχικά σχεδιάζουμε την ευθεία $y = ax$, η οποία δεν περνάει από σημεία με ακέραιες συντεταγμένες διότι τότε $a = \frac{y}{x}$ θα ήταν ρητός αριθμός. Έπειτα υπολογίζουμε τα αναγωγήματα του a, για παράδειγμα του $a = \sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots]$. Τα αναγωγήματα είναι: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \ldots$. Τα σημεία $(q_1, p_1), (q_3, p_3), (q_5, p_5), \ldots$ που βρίσκονται κάτω από την γραφική παράσταση $y = \sqrt{3}x$, περιγράφουν, αντίστοιχα, τα περιττά αναγωγήματα $c_1, c_3, c_5, \ldots$ και είναι όλα μικρότερα από το $\sqrt{3}$. Ανάλογα, τα σημεία $(q_2, p_2), (q_4, p_4), (q_6, p_6), \ldots$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση, περιγράφουν τα $c_2, c_4, c_6, \ldots$ και είναι όλα μεγαλύτερα από το $\sqrt{3}$. Παρατηρούμε πως αν ενώσουμε με μια ευθεία τα $(q_1, p_1), (q_3, p_3), (q_5, p_5), \ldots$ και με μία άλλη ευθεία τα $(q_2, p_2), (q_4, p_4), (q_6, p_6), \ldots$ σχηματίζονται αντίστοιχα δύο πολυγωνικές γραμμές που προσεγγίζουν όλο και καλύτερα την $y = \sqrt{3}x$. Το ακόλουθο σχήμα απεικονίζει την $y = \sqrt{3}x$ καθώς και τις δύο πολυγωνικές γραμμές που ενώνουν τα αναγωγήματα.


30
25
20
15
10
5
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16

3.7. Εκφράσεις υπερβατικών αριθμών - Αριθμοί Fibonacci – Χρυσή τομή

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου, είναι εξαιρετικά δύσκολο να αποδειχθεί η υπερβατικότητα ενός αριθμού και να υπολογιστεί η έκφρασή του σε συνεχές κλάσμα. Ωστόσο, έχουν υπολογιστεί προσεγγιστικά οι εκφράσεις κάποιων υπερβατικών αριθμών σε απλά και μη απλά συνεχή κλάσματα.

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cdots}}}}.$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cdots}}}}}}}}.$$

$$e^{\pi} = 23 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{591+\cdots}}}}}}$$

$$2^{\sqrt{2}} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{72+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}}}.$$

$$\tan x = \cfrac{1}{\frac{1}{x}-\cfrac{1}{\frac{3}{x}-\cfrac{1}{\frac{5}{x}-\cfrac{1}{\frac{7}{x}-\ldots}}}} = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cdots}}}}.$$

$$\sin x = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{(2\cdot 3-x^2)+\cfrac{2\cdot 3x^2}{(4\cdot 5-x^2)+\cfrac{4\cdot 5x^2}{(6\cdot 7-x^2)+\ldots}}}}.$$

Επισημαίνουμε ότι στις εκφράσεις των $\sin x$ και $\tan x$ ο x είναι μη μηδενικός αλγεβρικός αριθμός προκειμένου η έκφραση να είναι άρρητος αριθμός.

Η απλούστερη μορφή άπειρου συνεχούς κλάσματος είναι:

$\tau = [1, 1, 1, 1, \ldots]$,

με το τ να ικανοποιεί την εξίσωση:

$\tau = 1 + 1/\tau$ ή $\tau^2 - \tau - 1 = 0$, η οποία έχει θετική ρίζα την: $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Τα αναγωγήματα του τ είναι:

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$ (3.19) με τους αριθμητές και τους παρονομαστές να σχηματίζονται από την ακολουθία ακεραίων: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$.

Καθένας από αυτούς τους αριθμούς, μετά τους δύο πρώτους, ισούται με το άθροισμα των δύο προηγούμενων, δηλαδή, $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, κ.ο.κ. Οι αριθμοί της σχέσης (3.20) είναι γνωστοί και ως **αριθμοί Fibonacci** και πήραν το όνομα τους από τον σπουδαίο μαθηματικό του 13ου αιώνα, Leonardo Fibonacci, παρόλο που δεν ήταν ο πρώτος που τους χρησιμοποίησε. Με μαθηματικούς όρους, η ακολουθία F_n των αριθμών Fibonacci ορίζεται από την αναδρομική σχέση:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1.$$

