

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Ο χαοτικός ελκυστής ενός τρισδιάστατου δυναμικού  
συστήματος Lotka-Volterra και η σχέση του με την διαδικασία  
της τοπολογικής χειρουργικής**

Αντωνίου Ευστάθιος

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:  
Σ. Λαμπροπούλου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια (**επιβλέπουσα**)  
Ε. Αγγελόπουλος, Καθηγητής  
Δ. Τζανετής, Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα Ιούλιος 2005

## Εισαγωγή

Ο στόχος αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η σύνδεση του χαοτικού ελκυστή που εμφανίζεται ως λύση σ' ένα γενικευμένο τρισδιάστατο σύστημα Lotka-Volterra με τη δισδιάστατη χειρουργική διαδικασία της τοπολογίας.

Η εργασία χωρίζεται σε τρεις θεματικές ενότητες.

Η πρώτη ενότητα περιέχει τα κεφάλαια 1, 2, 3 και τη θεωρία των δυναμικών συστημάτων και ένα τρισδιάστατο σύστημα Lotka-Volterra με δύο θηρευτές και ένα θήραμα. Συγκεκριμένα, αναλύουμε μία εργασία των N.Samardzija και L.Greller, καταλήγοντας στην αριθμητική επίλυση του συστήματος και στον χαοτικό ελκυστή.

Η δεύτερη ενότητα αποτελείται από το κεφάλαιο 4, περιγράφει τη χειρουργική διαδικασία της τοπολογίας σε μία και δύο διαστάσεις και συζητάμε διάφορες εφαρμογές της χειρουργικής.

Η τρίτη ενότητα απαρτίζεται από τα κεφάλαια 5 και 6. Στο κεφάλαιο 5 επιχειρούμε να εμπεριστατώσουμε την σύνδεση του χαοτικού ελκυστή και της δισδιάστατης χειρουργικής μέσω της αριθμητικής επίλυσης του συστήματος για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Καταλήγουμε έτσι σε ένα μοντέλο που περιγράφει την δισδιάστατη χειρουργική. Επίσης, παρουσιάζουμε μία πιθανή εφαρμογή αυτού του μοντέλου στο φαινόμενο των ανεμοστροβίλων. Τέλος, στο κεφάλαιο 6, γίνεται μία σύντομη παρουσίαση της τρισδιάστατης χειρουργικής και της εξίσωσης δυναμό ως ένα πρώτο βήμα για την πιθανή σύνδεση αυτών των δύο.

## Περιεχόμενα

### Κεφάλαιο 1: Γραμμικά συστήματα

1.1 Γενικά	4
1.2 Γραμμικοποίηση	5

### Κεφάλαιο 2: Διδιάστατα μη γραμμικά συστήματα

2.1 Εξισώσεις θηρευτού-θηράματος (predator-prey): Το μοντέλο Lotka-Volterra	9
2.2 Ανταγωνιζόμενα είδη	13

### Κεφάλαιο 3: Τρισδιάστατα δυναμικά συστήματα

3.1 Εισαγωγή	16
3.2 Οι εξισώσεις Lorentz	17
3.3 Ένα γενικευμένο μοντέλο Lotka-Volterra	19

### Κεφάλαιο 4: Θεωρία Κόμβων και τοπολογική χειρουργική

4.1 Εισαγωγικοί ορισμοί	38
4.2 Χειρουργική σε μία διάσταση	42
4.3 Χειρουργική σε περισσότερες διαστάσεις	49

### Κεφάλαιο 5: Ο χαοτικός ελκυστής και η τοπολογική τεχνική της χειρουργικής

5.1 Η σχέση του χαοτικού ελκυστή με την διδιάστατη χειρουργική	55
5.2 Δυνατές εφαρμογές	64

### Κεφάλαιο 6: Επίλογος – Προβλήματα για μελέτη

6.1 Τρισδιάστατη χειρουργική	68
6.2 Η εξίσωση δυναμό	72

Παράρτημα Matlab	73
------------------	----

Βιβλιογραφία	74
--------------	----

# Κεφάλαιο 1: Γραμμικά συστήματα

## 1.1: Γενικά

Έστω το γραμμικό διαφορικό σύστημα :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

όπου  $u$  διανυσματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής  $t$ .

Ως γνωστόν, αν ο πίνακας  $A$  διαγωνιοποιείται τότε το σύστημα έχει τη λύση:

$$u(t) = e^{At}u_0 = e^{S\Lambda S^{-1}t}u_0 = Se^{\Lambda t}S^{-1}u_0 \quad (1)$$

όπου οι στήλες του  $S$  είναι τα ιδιοδιανύσματα του  $A$  και  $\Lambda$  ο πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του  $A$ . Με  $e^{At}$  συμβολίζουμε τον εκθετικό

πίνακα που ορίζεται ως εξής:  $e^{At} := I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$

Αν συμβολίσουμε με  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  τις ιδιοτιμές του  $A$  και με  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τότε η σχέση (1) γράφεται:

$$u(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \dots & \bar{x}_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S^{-1}u_0 = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \quad (2)$$

όπου  $c_i$  στοιχεία του πίνακα  $c = S^{-1}u_0$ .

Η εξίσωση (2) μας δείχνει ότι η ευστάθεια της λύσης του συστήματος καθορίζεται από τους παράγοντες  $e^{\lambda_i t}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Επίσης, το μέτρο του κάθε παράγοντα της μορφής  $e^{\lambda_i t}$  καθορίζεται μόνο από το πραγματικό μέρος της ιδιοτιμής  $\lambda$ .

Πράγματι για  $\lambda = \alpha + i\beta$  έχουμε:

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) \quad \text{και} \quad |e^{\lambda t}| = e^{\alpha t}.$$

Το μέτρο του κάθε παράγοντα  $e^{\lambda t}$  τείνει στο μηδέν για  $\alpha < 0$ , είναι σταθερό και ίσο με ένα για  $\alpha = 0$  και τείνει στο άπειρο για  $\alpha > 0$ , ενώ το φανταστικό μέρος της ιδιοτιμής παράγει ταλαντώσεις.

Επομένως, για κάθε πίνακα  $A$  διαγωνιοποιήσιμο ισχύει:

Η διαφορική εξίσωση  $\frac{du}{dx} = Ax$  με αρχική συνθήκη  $u(0) = u_0$  έχει τη λύση

$u(t) = e^{At} u_0$ , που είναι *ασυμπτωτικά ευσταθής* (stable) και  $e^{At} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  αν

$\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ; Είναι *ευσταθής* (neutrally stable) και ο όρος  $e^{At}$  είναι φραγμένος αν  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ ; είναι *ασταθής* (unstable) και ο όρος  $e^{At}$  είναι μη φραγμένος αν τουλάχιστον μία ιδιοτιμή  $\lambda_i$  του  $A$  ικανοποιεί τη σχέση  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ .

Παρατήρηση: Αν ο πίνακας  $A$  δεν διαγωνιοποιείται, τότε αναζητούμε γενικευμένα ιδιοδιανύσματα.

## 1.2: Γραμμικοποίηση

Ορισμός 1: Έστω το μη-γραμμικό αυτόνομο σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

για το οποίο υποθέτουμε ότι η αρχή  $(0,0)$  αποτελεί κρίσιμο ή στάσιμο σημείο, δηλαδή  $f(0,0) = g(0,0) = 0$ . Υποθέτουμε ότι το σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\begin{cases} x' = ax + by + f_1(x, y) \\ y' = cx + dy + g_1(x, y) \end{cases}$$

και ότι ισχύουν τα ακόλουθα:  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f_1(x, y)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_1(x, y)}{r} = 0$

όπου  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  και  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Τότε το παραπάνω μη-γραμμικό σύστημα ονομάζεται *σχεδόν γραμμικό σύστημα* γύρω από το  $(0,0)$ .

Ορισμός 2: Θεωρούμε το σχεδόν γραμμικό αυτόνομο σύστημα

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

του οποίου το  $(\xi, \eta)$  αποτελεί στάσιμο σημείο, δηλαδή  $f(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) = 0$ . Ο πίνακας  $J[f, g](\xi, \eta)$  λέγεται *πίνακας ευστάθειας*.

Αν για το σημείο  $(\xi, \eta)$  ισχύει επιπλέον:

$$J[f, g](\xi, \eta) = \det \begin{pmatrix} f_x(\xi, \eta) & f_y(\xi, \eta) \\ g_x(\xi, \eta) & g_y(\xi, \eta) \end{pmatrix} \neq 0, \text{ τότε το } (\xi, \eta) \text{ ονομάζεται υπερβολικό}$$

(ή απλό) *στάσιμο σημείο* του (3). Τότε ισχύει το παρακάτω Θεώρημα Γραμμικοποίησης.

Θεώρημα Γραμμικοποίησης (Hartman (1964)-Groman (1959)):

Έστω  $(\xi, \eta)$  υπερβολικό στάσιμο σημείο του σχεδόν γραμμικού συστήματος  $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$  (3). Τότε σε μια περιοχή του  $(\xi, \eta)$  το (3) και το αντίστοιχο

γραμμικοποιημένο σύστημα:

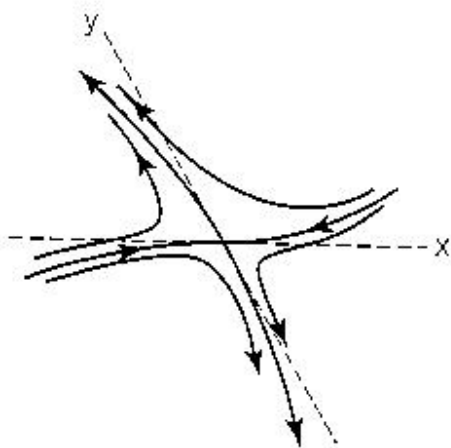
$$\begin{cases} x_1' = x_1 f_x(\xi, \eta) + x_1 f_y(\xi, \eta) \\ y_1' = y_1 g_x(\xi, \eta) + y_1 g_y(\xi, \eta) \end{cases} \text{ όπου } x_1 = x - \xi, y_1 = y - \eta \quad (4) \text{ έχουν ποιοτικά}$$

ισοδύναμα πεδία φάσεων, δηλαδή, το ίδιο είδος ευστάθειας, εκτός εάν το  $(\xi, \eta)$  αποτελεί κέντρο για το γραμμικοποιημένο σύστημα (4). Δηλαδή, εκτός

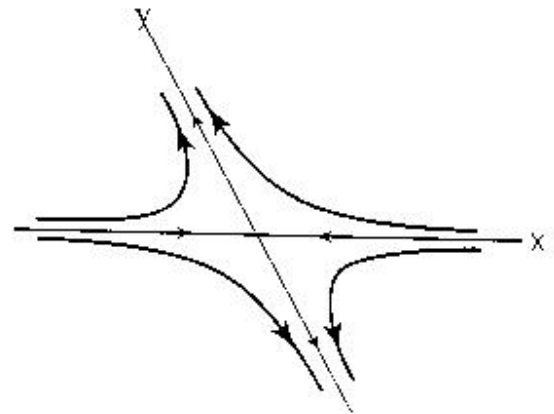
εάν ο πίνακας  $\begin{pmatrix} f_x(\xi, \eta) & f_y(\xi, \eta) \\ g_x(\xi, \eta) & g_y(\xi, \eta) \end{pmatrix}$  έχει δύο φανταστικές ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ .

Παραδείγματα:

- 1) Η Εικόνα 1 απεικονίζει το πεδίο φάσεων του μη γραμμικού και του αντίστοιχου γραμμικοποιημένου συστήματος γύρω από ασταθές σαγματικό σημείο. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μια θετική και μια αρνητική πραγματική ιδιοτιμή, ένα ιδιοδιάνυσμα που έλκει τις τροχιές και ένα που τις απωθεί.



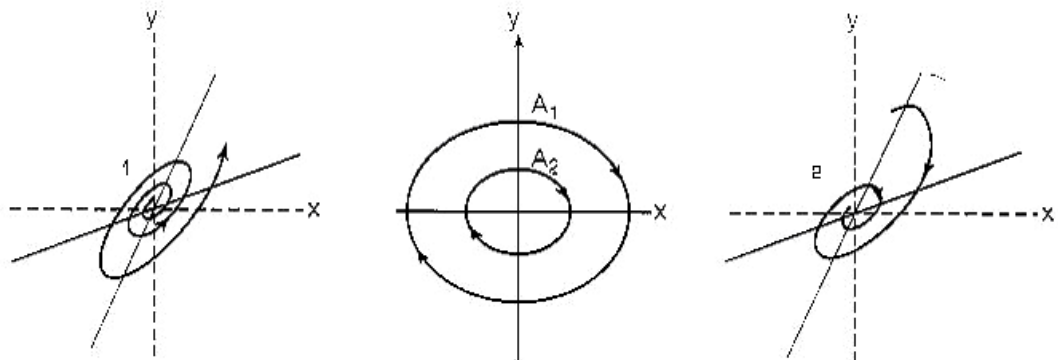
μη γραμμικό σύστημα



γραμμικοποιημένο σύστημα

(Εικόνα 1)

2) Η Εικόνα 2 απεικονίζει το πεδίο φάσεων σε περίπτωση ύπαρξης κέντρου. Σημειώνουμε ότι η γραμμικοποίηση των δύο παρακάτω συστημάτων 1,2 είναι τα κέντρα  $A_1, A_2$ . Επειδή ακριβώς και τα δύο συστήματα γραμμικοποιούνται σε κέντρο, το κέντρο δεν είναι αξιόπιστη γραμμική προσέγγιση. Η κλειστότητα των τροχιών είναι μια υπερευαίσθητη ιδιότητα ενός δυναμικού συστήματος.



(Εικόνα 2)

### Παρατηρήσεις:

1) Το Θεώρημα Γραμμικοποίησης είναι πολύ χρήσιμο για την εύρεση του είδους ευστάθειας των στάσιμων σημείων μη γραμμικών συστημάτων.

2) Σε περίπτωση κέντρου εφαρμόζουμε άλλες μεθόδους όπως τη μέθοδο Liapunov ή την ολοκλήρωση.

3) Όλα τα παραπάνω γενικεύονται κατά φυσικό τρόπο για συστήματα με περισσότερες εξισώσεις και αντίστοιχα περισσότερες μεταβλητές.



## Κεφάλαιο 2: Διδιάστατα μη γραμμικά συστήματα

### 2.1 Εξισώσεις θηρευτού-θηράματος (predator-prey): Το μοντέλο Lotka-Volterra

Θα εξετάσουμε τώρα ένα μη γραμμικό σύστημα θηρευτού θηράματος που εισήχθη από τους Lotka (1925) και Volterra (1926). Συμβολίζουμε με  $y = y(t)$  τον πληθυσμό του θηρευτή και με  $x = x(t)$  τον πληθυσμό του θηράματος. Για την κατασκευή ενός τέτοιου μοντέλου κάνουμε τις εξής ακραίες παραδοχές:

1. Όταν  $y = y(t) = 0$  τότε ο πληθυσμός του θηράματος  $x = x(t)$  αυξάνεται με ρυθμό ανάλογο του πληθυσμού του, δηλαδή  $\frac{dx}{dt} = ax, a > 0$  (5).  
Εδώ παραδεχόμαστε ότι το θήραμα έχει απεριόριστους πόρους διατροφής, εφόσον με την εξαφάνιση του θηρευτή για την λύση της (5) ισχύει:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ .
2. Όταν  $x = x(t) = 0$  τότε ο πληθυσμός του θηρευτή βαθμιαία εξαφανίζεται. Δηλαδή  $\frac{dy}{dt} = -\gamma y, \gamma > 0$ . Εδώ υποθέτουμε ότι ο μοναδικός πόρος του θηρευτή είναι το θήραμα.
3. Ο αριθμός των συναντήσεων μεταξύ τους είναι ανάλογος του γινομένου των αντίστοιχων πληθυσμών και οι συναντήσεις ευνοούν την αύξηση του πληθυσμού του θηρευτή και την μείωση του πληθυσμού του θηράματος.

Βάσει των παραπάνω καταλήγουμε στο ακόλουθο μοντέλο, γνωστό και ως σύστημα Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= -\gamma y + \delta xy, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{aligned} \quad (6)$$

### Ποιοτική ανάλυση-πεδίο φάσεως:

Εύκολα υπολογίζουμε τα κρίσιμα σημεία του συστήματος θέτοντας

$\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ . Είναι τα  $(0,0)$  και  $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$  με αντίστοιχους πίνακες

ευστάθειας  $A(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$  και  $A(\gamma/\delta, \alpha/\beta) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma\beta/\delta \\ \alpha\delta/\beta & 0 \end{pmatrix}$ . Θεωρώντας

το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από το  $(0,0)$ :

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , βλέπουμε πως ο πίνακας  $A(0,0)$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\gamma$

και άρα είναι ασταθές σημείο σάγματος (βλ. Εικόνα 1). Από το Θεώρημα

Γραμμικοποίησης γνωρίζουμε πως η ιδιότητα αυτή μεταφέρεται και στο

σχεδόν γραμμικό σύστημα Lotka-Volterra. Για τον δεύτερο πίνακα

ευστάθειας παρατηρούμε ότι  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$ , δηλαδή το σημείο  $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$

αποτελεί ευσταθές κέντρο για το γραμμικοποιημένο σύστημα. Ως συνέπεια

αυτού δεν μπορούμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα για το είδος

ευστάθειας του σημείου  $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ .

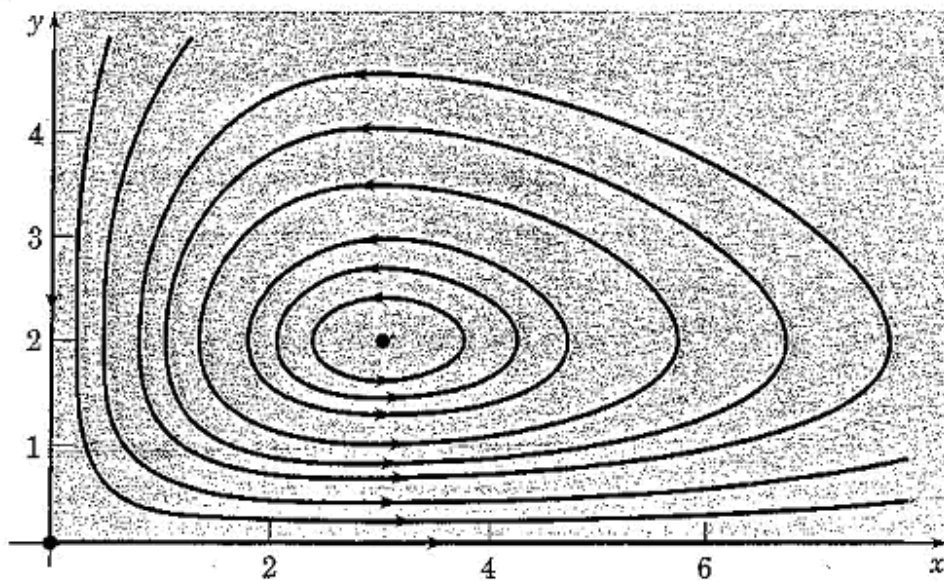
Για την ποιοτική ανάλυση του συστήματος θα χρησιμοποιήσουμε άλλη

μέθοδο. Με απαλοιφή του  $t$  στις εξισώσεις Lotka-Volterra καταλήγουμε στη

σχέση:  $\frac{dx}{\alpha x - \beta xy} = \frac{dy}{-\gamma x + \delta xy}$ . Ολοκληρώνοντάς την παίρνουμε:

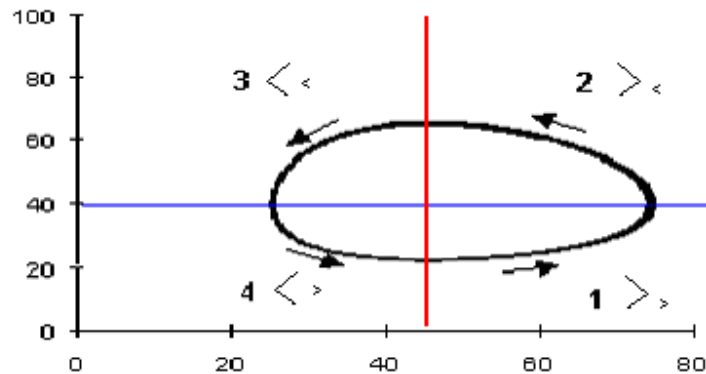
$\alpha \ln y + \gamma \ln x - \beta y - \delta x = k, k > 0$ . Στην Εικόνα 3 φαίνονται οι παραπάνω

καμπύλες στο πεδίο φάσεων και η περιοδική συμπεριφορά των λύσεων.



(Εικόνα 3)

Αν απομονώσουμε μια τροχιά που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή του  $k$  μπορούμε να την χωρίσουμε σε τέσσερις περιοχές, βλ. Εικόνα 4.



(Εικόνα 4)

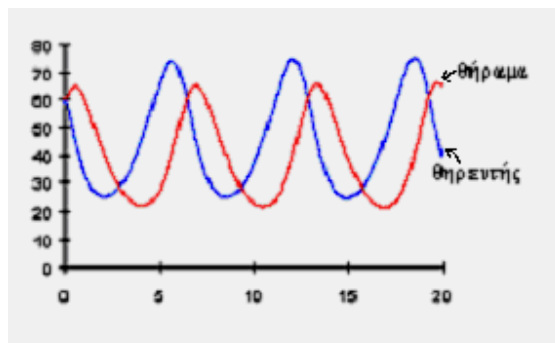
όπου με  $> <$  και  $< >$  συμβολίζουμε την αύξηση και μείωση των πληθυσμών θηρευτή και θηράματος αντίστοιχα. Εδώ φαίνεται η αλληλεξάρτηση των δύο πληθυσμών που ευθύνεται για την περιοδικότητα.

### Αριθμητική επίλυση:

Η περιοδική συμπεριφορά των λύσεων φαίνεται και στην αριθμητική επίλυση του συστήματος. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Euler για ομοιόμορφο

διαμερισμό:  $\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k + h(\alpha x_k - \beta x_k y_k) \\ y_{k+1} = y_k + h(-\gamma x_k + \delta x_k y_k) \end{array} \right\}, k = 0, 1, \dots, n-1$  παίρνουμε το

παρακάτω γράφημα των λύσεων:



(Εικόνα 5)

## Παρατηρήσεις:

1) Μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα του μοντέλου Lotka-Volterra είναι οι μέσες τιμές των πληθυσμών θηρευτή-θηράματος.

Γνωρίζουμε ότι  $\bar{X} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ ,  $\bar{Y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$ , όπου  $T$  η περίοδος του κύκλου.

Δεδομένου ότι  $x(T) = x(0)$ ,  $y(T) = y(0)$  βρίσκουμε  $\bar{X} = \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $\bar{Y} = \frac{\gamma}{\delta}$ . Δηλαδή οι

μέσες τιμές των πληθυσμών θηρευτή-θηράματος ταυτίζονται με την τιμή ισορροπίας τους, δηλαδή με το κέντρο της έλλειψης του πεδίου φάσεως (βλ. Εικόνα 4).

2) Από το 1915, κατά τη διάρκεια του πολέμου μεταξύ Αυστρίας και Ιταλίας, το ψάρεμα απαγορεύτηκε. Όταν μετά από τρία χρόνια τελείωσε ο πόλεμος, όλοι οι ψαράδες πίστευαν ότι τα ψάρια θα υπάρχουν σε αφθονία. Παραδόξως παρατηρήθηκε ακριβώς το αντίθετο. Υπήρχαν δηλαδή λιγότερα ψάρια απ' ότι όταν επιτρεπόταν το ψάρεμα. Το φαινόμενο αυτό εξηγήθηκε αργότερα από τον Volterra. Θεώρησε ένα μοντέλο θηρευτή-θηράματος όπου με  $x = x(t)$  συμβόλισε τον πληθυσμό ψαριών (θηρευτής) και με  $y = y(t)$  τον πληθυσμό σελαχιών (θηράματα). Θεώρησε στη συνέχεια τον ανθρώπινο παράγοντα «ψάρεμα». Προφανώς το ψάρεμα θα μειώνει και τους δύο πληθυσμούς με ρυθμό  $E x(t)$  και  $E y(t)$  αντίστοιχα. Το τροποποιημένο

σύστημα Lotka-Volterra είναι:

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha - E)x - \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -(\gamma + E)y + \delta xy, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, E > 0$$

Οι μέσες τιμές του νέου συστήματος είναι  $\bar{X} = \frac{(\gamma + E)}{\delta}$ ,  $\bar{Y} = \frac{(\alpha - E)}{\beta}$

Αυτό σημαίνει ότι με αρκετό ψάρεμα (εφόσον πάντα  $E < \alpha$ ) αυξάνεται ο πληθυσμός των ψαριών και μειώνεται αυτός των σελαχιών. Πράγμα πιθανώς αντίθετο με το αναμενόμενο. Αντίθετα, με λιγότερο ψάρεμα αυξάνεται ο πληθυσμός των σελαχιών και μειώνεται ο πληθυσμός των ψαριών. Το εκπληκτικό αυτό αποτέλεσμα λέγεται «*αρχή του Volterra*» (Volterra principle).