Οι αρχαίοι Έλληνες υποστήριζαν πως οι δημιουργίες της φύσης και της τέχνης οφείλουν την αρτιότητά τους σε μαθηματικά μοτίβα. Ένα από αυτά είναι ο νόμος της **χρυσής τομής**. Στην γεωμετρία, προκύπτει από την αποκαλούμενη και ως την «πιο αρμονική» διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος από AB από ένα σημείο C. Η μέθοδος επιτυγχάνεται επιλέγοντας σημείο C έτσι ώστε η αναλογία των τμημάτων a και b είναι ίση με αυτή των τμημάτων b προς όλο το ευθύγραμμο τμήμα $a + b$, δηλαδή:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$, ή $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} + 1$. Έστω $x = \frac{1}{x} + 1 = x^2 - x - 1 = 0$, έτσι ώστε:

$x = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = \tau$. Ουσιαστικά, ένα ευθύγραμμο τμήμα θεωρείται ότι έχει διαιρεθεί σύμφωνα με την χρυσή τομή όταν το ένα κομμάτι του είναι τ φορές το άλλο. Το σχήμα που ακολουθεί παριστάνει ένα ευθύγραμμο τμήμα AB που έχει διαιρεθεί σύμφωνα με την χρυσή τομή.

$\leftarrow \quad a \quad \rightarrow | \leftarrow \quad b \quad \rightarrow |$

A____________C__________________B

Κεφάλαιο 4

Διοφαντικές εξισώσεις – Εξίσωση Pell

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την βασική θεωρία των διοφαντικών εξισώσεων και θα εμβαθύνουμε σε μια ειδική κατηγορία απροσδιόριστης εξίσωσης, γνωστής και ως **εξίσωση Pell**, $x^2 - Ny^2 = 1$, όπου τα x και y είναι άγνωστοι ακέραιοι αριθμοί και το N είναι δεδομένος ακέραιος, όχι τέλειο τετράγωνο.

4.1.Βασικοί ορισμοί

Μία **απροσδιόριστη εξίσωση** (indeterminate equation) είναι μια εξίσωση που δεν μπορεί να λυθεί με τις δοθείσες πληροφορίες. Ουσιαστικά, είναι μια εξίσωση για την οποία υπάρχει απειρία λύσεων. **Διοφαντική εξίσωση** ονομάζεται μια απροσδιόριστη πολυωνυμική εξίσωση που δέχεται μόνο ακέραιες ρίζες. Η ονομασία προέρχεται από τον Διόφαντο, Έλληνα μαθηματικό του 3ου αιώνα που έζησε στην Αλεξάνδρεια, ο οποίος μελέτησε τέτοιου είδους εξισώσεις και ήταν από τους πρώτους μαθηματικούς που εισήγαγε συμβολισμούς στην άλγεβρα.

Για παράδειγμα, η: $ax + by = 1$ είναι μια γραμμική διοφαντική εξίσωση. Μια γενικευμένη μορφή της είναι: $x^n + y^n = z^n$. Για $n = 2$, έχουμε απειρία λύσεων (x, y, z), τις λεγόμενες **Πυθαγόρειες τριάδες** (Pythagorean triples), ενώ για $n > 2$, το **Τελευταίο Θεώρημα του Fermat** ισχυρίζεται πως δεν μπορούν να ευρεθούν θετικές ακέραιες ρίζες που να ικανοποιούν το πρόβλημα. Το θεώρημα αυτό αποδείχθηκε το 1994 από τον Βρετανό μαθηματικό Andrew Wiles.

Στο 10ο από τα 23 περίφημα προβλήματά του, ο Hilbert έθεσε το ερώτημα αν υπάρχει ένας αλγόριθμος που να καθορίζει αν μια αυθαίρετη Διοφαντική εξίσωση έχει λύση. Ο Yuri Matiyasevich το 1970 απέδειξε πως στην γενική τους μορφή τα διοφαντικά προβλήματα δεν μπορούν να λυθούν.

Οι **γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις** είναι εξισώσεις της μορφής: $ax + by = c$. Αν το c είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης, των a, b τότε η **ταυτότητα Bezout**, από όπου ισχύει ότι: αν $d = (a, b)$, τότε υπάρχουν ακέραιοι x,y έτσι ώστε $ax + by = d$, μας πληροφορεί ότι η εξίσωση έχει άπειρο αριθμό λύσεων, που μπορούν να ευρεθούν εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Ευκλείδη. Έπεται ότι υπάρχει απειρία λύσεων ακόμα και αν το c είναι πολλαπλάσιο του μέγιστου κοινού διαιρέτη των a και b. Αν το c δεν είναι πολλαπλάσιο αυτού, τότε η Διοφαντική εξίσωση δεν έχει λύσεις. Η πρώτη λύση για αυτού του είδους την εξίσωση δόθηκε από τον Ινδό μαθηματικό Brahmagupta.