## 2.2: Ανταγωνιζόμενα είδη

### Το μοντέλο:

Συμβολίζουμε με  $x = x(t)$  και  $y = y(t)$  τους πληθυσμούς δύο ειδών που ανταγωνίζονται για την ίδια περιορισμένη τροφή. Για την κατασκευή ενός τέτοιου μοντέλου κάνουμε τις εξής παραδοχές:

1. Για  $y = y(t) = 0$  θεωρούμε ότι  $\frac{dx}{dt} = a_1x - b_1x^2$ ,  $a, b > 0$ . Εδώ υπάρχει και ο επιπλέον παράγοντας  $-b_1x^2$  σε σχέση με την 1<sup>η</sup> παραδοχή στις εξισώσεις Lotka-Volterra. Θεωρούμε ότι ο αριθμός των συναντήσεων είναι ανάλογος του γινομένου των αντίστοιχων πληθυσμών. Ο όρος  $-b_1x^2$  συμβολίζει τις συναντήσεις του ίδιου πληθυσμού  $x = x(t)$  προς αναζήτηση τροφής και ευνοεί τη μείωση του πληθυσμού εφ' όσον η τροφή θεωρείται περιορισμένη.
2. Θεωρούμε έναν τρίτο όρο  $-c_1xy$  ο οποίος εκφράζει τη μείωση του ρυθμού αύξησης του είδους  $x = x(t)$ , λόγω της παρουσίας του άλλου είδους, εφόσον έχουμε κοινή περιορισμένη τροφή.

Βάσει των παραπάνω παραδοχών καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x - b_1x^2 - c_1xy \\ \frac{dy}{dt} &= a_2y - b_2y^2 - c_2xy, \quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

### Ποιοτική ανάλυση - πεδίο φάσεων:

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία του συστήματος λύνοντας τις σχέσεις  $\frac{dx}{dt} = 0$ ,  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Αυτά είναι τα  $(0, 0)$ ,  $(0, \frac{a_2}{b_2})$ ,  $(\frac{a_1}{b_1}, 0)$ ,  $(\frac{a_1b_2 - a_2c_1}{b_1b_2 - c_1c_2}, \frac{a_2b_1 - a_1c_2}{b_1b_2 - c_1c_2})$ .

Παρατηρούμε ότι έχουμε τέσσερα κρίσιμα σημεία αντί για δύο που είχαμε στις εξισώσεις Lotka-Volterra, πράγμα που οφείλεται στους τετραγωνικούς παράγοντες  $-b_1x^2$  και  $-b_2y^2$ . Το σημείο  $(\frac{a_1b_2 - a_2c_1}{b_1b_2 - c_1c_2}, \frac{a_2b_1 - a_1c_2}{b_1b_2 - c_1c_2})$  συμβολίζει την

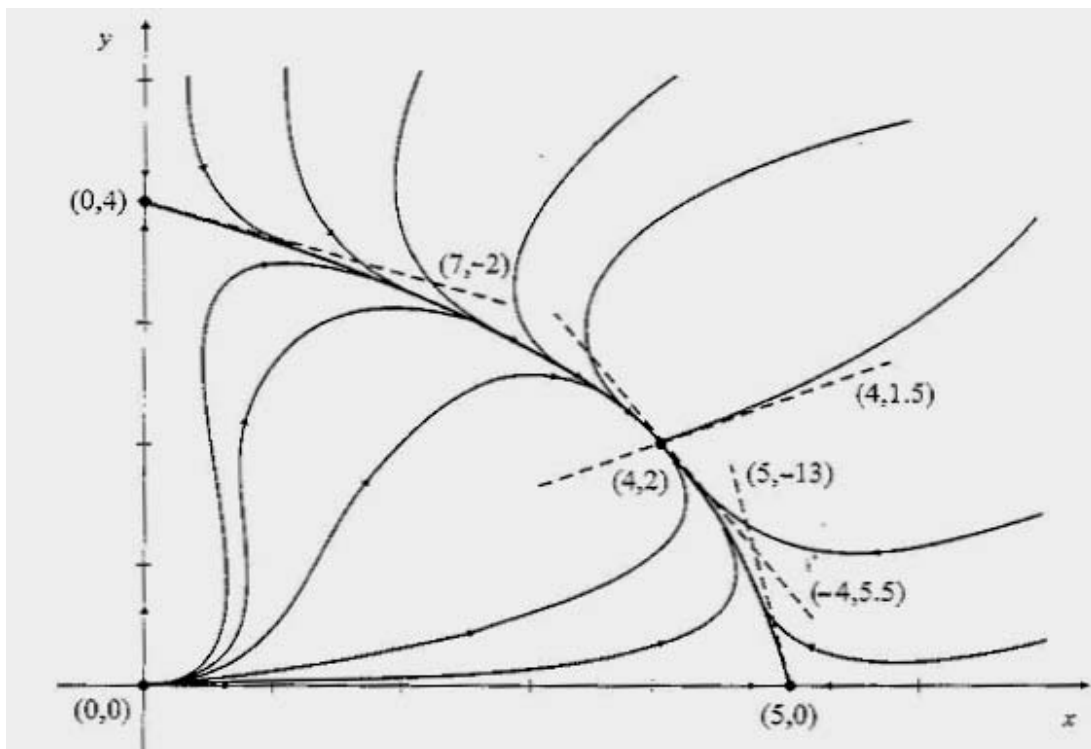
ειρηνική συνύπαρξη των δύο ειδών, το  $(0,0)$  την αμοιβαία εξαφάνισή τους και τα σημεία  $(0, \frac{a_2}{b_2})$ ,  $(\frac{a_1}{b_1}, 0)$  την επικράτηση ενός από τα δύο είδη.

Με χρήση του Θεωρήματος Γραμμικοποίησης καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα πεδία φάσεων του συστήματος εξαρτώνται από το πρόσημο του παράγοντα  $b_1b_2 - c_1c_2$ . Το ενδιαφέρον εδώ έγκειται στο ότι με αλλαγή των αρχικών παραμέτρων  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  αλλάζει τελείως το πεδίο φάσεων.

### Παραδείγματα:

#### 1) Ειρηνική συνύπαρξη:

Για  $a_1 = 10$ ,  $a_2 = 8$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 2$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1$ , βάσει της ανάλυσης των πινάκων ευστάθειας και των ιδιοτιμών τους, προκύπτει ότι τα κρίσιμα σημεία  $(0,0)$ ,  $(0, \frac{a_2}{b_2})$ ,  $(\frac{a_1}{b_1}, 0)$  είναι ασταθή και το  $(\frac{a_1b_2 - a_2c_1}{b_1b_2 - c_1c_2}, \frac{a_2b_1 - a_1c_2}{b_1b_2 - c_1c_2})$  είναι ευσταθές. Το διάγραμμα φάσεων που προκύπτει στην περίπτωση αυτή δείχνει πως το σύστημα οδηγείται στην ειρηνική συνύπαρξη των δύο ανταγωνιζόμενων ειδών.



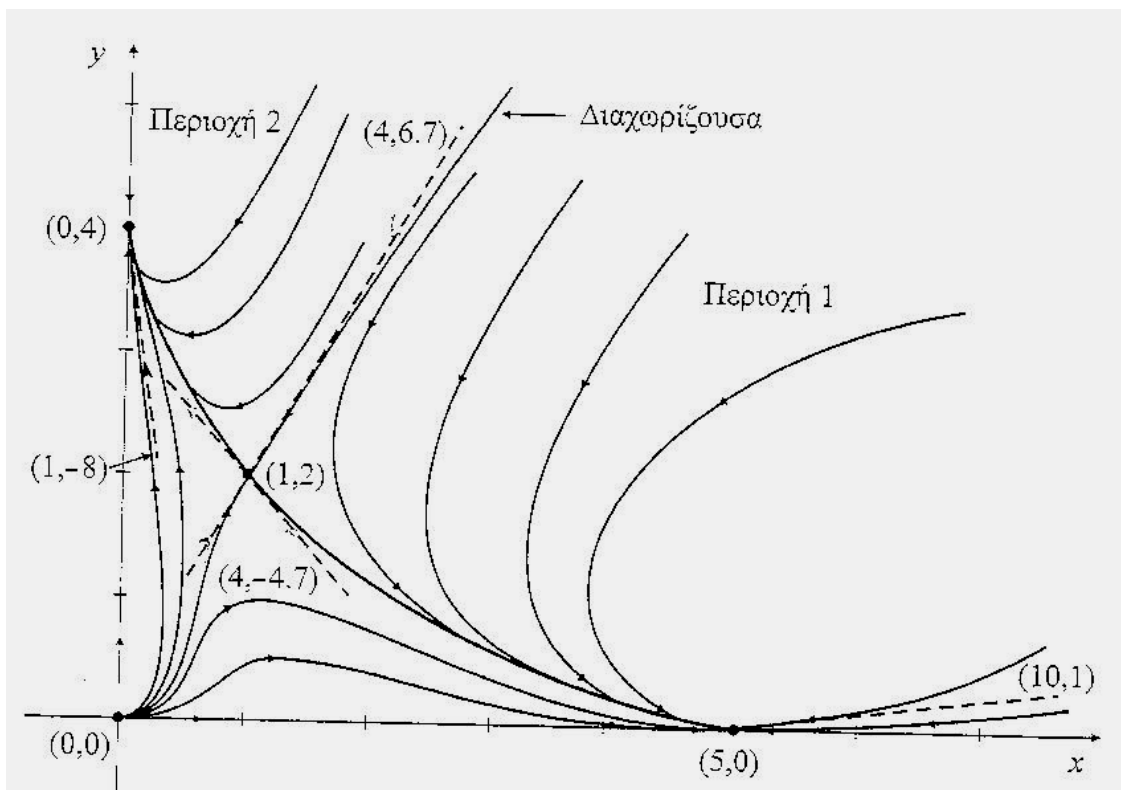
(Εικόνα 6)

## 2) επικράτηση του ισχυρότερου:

Για  $a_1 = 10$ ,  $a_2 = 8$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 2$ ,  $c_1 = 4$ ,  $c_2 = 4$  έχουμε ότι τα κρίσιμα σημεία

$(0,0)$ ,  $(\frac{a_1 b_2 - a_2 c_1}{b_1 b_2 - c_1 c_2}, \frac{a_2 b_1 - a_1 c_2}{b_1 b_2 - c_1 c_2})$  είναι ασταθή και τα  $(0, \frac{a_2}{b_2})$ ,  $(\frac{a_1}{b_1}, 0)$  ευσταθή.

Παρατηρούμε ότι όταν μεγαλώσουν οι σταθερές  $c_1$  και  $c_2$ , άρα όταν αυξηθούν οι παράγοντες αλληλεπίδρασης  $-c_1 xy$  και  $-c_2 xy$ , το σύστημα οδηγείται στον νόμο της ζούγκλας, στην επικράτηση του ισχυρότερου.



(Εικόνα 7)

Στην Εικόνα 7 βλέπουμε ότι στην Περιοχή 1, οι τροχιές ωθούνται στο σημείο  $(0, 5)$ , στην επικράτηση του πρώτου είδους. Στην Περιοχή 2, οι τροχιές ωθούνται στο  $(4, 0)$ , στην επικράτηση του δεύτερου είδους. Σημειώνουμε ότι  $a_1 > a_2$  και  $b_1 = b_2$ ,  $c_1 = c_2$ , δηλαδή ο ρυθμός αναπαραγωγής του πρώτου είδους είναι μεγαλύτερος ενώ οι υπόλοιποι παράγοντες είναι ίδιοι. Η ανισότητα αυτή έχει ως αποτέλεσμα η Περιοχή 1 να είναι μεγαλύτερη από την Περιοχή 2.

## Κεφάλαιο 3: Τρισδιάστατα δυναμικά συστήματα

### 3.1 Εισαγωγή

Είδαμε ως τώρα δύο παραδείγματα μη γραμμικών διδιάστατων δυναμικών συστημάτων. Στη συνέχεια θα δούμε δύο τρισδιάστατα δυναμικά συστήματα: Τις εξισώσεις του Lorentz και μια τρισδιάστατη γενίκευση του συστήματος Lotka-Volterra.

Ορισμός 3: *Χάος* ονομάζεται η ιδιότητα των δυναμικών συστημάτων που έχουν πολύ ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Ορισμός 4: Ένα *φράκταλ* είναι ένα μη κανονικό (non regular) γεωμετρικό σχήμα το οποίο έχει τον ίδιο βαθμό μη κανονικότητας σε κάθε κλίμακα. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται *αυτοομοιότητα*.

Ορισμός 5: Μια *διακλάδωση* (bifurcation) σε ένα δυναμικό σύστημα αναπαριστά την ξαφνική εμφάνιση μιας ποιοτικά διαφορετικής λύσης καθώς μια παράμετρος μεταβάλλεται.

Ορισμός 6: Ένας *τόρος* (torus) είναι μια επιφάνεια γένους ένα, δηλαδή μια επιφάνεια που έχει μία μοναδική «οπή».

Ορισμός 7: Ένας *ελκυστής* (attractor) είναι ένα σύνολο, μια καμπύλη ή ένας χώρος, στον οποίο το σύστημα εξελίσσεται μη αναστρέψιμα αν δεν διαταραχτεί. Ένας *παράξενος ελκυστής* ή *χαοτικός ελκυστής* είναι ένας μη περιοδικός ελκυστής. Πρόκειται για τον πιο συνηθισμένο τύπο ελκυστή. Χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο συζευγμένων μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων.



### Στάσιμα σημεία τρισδιάστατων δυναμικών συστημάτων:

Βάσει των ιδιοτιμών του πίνακα του αντίστοιχου γραμμικοποιημένου συστήματος, παραθέτουμε τον παρακάτω πίνακα, που χαρακτηρίζει τα στάσιμα σημεία σ' ένα τρισδιάστατο δυναμικό σύστημα.

Είδος στάσιμου σημείου στον $\mathbb{R}^3$	$\Gamma\{J(S)\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3\}$	$\Gamma\{J(S)\} = \{\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}; \lambda_3 = \lambda_2^*\}$
Ασταθής κόμβος	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$	/
Ασυμπτωτικά ευσταθής κόμβος	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 0$	/
Ασταθές σάγμα	$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ και $\lambda_3 < 0$	/
Ασυμπτωτικά ευσταθές σάγμα	$\lambda_1 > 0$ και $\lambda_1, \lambda_2 < 0$	/
Εσωτερικά ασταθής στρόβιλος	/	$\lambda_1 < 0$ και $\text{Re}\{\lambda_2\} > 0$
Εσωτερικά ευσταθής στρόβιλος	/	$\lambda_1 < 0$ και $\text{Re}\{\lambda_2\} = 0$
Εσωτερικά ασυμπτωτικά ευσταθής στρόβιλος	/	$\lambda_1 < 0$ και $\text{Re}\{\lambda_2\} < 0$
Εξωτερικά ασταθής στρόβιλος	/	$\lambda_1 > 0$ και $\text{Re}\{\lambda_2\} > 0$
Εξωτερικά ευσταθής στρόβιλος	/	$\lambda_1 > 0$ και $\text{Re}\{\lambda_2\} = 0$
Εξωτερικά ασυμπτωτικά ευσταθής στρόβιλος	/	$\lambda_1 > 0$ και $\text{Re}\{\lambda_2\} < 0$
Ασταθές κέντρο	/	$\lambda_1 = 0$ και $\text{Re}\{\lambda_2\} > 0$
Ευσταθές κέντρο	/	$\lambda_1 = 0$ και $\text{Re}\{\lambda_2\} = 0$
Ασυμπτωτικά ευσταθές κέντρο	/	$\lambda_1 = 0$ και $\text{Re}\{\lambda_2\} < 0$

### 3.2 Οι εξισώσεις Lorentz:

Ο Edward N. Lorentz (1961) διερευνώντας την κίνηση ενός θερμαινόμενου

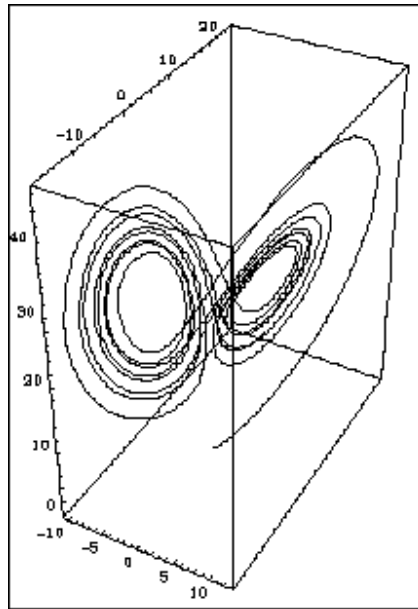
στρώματος ρευστού κατέληξε στις εξισώσεις:

$$\left. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(-x + y) \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases} \right\} \sigma, r, b > 0$$

Παρατηρούμε ότι στη δεύτερη και τρίτη εξίσωση, όπως και στις εξισώσεις Lotka-Volterra και ανταγωνιστικών ειδών, περιέχονται δευτεροβάθμιες μη-γραμμικότητες. Αφού βρούμε τα κρίσιμα σημεία, προσδιορίζουμε την τοπική συμπεριφορά των λύσεων σε κάθε κρίσιμο σημείο. Παραλείποντας τους υπολογισμούς καταλήγουμε ότι για  $r > 24,737$  τα τρία κρίσιμα σημεία είναι ασταθή. Παρότι κάποιος θα μπορούσε να περιμένει ότι οι περισσότερες τροχιές θα προσεγγίζουν το άπειρο για μεγάλα  $t$  λόγω της αστάθειας των κρίσιμων σημείων, μπορεί να αποδειχθεί ότι οι λύσεις παραμένουν φραγμένες για  $t \rightarrow \infty$ .

Για την ακρίβεια μπορεί να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις τελικά προσεγγίζουν ένα συγκεκριμένο σύνολο τροχιών που έχει μηδενικό μέτρο. Το ελκτικό σύνολο, μολονότι μηδενικού μέτρου, έχει αρκετά πολύπλοκη δομή και είναι ένας παράξενος ελκυστής (strange attractor). Ήταν ο πρώτος παράξενος ελκυστής που βρέθηκε. Οι λύσεις των εξισώσεων Lorentz είναι επίσης εξαιρετικά ευαίσθητες σε διαταραχές των αρχικών συνθηκών. Προκειμένου να περιγραφούν οι λύσεις χρησιμοποιείται γενικά ο όρος *χαοτικές λύσεις*.

Οι τροχιές του συστήματος στο πεδίο φάσεως για  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$  φαίνονται στην Εικόνα 8:



(Εικόνα 8)

### 3.3 Ένα γενικευμένο μοντέλο Lotka-Volterra

#### Εισαγωγή:

Το πρώτο σύστημα Lotka-Volterra για τον ανταγωνισμό ανάμεσα σε δύο είδη γενικεύτηκε από τον Smale (1976) για διαστάσεις  $n \geq 3$ . Ο Smale έδειξε επίσης ότι για  $n \geq 5$  το δυναμικό σύστημα μπορεί να παρουσιάσει παράξενους ή χαοτικούς ελκυστές. Ο May (1975) ανακάλυψε ένα τρισδιάστατο δυναμικό σύστημα ανταγωνισμού που παρουσιάζει φραγμένη μη-περιοδική ταλάντωση του πληθυσμού. Ο Arneodo (1980) έδειξε ότι μπορεί να εμφανιστούν παράξενοι ελκυστές και για  $n = 3$ . Οι Gilpin (1979) και Schaeffer (1985) παρατήρησαν έναν τέτοιο ελκυστή σε ένα μοντέλο θηρευτή-θηράματος. Εδώ θα ασχοληθούμε με το άρθρο των N.Samardzija και L.Greller (1988) “Explosive route to chaos through a fractal torus in a generalized Lotka-Volterra model” όπου παρουσιάζεται μια νέα γενίκευση του διδιάστατου μοντέλου Lotka-Volterra. Αυτοί πρότειναν το παρακάτω σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= X - XY + CX^2 - AZX^2 \\ \frac{dY}{dt} &= -Y + XY \\ \frac{dZ}{dt} &= -BZ + AZX^2 \end{aligned} \right\} (\Sigma)$$

όπου  $A, B, C \geq 0$  και  $X, Y, Z$  διαφορετικοί πληθυσμοί (π.χ οικολογικών ειδών ή χημικών ουσιών).

Αναλύονται οι παράμετροι  $A, B, C$  για να βρεθούν οι διακλαδώσεις του  $(\Sigma)$ . Συγκεκριμένα, αναλύεται το φαινόμενο του χάους καθώς εξελίσσεται σε έναν φράκταλ τόρο (fractal torus), με χρήση διδιάστατων διαγραμμάτων ευστάθειας. Τα αποτελέσματα των διαγραμμάτων θα χρησιμοποιηθούν για να δείξουν την εκρηκτική πορεία προς το χάος. Οι παράμετροι  $A, B, C$  είναι σταθερές που επηρεάζουν τη δυναμική των πληθυσμών  $X, Y, Z$ .

Κατανοώντας τα διαγράμματα ευστάθειας θα βρεθούν συνθήκες για τις οποίες η συνύπαρξη των τριών ειδών καταλήγει αντίστοιχα σε σταθερή, περιοδική ή χαοτική συμπεριφορά.

### Ανάλυση πρώτης τάξης:

Βρίσκονται τα στάσιμα σημεία του ( $\Sigma$ ):

$$S_{s1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; S_{s2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+C \\ 0 \end{pmatrix}; S_{s3} = \begin{pmatrix} \sqrt{B/A} \\ 0 \\ (1+C\sqrt{B/A})/\sqrt{AB} \end{pmatrix}; S_{s4} = \begin{pmatrix} -1/C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; S_{s5} = \begin{pmatrix} -\sqrt{B/A} \\ 0 \\ (C\sqrt{B/A}-1)/\sqrt{AB} \end{pmatrix}$$

Επειδή το ( $\Sigma$ ) αναλύεται ως χημικό ή οικολογικό μοντέλο, τα στάσιμα σημεία  $S_{s4}, S_{s5}$  δεν θα ληφθούν υπόψη εφόσον περιέχουν αρνητικές τιμές για το είδος  $X$ .

Έστω  $J(S)$  η Ιακωβιανή του συστήματος, υπολογισμένη στο σημείο  $S \in \mathbb{R}^3$ .

Έστω επίσης  $\Gamma(J(S))$ ,  $W(J(S))$  τα σύνολα των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων της  $J(S)$  αντίστοιχα. Τότε, η ανάλυση ευστάθειας πρώτης τάξης καθορίζεται από τα εξής σύνολα:

$$\Gamma(J(S_{s1})) = \{1, -1, B\}; W(J(S_{s1})) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (8)$$

$$\Gamma(J(S_{s2})) = \left\{ A-B, (C+\sqrt{(C-2)^2-8})/2, (C-\sqrt{(C-2)^2-8})/2 \right\};$$

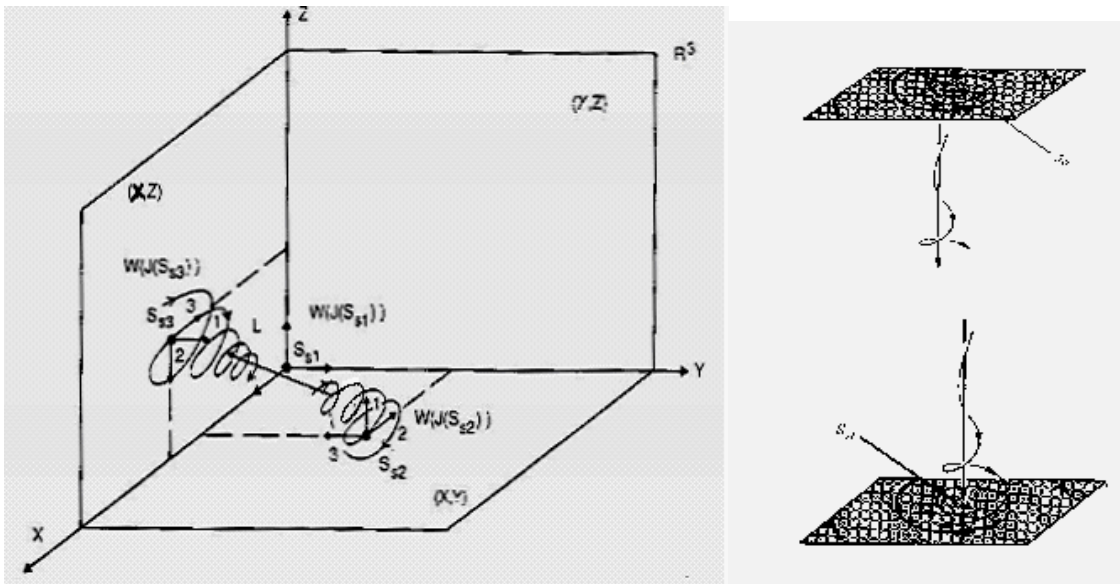
$$W(J(S_{s2})) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ (C+1)/(A-B) \\ \frac{B+C-A+(C+1)/(B-A)}{A} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{C-\sqrt{(C-2)^2-8}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{C+\sqrt{(C-2)^2-8}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (9)$$

$$\Gamma(J(S_{s_3})) = \left\{ (\sqrt{B/A} - 1), (-1 + \sqrt{1 - 8B(1 + C\sqrt{B/A})})/2, (-1 - \sqrt{1 - 8B(1 + C\sqrt{B/A})})/2 \right\};$$

$$W(J(S_{s_3})) = \left\{ \left( \begin{array}{c} 1 \\ -1 - \frac{2\sqrt{AB}(1 + C\sqrt{B/A})}{\sqrt{B/A} - 1} \\ \frac{2(1 + C\sqrt{B/A})}{\sqrt{B/A} - 1} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \frac{-1 - \sqrt{1 - 8B(1 + C\sqrt{B/A})}}{2B} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \frac{-1 + \sqrt{1 - 8B(1 + C\sqrt{B/A})}}{2B} \end{array} \right) \right\}$$

(10)

Ακολουθεί η γεωμετρική αναπαράσταση των τριών στάσιμων σημείων του  $(\Sigma)$ :



(Εικόνα 9)

Ο πίνακας στην εισαγωγή του κεφαλαίου χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσουμε την τοπική συμπεριφορά του  $(\Sigma)$  γύρω από τα τρία στάσιμα σημεία  $S_{s1}, S_{s2}, S_{s3}$  σε σχέση με τις παραμέτρους  $A, B, C$ .

Εύκολα βλέπουμε ότι το σημείο  $S_{s1}$  είναι σημείο σάγγατος για όλα τα  $A, B, C$ . Τα σημεία  $S_{s2}, S_{s3}$  αναλύονται στους παρακάτω πίνακες 2, 3α και 3β:

Behavior about  $S_{s2}$

Parameter Variations →	$A > B$	$A = B$	$A < B$
$C > 2(1 + \sqrt{2})$	Unstable node	Unstable node	Unstable saddle
$0 < C \leq 2(1 + \sqrt{2})$	Outward unstable vortex	Unstable center	Inward unstable vortex
$C = 0$	Outward nilpotent vortex	Nilpotent center	Inward nilpotent vortex

(Πίνακας 2)

Behavior about  $S_{s3}$ —case  $B > 1/8$

Parameter Variations →	$A > B$	$A = B$	$A < B$
$C \geq 0$	Inward stable <sup>x</sup> vortex	Stable center <sup>x</sup>	Outward stable vortex

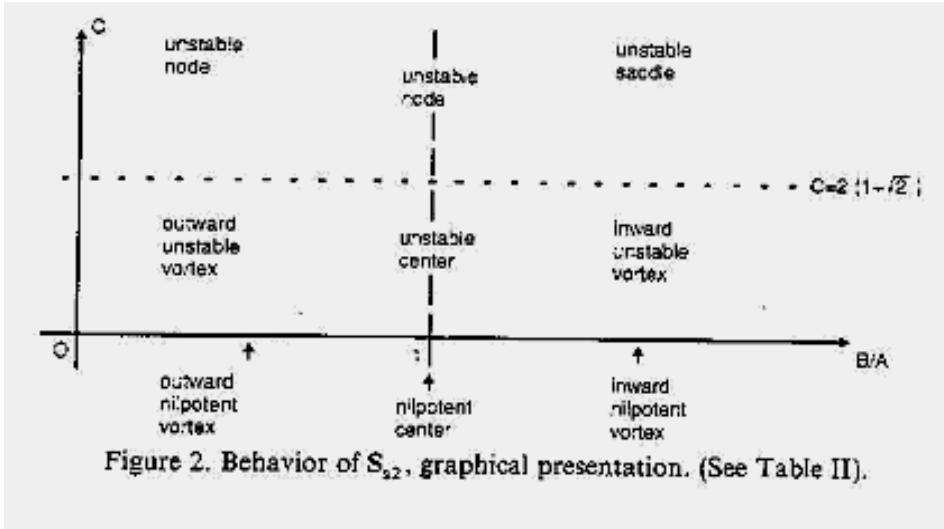
(Πίνακας 3α)

Behavior about  $S_{s3}$ —case  $0 \leq B \leq 1/8$

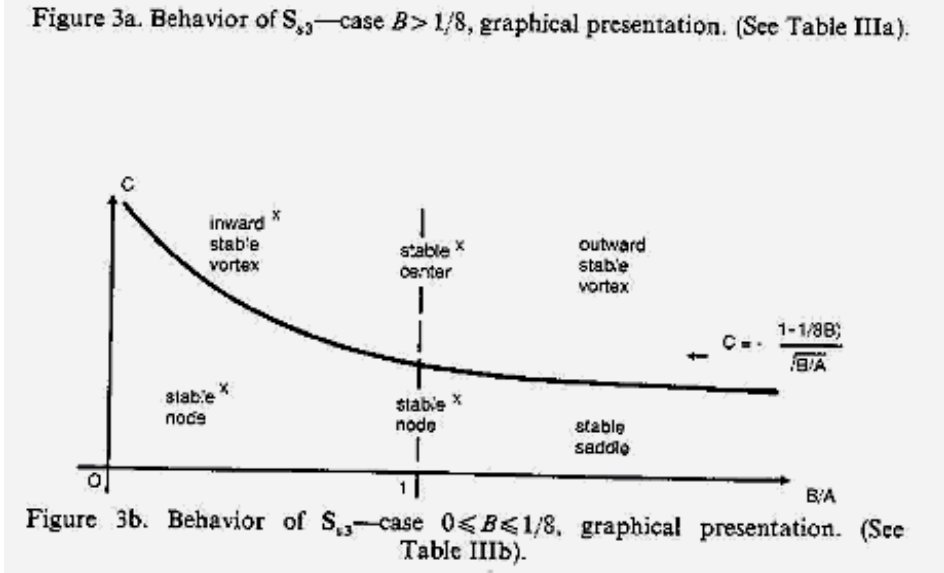
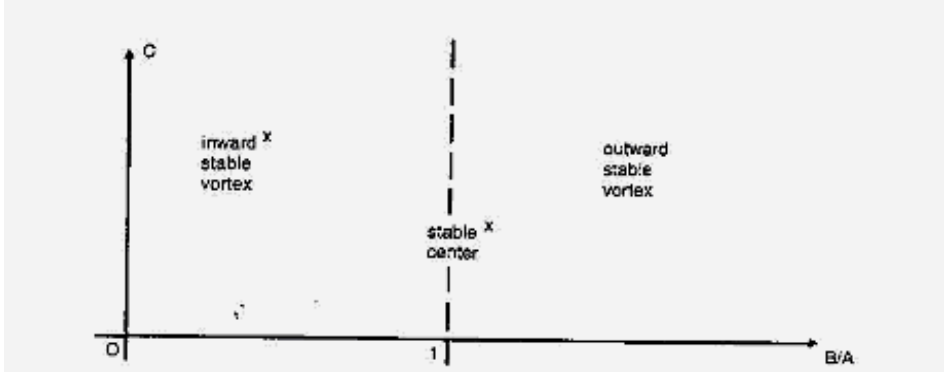
Parameter Variations →	$A > B$	$A = B$	$A < B$
$C > \left(\frac{1}{8B} - 1\right) \sqrt{A/B}$	Inward stable <sup>x</sup> vortex	Stable center <sup>x</sup>	Outward stable vortex
$0 \leq C \leq \left(\frac{1}{8B} - 1\right) \sqrt{A/B}$	Stable node <sup>x</sup>	Stable node <sup>x</sup>	Stable saddle

(Πίνακας 3β)

Βάσει των παραπάνω πινάκων είναι προφανές ότι οι διαφορετικές συνθήκες ευστάθειας καθορίζονται από τις δυο παραμέτρους  $C$  και  $B/A$ . Αυτό επιτρέπει την γραφική αναπαράσταση των πινάκων 2, 3α και 3β στα Γραφήματα 2, 3α και 3β.



(Γράφημα 2)



(Γραφήματα 3α, 3β)

### Γεωμετρικές ιδιότητες:

Εξετάζοντας το  $(\Sigma)$ , μπορεί να θεωρηθεί ότι περιέχει τα ακόλουθα τρία δισδιάστατα υποσυστήματα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = X - XY + CX^2 \\ \frac{dY}{dt} = -Y + XY \end{array} \right\} \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = X + CX^2 - AZX^2 \\ \frac{dZ}{dt} = -BZ + AZX^2 \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dt} = -Y \\ \frac{dZ}{dt} = -BZ \end{array} \right\} \quad (13)$$

Είναι σαφές ότι τα συστήματα (11), (12) και (13) βρίσκονται αντίστοιχα στους υποχώρους  $[X, Y]$ ,  $[X, Z]$  και  $[Y, Z]$  του  $\square^3$ . Συνεπώς, αν μια λύση του  $(\Sigma)$  βρίσκεται αρχικά σε έναν από τους υποχώρους, θα παραμείνει σε αυτόν. Έστω  $P_{xz} = \{(x, z) \in [X, Z] : x, z \geq 0\}$ . Ομοίως ορίζονται τα  $P_{xy}, P_{yz}$ . Έστω επίσης  $\bar{P}^3 = \{\square^3 \text{ όπου } X, Y, Z \geq 0\}$ . Τότε, το σύνολο  $P^3 = \{\bar{P}^3 \setminus \bar{P}_{xy} \cup \bar{P}_{xz} \cup \bar{P}_{yz}\}$  ορίζει το «θετικό» ανοικτό υποσύνολο του  $\square^3$ , όπου υπάρχουν τα αποτελέσματα για τα οποία ενδιαφερόμαστε. Αποδεικνύεται ότι:

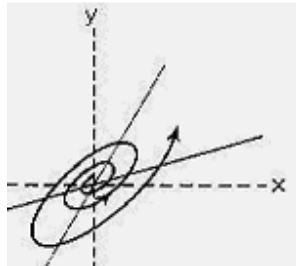
*Κάθε λύση του  $(\Sigma)$  με αρχικές συνθήκες στο  $P^3$  θα παραμείνει στο  $P^3$ .*

Για την μελέτη της ποιοτικής συμπεριφοράς του  $(\Sigma)$  στο  $P^3$ , θα αναλυθεί η ευστάθεια των τριών υποσυστημάτων (11), (12) και (13). Το υποσύστημα (13) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές στον υπόχωρο  $[Y, Z]$  του  $\square^3$ . Τα

αποτελέσματα του υποσυστήματος (11) είναι γνωστά από τους Davies (1962); Nicolis και Prigogine (1977). Το (11) είναι ειδική περίπτωση των εξισώσεων ανταγωνιζομένων ειδών, αν επιτρέψουμε και αρνητικές τιμές στους συντελεστές. Προκύπτει από τις εξισώσεις (7) αν θέσουμε:  $a_1 = 1, b_1 = -1, c_1 = 1, a_2 = -1, b_2 = 0, c_2 = -1$ . Για μια πιο διαισθητική κατανόηση,



μπορούμε να δούμε το υποσύστημα (11) ως διαταραχή του διδιάστατου μοντέλου Lotka –Volterra, εισάγοντας σε αυτό τον επιπλέον όρο  $+cx^2$  στην εξίσωση του θηράματος. Ο νέος αυτός παράγοντας διαταράσσει τις ευσταθείς ελλείψεις στο πεδίο φάσεως. Έτσι το πεδίο φάσεως από ευσταθής εστία μεταπηδάει σε ασταθή εστία όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Χάριν ευκολίας, το υποσύστημα αυτό ονομάζεται *υποσύστημα Lotka-Volterra*.

Τέλος, το υποσύστημα (12) είναι μη γραμμικό και είναι υπεύθυνο για την ενδιαφέρουσα συμπεριφορά του αρχικού συστήματος ( $\Sigma$ ). Αναλύοντας τα  $\Gamma(J(S_{s_3}))$ ,  $W(J(S_{s_3}))$ , τον Πίνακα 3 και την αντίστοιχη γραφική αναπαράστασή του (Γραφήματα 3α και 3β), προκύπτει ότι το σύστημα είναι πάντα ευσταθές στο σύνολο  $P_{xz}$ . Σημειώνεται ότι η διεύθυνση αστάθειας για το σημείο  $S_{s_3}$  προκύπτει από το πρώτο ιδιοδιάνυσμα του  $W(J(S_{s_3}))$ .

Πράγματι, στην Εικόνα 9 μπορούμε να δούμε το πρώτο ιδιοδιάνυσμα του  $W(J(S_{s_3}))$  που βγαίνει από το επίπεδο  $[X, Z]$  και δημιουργεί σύζευξη με το υποσύστημα Lotka-Volterra.

Επίσης, το υποσύστημα (12) περιέχει και όρους μεγαλύτερης τάξης, δηλαδή τάξης 3. Αυτό σημαίνει ότι για μεγάλες τιμές του μέτρου  $\|S\|$ , για  $S \in P^3$ , η ευστάθεια του ( $\Sigma$ ) κυριαρχείται από την συμπεριφορά του υποσυστήματος (12). Συγκεκριμένα, η ροή του (12) έχει την ιδιότητα να «σηκώνει» τις ασταθείς λύσεις του (11) και είτε να τις θέτει σε ισορροπία στο στάσιμο σημείο  $S_{s_3}$  είτε να τις εμβάλλει μέσω του  $S_{s_3}$  ξανά στη συμπεριφορά Lotka-Volterra, (βλ. Εικόνα 9).

### Γενική συμπεριφορά του ( $\Sigma$ ):

Οι όροι  $X + CX^2$ ,  $-Y$  και  $-BZ$  είναι όροι αύξησης και μείωσης του συστήματος. Οι υπόλοιποι είναι όροι ανατροφοδότησης. Οι εξισώσεις  $\frac{dY}{dt}$

και  $\frac{dZ}{dt}$  περιέχουν τους όρους θετικής ανατροφοδότησης  $XY$  και

$AZX^2$  αντίστοιχα ενώ η εξίσωση  $\frac{dX}{dt}$  περιέχει τους όρους αρνητικής

ανατροφοδότησης  $-XY$  και  $-AZX^2$ . Επίσης όλοι οι όροι ανατροφοδότησης εξαρτώνται από το  $X$ . Το  $X$  ενεργοποιεί την αύξηση των  $Y$  και  $Z$ , ενώ τα  $Y$  και  $Z$  μειώνουν το  $X$ . Αν δεν λαμβάνονταν υπόψη οι όροι ανατροφοδότησης, το  $X$  θα έτεινε στο άπειρο ενώ τα  $Y$  και  $Z$  θα αφανίζονταν. Συνεπώς τα  $Y$  και  $Z$  δεν μπορούν να επιζήσουν αν δεν θηρεύσουν το  $X$ , ενώ το  $X$  δε μπορεί να μείνει πεπερασμένο χωρίς τα  $Y$  και  $Z$ . Άρα το (Σ) είναι ένα μοντέλο δύο θηρευτών κι ενός θηράματος, στο οποίο οι θηρευτές  $Y$  και  $Z$  δεν αλληλεπιδρούν απ' ευθείας μεταξύ τους, αλλά ανταγωνίζονται για το θήραμα  $X$ .

Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι η γενική συμπεριφορά τους συστήματος θα εξαρτάται από την συμπεριφορά του  $X(t)$  και τους όρους ανατροφοδότησης. Για μεγάλες τιμές του  $X$ , η εξίσωση  $\frac{dX}{dt}$  μπορεί να προσεγγιστεί με την

$$\frac{dX}{dt} = X^2(C - AZ) \quad (14)$$

εφόσον παραλειφθούν οι όροι  $X$  (χαμηλότερης τάξης) και  $XY$  (αφού

$$X \ll Y). \text{ Η λύση της (14) είναι } X(t) = \frac{X_0}{1 - X_0(C(t-t_0) - A \int_{t_0}^t Z(\tau) d\tau)} \quad (15)$$

όπου  $A \int_{t_0}^t Z(\tau) d\tau > 0$ . Διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

(i)  $C(t-t_0) > A \int_{t_0}^t Z(\tau) d\tau$  και (ii)  $C(t-t_0) < A \int_{t_0}^t Z(\tau) d\tau$ . Ας υποτεθεί ότι η αρχική

συνθήκη για το (Σ) είναι μια μεγάλη τιμή του  $X$  και ότι η σχέση (i) αρχικά ικανοποιείται. Σημειώνεται ότι η σχέση (15) γράφεται και ως εξής:

$$X(t) = \frac{1}{1/X_0 - (C(t-t_0) - A \int_{t_0}^t Z(\tau) d\tau)}. \text{ Καθώς το } t \text{ μεγαλώνει, από την τελευταία}$$

σχέση φαίνεται ότι θα μεγαλώνει και η λύση  $X(t)$ , η οποία με τη σειρά της θα αυξήσει τις λύσεις  $Y(t)$  και  $Z(t)$  λόγω των όρων θετικής ανατροφοδότησης. Το γεγονός αυτό θα αυξήσει την αρνητική

ανατροφοδότηση στο είδος  $X$  και θα αναγκάσει την περίπτωση (ii) να προκύψει. Έτσι θα αποτρέψει το  $X(t)$  να απειρισθεί σε πεπερασμένο χρόνο. Η αρνητική ανατροφοδότηση θα αρχίσει να μειώνει το  $X$ , το οποίο θα μειώσει τη θετική ανατροφοδότηση του  $X$  πάνω στις λύσεις  $Y(t)$  και  $Z(t)$ . Συνεπώς θα μειωθούν οι λύσεις  $Y(t)$  και  $Z(t)$ . Αν τώρα το  $Z(t)$  μειωθεί σε τέτοιο βαθμό ώστε η περίπτωση (i) να ικανοποιηθεί ξανά, οι λύσεις θα αρχίσουν να αυξάνονται μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη (ii). Άρα, μια τροχιά μπορεί να πηγαινει συνεχώς από τη μία συνθήκη στην άλλη, πράγμα που θα αναγκάσει το  $(\Sigma)$  να ταλαντωθεί. Όμως, αν κάποιες λύσεις ικανοποιήσουν την περίπτωση (ii), έτσι ώστε να ικανοποιείται για κάθε  $t$ , τότε οι τροχιές θα σταματήσουν σε στάσιμο σημείο. Όμοια με το σύστημα Lorentz έχουμε ότι:

*Σε κάθε περίπτωση, το  $(\Sigma)$  θα είναι φραγμένο.*

### **Διακλαδώσεις και ευστάθεια:**

#### Διαγράμματα ευστάθειας:

Εφ' όσον το  $(\Sigma)$  είναι φραγμένο στο  $P^3$ , η συμπεριφορά του καθορίζεται από τη συμπεριφορά των τριών στάσιμων σημείων  $S_{s1}$ ,  $S_{s2}$ ,  $S_{s3}$ . Εφ' όσον το σημείο  $S_{s1}$  είναι πάντα σημείο σάγγατος, οι τροχιές θα απομακρύνονται από αυτό για κάθε  $A, B, C$ . Όμως τα σημεία  $S_{s2}$  και  $S_{s3}$  έχουν διαφορετική συμπεριφορά καθώς αλλάζουν οι παράμετροι. Γι' αυτό επιδρούν στις τροχιές με διαφορετικό τρόπο. Τα παρακάτω διαγράμματα αναλύουν την επίδραση των  $S_{s2}$  και  $S_{s3}$  πάνω στις τροχιές του συστήματος. Τα διαγράμματα αυτά βρίσκονται υπερθέτοντας τα γραφήματα 2, 3a και τα γραφήματα 2, 3b. Έτσι ορίζουν διάφορες περιοχές ευστάθειας, οι οποίες θα αναλυθούν στην συνέχεια.

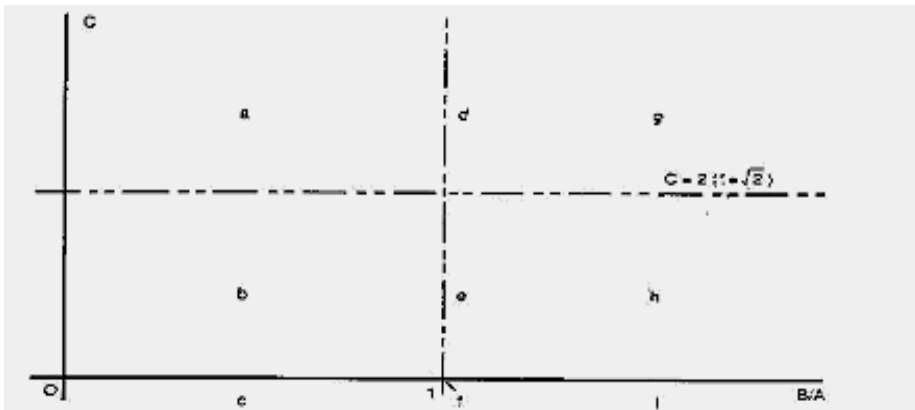


Figure 4. Superposition of Figs 2 and 3a, case  $1/8 < B$ —stability diagram.

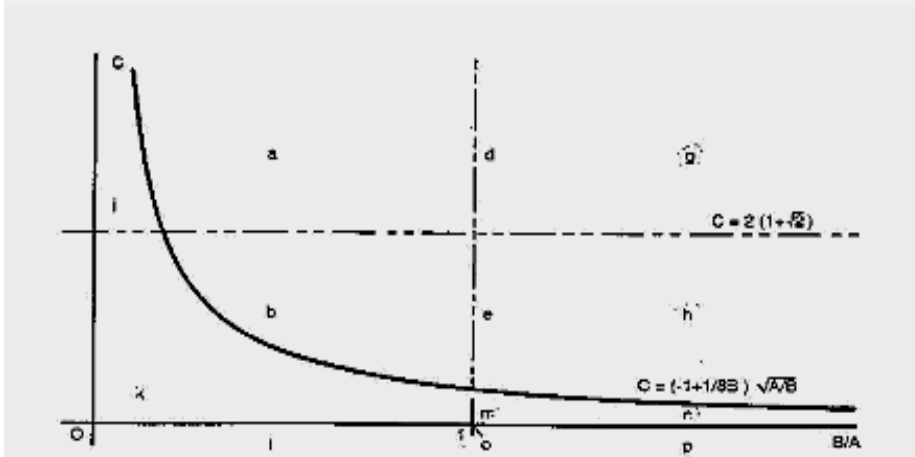


Figure 5. Superposition of Figs 2 and 3b, case  $1/(8(3 + \sqrt{2})) \leq B \leq 1/8$ —stability diagram.

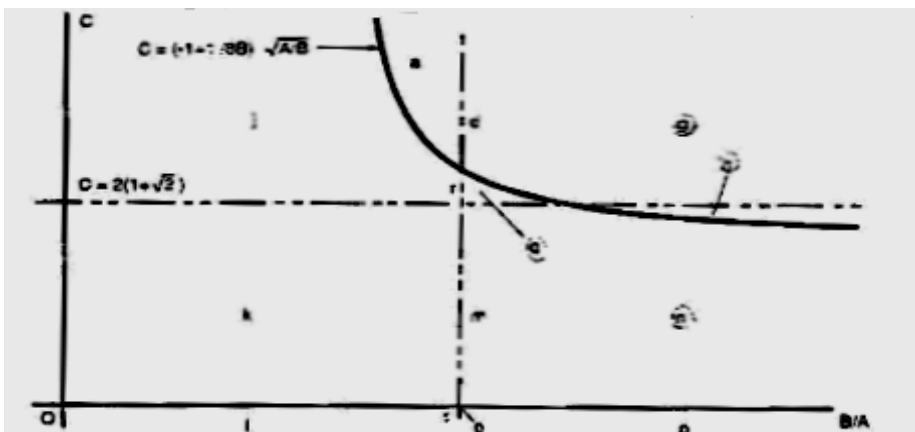


Figure 6. Superposition of Figs 2 and 3b, case  $0 < B < 1/(8(3 + \sqrt{2}))$ —stability diagram.

(Διαγράμματα 4,5,6)

### Μηχανισμοί διακλάδωσης:

Τα στάσιμα σημεία  $S_{s_2}$  και  $S_{s_3}$  βρίσκονται στα θετικά τεταρτημόρια  $P_{xy}$  και  $P_{xz}$  αντίστοιχα. Επιπλέον δύο από τις τρεις ιδιοτιμές του  $S_{s_2}$  βρίσκονται στο  $P_{xy}$ . Ομοίως, δύο από τις τρεις ιδιοτιμές του  $S_{s_3}$  βρίσκονται στο  $P_{xz}$ . Τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών αυτών δεν αλλάζουν πρόσημο καθώς μεταβάλλεται ο λόγος  $B/A$ . Επομένως ο μηχανισμός διακλάδωσης θα πρέπει να ενεργοποιείται από τις καθαρά πραγματικές ιδιοτιμές των στάσιμων σημείων  $S_{s_2}$  και  $S_{s_3}$ . Από τις σχέσεις (9), (10) φαίνεται ότι οι ζητούμενες ιδιοτιμές (τα πρώτα στοιχεία των πινάκων  $\Gamma\{J(S_{s_i})\}$ , για  $i=2,3$ ) είναι οι  $A-B$  και  $B/A$ .