Αν στην Διοφαντική εξίσωση εμφανίζονται επιπλέον μεταβλητές ως εκθέτες, η εξίσωση καλείται **εκθετική Διοφαντική εξίσωση**. Ένα παράδειγμα αποτελεί η εξίσωση Ramanujan – Nagell: $2^n - 7 = x^2$. Αυτού του είδους οι εξισώσεις δεν έχουν κάποια γενική θεωρία για την επίλυση τους.

Μια ειδική κατηγορία διοφαντικών εξισώσεων 2ης τάξης έχουν την μορφή:

$$x^2 - Ny^2 = +1, \qquad (4.1)$$

με N έναν θετικό ακέραιο, όχι τέλειο τετράγωνο και x, y άγνωστους ακέραιους. Αυτής της μορφής οι εξισώσεις είναι γνωστές και ως **εξισώσεις Pell**, παρόλο που ο ίδιος δεν συνέβαλε προσωπικά στην επίλυσή τους. Για την ακρίβεια, ο Fermat ήταν ο πρώτος που ισχυρίστηκε ότι η εξίσωση (4.1) δέχεται απείρως πολλές λύσεις. Ο λόρδος Brouncker την ίδια χρονιά έδωσε μια συστηματική μέθοδο για την επίλυσή της. Η πρώτη ολοκληρωμένη συζήτηση περί του θέματος δόθηκε από τον Lagrange στα 1766 περίπου.

4.2.Η εξίσωση Pell, $\mathbf{x^2 - Ny^2 = \pm 1}$

Στην παρούσα ενότητα, θα διερευνήσουμε την επίλυση της εξίσωσης του Pell,

$$x^2 - Ny^2 = 1, \qquad (4.2)$$

με $N > 0$ και x, y τις άγνωστες ποσότητες. Υποθέτουμε ότι το N δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Διαφορετικά, θα ήταν: $x^2 - (\sqrt{N}y)^2 = 1$, που ισχύει μόνο στην περίπτωση: $(\pm 1)^2 - 0^2$.

Ουσιαστικά, αυτό που πρέπει να γνωρίζουμε για την επίλυση, είναι η ανάπτυξη του $\sqrt{N}$ σε συνεχές κλάσμα.

4.2.1. Το συνεχές κλάσμα του $\sqrt{N}$

Αν a τετραγωνικός άρρητος, με $a > 1$ και τον συζυγή του να βρίσκεται ανάμεσα στο -1 και το 0, τότε το a ανήκει σε μια ειδική κατηγορία τετραγωνικών άρρητων που ονομάζονται **μειούμενοι τετραγωνικοί άρρητοι** (reduced quadratic irrationals). O Galois απέδειξε πως το συνεχές κλάσμα των μειούμενων τετραγωνικών άρρητων σε είναι απόλυτα περιοδικό.

Αν $N > 0$ είναι ένας ακέραιος, όχι τέλειο τετράγωνο, η ανάπτυξη του $\sqrt{N}$ σε συνεχές κλάσμα έχει μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα μορφή. Αρχικά, παρατηρούμε ότι $\sqrt{N} > 1$ και έτσι ο συζυγής του, -$\sqrt{N}$ δεν μπορεί να βρίσκεται ανάμεσα στο -1 και το 0, άρα το $\sqrt{N}$ δεν μπορεί να είναι μειούμενος τετραγωνικός άρρητος. Έτσι, η έκφραση του:

$$\sqrt{N} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \dots}}} \quad (4.3)$$

δεν μπορεί να είναι απόλυτα περιοδική. Από την άλλη, αφού το a_1 είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος του $\sqrt{N}$, τότε ο αριθμός: $\sqrt{N} + a_1 > 1$ και άρα ο συζυγής του, $-\sqrt{N} + a_1$ βρίσκεται ανάμεσα στο -1 και το 0, άρα το $\sqrt{N} + a_1$ είναι μειούμενο. Προσθέτοντας το a_1 και στα δύο μέλη της (4.3), έχουμε:

$$\sqrt{N} + a_1 = 2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}},$$

και αφού αυτή η ανάπτυξη είναι απόλυτα περιοδική, πρέπει να έχει την μορφή:

$$a = \sqrt{N} + a_1 = 2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}}}}. \quad (4.4)$$

Συνεπώς, η ανάπτυξη για το $\sqrt{N}$ είναι:

$$\sqrt{N} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}}} = [a_1, \overline{a_2, a_3, \dots, a_n, 2a_1}], \quad (4.5)$$

όπου η περίοδος ξεκινά μετά τον πρώτο όρο και τελειώνει με τον όρο $2a_1$.