Με μια περαιτέρω ανάλυση συμπεραίνεται ότι τα ιδιοδιανύσματα των μιγαδικών ιδιοτιμών ορίζουν στροφές στα  $P_{xy}$  και  $P_{xz}$  ενώ τα ιδιοδιανύσματα των πραγματικών ιδιοτιμών διαπερνούν τα  $P_{xy}$  και  $P_{xz}$ . Επομένως οι δύο πραγματικές ιδιοτιμές δημιουργούνται μέσω της αλληλεπίδρασης όλων των ειδών του  $(\Sigma)$ , ενώ η εμφάνιση των στροβίλων κοντά στα σημεία  $S_{s_2}$  και  $S_{s_3}$  δημιουργείται μέσω της αλληλεπίδρασης των ειδών  $X, Y$  ή  $X, Z$ .

### Περιοχές ευστάθειας:

Αναλύεται τώρα, για παράδειγμα, η περιοχή **a** των διαγραμμάτων 4, 5. Εκεί, το  $S_{s_2}$  είναι ασταθής κόμβος ενώ το  $S_{s_3}$  εσωτερικά ευσταθής στρόβιλος. Κάθε τροχιά στο  $P^3$  θα απωθείται από το  $S_{s_2}$  και θα έλκεται από το  $S_{s_3}$ , όπου τελικά θα ισορροπεί. Άρα στην περιοχή **a** το  $(\Sigma)$  ισορροπεί στο  $P^3$ , και άρα η περιοχή αυτή δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον.

Αναλύοντας και τις υπόλοιπες περιοχές των Διαγραμμάτων 4, 5, 6 συμπεραίνονται τα εξής:

Οι περιοχές **a, b, c, d, e, f, j, k, l, m, o** και **r** είναι ευσταθείς.

Η περιοχή **p** είναι περιοδική / ευσταθής.

Οι περιοχές **g, h, n** και **q** είναι χαοτικές / περιοδικές.

Παρατηρείται ότι οι λύσεις αριστερά και πάνω στην ευθεία  $B/A=1$  είναι ευσταθείς ενώ οι χαοτικές ή περιοδικές λύσεις βρίσκονται στα δεξιά της ευθείας  $B/A=1$ .

## Ο χαοτικός ελκυστής και εκρηκτική πορεία προς το χάος

Θα αναλυθεί τώρα η συμπεριφορά του  $(\Sigma)$  πάνω στην παραμετρική ευθεία  $B/A=1$ . Θέτοντας  $B/A=1$  και εξισώνοντας το σύστημα με το μηδέν, βρίσκονται τα στάσιμα σημεία. Ένα σύνολο λύσεων είναι το  $L = \{(X, Y, Z); \text{ όπου } X=1 \text{ και } Y + AZ = 1 + C\}$ . Οι λύσεις αυτές αποτελούν μία μονοδιάστατη αμετάβλητη πολλαπλότητα παράλληλη στο επίπεδο  $[Y, Z]$  στο ύψος  $X=1$  και περνάει από τα σημεία  $S_{s_2}$  και  $S_{s_3}$ . Κάθε σημείο πάνω στην ευθεία  $L$  είναι στάσιμο και άρα δεν υπάρχει κίνηση πάνω σε αυτή. Αριστερά της παραμετρικής ευθείας  $B/A=1$ , η πολλαπλότητα  $L$  ασκεί ροή προς το στάσιμο σημείο  $S_{s_3}$ . Όπως ειπώθηκε και πριν, αριστερά της ευθείας  $B/A=1$  βρίσκονται οι ευσταθείς λύσεις. Όμως δεξιά της παραμετρικής ευθείας  $B/A=1$ , η πολλαπλότητα  $L$  αναγκάζει την κίνηση προς τον εσωτερικά ασταθή στρόβιλο που ορίζεται από το  $S_{s_2}$ . Αυτό μπορεί να συμβεί στις περιοχές **g**, **h**, **n** και **q**.

Αναλύεται τώρα τη ροή των λύσεων στην περιοχή **h**. Εκεί το στάσιμο σημείο  $S_{s_3}$  είναι εξωτερικά ευσταθής στρόβιλος (index 1 saddle focus), ενώ το  $S_{s_2}$  είναι εσωτερικά ασταθής στρόβιλος (index 2 saddle focus). Συνεπώς, στην περιοχή αυτή και τα τρία στάσιμα σημεία απωθούν τις τροχιές. Εφόσον δεν υπάρχουν καταβόθρες στο  $P^3$  και το  $(\Sigma)$  είναι φραγμένο, η δημιουργία περιοδικών ή χαοτικών τροχιών είναι αναμενόμενη.

Ας θεωρήσουμε μια λύση που να ξεκινάει κοντά στο  $S_{s_2}$ . Εφόσον δεν μπορεί να σταθεροποιηθεί στο  $S_{s_2}$  ξαναεμβάλλεται στο  $P^3$  (αναγέννηση του  $Z$ ). Όμως αφού το  $(\Sigma)$  είναι φραγμένο, θα περιορίσει την κίνηση της λύσης και η περίπτωση (ii) θα αναγκάσει την ροή να κινηθεί προς το  $S_{s_3}$  (εξαφάνιση του  $Y$ ). Κοντά στο  $S_{s_3}$  το ιδιοδιάνυσμα προκαλεί την αναγέννηση του  $Y$  και ξανακατευθύνει την ροή προς το  $S_{s_2}$  (εξαφάνιση του  $Z$ ). Η διαδικασία αυτή θα επαναλαμβάνεται συνεχώς παράγοντας ταλαντώσεις.

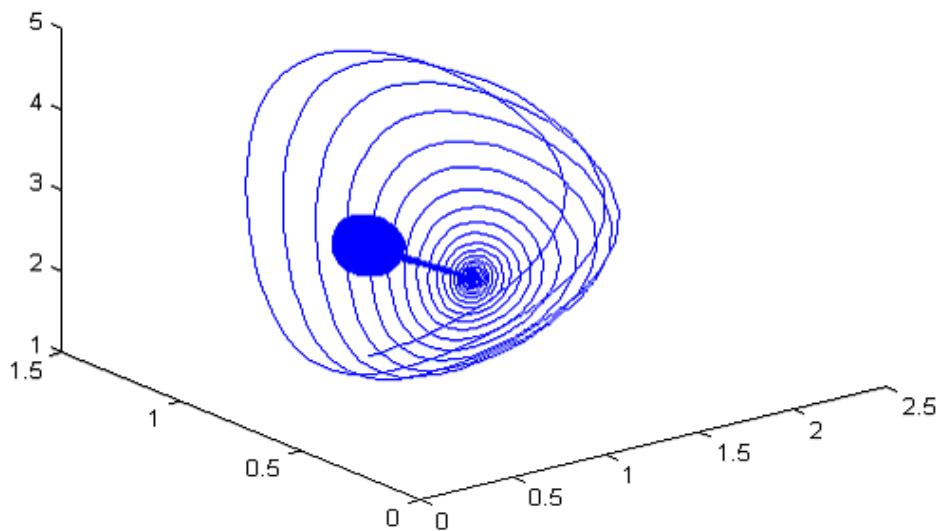
Παρόμοια δυναμική εμφανίζεται και στις περιοχές **g** και **n**. Η μόνη διαφορά είναι ότι η μία από τις δύο μιγαδικές ιδιοτιμές χάνει το φανταστικό της μέρος. Στη περιοχή **q** όλες οι ιδιοτιμές είναι φανταστικές, και όμως παρατηρείται ταλαντωτική συμπεριφορά ανάμεσα στα στάσιμα σημεία  $S_{s_2}$  και  $S_{s_3}$ .

Σε κάθε περίπτωση, η σχετική θέση των ιδιοδιανυσμάτων των πραγματικών ιδιοτιμών των  $S_{s_2}$  και  $S_{s_3}$  και το γεγονός ότι το αρχικό σύστημα ( $\Sigma$ ) είναι φραγμένο είναι υπεύθυνα για την ταλαντωτική συμπεριφορά και στις τέσσερις περιοχές.

Παρακάτω παραθέτουμε αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης μέσω Matlab. Χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες παράμετροι με των N.Samardzija και L. Greller.

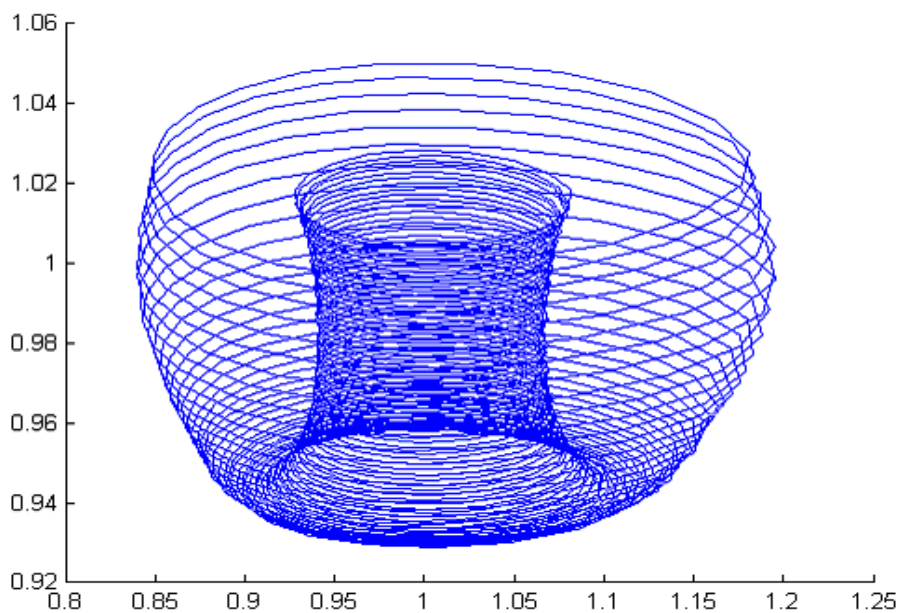
### Χαοτικός ελκυστής στην περιοχή g:

Επιλέγουμε τις παραμέτρους  $a=2.9851$ ,  $b=3.0$ ,  $c=7.0$ . Στο πρώτο σχήμα (Εικόνα 10) ξεκινάμε από το αρχικό σημείο  $(1, 1, 1)$  και βλέπουμε πως η τροχιά καταλήγει τελικά στον χαοτικό ελκυστή (attracting bead).



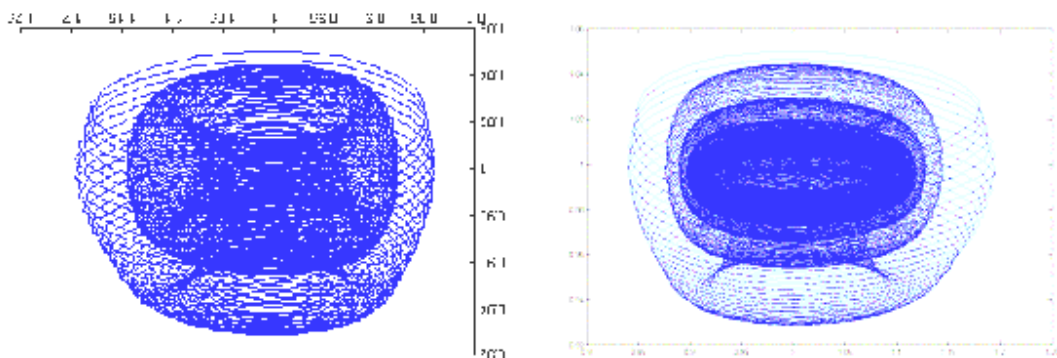
(Εικόνα 10)

Ο ελκυστής φαίνεται καλύτερα στην Εικόνα 11 αν ξεκινήσουμε από το αρχικό σημείο  $[1, 1, 2]$  που βρίσκεται μέσα στον ελκυστή:



(Εικόνα 11)

Ξεκινώντας πάλι από το σημείο  $(1, 1, 2)$  και αφήνοντας το χρόνο να τρέξει βλέπουμε ότι δημιουργείται και δεύτερος ελκυστής μέσα στον πρώτο ο οποίος έχει μεγαλύτερη κεντρική «οπή» αλλά μικρότερη ακτίνα από τον πρώτο. Αυτός ο σχηματισμός ελκυστών συνεχίζεται επ' άπειρον με κάθε έναν να παγιδεύεται μέσα στον προηγούμενο (Εικόνα 12).

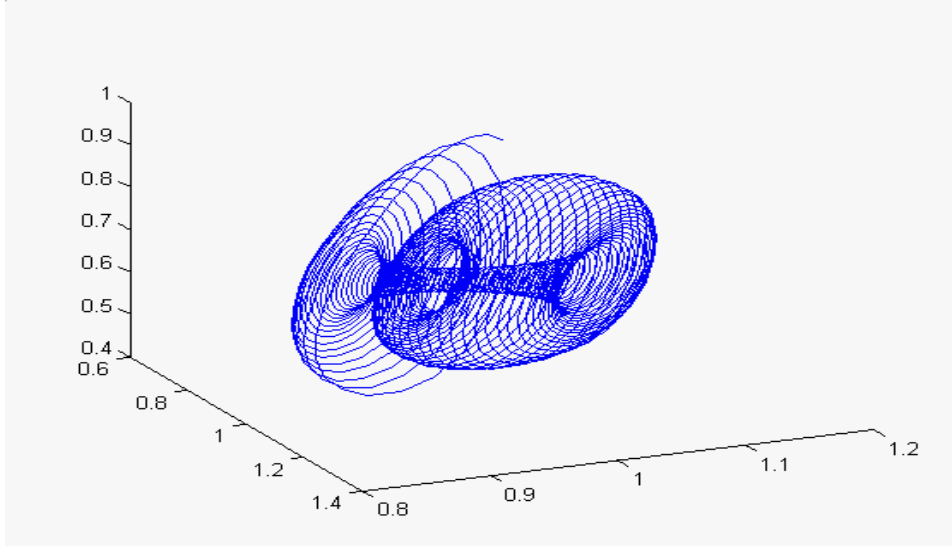


(Εικόνα 12)



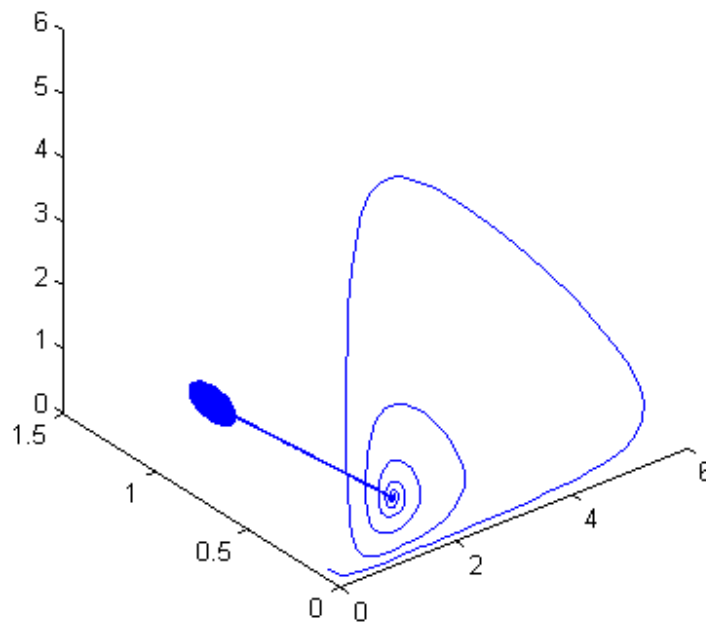
Χαοτικός ελκυστής στην περιοχή h:

Επιλέγουμε τις παραμέτρους  $a=2.9851$ ,  $b=3.0$ ,  $c=2.0$ . Στην παρακάτω εικόνα ξεκινάμε την τροχιά από το αρχικό σημείο  $(1, 1, 1)$ .



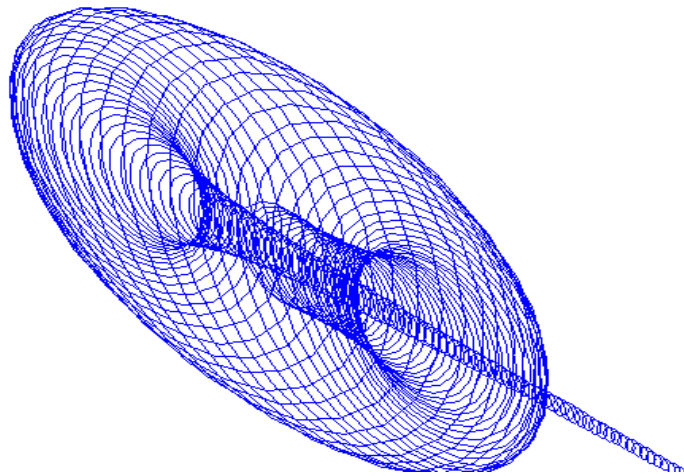
(Εικόνα 13)

Αν ξεκινήσουμε από άλλο αρχικό σημείο, θα εμφανιστεί παρόμοιος ελκυστής. Πράγματι, με αρχικό σημείο το  $[0.1, 0.1, 0.1]$ , έχουμε την παρακάτω τροχιά που όπως βλέπουμε καταλήγει κι αυτή σε χαοτικό ελκυστή:



(Εικόνα 14)

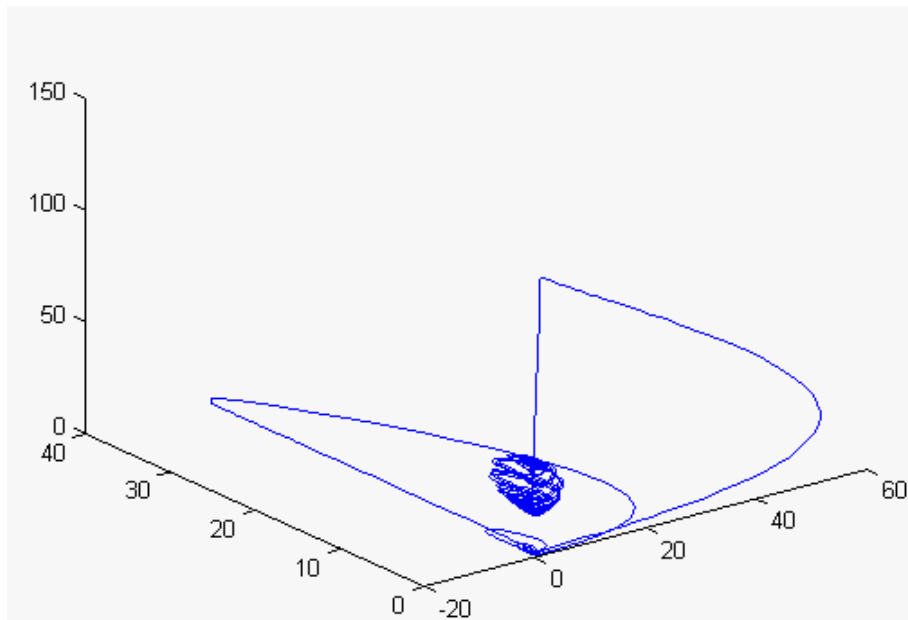
Και μεγεθύνοντας παίρνουμε ελκυστή της ίδιας μορφής:



(Εικόνα 15)

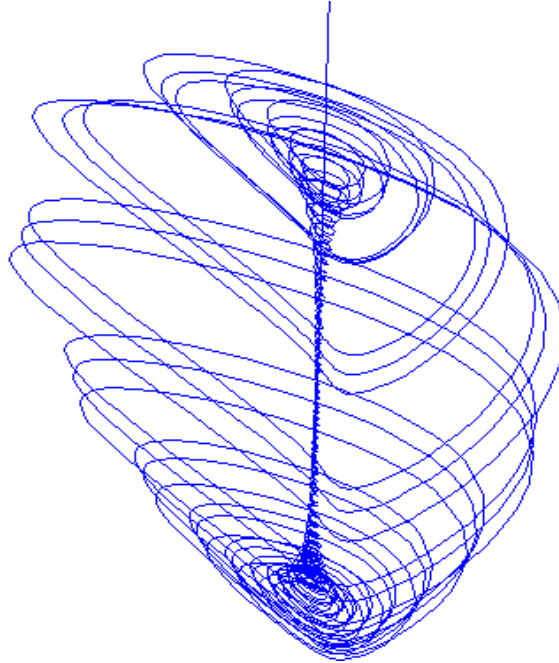
**Χαοτικός ελκυστής στην περιοχή  $n$ :**

Επιλέγουμε τις παραμέτρους  $a=0.0109$ ,  $b=0.0145$ ,  $c=0.3$ . Ξεκινώντας την τροχιά από το αρχικό σημείο  $(1, 1, 1)$ , βλέπουμε στην Εικόνα 16 πως παγιδεύεται και πάλι σε χαοτικό ελκυστή:



(Εικόνα 16)

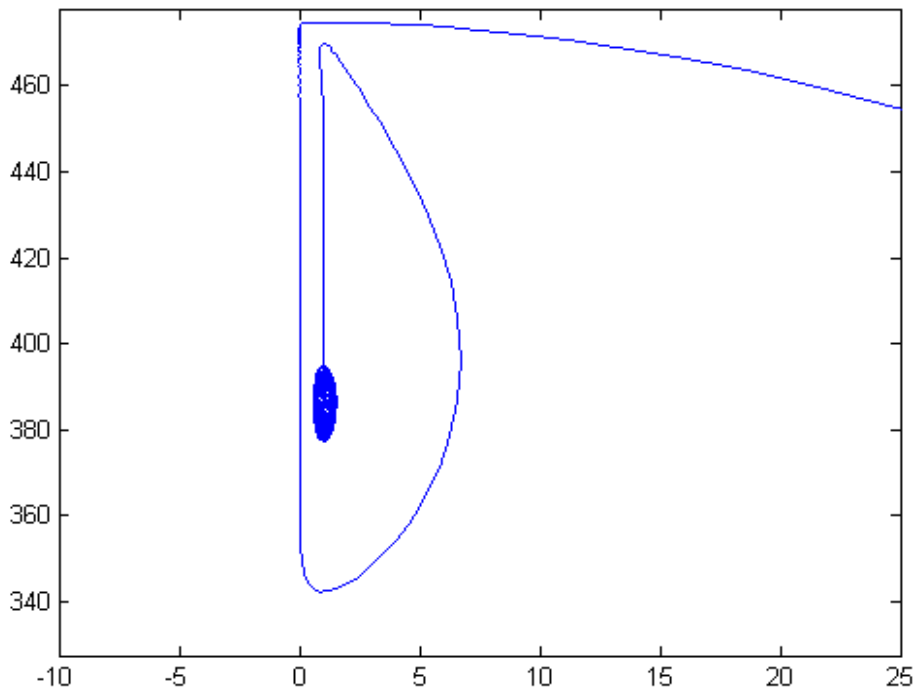
Ο ελκυστής της περιοχής  $n$  φαίνεται καλύτερα στην μεγέθυνση της Εικόνας 17:



(Εικόνα 17)

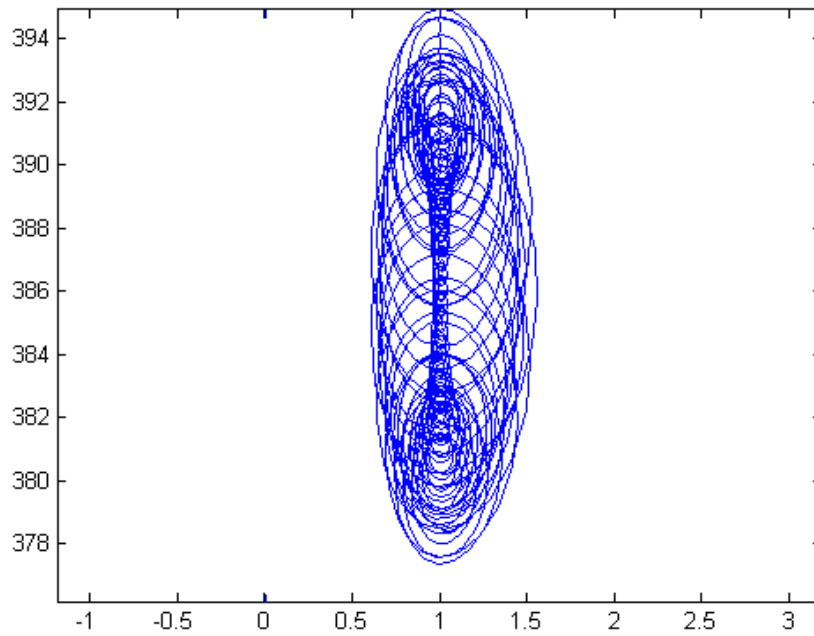
**Χαοτικός ελκυστής στην περιοχή  $q$ :**

Επιλέγουμε τις παραμέτρους  $a=0.01425$ ,  $b=0.0145$ ,  $c=5.5$ . Επιλέξαμε το αρχικό σημείο  $(20, 20, 200)$  ώστε να μπορέσει να φανεί ο ελκυστής σε λίγα βήματα.