Για παράδειγμα, $\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$, $\sqrt{32} = [5, \overline{1, 1, 1, 10}]$.

Επιπλέον, αν εξαιρέσουμε τον όρο $2a_1$, το περιοδικό κομμάτι στα απόλυτα περιοδικά συνεχή κλάσματα είναι πάντα συμμετρικό. Τα συμμετρικά μέρη μπορεί να έχουν ένα κεντρικό όρο, ή και όχι.

Για την διερεύνηση του συμμετρικού μέρους, τονίζουμε πως αν $a = \sqrt{N} + a_1$ και $a' = -\sqrt{N} + a_1$, τότε η ανάπτυξη του -$\frac{1}{a'}$ είναι ίδια με αυτήν του a, αλλά με την περίοδο αντεστραμμένη. Συνεπώς, έχουμε:

$$-\frac{1}{a'} = \frac{1}{\sqrt{N} - a_1} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \dots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{2a_1 + \dots}}}. \qquad (4.6)$$

Επίσης, από την σχέση (4.5) εύκολα βρίσκεται η ανάπτυξη για το: $(\sqrt{N} - a_1)^{-1}$. Αφαιρώντας και από τα δύο μέλη της εξίσωσης το a_1, προκύπτει:

$$\sqrt{N} - a_1 = 0 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}}}}.$$

Αντιστρέφοντας την έκφραση, είναι:

$$\frac{1}{\sqrt{N} - a_1} = a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}}}. \qquad (4.7)$$

Ωστόσο, γνωρίζουμε πως οι εκφράσεις σε απλά συνεχή κλάσματα με θετικούς όρους είναι μοναδικές. Συγκρίνοντας, λοιπόν, τις σχέσεις (4.6) και (4.7) συμπεραίνουμε ότι: $a_n = a_2,\ a_{n-1} = a_3, \dots, a_3 = a_{n-1},\ a_2 = a_n$.

Έπεται ότι το συνεχές κλάσμα για το $\sqrt{N}$, απαραίτητα, έχει την μορφή:

$$\sqrt{N} = [a_1, \overline{a_2, a_3, a_4, \dots, a_4, a_3, a_2, 2a_1}].$$

4.2.2. Επίλυση της εξίσωσης Pell, $\mathbf{x^2 - Ny^2 = \pm 1}$

Από την Ενότητα 4.2.1, γνωρίζουμε ότι:

$$\sqrt{N} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}, \qquad (4.8)$$

με $a_{n+1} = 2a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots} = \sqrt{N} + a_1$. (4.9)

Είναι γνωστό ότι:

$$\sqrt{N} = \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}}, \qquad (4.10)$$

όπου τα $p_n,\ p_{n-1},\ q_n,\ q_{n-1}$ υπολογίζονται από τα αναγωγήματα n και $n-1$ τάξης, αντίστοιχα, που βρίσκονται ακριβώς πριν τον όρο $2a_1$ στην σχέση (4.8).

Από τις σχέσεις (4.9) και (4.10), προκύπτει:

$$\sqrt{N} = \frac{(\sqrt{N} + a_1)p_n + p_{n-1}}{(\sqrt{N} + a_1)q_n + q_{n-1}} = \sqrt{N}(\sqrt{N} + a_1)q_n + q_{n-1}\sqrt{N} = (\sqrt{N} + a_1)p_n + p_{n-1}$$

$$= Nq_n + (a_1q_n + q_{n-1})\sqrt{N} = (a_1p_n + p_{n-1}) + p_n\sqrt{N}.$$

Η ανωτέρω σχέση είναι μια εξίσωση της μορφής:

$a + b\sqrt{N} = c + d\sqrt{N}$, όπου τα a, b, c, d είναι ακέραιοι και το $\sqrt{N}$ άρρητος, άρα θα πρέπει $a = c$ και $b = d$.