(Εικόνα 18)

Ο ελκυστής φαίνεται καλύτερα στη μεγέθυνση της Εικόνας 19.



(Εικόνα 19)

Όλες οι παραπάνω λύσεις είναι χαοτικές και καμία περιοδική λύση δεν εμφανίστηκε κοντά στη παραμετρική ευθεία  $B/A=1$ . Επίσης, κάθε ελκυστής εμφανίζει την «ευθεία»  $L$ . Αυτή η «ευθεία» δεν αναπαριστά μία μοναδική τροχιά. Αντίθετα πρέπει να ειδωθεί σαν η πολλαπλότητα στην οποία ο χώρος φάσεως γύρω από τους στροβίλους καταπίπτει σε μια πυκνή δέσμη τροχιών. Αυτή η ευθεία επιδεικνύει την πιο αργή δυναμική του ελκυστή και ονομάζεται «*αργή πολλαπλότητα*» (slow manifold). Η αργή πολλαπλότητα διατρέχει κεντρικά τον ελκυστή. Αντίθετα, η *γρήγορη πολλαπλότητα* είναι ο εξωτερικός φλοιός του ελκυστή. Σημειώνεται ότι, καθώς το  $B/A$  αυξάνεται, η αργή πολλαπλότητα ανοίγει σε μια τρύπα και ο χαοτικός ελκυστής εξελίσσεται σε ένα συμβατικό τοροϊδές σχήμα (toroidal shape). Ο χαοτικός ελκυστής που συζητήθηκε είναι γνωστός ως *φράκταλ τόρος* (fractal torus).

#### Συμπέρασμα:

Συμπεραίνουμε ότι το  $(\Sigma)$  μεταπηδάει από την ευσταθή κατάσταση κατ' ευθείαν στο χάος μέσω της γέννησης ενός φράκταλ τόρου. Σ' αυτή τη διαδικασία δεν υπάρχουν περιοδικές λύσεις ανάμεσα στις ευσταθείς περιοχές και τις χαοτικές περιοχές.

## Κεφάλαιο 4: Θεωρία Κόμβων (Knot theory) και τοπολογική χειρουργική (Surgery)

### 4.1 Εισαγωγικοί ορισμοί:

Παραθέτουμε αρχικά μερικούς ορισμούς που θα χρειαστούν στη συνέχεια.

Ορισμός 8: Ένας *τοπολογικός χώρος* είναι ένα σύνολο  $X$  εφοδιασμένο με μια συλλογή  $T$  ανοιχτών υποσυνόλων του  $X$  ( $T \subseteq P(X)$ ) έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:

- $\emptyset, X \in T$
- Η ένωση οποιασδήποτε συλλογής συνόλων του  $T$  ανήκει στο  $T$ .
- Η τομή πεπερασμένων συνόλων του  $T$  ανήκει στο  $T$ .

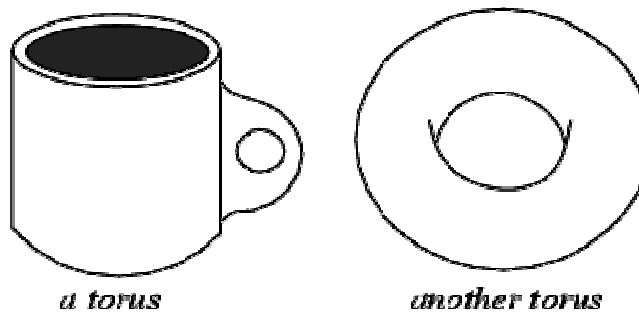
Το σύνολο  $T$  είναι μια *τοπολογία* στο  $X$ .

Ορισμός 9: Ένας τοπολογικός χώρος είναι *συμπαγής* αν κάθε ανοιχτό του κάλυμμα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Ορισμός 10: Ένας χώρος είναι *συνεκτικός* αν κάθε δύο σημεία του μπορούν να συνδεθούν μέσω μιας καμπύλης που βρίσκεται εξολοκλήρου μέσα στο χώρο.

Ορισμός 11: Έστω  $A, B$  τοπολογικοί χώροι. Μια απεικόνιση  $h: A \rightarrow B$  ονομάζεται *ομοιομορφισμός* αν είναι 1-1, επί και οι  $h$  και  $h^{-1}$  είναι συνεχείς. Διαισθητικά μπορούμε να δούμε έναν τοπολογικό χώρο ως ένα γεωμετρικό αντικείμενο από λάστιχο και τον ομοιομορφισμό σαν μια συνεχή διαδικασία τεντώματος, κάμψης και συμπίεσης του αντικειμένου, που του αλλάζει το σχήμα.

Ένα κλασικό παράδειγμα ομοιομορφισμού είναι ανάμεσα στο φλιτζάνι και τον στερεό τόρο.



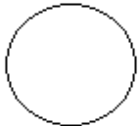
(Εικόνα 20)

Ορισμός 12: Μια  $n$ -διάστατη *πολλαπλότητα*  $M^n$  είναι ένας τοπολογικός χώρος που μπορεί να καλυφθεί από ανοιχτά σύνολα, καθένα από τα οποία είναι ομοιομορφικό με τον  $\mathbb{R}^n$  ή τον ημίχωρο  $\mathbb{R}_+^n$ . Τα σημεία της  $M^n$  με περιοχή ομοιόμορφη με τον  $\mathbb{R}^n$  ονομάζονται *εσωτερικά σημεία* της  $M^n$ . Τα σημεία της  $M^n$  με περιοχή ομοιόμορφη με τον  $\mathbb{R}_+^n$  λέμε ότι ανήκουν στο *σύνορο* της  $M^n$ ,  $\partial M^n$ .

Ορισμός 13: Μια *πολλαπλότητα*  $M$  είναι *προσανατολίσιμη* αν είναι δυνατό να οριστεί στην  $M$  ένας ολικός προσανατολισμός.

Παραδείγματα:

-Μονοδιάστατες *πολλαπλότητες*:



Ο κύκλος  $S^1$  είναι μια μονοδιάστατη προσανατολίσιμη *πολλαπλότητα* χωρίς σύνορο.



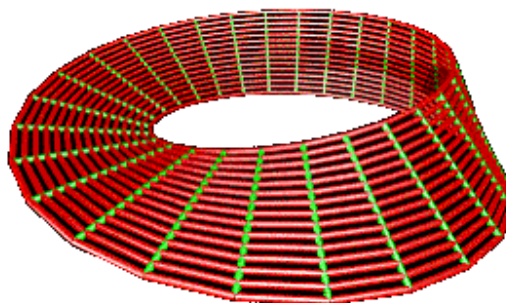
Το ευθύγραμμο τμήμα είναι μια μονοδιάστατη προσανατολίσιμη *πολλαπλότητα* με σύνορο.

-Ακολουθούν μερικές διδιάστατες *πολλαπλότητες*, προσανατολίσιμες ή όχι, με ή χωρίς σύνορο.





Το μπουκάλι του Klein είναι μια μη προσανατολίσιμη πολλαπλότητα χωρίς σύνορο.



Η ταινία του Moebius είναι μια μη προσανατολίσιμη πολλαπλότητα με σύνορο έναν κύκλο.

(Εικόνα 21)

Από δω και στο εξής όλες οι πολλαπλότητες θα θεωρούνται συμπαγείς, με ή χωρίς σύνορο.

### **Θεωρία Κόμβων:**

Ιστορική αναδρομή: Η Θεωρία των Κόμβων γεννιέται στα μέσα του 19<sup>ου</sup> αιώνα από τον φυσικό William Thompson (Λόρδος Kelvin) σε μια προσπάθεια να μοντελοποιήσει το άτομο. Πολύ γρήγορα εμφανίστηκε το μαθηματικό πρόβλημα της κατάταξης των κόμβων. Ο βοηθός του, ο φυσικός Peter Guthrie Tait ξεκινάει αυτή την κατάταξη καταγράφοντας τα διαγράμματα των κόμβων με 1, 2, 3, ... διασταυρώσεις και αφαιρώντας στη συνέχεια εκείνα που αναπαριστούν τον ίδιο κόμβο. Ο Tait αφιερώνει όλη τη ζωή του σε αυτό το έργο και σταματάει στις 10 διασταυρώσεις. Στη συνέχεια, η Θεωρία Κόμβων συνεχίζεται από τους μαθηματικούς. Από τους πρώτους εκπροσώπους ήταν οι: Friedrich Gauss, ο μαθητής του Listing, James Alexander, Kurt Reidemeister, Emil Artin, κ.ά.

Μερικοί ορισμοί: Ένας κόμβος ορίζεται ως η εικόνα μιας εμφύτευσης του  $S^1$  στον  $\mathbb{R}^3$  ή  $S^3$ . Ένας κρίκος με  $n$  συνιστώσες είναι η εικόνα μιας εμφύτευσης  $n$  αντιγράφων του  $S^1$  στον  $\mathbb{R}^3$  ή  $S^3$  (βλ Εικόνα 22).





Ο κόμβος τριφύλλι



Ένας κρίκος με δύο συνιστώσες

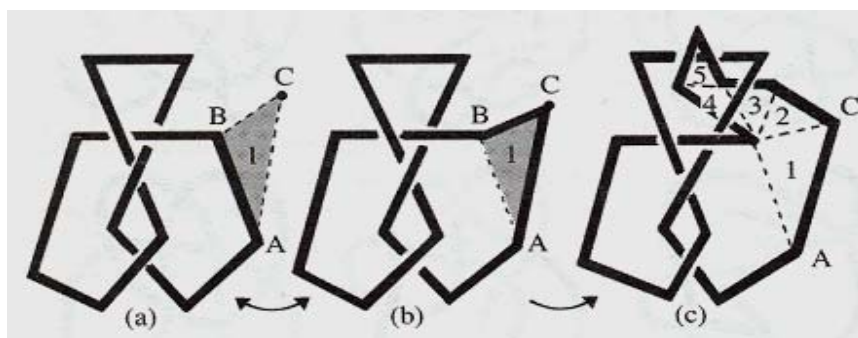
(Εικόνα 22)

Ένας κόμβος (ή κρίκος) μπορεί να θεωρηθεί ως μια μονοδιάστατη πολλαπλότητα χωρίς σύνορο εμφυτευμένη στον  $\square^3$  (ή στη σφαίρα  $S^3$ ). Δύο κόμβοι (ή κρίκοι)  $k_1, k_2$  θα λέγονται *ισοτοπικοί* όταν υπάρχει ομοιομορφισμός  $h: \square^3 \rightarrow \square^3$  με  $h(k_1) = k_2$ . Στην πράξη, η ισοτοπία επιτρέπει την παραμόρφωση ενός κόμβου στο χώρο όπως παραμορφώνουμε μια κλωστή (χωρίς να την κόψουμε). Για παράδειγμα, οι δύο παρακάτω κόμβοι είναι ισοτοπικοί:



(Εικόνα 23)

Η ισοτοπία είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των κρίκων. Μια κλάση ισοδυναμίας λέγεται *τύπος* ενός κόμβου ή κρίκου. Μια ισοτοπία είναι μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών ισοτοπιών. Μια *στοιχειώδης ισοτοπία* πραγματοποιείται είτε εισάγοντας ένα νέο σημείο (π.χ το σημείο  $C$  στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  στο (b) της Εικόνας 24) και στην συνέχεια αντικαθιστώντας το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  του κόμβου με τις δύο άλλες πλευρές του τριγώνου ( $AC \cup CB$ ), είτε κάνοντας την αντίστροφη διαδικασία. Στο (c) της Εικόνας 24 βλέπουμε την πραγματοποίηση τεσσάρων ακόμη στοιχειωδών ισοτοπιών.



(Εικόνα 24)

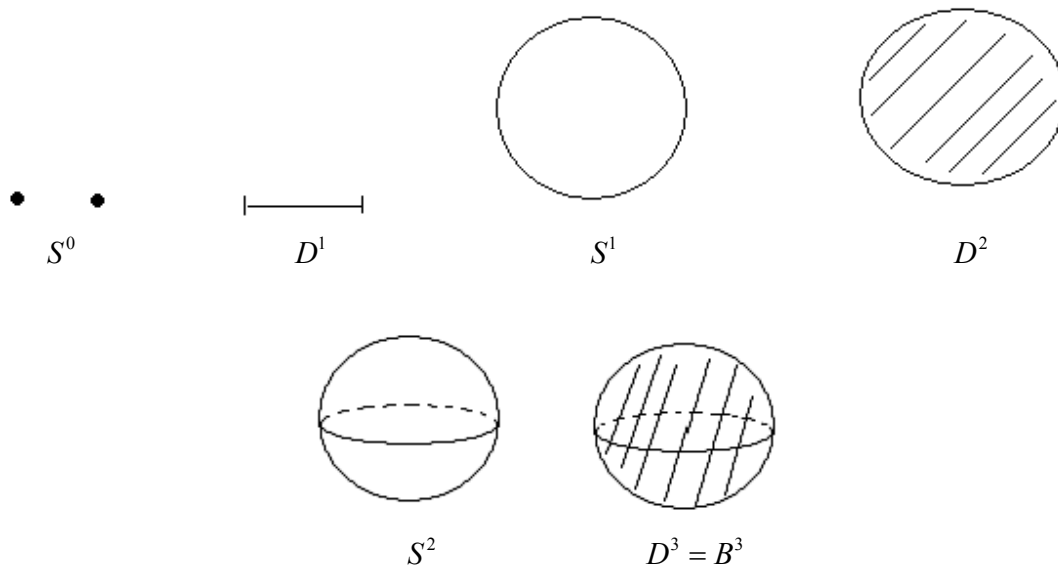
Ένα από τα μεγάλα προβλήματα της θεωρίας κόμβων είναι το εξής: δεδομένων δύο κόμβων ή κρίκων να αποφανθούμε εάν αυτοί είναι ισοτοπικοί ή όχι.

## 4.2 Χειρουργική σε μία διάσταση:

### Εισαγωγή:

Η χειρουργική είναι μια τεχνική της τοπολογίας χαμηλών διαστάσεων που χρησιμοποιείται στη μελέτη και ταξινόμηση τοπολογικών χώρων.

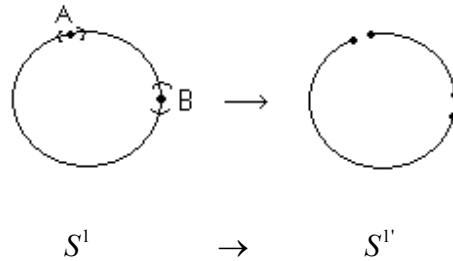
Συμβολισμοί: Συμβολίζουμε με  $S^n$  τη σφαίρα διάστασης  $n$  και με  $D^n$  τον δίσκο διάστασης  $n$ . Ορίζουμε και το  $S^0$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα ώστε να ισχύει η σχέση:  $\partial D^n = S^{n-1}$ ,  $\forall n > 0$ . Η  $n$ -διάστατη σφαίρα  $S^n$  και ο  $n$ -διάστατος δίσκος  $D^n$  είναι συμπαγείς πολλαπλότητες, η σφαίρα χωρίς σύνορο, ο δίσκος με σύνορο.



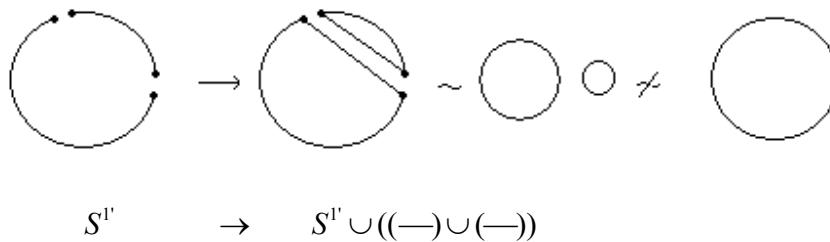
Με το σύμβολο « $\sim$ » δηλώνουμε τη σχέση ομοιομορφισμού. Εύκολα διαπιστώνονται ότι:  $S^1 \sim \square^1 \cup (\infty)$ ,  $S^2 \sim \square^2 \cup (\infty)$  (στερεογραφική προβολή). Ισχύει γενικά ότι  $S^n \sim \square^n \cup (\infty)$ .

### Η ιδέα της μονοδιάστατης χειρουργικής:

Θεωρούμε την μονοδιάστατη κλειστή πολλαπλότητα  $S^1$ , και της αφαιρούμε δύο σημεία  $A$  και  $B$  μαζί με μία ανοιχτή περιοχή γύρω από το καθένα. Θεωρούμε δηλαδή την πράξη  $S^1 \setminus \text{nb}(A)^\circ \cup \text{nb}(B)^\circ$  ή  $S^1 \setminus (---) \cup (---)$  ή  $S^1 \setminus S^0 \times D^1$  όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Όπου  $S^1$  είναι η κλειστότητα της  $S^1 \setminus (---) \cup (---)$ ,  $S^1 := cl(S^1 \setminus S^0 \times D^1)$  και είναι μονοδιάστατη πολλαπλότητα με σύνορο. Στη συνέχεια πρέπει να κολλήσουμε κάτι διαφορετικό από αυτό που αφαιρέσαμε, αλλά που έχει το ίδιο σύνορο. Κολλάμε δύο διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα. Θεωρούμε δηλαδή την πράξη  $S^1 \cup ((---) \cup (---))$  όπως φαίνεται παρακάτω.



Όπως βλέπουμε το αποτέλεσμα των δύο πράξεων που αποτελούν τη χειρουργική δεν είναι ομοιόμορφο με τη σφαίρα  $S^1$  αλλά με δύο σφαίρες ή αλλιώς με το καρτεσιανό γινόμενο  $S^0 \times S^1$ . Σε αυτό το απλό παράδειγμα μονοδιάστατης χειρουργικής με αρχικό αντικείμενο την  $S^1$  που έχει μία συνεκτική συνιστώσα καταλήξαμε στην πολλαπλότητα  $S^0 \times S^1$  που έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες.

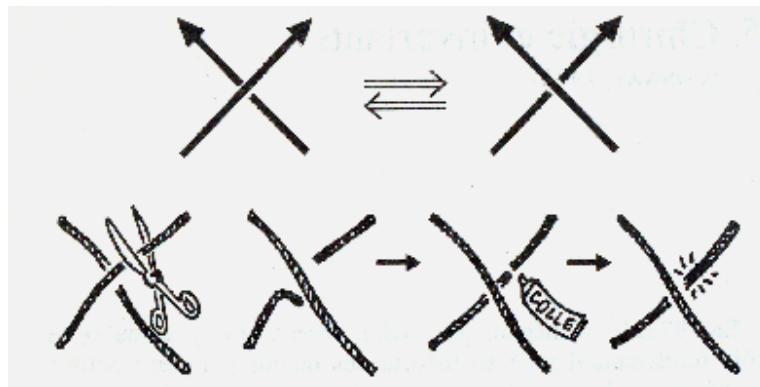
### Ένα παράδειγμα μονοδιάστατης χειρουργικής σε κόμβους

Η χειρουργική σε μία διάσταση φαίνεται σε μια πρώτη ματιά τετριμμένη. Πράγματι, στη αφηρημένη περίπτωση ο κύκλος (ή η αντίγραφο του κύκλου) είναι οι μόνες συμπαγείς, κλειστές καμπύλες και η χειρουργική απλά

αυξάνει τις συνεκτικές συνιστώσες. Αν όμως τις εμφυτεύσουμε στον  $\square^3$ , τότε παίρνουμε οποιονδήποτε κόμβο και τότε οι μονοδιάστατες κλειστές καμπύλες είναι άπειρες, είναι όλοι οι δυνατοί κόμβοι ή κρίκοι. Εκεί η χειρουργική δεν είναι τετριμμένη κι αποκτά νόημα όπως θα δούμε στη συνέχεια.

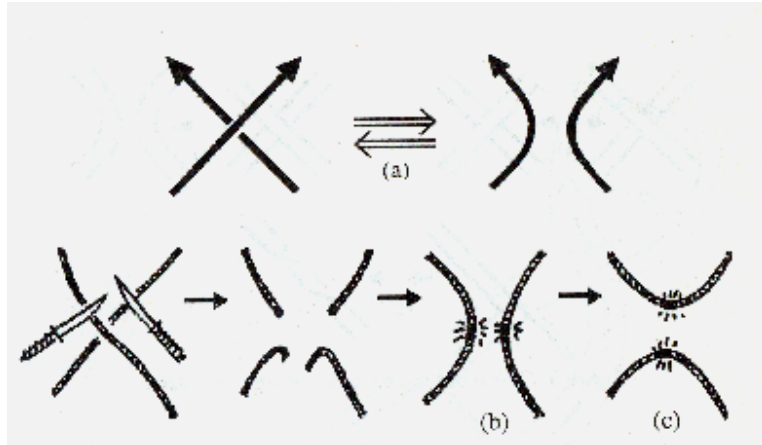
Το 1973 ο μαθηματικός John Conway χρησιμοποιεί δύο πολύ απλές «χειρουργικές διαδικασίες» που θα παίξουν πολύ σημαντικό ρόλο στη Θεωρία Κόμβων. Ο Conway έδειξε ότι αυτές οι διαδικασίες μπορούν να αποτελέσουν βάση για να οριστεί με τρόπο πολύ απλό μια αναλλοίωτη των κόμβων, το *πολυώνυμο του Conway*. Μια *αναλλοίωτη κόμβων* είναι μια απεικόνιση από το σύνολο των κόμβων ή κρίκων σε ένα σύνολο (π.χ αριθμός ή πολυώνυμο) τέτοια ώστε δύο ισοτοπικοί κόμβοι ή κρίκοι να έχουν την ίδια εικόνα.

Η πρώτη διαδικασία, η *εναλλαγή* (flip), μετασχηματίζει μια διασταύρωση στην αντίθετη διασταύρωση. Προφανώς η *εναλλαγή* μπορεί να αλλάξει τον τύπο του κόμβου.



(Εικόνα 25)

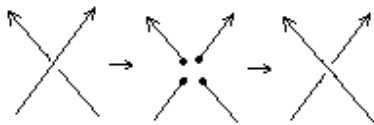
Η δεύτερη χειρουργική διαδικασία ονομάζεται *αποδιασταύρωση* ή *εξομάλυνση* (decrossing or smoothing) και εξαλείφει τη διασταύρωση αντιστρέφοντας τα τόξα. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, υπάρχουν δύο δυνατά αποτελέσματα όταν ο κόμβος δεν είναι προσανατολισμένος.



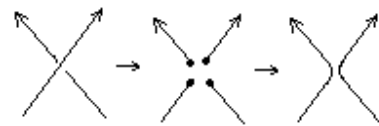
(Εικόνα 26)

Οι δύο παραπάνω διαδικασίες είναι χειρουργικές διαδικασίες με την έννοια που περιγράψαμε προηγουμένως. Προκύπτουν με την γνωστή διαδικασία  $M^1 \rightarrow cl(M^1 \setminus (-) \cup (-)) \cup_o ((-) \cup (-))$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Εναλλαγή:

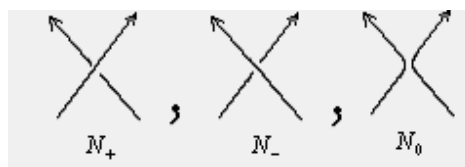


Αποδιασταύρωση:



Ο Conway αντιστόιχησε στο διάγραμμα  $N$  ενός κόμβου ένα πολώνυμο  $\nabla(N)$  με μεταβλητή  $x$ , το οποίο ορίζεται με επαγωγή στον αριθμό των διασταυρώσεων και τον αριθμό των συνιστωσών από τους παρακάτω κανόνες:

(I)  $\nabla(N_+) - \nabla(N_-) = x \nabla(N_0)$ , όπου τα τρία διαγράμματα  $N_+$ ,  $N_-$ ,  $N_0$  είναι ίδια έξω από την περιοχή μιας διασταύρωσης και έχουν την παρακάτω μορφή στο εσωτερικό της περιοχής:



(II)  $\nabla(N \cup O) = d(x) \cdot \nabla(N)$ , όπου «O» συμβολίζει μια τετριμμένη συνιστώσα που δεν συνδέεται με το υπόλοιπο διάγραμμα  $N$  και  $d(x)$  είναι μια συνάρτηση του  $x$ .

(III)  $\nabla(O) = 1$ , το πολυώνυμο του τετριμμένου κόμβου ισούται με 1 και θεωρείται το «πολυώνυμο μηδενικής τάξης»,  
 Αποδεικνύεται ότι το πολυώνυμο  $\nabla(N)$  είναι καλά ορισμένο και έχει την ιδιότητα ότι αν  $k_1 \sim k_2 \Rightarrow \nabla(k_1) = \nabla(k_2)$ .