Συνεπώς, στην δοθείσα εξίσωση θα πρέπει να ισχύει:

$$Nq_n = a_1 p_n + p_{n-1} \quad \text{και} \quad a_1 q_n + q_{n-1} = p_n. \tag{4.11}$$

Επιλύοντας ως προς p_{n-1} και q_{n-1}, προκύπτει:

$$p_{n-1} = Nq_n - a_1 p_n \quad \text{και} \quad q_{n-1} = p_n - a_1 q_n. \tag{4.12}$$

Από Θεώρημα 2.3, ισχύει: $p_i \cdot q_{i-1} - p_{i-1} \cdot q_i = (-1)^i$,

- ⇨ $p_n(p_n - a_1 q_n) - q_n(Nq_n - a_1 p_n) = (-1)^n$,
- ⇨ $p_n{}^2 - Nq_n{}^2 = (-1)^n$. (4.13)

Αν το n είναι άρτιος αριθμός, η εξίσωση (4.13) γίνεται:

$p_n{}^2 - Nq_n{}^2 = (-1)^n = 1$,

άρα μια λύση της εξίσωσης Pell, $x^2 - Ny^2 = 1$, είναι: $x_1 = p_n$, $y_1 = q_n$.

Αν το n είναι περιττός, τότε η (4.13) είναι:

$p_n{}^2 - Nq^2{}_n = (-1)^n = -1$,

και μια λύση της $x^2 - Ny^2 = -1$, είναι: $x_1 = p_n$, $y_1 = q_n$.

Αν το n είναι περιττός και αναζητούμε λύση της $x^2 - Ny^2 = 1$, εξετάζουμε την ανάπτυξη του $\sqrt{N}$, συγκεκριμένα μετά την δεύτερη εμφάνιση του όρου a_n, οπότε και διπλασιάζεται η περίοδος. Παρατηρούμε ότι:

$$\sqrt{N} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \ldots}}}}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \ldots \cfrac{1}{a_{2n} + \cfrac{1}{a_{2n+1} + \ldots}}}}}},$$

ούτως ώστε όταν ξαναεμφανίζεται ο όρος a_n να είναι ουσιαστικά ο όρος a_{2n}.

Τότε: $p_{2n}{}^2 - Nq_{2n}{}^2 = (-1)^n = 1$, και άρα: $x_1 = p_{2n}$, $y_1 = q_{2n}$ αποτελούν μια λύση της $x^2 - Ny^2 = 1$.

Ο πίνακας 1 παρουσιάζει ζεύγη λύσεων της εξίσωσης: $x^2 - Ny^2 = \pm 1$, για διάφορες τιμές του N

N	Συνεχές κλάσμα του $\sqrt{N}$	x_1	y_1	${x_1}^2 - N{y_1}^2$
2	$[1, \overline{2}]$	1	1	-1
3	$[1, \overline{1, 2}]$	2	1	+1
5	$[2, \overline{4}]$	2	1	-1
6	$[2, \overline{2, 4}]$	5	2	+1
7	$[2, \overline{1, 1, 1, 4}]$	8	3	+1
8	$[2, \overline{1, 4}]$	3	1	+1
10	$[3, \overline{6}]$	3	1	-1
11	$[3, \overline{3, 6}]$	10	3	+1
12	$[3, \overline{2, 6}]$	7	2	+1
13	$[3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$	18	5	-1
14	$[3, \overline{1, 2, 1, 6}]$	15	4	+1
15	$[3, \overline{1, 6}]$	4	1	+1
17	$[4, \overline{8}]$	4	1	-1
18	$[4, \overline{4, 8}]$	17	4	+1
19	$[4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$	170	39	+1
20	$[4, \overline{2, 8}]$	9	2	+1
21	$[4, \overline{1, 1, 2, 1, 1, 8}]$	55	12	+1
22	$[4, \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}]$	197	42	+1
23	$[4, \overline{1, 3, 1, 8}]$	24	5	+1
24	$[4, \overline{1, 8}]$	5	1	+1
26	$[5, \overline{10}]$	5	1	-1
27	$[5, \overline{5, 10}]$	26	5	+1

Πίνακας 1

Από τον Πίνακα 1 συμπεραίνουμε ότι πάντα υπάρχει η δυνατότητα εύρεσης λύσης της ${x_1}^2 - N{y_1}^2 = 1$ και μερικές φορές και της ${x_1}^2 - N{y_1}^2 = -1$. Όμως, δεν μπορούν να λυθούν όλες οι εξισώσεις της τελευταίας μορφής.

4.2.3. Παραδείγματα επιλύσιμων εξισώσεων Pell

Παράδειγμα 6. Να ευρεθεί μια μερική λύση της εξίσωσης: $x^2 - 24y^2 = 1$.

Λύση: Έχουμε $N = 24$ άρα από τον Πίνακα 1 είναι $\sqrt{24} = [4, \overline{1, 8}] = [a_1, \overline{a_2, 2a_1}]$ και συνεπώς: $a_2 = a_n \rightarrow n = 2$, άρτιος αριθμός. Εύκολα υπολογίζουμε το αναγώγημα δεύτερης τάξης, $c_2 = \frac{5}{1}$, συνεπώς: $x_1 = p_2 = 5$ και $y_1 = q_2 = 1$ και

${x_1}^2 - 24{y_1}^2 = 25 - 24 \cdot 1 = 1$, άρα το ζευγάρι λύσεων $x_1 = 5$, $y_1 = 1$ είναι μια μερική λύση της δοθείσας εξίσωσης.

Παράδειγμα 7. Να ευρεθεί μια μερική λύση της εξίσωσης: $x^2 - 13y^2 = 1$.

Λύση: Έχουμε $N = 13$ και από τον Πίνακα 1 είναι $\sqrt{13} = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}] =$

$[a_1, \overline{a_2, a_3, a_4, a_5, 2a_1}]$. Άρα, $a_5 = a_n \rightarrow n = 5$, περιττός αριθμός. Τα πέντε πρώτα αναγωγήματα είναι: $\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{18}{5} = \frac{p_5}{q_5}$. Συνεπώς, $x_1 = p_5 = 18$ και $y_1 = q_5 = 5$ και ${x_1}^2 - 13{y^2}_1 = 324 - 13 \cdot 25 = -1$ και όχι $+1$ άρα προχωράμε στους όρους μετά τον διπλασιασμό της περιόδου. Προκύπτουν τα αναγωγήματα:

$\frac{119}{33}, \frac{137}{38}, \frac{256}{71}, \frac{393}{109}, \frac{649}{180} = \frac{p_{10}}{q_{10}}$. Άρα, για $x_1 = p_{10} = 649$ και $y_1 = q_{10} = 180$, είναι:

${x_1}^2 - 13{y_1}^2 = 421201 - 13 \cdot 180^2 = 1$.

4.3.Μέθοδοι για γενική επίλυση της εξίσωσης Pell

Η μέθοδος που περιγράφηκε στην Ενότητα 4.2.2 παρέχει τις ελάχιστες δυνατές λύσεις για την εξίσωση Pell. Είναι δυνατό να ευρεθούν όλες οι υπόλοιπες θετικές λύσεις της εξίσωσης, όπως υποδεικνύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

Θεώρημα 4.1:

Αν (x_1, y_1) είναι η ελάχιστη θετική ρίζα της $x^2 - Ny^2 = 1$, τότε όλες οι υπόλοιπες θετικές ρίζες μπορούν να βρεθούν από την εξίσωση:

$$x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (4.14)$$

Οι τιμές των x_n, y_n προκύπτουν από την σχέση (4.13) αναπτύσσοντας τον όρο $(x_1 + y_1\sqrt{N})^n$, σύμφωνα με το διωνυμικό θεώρημα. Δηλαδή,

$$(x_1 + y_1\sqrt{N})^n = \binom{n}{0}{x_1}^n + \binom{n}{1}{x_1}^{n-1} y_1\sqrt{N} + \ldots + \binom{n}{n-1}x_1\left(y_1\sqrt{N}\right)^{n-1} + \binom{n}{n}\left(y_1\sqrt{N}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} {x_1}^k\left(y_1\sqrt{N}\right)^{n-k}.$$

Έστω τα x_n,y_n που έχουν υπολογιστεί από την σχέση (4.13). Τότε: ${x_n}^2 - N{y_n}^2 = 1$. Από ισότητα (4.14) είναι:

$$x_n + y_n\sqrt{N} = \left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)\ldots\left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right).$$

Αφού ο συζυγής του γινομένου είναι το γινόμενο των συζυγών, προκύπτει:

$$x_n + y_n\sqrt{N} = \left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)\ldots\left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right) = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n. \qquad (4.15)$$

Παραγοντοποιώντας το ${x_n}^2 - N{y_n}^2$ και μέσω των σχέσεων (4.14) και (4.15), ισχύει:

$${x_n}^2 - N{y_n}^2 = (x_n + y_n\sqrt{N})\left(x_n - y_n\sqrt{N}\right) = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n(x_1 - y_1\sqrt{N})^n = {x_1}^2 - N{y_1}^2 = 1.$$

Συνεπώς, τα x_n και y_n αποτελούν λύσεις της $x^2 - Ny^2 = 1$.