Γενικότερα οι αναλλοίωτες χρησιμεύουν κυρίως στο να λύσουν το πρόβλημα της ταξινόμησης (όταν μια αναλλοίωτη παίρνει διαφορετικές τιμές σε δύο κόμβους, θα πρέπει αυτοί να είναι μη ισοτοπικοί). Η ιδέα αυτή είχε χρησιμοποιηθεί και από τον Alexander αλλά και μετά από τον Kauffman και άλλους που κατασκεύασαν άλλα πολυώνυμα με χρήση της χειρουργικής σε κόμβους ή κρίκους. Προφανώς οι κόμβοι που προκύπτουν μετά τις χειρουργικές διαδικασίες θα πρέπει να αντιστοιχούν σε διαφορετικό αλγεβρικό αντικείμενο εφ' όσον αυτές είναι ασυνεχείς. Πολυωνυμικοί κανόνες όπως το (I) του πολυωνύμου Conway περιγράφουν την αλλαγή των αντίστοιχων αλγεβρικών αντικειμένων όταν ένας κόμβος μετασχηματίζεται σε έναν άλλο με διαδικασίες χειρουργικής.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το πολυώνυμο Conway του κόμβου τριφύλλι. Εάν το  $N_+$  συμβολίζει τον κόμβο του τριφυλλιού, τότε η ιδιότητα (I) δίνει την παρακάτω σχέση:

$$-\nabla(\text{trefoil}) + \nabla(\text{trefoil}) = x\nabla(\text{trefoil}) \quad (*)$$

Η σχέση (\*) γίνεται πιο κατανοητή αν γράψουμε την ιδιότητα (I) ως εξής:

$$\nabla(\text{crossing}) - \nabla(\text{crossing}) = x\nabla(\text{crossing})$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το πολυώνυμο των δύο πεπλεγμένων κύκλων που ονομάζεται κρίκος του Hopf, H, και βρίσκεται στο δεξί μέρος της ισότητας (\*). Γι' αυτό θα χρειαστούμε να υπολογίσουμε πρώτα το πολυώνυμο του κόμβου που αποτελείται από δύο απλούς μη-πεπλεγμένους κύκλους. Θα δείξουμε ότι  $\nabla(OO) = 0$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned}
 x\nabla(\text{Diagram 1}) &\stackrel{(I)}{=} \nabla(\text{Diagram 2}) - \nabla(\text{Diagram 3}) = \\
 &= \nabla(\text{Diagram 4}) - \nabla(\text{Diagram 5}) \stackrel{(III)}{=} 1 - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Τώρα από τον κανόνα (I) προκύπτει ότι:

$$\nabla(\text{Diagram 6}) - \nabla(\text{Diagram 7}) \stackrel{(I)}{=} x\nabla(\text{Diagram 8})$$

και εφ' όσον ξέρουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\nabla(\text{Diagram 9}) = 0, \quad \nabla(\text{Diagram 10}) \stackrel{(III)}{=} 1$$

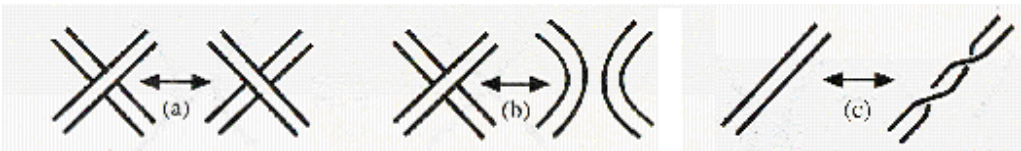
Αντικαθιστώντας έχουμε ότι :

$$\nabla(\text{Diagram 11}) = \nabla(H) = x.$$

Επιστρέφουμε τώρα στη σχέση (\*). Ο πρώτος άγνωστος όρος είναι ο τετριμμένος κόμβος και όπως ξέρουμε  $\nabla(O) = 1$ . Ο δεύτερος είναι ο κρίκος του Hopf που μόλις υπολογίσαμε, άρα  $-1 + \nabla(T) = x \cdot x \Rightarrow \nabla(T) = x^2 + 1$ .

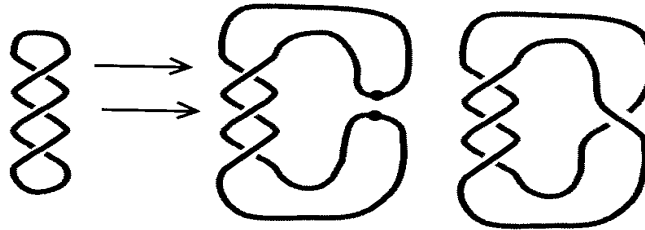
Στην συνέχεια περιγράφουμε δύο φυσικές εφαρμογές της μονοδιάστατης χειρουργικής.

Εφαρμογή 1: Η μονοδιάστατη χειρουργική σε κόμβους εφαρμόζεται άμεσα στη βιολογία. Οι έλικες του DNA μέσω των τοποϊσόμερων (είδος ενζύμων) έχουν την δυνατότητα να πραγματοποιούν τις τρεις διαδικασίες επανασύνδεσης που φαίνονται στην Εικόνα 27.



(Εικόνα 27)

Αμέσως αναγνωρίζουμε στα a) και b) την *εναλλαγή* και την *αποδιασταύρωση*. Στην Εικόνα 28 βλέπουμε μια πλήρη απεικόνιση επανασύνδεσης του DNA. Εκτός του ότι αμέσως αναγνωρίζουμε (στην προκειμένη περίπτωση) την *εναλλαγή*, βλέπουμε ότι κατά την επανασύνδεση, το DNA διαλέγει πρώτα τα δύο σημεία, όπως ακριβώς γίνεται στην χειρουργική.

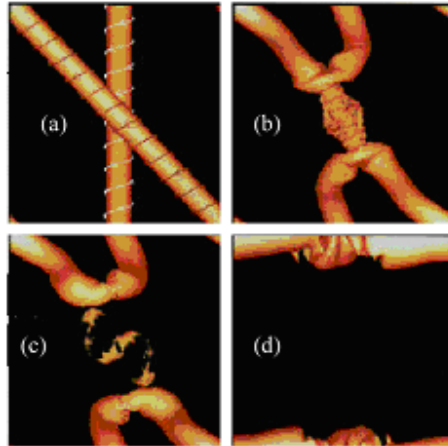


(Εικόνα 28)

Έτσι, μέσω των δυο χειρουργικών διαδικασιών του Conway και μιας τρίτης διαδικασίας που ονομάζουμε *στροφή* (twist) (στο c) της Εικόνα 27) και με τη χρήση αποτελεσμάτων της τοπολογίας χαμηλών διαστάσεων, η Θεωρία των Κόμβων μπόρεσε να δώσει ένα αξιόπιστο μοντέλο για την αναδιάταξη του DNA και να απαντήσει σε κάποια τοπολογικά προβλήματα της Μοριακής Βιολογίας.

Εφαρμογή 2: Η μονοδιάστατη χειρουργική εμφανίζεται και στη δημιουργία των ηλιακών ανέμων, κατά την οποία μαγνητικοί σωλήνες ροής που περιέχουν πλάσμα επανασυνδέονται ελευθερώνοντας ενέργεια. Πρόκειται για την γνωστή μας *αποδιασταύρωση*, όπως φαίνεται στην Εικόνα 29.





(a) Οι μαγνητικοί σωλήνες βρίσκονται κοντά, (b) Συγχωνεύονται, (c) Επανασυνδέονται (ή αποδιασταυρώνονται), (d) Διαχωρίζονται.

(Εικόνα 29)

### 4.3 Χειρουργική σε περισσότερες διαστάσεις:

Ορισμός 14: Μία χειρουργική σε μία  $m$ -διάστατη πολλαπλότητα  $M^m$  είναι η διαδικασία κατασκευής μιας νέας  $m$ -διάστατης πολλαπλότητας

$M^{m'} = \overline{(M \setminus S^n \times D^{m-n})} \cup_{S^n \times S^{m-n-1}} D^{n+1} \times S^{m-n-1}$  αφαιρώντας το καρτεσιανό γινόμενο  $S^n \times D^{m-n}$  και αντικαθιστώντας το με το  $D^{n+1} \times S^{m-n-1}$ .

Παρατηρούμε ότι  $\partial(S^n \times D^{m-n}) = \partial(D^{n+1} \times S^{m-n-1}) = S^n \times S^{m-n-1}$ , δηλαδή η ένωση γίνεται πάνω στο κοινό σύνορο.

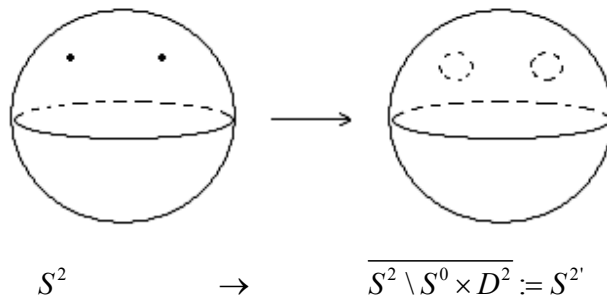
Εφαρμογή για μία διάσταση: Έτσι στη μία διάσταση τα όσα προαναφέρθηκαν προκύπτουν άμεσα από τον παραπάνω ορισμό. Για  $m = 1$  ξεκινάμε με μια μονοδιάστατη πολλαπλότητα  $M^1$ . Για ευκολία πήραμε εδώ την πολλαπλότητα  $S^1$ . Διαλέγουμε  $n = 0$  εφόσον έχουμε ορίσει  $D^k$ ,  $k \geq 1$ .

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε  $M^1 = \overline{(M \setminus S^0 \times D^1)} \cup_{S^0 \times S^0} D^1 \times S^0$  που είναι ακριβώς η διαδικασία που περιγράψαμε νωρίτερα. Το αποτέλεσμα είναι μια πολλαπλότητα ομοιόμορφη με το  $S^0 \times S^1$  κι άρα μη ομοιομορφική με την αρχική πολλαπλότητα  $S^1$ .

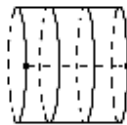
Εφαρμογή για δύο διαστάσεις: Όπως είδαμε, η μόνη (αφηρημένη) μονοδιάστατη συνεκτική κλειστή πολλαπλότητα είναι ο κύκλος. Αντίθετα στις δύο διαστάσεις υπάρχουν άπειρες συνεκτικές κλειστές πολλαπλότητες. Συνεπώς, σε αντίθεση με τη μία διάσταση, η χειρουργική σε δύο διαστάσεις

έχει νόημα κι ενδιαφέρον ακόμα κι όταν εφαρμόζεται σε αφηρημένες συνεκτικές κλειστές πολλαπλότητες που δεν ζουν πουθενά, δηλαδή μη εμφυτευμένες σε κάποιο χώρο. Μπορούμε να κάνουμε χειρουργική σε όλες αυτές τις πολλαπλότητες. Θα αναλύσουμε αρχικά τη μέθοδο της χειρουργικής πάνω στην πολλαπλότητα  $S^2$ .

Στον Ορισμό 14 θέτουμε  $m = 2$ . Αν διαλέξουμε  $n = 0$  έχουμε την εξής διαδικασία:  $M^{2'} = (\overline{M \setminus S^0 \times D^2}) \cup_{S^0 \times S^1} D^1 \times S^1$ . Όπως και στη μονοδιάστατη χειρουργική, πρώτα αφαιρούμε και στη συνέχεια κολλάμε. Ξεκινάμε με την διδιάστατη σφαίρα  $S^2$  και της αφαιρούμε δύο ανοιχτούς δίσκους  $D^2$  (θεωρούμε δηλαδή την πράξη  $\overline{S^2 \setminus S^0 \times D^2}$ ) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε αντιστοιχία με τη μία διάσταση, μπορούμε να πούμε ότι αφαιρούμε δύο διδιάστατες ανοικτές περιοχές δύο τυχαίων σημείων της  $S^2$ .

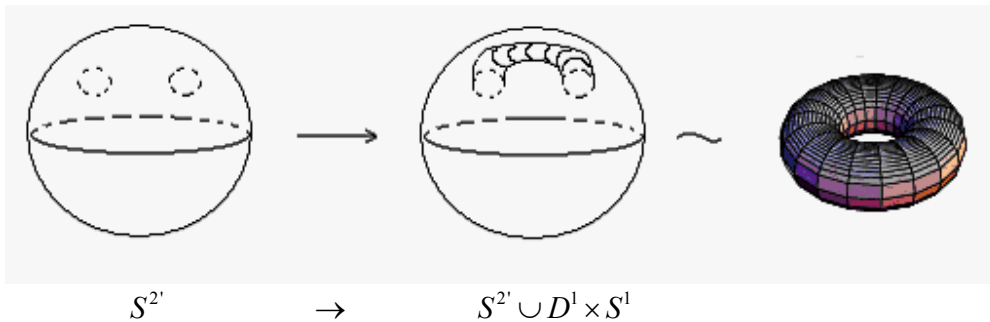


Στη συνέχεια κολλάμε το καρτεσιανό γινόμενο  $D^1 \times S^1$  το οποίο έχει κοινό σύνορο με αυτό που αφαιρέσαμε:  $\partial(D^1 \times S^1) = S^0 \times S^1 = \partial(S^0 \times D^2)$ . Το  $D^1 \times S^1$  είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα  $D^1$ , στο κάθε σημείο του οποίου έχουμε πάρει το καρτεσιανό γινόμενο με έναν κύκλο  $S^1$ .



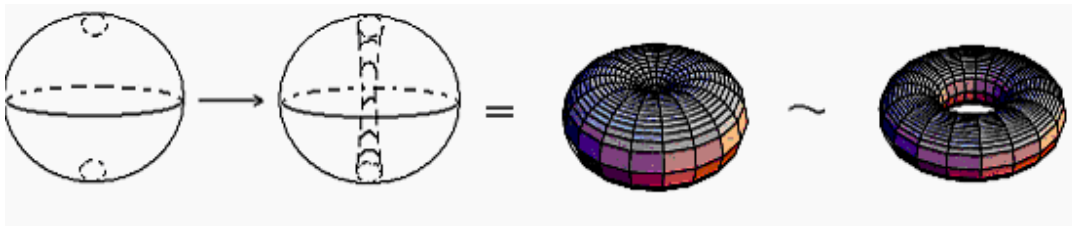
Απεικόνιση του  $D^1 \times S^1$ .

Θεωρούμε τώρα την ένωση  $S^2 \cup D^1 \times S^1$ .

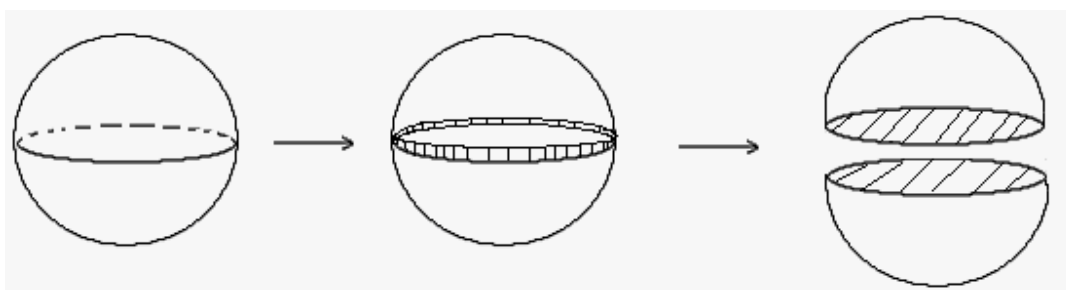


Το αποτέλεσμα της διδιάστατης χειρουργικής πάνω στη σφαίρα  $S^2$  είναι μια πολλαπλότητα ομοιόμορφη με το τόρο κι άρα μη ομοιομορφική με την αρχική πολλαπλότητα  $S^2$ .

Σημειώνουμε ότι εφόσον η σφαίρα είναι διδιάστατη, μπορεί να γίνει η συγκόλληση του  $D^1 \times S^1$  και μέσα από το εσωτερικό της  $S^2$ . Για παράδειγμα η παρακάτω διαδικασία χειρουργικής είναι όμοια με αυτήν που προαναφέραμε.

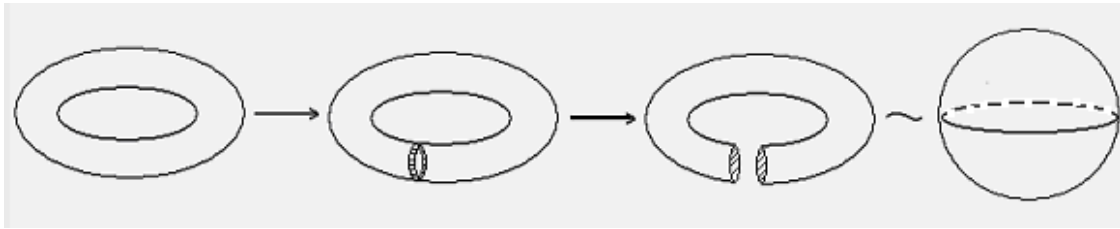


Αν τώρα θέσουμε  $n=1$  στον Ορισμό 14, παίρνουμε  $M^2 = (M \setminus S^1 \times D^1) \cup_{S^1 \times S^0} D^2 \times S^0$  όπως φαίνεται παρακάτω.



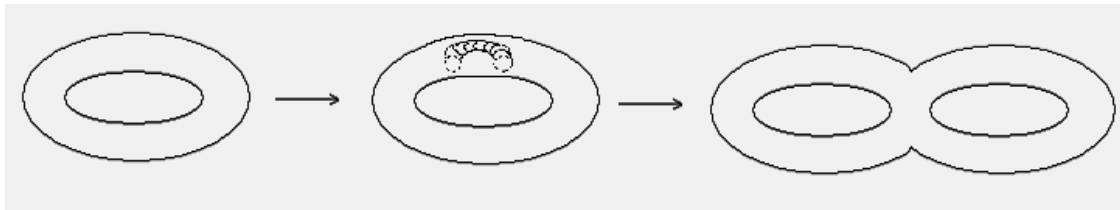
Όπως προαναφέραμε, μπορούμε να κάνουμε χειρουργική πάνω σε οποιαδήποτε συνεκτική προσανατολίσιμη διδιάστατη πολλαπλότητα.

Για παράδειγμα, ξεκινώντας με τον τόρο παίρνουμε για  $n = 1$ :



Σημειώνουμε ότι αυτή είναι η ακριβώς αντίθετη διαδικασία από την χειρουργική για  $n = 0$  και ξεκινώντας με τη σφαίρα  $S^2$ .

Με αρχική πολλαπλότητα έναν τόρο αλλά  $n = 0$  στον Ορισμό 14, παίρνουμε το συνεκτικό άθροισμα δύο τόρων:

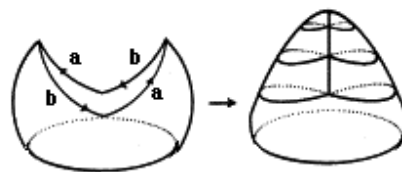


### Κατάταξη επιφανειών και χειρουργική:

Ορισμός 15: Το γένος μιας κλειστής επιφάνειας είναι μια αναλλοίωτη τοπολογική ιδιότητά της. Ορίζεται ως ο αριθμός των οπών της επιφάνειας. Η σφαίρα έχει γένος 0 ενώ το συνεκτικό άθροισμα  $g$  τόρων έχει γένος  $g$ .

Θα συζητήσουμε τώρα την κατάταξη των επιφανειών.

Μια διαφορετική αναπαράσταση της ταινίας του Moebius είναι το *crosscap*, βλ. Εικόνα 30.

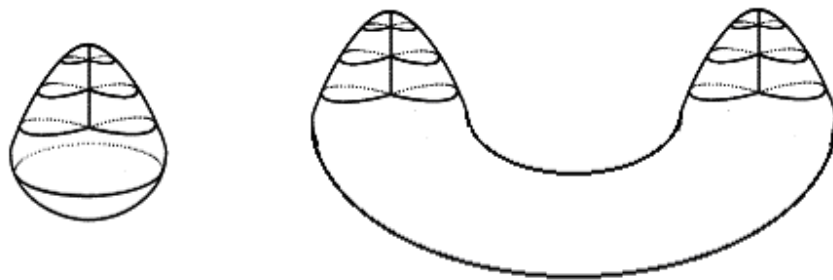


(Εικόνα 30)

Σε αντίθεση με την συνήθη αναπαράσταση της ταινίας του Moebius, αυτή η αναπαράσταση έχει σημεία αυτοδιασταύρωσης. Η «ραφή» του *crosscap*

όπου η επιφάνεια τέμνει τον εαυτό της δεν είναι γραμμή όπως φαίνεται στην εικόνα, αλλά μια απλή κλειστή καμπύλη.

Το πλεονέκτημα του crosscap σε σύγκριση με την συνήθη αναπαράσταση της ταινίας του Moebius στον τρισδιάστατο χώρο, που δεν τέμνει τον εαυτό της, είναι ότι το σύνορό του είναι μια απλή κλειστή καμπύλη. Έτσι το crosscap μπορεί να κολλήσει πάνω σε οπές μιας σφαίρας παράγοντας εικόνες κλειστών μη προσανατολίσιμων επιφανειών στον χώρο, που παρουσιάζουν σημεία αυτοτομής.



(Εικόνα 31)

Η πρώτη επιφάνεια της Εικόνας 31 ονομάζεται *πραγματικό προβολικό επίπεδο* ενώ αποδεικνύεται ότι η δεύτερη είναι μια διαφορετική αναπαράσταση του μπουκαλιού του Klein (Εικόνα 21).

Θεώρημα Euler: Για ένα συνεκτικό γράφημα με  $n$  κορυφές,  $m$  πλευρές και  $f$  περιοχές ισχύει ο τύπος του Euler:  $n - m + f = 2$

Ορισμός 16: Έστω μια επιφάνεια γένους  $g$  που μοντελοποιείται από μια τοπολογική συγκόλληση πολυγώνων. Τότε ο τύπος του Euler γενικεύεται στο τύπο του Poincare:  $V - E + F = x(g)$ , όπου  $x(g) = 2 - 2g$ ,  $V$  ο αριθμός των κορυφών,  $E$  ο αριθμός των ακμών και  $F$  ο αριθμός των εδρών. Η συνάρτηση  $x(g)$  ονομάζεται *χαρακτηριστική του Euler*. Το θεώρημα του Euler προκύπτει ως ειδική περίπτωση αν θέσουμε  $g = 0$  στον τύπο του Poincare (και θεωρήσουμε ότι το γράφημα μοντελοποιεί τη σφαίρα  $S^2$ ).

Οι μόνες συμπαγείς κλειστές επιφάνειες με χαρακτηριστική Euler μηδενική είναι το μπουκάλι του Klein και ο τόρος (Εικόνα 21).

Θεώρημα Κατάταξης Επιφανειών: Οποιαδήποτε κλειστή συνεκτική επιφάνεια είναι ομοιομορφική με ακριβώς μία από τις παρακάτω: μια σφαίρα, ένα πεπερασμένο συνεκτικό άθροισμα τόρων ή μια σφαίρα στην οποία αφαιρούμε έναν πεπερασμένο αριθμό δίσκων και κολλάμε crosscaps στη θέση τους. Η σφαίρα και το πεπερασμένο συνεκτικό άθροισμα τόρων είναι προσανατολίσιμες επιφάνειες ενώ οι επιφάνειες με crosscaps δεν είναι.

Σύμφωνα με το θεώρημα κατάταξης των επιφανειών, χρησιμοποιώντας τη χειρουργική μπορούμε να πάρουμε οποιαδήποτε κλειστή συνεκτική επιφάνεια. Πράγματι, για τις προσανατολίσιμες επιφάνειες μπορούμε μέσω της χειρουργικής από μια σφαίρα να πάρουμε έναν τόρο, από έναν τόρο έναν διπλό τόρο κ.ο.κ. Έτσι κατασκευάζουμε οποιοδήποτε πεπερασμένο συνεκτικό άθροισμα τόρων ή οποιαδήποτε προσανατολίσιμη επιφάνεια με γένος έναν θετικό ακέραιο.