Παράδειγμα 8. Στο παράδειγμα 6 της ενότητας 4.2.1, η ελάχιστη λύση της εξίσωσης $x^2 - 24y^2 = 1$ είναι η $(5, 1)$. Μια δεύτερη λύση μπορεί να ευρεθεί θέτοντας $n = 2$ στην σχέση (4.13). Άρα, $x_2 + y_2\sqrt{24} = (5 + 1\sqrt{24})^2 = 49 + 10\sqrt{24}$ και συνεπώς: $(x_2, y_2) = (49, 10)$ διότι $(49)^2 - 24(10)^2 = 1$.

Θεώρημα 4.2:

Υποθέτουμε ότι η $x^2 - Ny^2 = -1$ είναι επιλύσιμη και έστω (x_1, y_1) η ελάχιστη θετική λύση. Τότε όλες οι υπόλοιπες θετικές ρίζες (x_n, y_n) υπολογίζονται μέσω της εξίσωσης:

$x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + \sqrt{N}\, y_1)^n, \;\; n = 1, 3, 5, 7, \ldots$ (4.16)

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις ίδιες τιμές (x_1, y_1), όλες οι θετικές λύσεις της

$x^2 - Ny^2 = 1$ δίνονται από την σχέση:

$x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + \sqrt{N}\, y_1)^n, \;\; n = 2, 4, 6, \ldots$ (4.17)

Παράδειγμα 9. Σύμφωνα με τον Πίνακα 1, $(x_1, y_1) = (10, 3)$ είναι η ελάχιστη θετική ρίζα της: $x^2 - 11y^2 = 1$. Μια δεύτερη λύση βρίσκεται από την σχέση (4.17) για $n = 2$.

- ⇨ $x_2 - \sqrt{11}y_2 = (10 + 3\sqrt{11})^2 = 199 + 60\sqrt{11}.$
- ⇨ $(x_2, y_2) = (199, 60)$ διότι $199^2 - 11 \cdot 60^2 = 1.$

Για επιπλέον μελέτη της επίλυσης της εξίσωσης Pell, παραπέμπουμε στην εργασία του H. W. Lenstra Jr. (2002), *Solving the Pell Equation*.

Συνοψίζοντας αυτή την ενότητα, τονίζουμε πως η μελέτη της εξίσωσης:

$x^2 - Ny^2 = \pm 1$ αποτελεί μια ειδική περίπτωση της γενικευμένης διοφαντικής εξίσωσης 2ου βαθμού:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

όπου τα A, B, C, D, E και F είναι ακέραιοι και x, y οι άγνωστοι. Με την μέθοδο της αντικατάστασης, οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης (εάν υπάρχουν), εξαρτώνται από τις λύσεις μια εξίσωσης του τύπου: $x^2 - Ny^2 = M$. Αυτό περιλαμβάνει εκτεταμένη μελέτη. Στην παρούσα εργασία θα αρκεστούμε στην απλοποιημένη μορφή.

4.4. Η εξίσωση $\mathbf{x^2 - 3y^2 = -1}$ δεν έχει ακέραιες λύσεις

Για να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - 3y^2 = -1$ δεν έχει λύση στο σύνολο των ακεραίων, παρατηρούμε αρχικά ότι οι x, y δεν μπορούν ταυτόχρονα να είναι άρτιοι ή περιττοί. Για την πρώτη περίπτωση, αν και οι δύο αριθμοί είναι άρτιοι ακέραιοι, δηλαδή: $x = 2x_1$ και $y = 2y_1$, τότε:

$x^2 - 3y^2 = 4({x_1}^2 - 3{y_1}^2)$ που είναι ένας άρτιος αριθμός και συνεπώς δεν μπορεί να ισούται με -1.

Ομοίως, αν και οι δύο αριθμοί είναι περιττοί ακέραιοι, δηλαδή: $x = 2x_1 + 1$ και $y = 2y_1 + 1$, τότε:

$$x^2 - 3y^2 = (2x_1 + 1)^2 - 3(2y_1 + 1)^2 = 2(2{x_1}^2 - 6{y_1}^2 + 2x_1 - 6y_1 - 1)$$

που είναι πάλι ένας άρτιος αριθμός και δεν μπορεί να ισούται με -1.

Συμπεραίνουμε ότι για να έχει ακέραιες λύσεις η εξίσωση, θα πρέπει ο x να είναι άρτιος και ο y περιττός ή το ανάποδο.

Έστω ο x άρτιος και ο y περιττός, δηλαδή $x = 2x_1$ και $y = 2y_1 + 1$.

$$\Rightarrow \; y^2 = 4{y_1}^2 + 4y_1 + 1 = 4y_1(y_1 + 1) + 1, \qquad (4.18)$$

Αφού οι y_1, $y_1 + 1$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι, θα πρέπει ένας από τους δύο, έστω ο y_1, να είναι άρτιος.