Για τις μη προσανατολίσιμες επιφάνειες αρκεί να γενικεύσουμε λίγο τον ορισμό της χειρουργικής. Θεωρούμε ότι μια «γενικευμένη χειρουργική» σε μία  $m$ -διάστατη πολλαπλότητα  $M^m$  είναι η διαδικασία κατασκευής μιας νέας  $m$ -διάστατης πολλαπλότητας  $M^{m'} = (\overline{M \setminus A}) \cup_{\partial A} B$  με

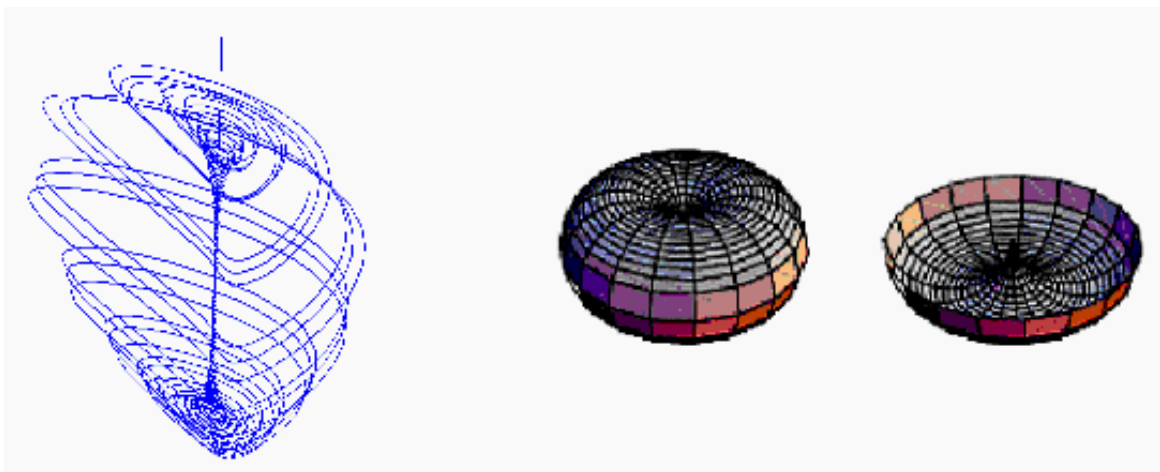
$\partial(A) = \partial(B)$  δηλαδή η ένωση γίνεται πάνω στο κοινό σύνορο. Έτσι κατασκευάζουμε οποιαδήποτε μη προσανατολίσιμη επιφάνεια μέσω της γενικευμένης χειρουργικής.

## Κεφάλαιο 5: Ο γαοτικός ελκυστής και η τοπολογική τεχνική της χειρουργικής

### 5.1 Η σχέση του γαοτικού ελκυστή με την διδιάστατη χειρουργική:

Στο κεφάλαιο αυτό θα συνδέσουμε το τρισδιάστατο δυναμικό σύστημα Lotka-Volterra, που εξετάσαμε στο Κεφάλαιο 3, με την διδιάστατη χειρουργική, που είδαμε στο Κεφάλαιο 4. Η παρατήρηση αυτή είχε γίνει από τη Σ. Λαμπροπούλου [“A study of braids in 3-manifolds”, Phd Thesis, Warrick Univ., (1993)]. Εδώ επιχειρούμε να εμπεριστατώσουμε την σύνδεση αυτή.

Είδαμε πώς με κατάλληλες παραμέτρους οι τροχιές του συστήματος L-V καταλήγουν σε έναν φράκταλ τόρο (Εικόνες 10 με 19). Ο τόρος αυτός, αν θεωρήσουμε ότι οι τροχιές ορίζουν επιφάνεια, είναι όμοιος με τον τόρο που κατασκευάσαμε στην διδιάστατη χειρουργική. Η ομοιότητα είναι εμφανής στην Εικόνα 32:



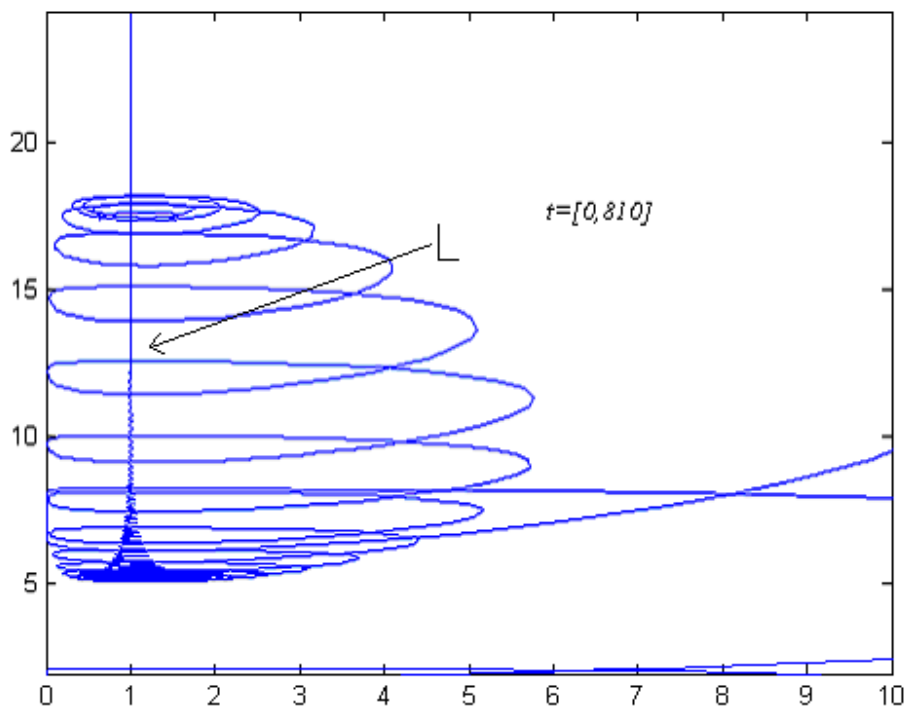
*Φράκταλ τόρος στο L-V      Ο τόρος που προκύπτει με χειρουργική ( $m = 2$ ,  $n = 0$ )*

(Εικόνα 32)

Πέρα από την ομοιότητα των εικόνων, θα δούμε πώς ο φράκταλ τόρος του δυναμικού συστήματος L-V σχετίζεται άμεσα και με την διαδικασία της χειρουργικής.

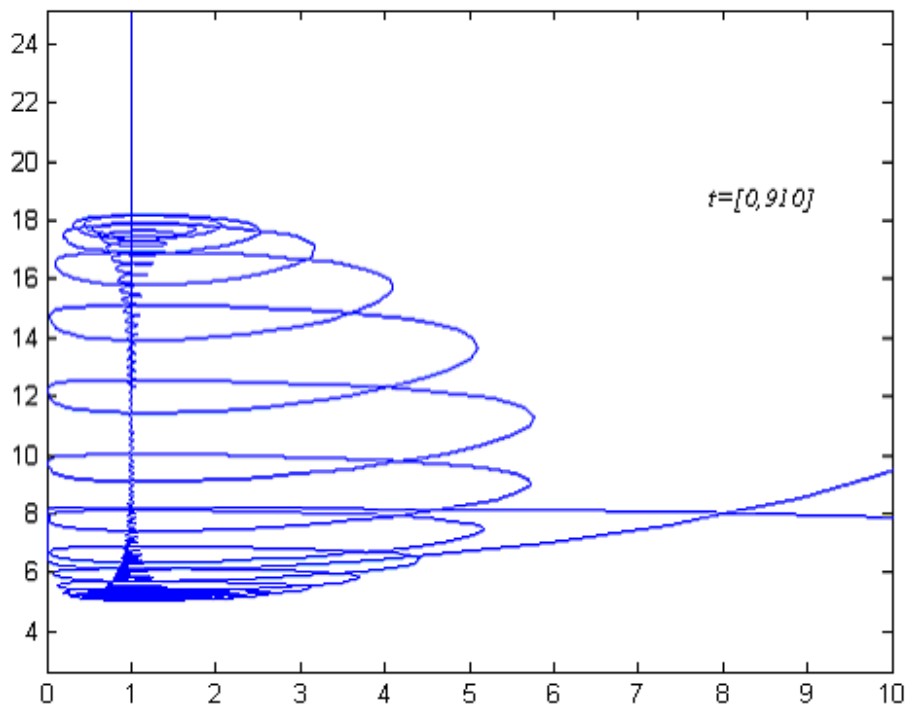
Έχοντας επιλέξει ένα τυχαίο αρχικό σημείο και παραμέτρους  $A, B, C$  ώστε να αναμένουμε την δημιουργία ενός φράκταλ τόρου (συγκεκριμένα επιλέξαμε την περιοχή  $h$  των παραμέτρων), παρατηρήσαμε ότι η τροχιά του συστήματος πλησιάζει τον χαοτικό ελκυστή και δημιουργεί αρχικά την ευθεία  $L$  (αργή πολλαπλότητα) και τον εξωτερικό φλοιό του φράκταλ τόρου. Δημιουργεί δηλαδή τη σφαίρα  $S^2$  ή αλλιώς τη διδιάστατη πολλαπλότητα με την οποία ξεκινάμε τη διδιάστατη χειρουργική, και μια ευθεία  $L$  που καθορίζει και ενώνει δύο σημεία πάνω στη σφαίρα. Είναι σαν η ευθεία  $L$  να «επιλέγει» τα κέντρα των δύο δίσκων που αφαιρούμε στη διαδικασία της χειρουργικής. Στη συνέχεια, καθώς ο χρόνος περνάει, παρατηρήσαμε ότι η τροχιά τυλίγεται στην εσωτερική αργή πολλαπλότητα η οποία τελικά ανοίγει σε μία οπή καταλήγοντας στον γνωστό μας φράκταλ τόρο. Τα βήματα αυτά αναδεικνύονται στις Εικόνες 33α και 33β για δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Χειρουργική για  $a=0.0109, b=0.145, c=0.11$  και αρχικό σημείο  $(1, 0.7, 1)$ :



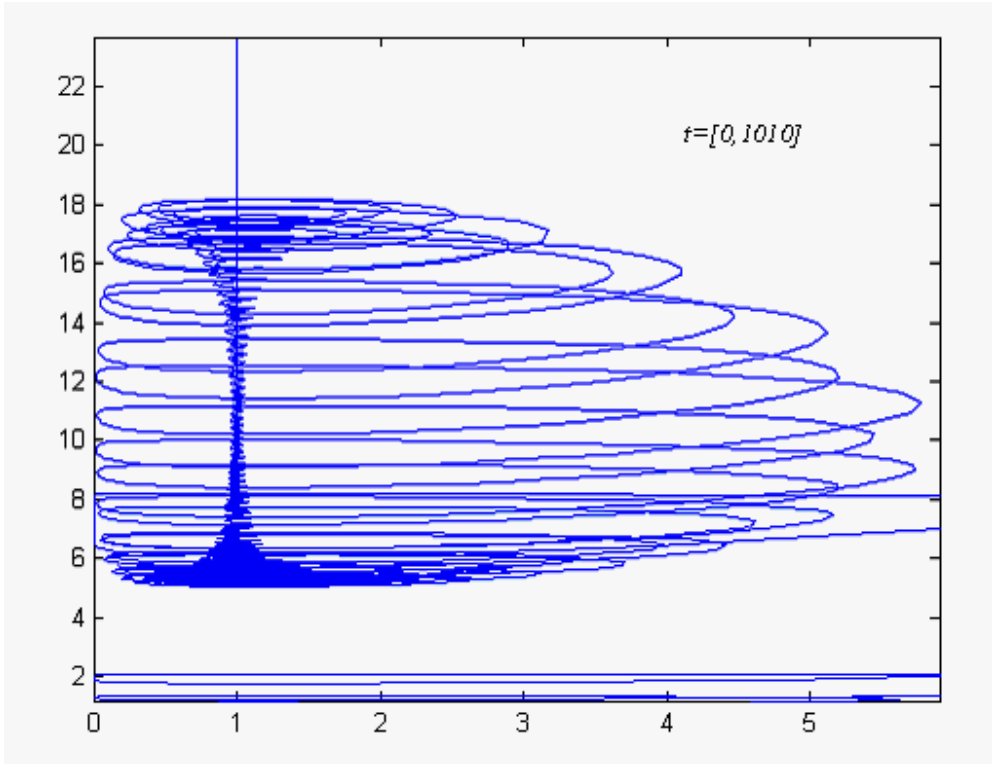
(Εικόνα 33α)



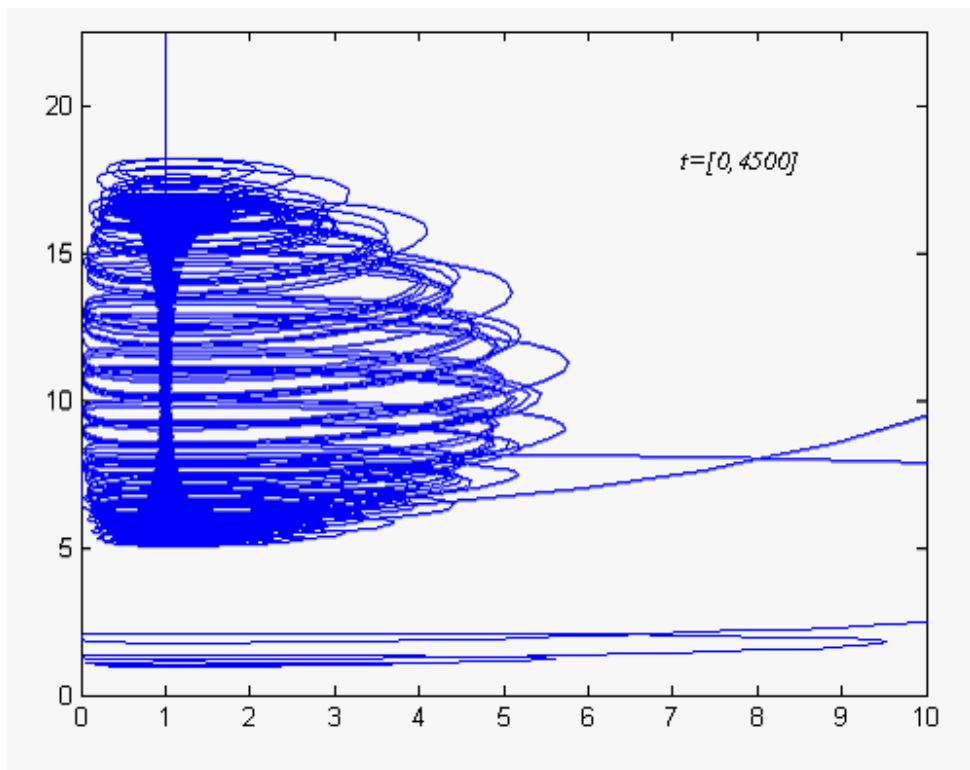


(Εικόνα 33β)

Μάλιστα, όσο περνάει ο χρόνος δημιουργούνται νέοι φλοιοί από τόρους οι οποίοι παγιδεύονται μέσα στους προηγούμενους με αποτέλεσμα η οπή που ανοίχτηκε να μεγαλώνει όλο και περισσότερο (Εικόνες 33γ και 33δ).

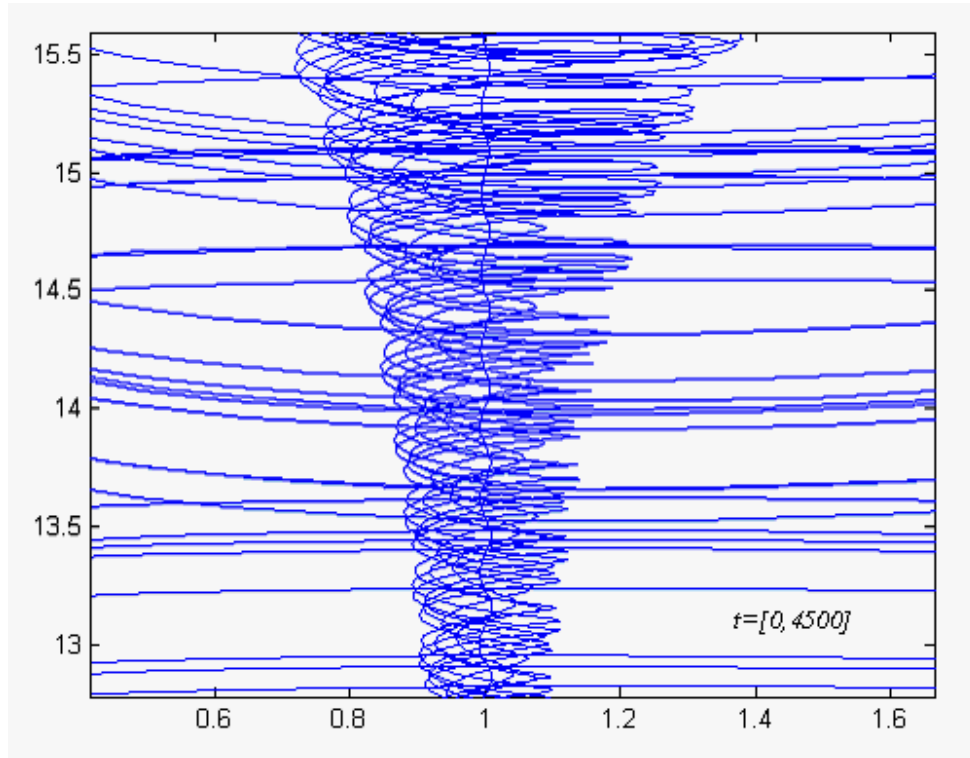


(Εικόνα 33γ)



(Εικόνα 33δ)

Στην παρακάτω μεγέθυνση βλέπουμε καθαρά τις τροχιές που τυλίγονται γύρω από την ευθεία  $L$  δημιουργώντας την τρύπα του τόρου.

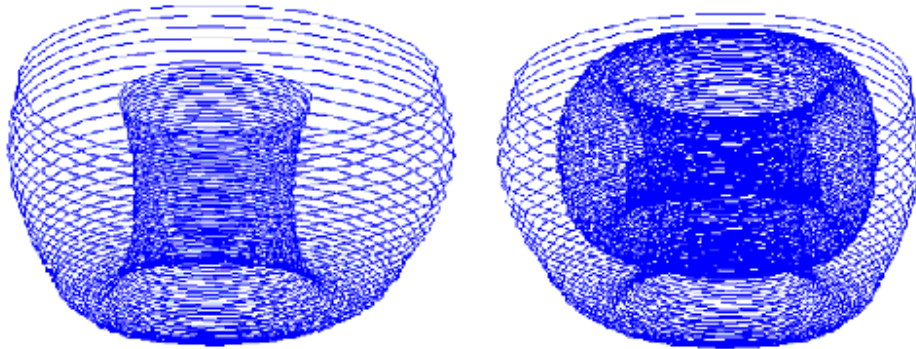


(Εικόνα 33ε)

Η τροχιά δηλαδή δημιουργεί τον τόρο κάνοντας χειρουργική καθώς ο χρόνος μεγαλώνει!

Με αυτή την έννοια μπορούμε να δούμε την χειρουργική διαδικασία όχι μόνο σαν μια τοπολογική αφηρημένη διαδικασία, αλλά σαν μια ιδιότητα των τροχιών ενός δυναμικού συστήματος. Αντίστροφα, το δυναμικό σύστημα  $L-V$  που περιγράψαμε μοντελοποιεί την διαδικασία της διδιάστατης χειρουργικής.

Σημείωση: Έχουμε ξανασυναντήσει αυτή η ιδιότητα των τροχιών να τυλίγονται με τον χρόνο γύρω από την αρχική πολλαπλότητα ανοίγοντας ολοένα και μεγαλύτερη οπή χωρίς αναγκαστικά να εμφανίζεται η αργή πολλαπλότητα. Πράγματι στην αριθμητική επίλυση του προηγούμενου κεφαλαίου στην περιοχή  $\mathbf{g}$  ( για  $a=2.9851$ ,  $b=3.0$ ,  $c=7.0$ ) παρατηρήσαμε ότι αν αφήσουμε το χρόνο να τρέξει παρουσιάζεται ένας δεύτερος ελκυστής μέσα στον πρώτο. Είδαμε ότι η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον με κάθε ελκυστή να παγιδεύεται μέσα στον προηγούμενο (Εικόνες 11 και 12).

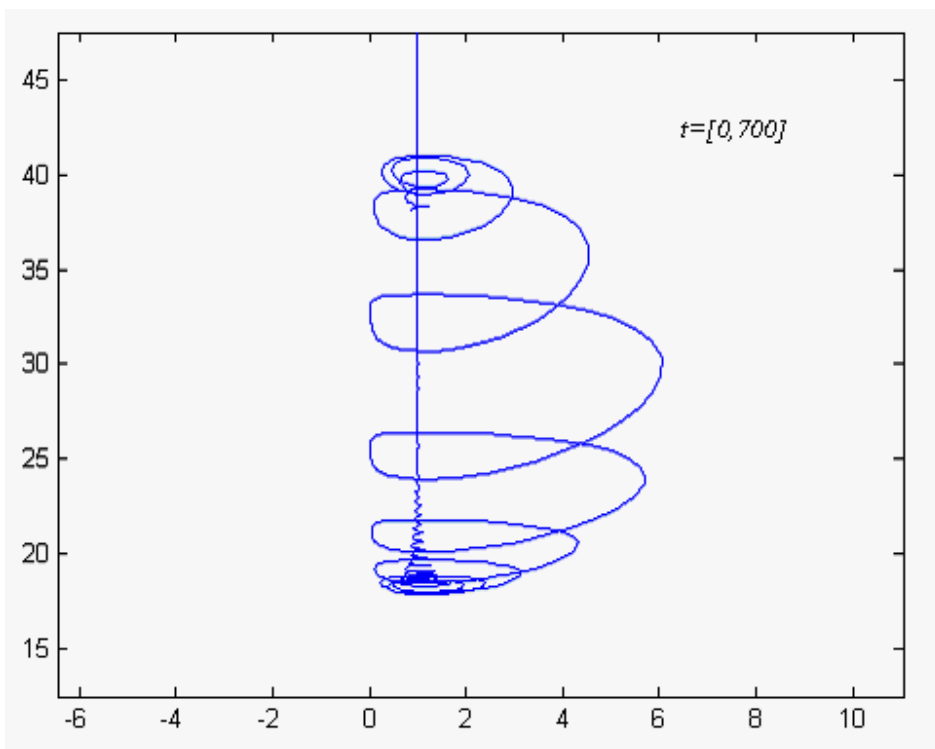


(Εικόνα 11 και Εικόνα 12)

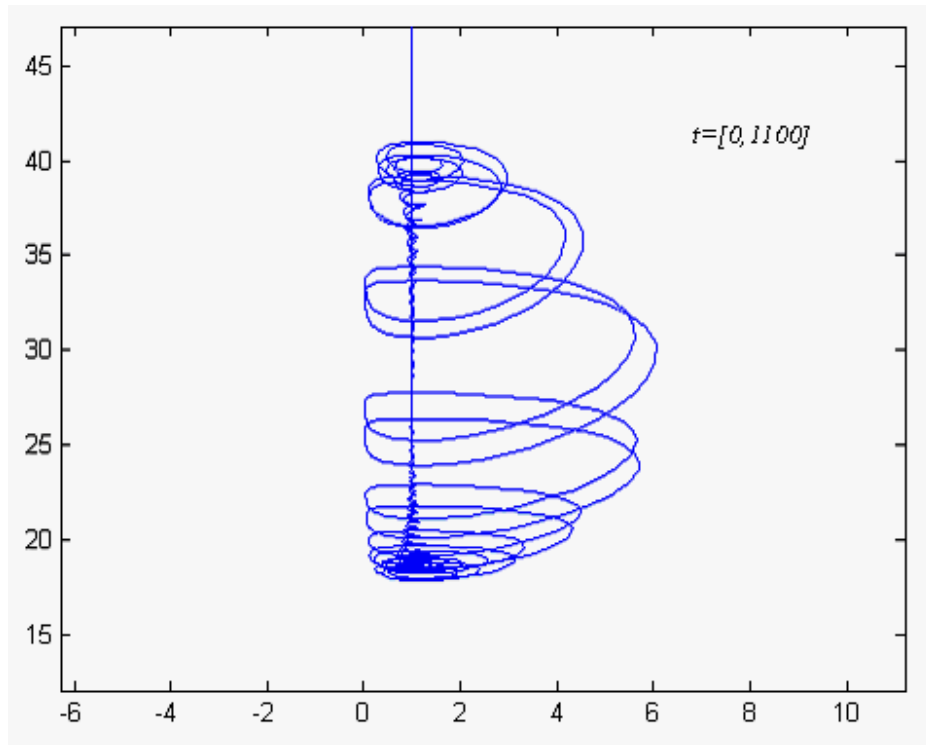
Η ίδια ιδιότητα παρατηρείται κι εδώ με τη διαφορά ότι ο αρχικός φλοιός (αυτός που πρωτοεμφανίζεται χρονικά) είναι σφαίρα και όχι τόρος όπως στη περιοχή  $g$ . Έτσι, ενώ στην περιοχή  $g$  απλά η οπή του τόρου άνοιγε όλο κι περισσότερο, εδώ έχουμε δημιουργία τόρου από σφαίρα.

Στη συνέχεια παραθέτουμε άλλα δύο παραδείγματα χειρουργικής για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων και διαφορετικές χρονικές στιγμές.