Άρα, ο $y_1(y_1 + 1)$ διαιρείται με το 2. Άρα, ο $4y_1(y_1 + 1)$ διαιρείται με το 8 και από την (4.17), καταλήγουμε στο ότι: $y^2 = 8n - 1$, με n ακέραιο. Τότε,

$$x^2 - 3y^2 = (2x_1)^2 - 3(8n + 1) = 4{x_1}^2 - 24n - 3$$
$$= 4({x_1}^2 - 6n - 1) + 1 = 4m + 1.$$

Αλλά ένας ακέραιος της μορφής $4m + 1$ δεν μπορεί να ισούται με -1. Αν αυτό συνέβαινε, τότε $4m = -2$, δηλαδή $m = -1/2$ που δεν είναι ακέραιος. Όμοια, αποδεικνύεται πως η εξίσωση δεν επιλύεται αν x περιττός και ο y άρτιος. Συνεπώς, δεν υπάρχει λύση της $x^2 - 3y^2 = -1$ στο σύνολο των ακεραίων.

Στην ουσία, όταν το N είναι τέτοιο ώστε $N - 3$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4, η εξίσωση: $x^2 - Ny^2 = -1$ δεν έχει λύση. Από την άλλη, αν $N = p$, με p πρώτο αριθμό της μορφής: $4k + 1$, η εξίσωση: $x^2 - py^2 = -1$ έχει πάντα λύση.

Η τελευταία εξίσωση συνδέεται στενά με ένα διάσημο θεώρημα που διατυπώθηκε από τον Fermat το 1640 και αποδείχθηκε από τον Euler το 1754. Εδώ παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.3 (Fermat, Euler):

Κάθε πρώτος αριθμός p της μορφής $4k + 1$, μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα δύο τετραγώνων και αυτή η αναπαράσταση είναι μοναδική. Δηλαδή, υπάρχει ένα και μοναδικό ζευγάρι ακεραίων A και B, ώστε: $p = A^2 + B^2$.

Επίλογος

Με την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας, είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε την βασική θεωρία του κλάδου των συνεχών κλασμάτων. Ασχοληθήκαμε με την ανάπτυξη των πραγματικών αριθμών σε συνεχή κλάσματα και εστιάσαμε ιδιαίτερα στην θεωρία προσέγγισης των άρρητων από συνεχή κλάσματα. Επιπλέον, μελετήσαμε πως εφαρμόζονται τα συνεχή κλάσματα στην επίλυση διοφαντικών εξισώσεων.

Βιβλιογραφία

Έντυπη :

[1], C.D. Olds, *Continued Fractions*, Random House, NY (1963).

[2], A.Y. Khinchin, *Continued Fractions*, University of Chicago Press (1964).

[3], John D. Barrow, *Chaos in Numberland: The secret life of continued fractions* (2000).

[4], Thomas Koshy, *Elementary number theory with applications*, Amsterdam, London, Elsevier Academic (2007).

[5], J. Steinig, *Aproof of Lagrange's theory on periodic continued fractions*, Arch. Math., Vol. 59, 21-23 (1992).

[6], Πουλάκης Μ. Δημήτριος, *Θεωρία αριθμών: Μια σύγχρονη θεώρηση της κλασσικής θεωρίας αριθμών* (1997).

[7], Mohamed Mkaouar, *Continued Fractions of Transcendental Numbers*, Τεύχος 45, Δελτίο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας (2001).

[8], Gerard P. Michon, Ph. D., *Continued Fractions*, ©2000 – 2011.

[9], L. Zippin, *Uses of infinity*, (1962).

[10], William Judson Leveque, *Topics in number theory*, (1956).

[11], H. W. Lenstra Jr., *Solving the Pell Equation*, (2002).

Ηλεκτρονική :

[12], A. Bogomolny, Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles *from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles.*

[13], *http://planetmath.org*.

[14], http://*archives.math.utk.edu*.

[15], *www.maths.surrey.ac.uk.*

[16], http://*mathworld.wolfram.com*.

[17], http://*mpec.sc.mahidol.ac.th*.

[18], http://*jwilson.coe.uga.edu*.

[19], *http://www.math.uoc.gr.*

[20], *http://mpla.math.uoa.gr*.

[21], *http://www.ams.org*.

[22], http://*math.overflow.net*.

[23], *http://sprott.physics.wisc.edu*.

[24], http://*journals.cambridge.org*.

[25], *http://en.wikipedia.org*.