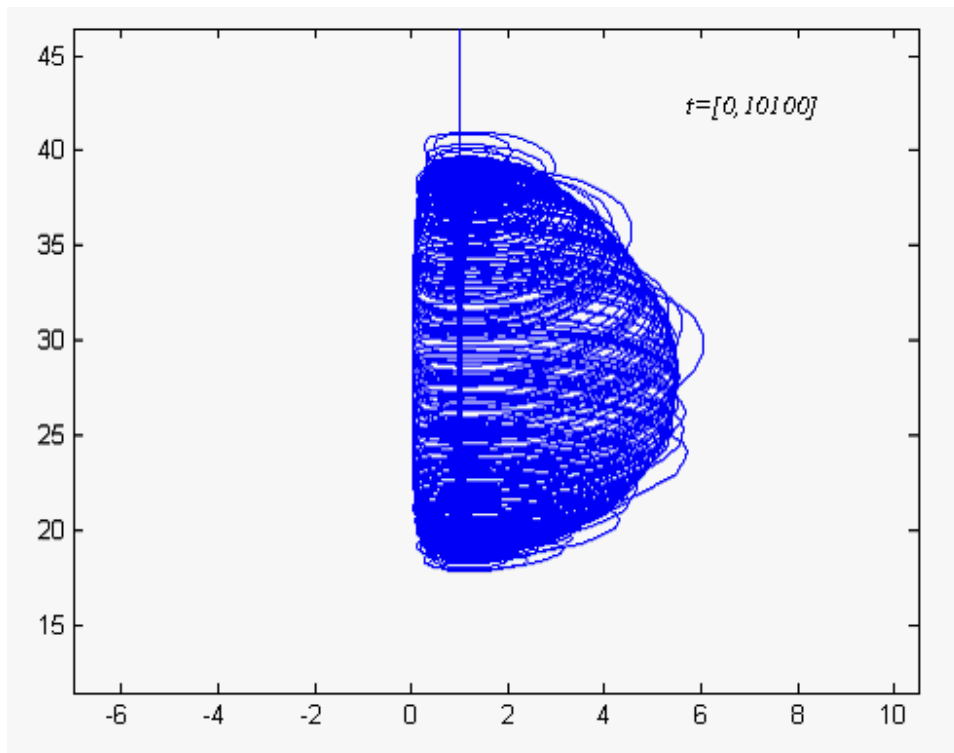
Χειρουργική για  $a=0.0109, b=0.0145, c=0.3$  και αρχικό σημείο  $(1, 1, 1)$ :



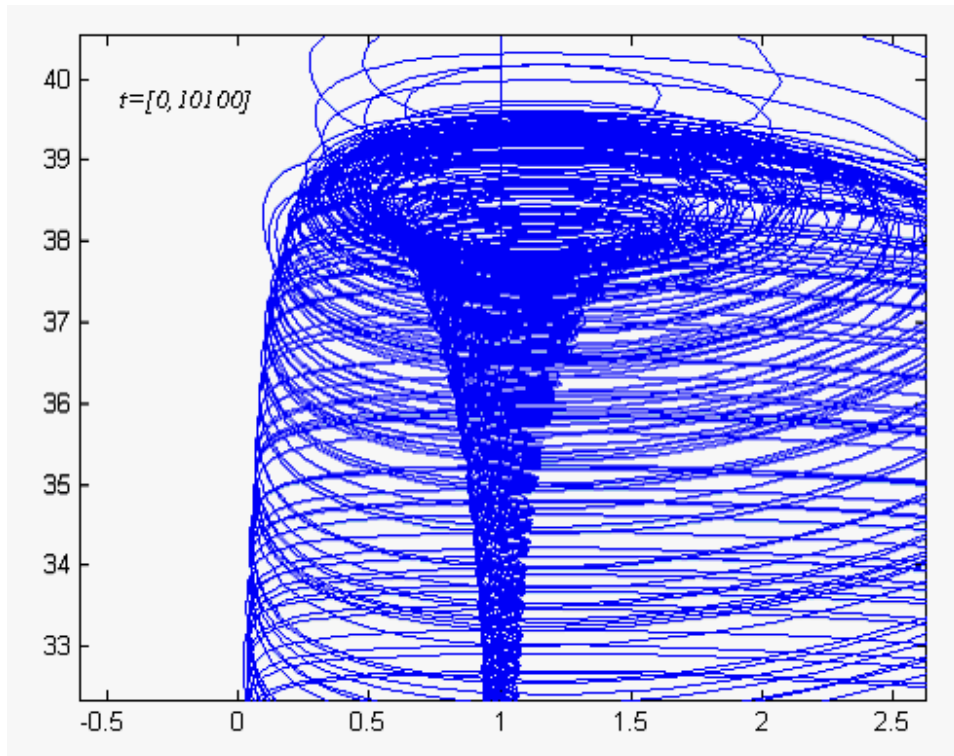
(Εικόνα 34α)



(Εικόνα 34β)

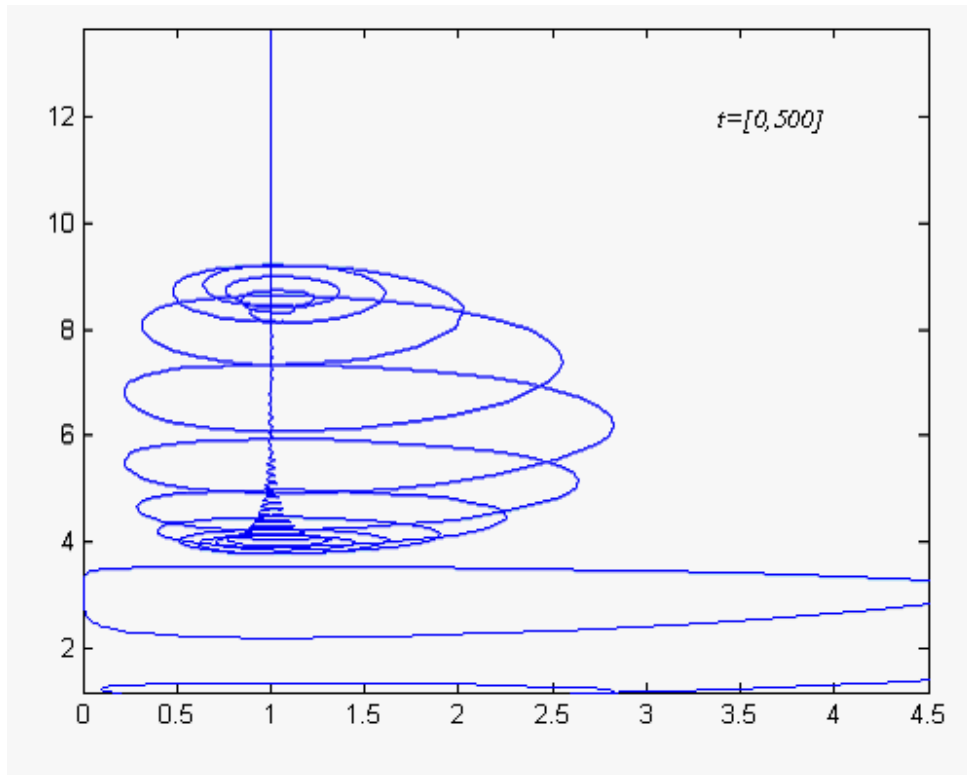


(Εικόνα 34γ)

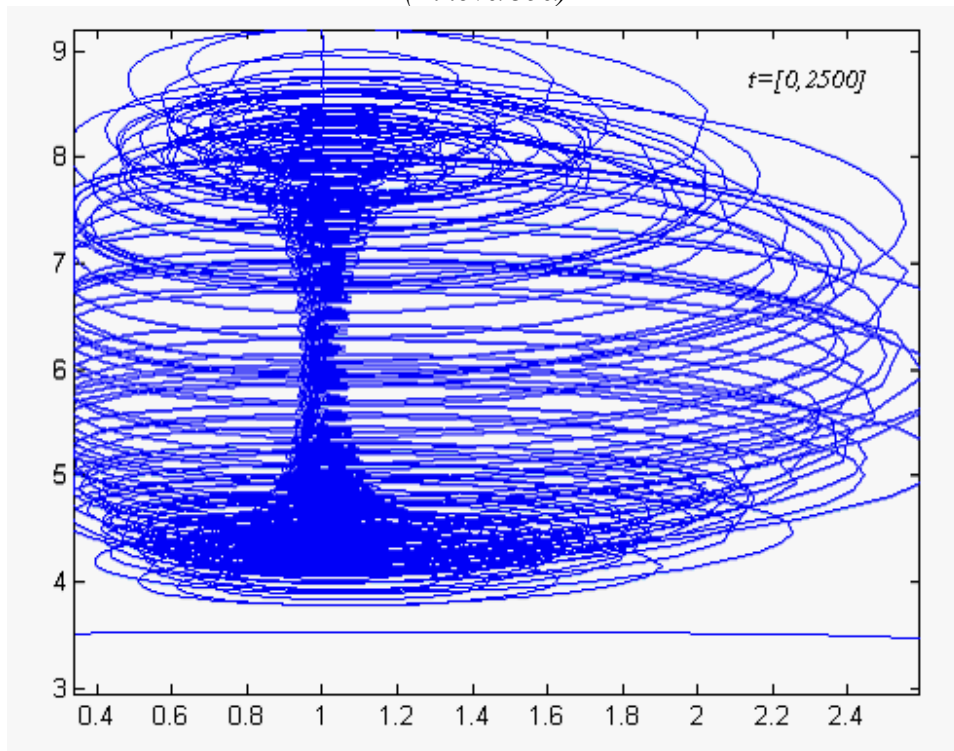


(Εικόνα 34δ)

Χειρουργική για  $a=0.05$ ,  $b=0.0545$ ,  $c=0.3$  και αρχικό σημείο  $[1;1;1]$ :



(Εικόνα 35α)



(Εικόνα 35β)

## 5.2 Δυνατές εφαρμογές:

Γιατί αυτή η σύνδεση: Η σύνδεση αυτή είναι σημαντική διότι γεφυρώνει δύο πολύ διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών, την Τοπολογία και τις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις δημιουργώντας έτσι συνδέσεις και μεταξύ των εφαρμογών των δύο αυτών περιοχών.

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3, το τρισδιάστατο σύστημα L-V μοντελοποιεί τρεις πληθυσμούς (δύο θηρευτές και ένα θήραμα) και μπορεί να μοντελοποιήσει και χημικές αντιδράσεις.

Απ' την άλλη μεριά είδαμε ότι η διαδικασία χειρουργικής χρησιμοποιείται στα καθαρά μαθηματικά όπως στην κατάταξη επιφανειών, στην κατασκευή αναλλοίωτων κόμβων κι όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, στην κατασκευή όλων των τρισδιάστατων προσανατολισίμων πολλαπλοτήτων . Επίσης εφαρμόζεται μέσω της θεωρίας κόμβων, στην βιολογία (έλικες DNA) και στη αστροφυσική (μαγνητική επανασύνδεση).

Αξίζει να σημειωθεί ότι η θεωρία κόμβων εφαρμόζεται σε ένα ευρύ φάσμα άλλων κλάδων όπως (κβαντική θεωρία πεδίου, λογική, υδροδυναμική, κοσμολογία, χημεία, ψυχολογία,.... )

Εφαρμογές: Πολλά φυσικά φαινόμενα ξεκινούν επιλέγοντας δύο σημεία (πόλους) και με ελίκωση ανάμεσα στους δύο πόλους κάνουν ουσιαστικά «χειρουργική» (χωρίς να παίζει ρόλο ο τύπος της τοπολογικής επιφάνειας στην οποία ανήκουν). Επίσης, η ελίκωση είναι φυσική και αναμενόμενη σαν δράση εφ' όσον μέσω αυτής καταναλώνεται η ελάχιστη ενέργεια για ν' ανοιχθεί μια τρύπα.

Άρα σύμφωνα με την σύνδεση που παρουσιάσαμε κάθε φαινόμενο που ουσιαστικά κάνει τον τύπο της διδιάστατης χειρουργικής που περιγράψαμε μπορεί μοντελοποιηθεί από το σύστημα Lotka-Volterra.

Ένα παράδειγμα: Ένα τέτοιο φυσικό φαινόμενο είναι οι ανεμοστρόβιλοι.

Ένας ανεμοστρόβιλος είναι μια ισχυρή ανεμοθύελλα που χαρακτηρίζεται από ένα σύννεφο σε σχήμα χωνιού με ελίκωση.

Συγκεκριμένα, καθώς μια καταιγίδα εξελίσσεται, μια αύξηση στην ταχύτητα του ανέμου και / ή μια απότομη αλλαγή στην κατεύθυνσή του μπορούν να δημιουργήσουν μια οριζόντια περιοχή περιστρεφόμενου αέρα. Στο τέλος αυτής της περιοχής (που ονομάζεται μεσοκυκλώνας), συχνά υπάρχει μια δεύτερη περιοχή σε χαμηλότερο ύψος στην οποία βρίσκονται μη βροχερά σύννεφα. Αυτή η περιοχή μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα περιστρεφόμενο σύννεφο-τοίχος. Αν αυξηθεί η ένταση της περιστροφικής κίνησης, σύννεφα



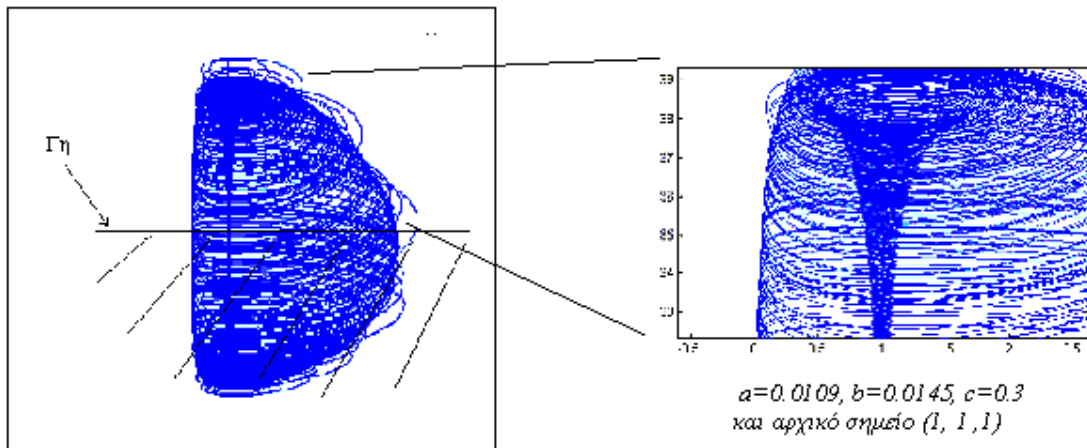
σε σχήμα χωνιού μπορούν να δημιουργηθούν στην περιοχή αυτή και να γίνουν ανεμοστρόβιλοι όταν φτάσουν στην γη.

Η διαδικασία αυτή μοιάζει πολύ με την διδιάστατη χειρουργική. Αρχικά διαλέγονται τα δύο σημεία. Το πρώτο βρίσκεται στο περιστρεφόμενο σύννεφο, στην αρχή του ανεμοστροβίλου. Θεωρούμε ότι το δεύτερο βρίσκεται κάτω από τη γη. Από το πρώτο σημείο, ο αέρας αρχίζει να περιστρέφεται ακολουθώντας μια ελικοειδή κίνηση (βλ. Εικόνα 36) προς το άλλο σημείο. Η «οπή» σταματάει όταν ο αέρας φτάσει στη γη.



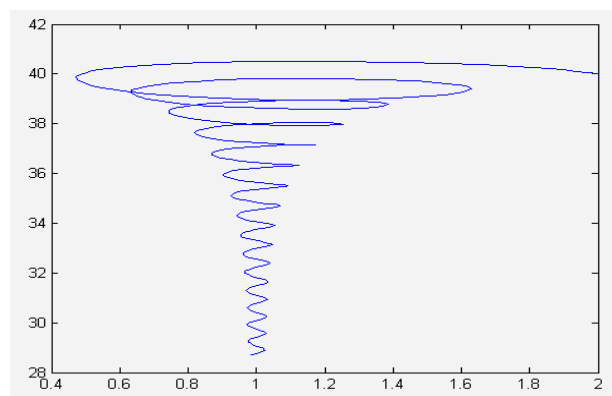
(Εικόνα 36)

Παίρνουμε το γνωστό μας μοντέλο Lotka-Volterra και θεωρούμε την τροχιά της λύσης που βρίσκεται πάνω από ένα εγκάρσιο επίπεδο που αναπαριστά την επιφάνεια της γης. Στην Εικόνα 37 βλέπουμε έναν σχηματισμένο ανεμοστρόβιλο και την μοντελοποίησή του.



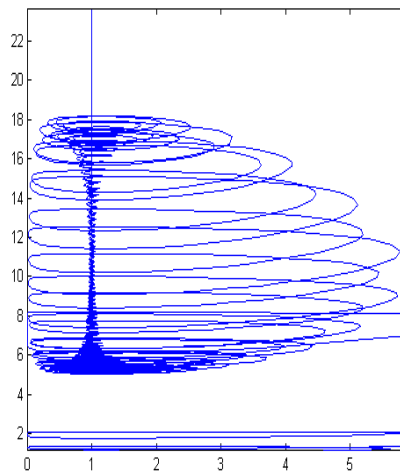
(Εικόνα 37)

Σημειώνουμε ότι για τις ίδιες παραμέτρους, και με αρχικές συνθήκες της τροχιάς κοντά στο επιλεγμένο πρώτο στάσιμο σημείο  $S_{s3}$  (συγκεκριμένα το σημείο  $[2, 1, 40]$ ), βλέπουμε ότι η εξέλιξη της τροχιάς είναι όμοια με την κίνηση του αέρα που περιστρέφεται στον ανεμοστρόβιλο (βλ. Εικόνα 38).



(Εικόνα 38)

Ακόμα πιο εντυπωσιακό είναι το παράδειγμα ενός ανεμοστρόβιλου που καταλήγει στην επιφάνεια της θάλασσας (watersprout). Εδώ το σημείο επαφής του στροβίλου με την επιφάνεια του νερού αντιστοιχεί στο δεύτερο στάσιμο σημείο  $S_{s2}$  του συστήματός μας το οποίο στο προηγούμενο παράδειγμα είχε θεωρηθεί κάτω από την επιφάνεια της γης. Μάλιστα, στην επιφάνεια της θάλασσας παρατηρούμε στροβίλους ίδιους με αυτούς του επιπέδου φάσεως  $P_{xy}$  της Εικόνας 9. Συνεπώς σε αυτή τη περίπτωση, η μοντελοποίηση του θαλάσσιου στροβίλου γίνεται από ολόκληρη την κεντρική οπή του συστήματος (βλ Εικόνα 39).



(Εικόνα 39)

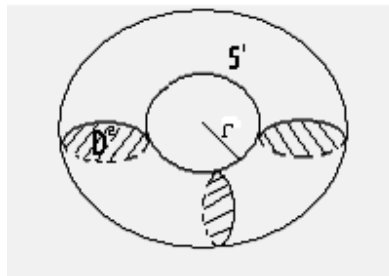
## Κεφάλαιο 6: Επίλογος – Προβλήματα για μελέτη

### 6.1 Τρισδιάστατη χειρουργική:

Η έννοια της τοπολογικής χειρουργικής είναι πολύ σημαντική και στις τρεις διαστάσεις. Σύμφωνα με τον ορισμό της χειρουργικής, για  $m=3$ ,  $n=1$  και αρχική πολλαπλότητα την  $S^3$  παίρνουμε  $M^3 = (\overline{S^3 \setminus S^1 \times D^2}) \cup_{S^1 \times S^1} D^2 \times S^1$ .

Κατ' αναλογία με την κατάταξη των επιφανειών αποδεικνύεται ότι κάθε τρισδιάστατη πολλαπλότητα (προσανατολίσιμη, συνεκτική, συμπαγής, με ή χωρίς σύνορο) μπορεί να κατασκευαστεί με την τεχνική της χειρουργικής ξεκινώντας από την βασική πολλαπλότητα  $S^3$ .

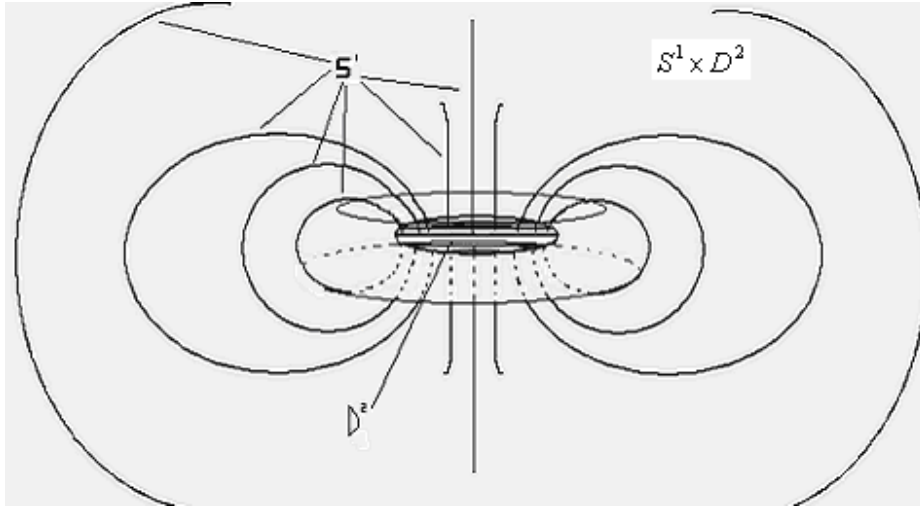
Θα κοιτάξουμε τώρα βήμα προς βήμα την τρισδιάστατη χειρουργική. Αρχικά αφαιρούμε από την  $S^3 = \square^3 \cup \{\infty\}$  το γινόμενο  $S^1 \times D^2$  που είναι ένας στερεός τόρος. Το  $S^1 \times D^2$  προκύπτει αν σε κάθε σημείο του κύκλου  $S^1$  αναρτήσουμε ένα δίσκο  $D^2$  όπως στην Εικόνα 40.



(Εικόνα 40)

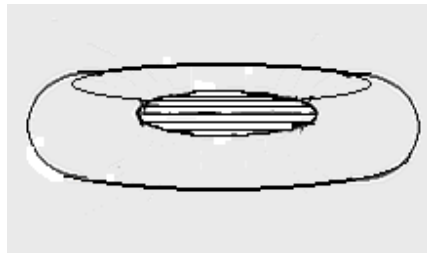
Θα χρειαστούμε την εξής ιδιότητα: το συμπλήρωμα ενός στερεού τόρου  $V_1$  στον  $S^3$  είναι επίσης ένας στερεός τόρος  $V_2$  που περιέχει το σημείο του απείρου. Μάλιστα ισχύει  $S^3 = V_1 \cup_{\partial} V_2$ .

Στην Εικόνα 41 δείχνουμε την  $S^3$  σαν ένωση δύο τόρων. Θεωρούμε ότι ο τόρος  $S^1 \times D^2$  (ο οποίος αφαιρείται) περιέχει το σημείο του απείρου και απεικονίζεται ξεδιπλωμένος στον  $\square^3$ .



(Εικόνα 41)

Συνεπώς περιμένουμε μετά το πρώτο βήμα να έχουμε έναν τόρο, το συμπλήρωμα του  $S^1 \times D^2$ , όπως φαίνεται στην Εικόνα 42.



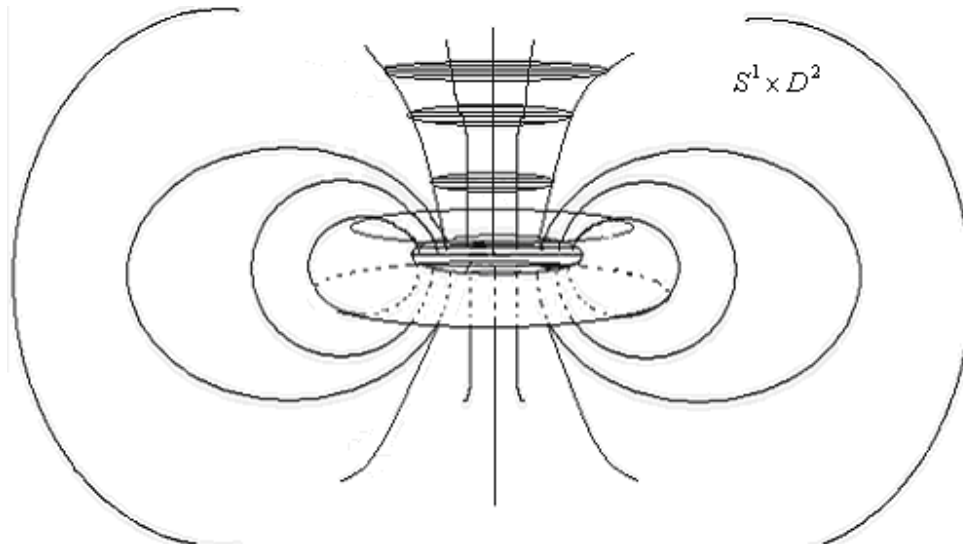
(Εικόνα 42)

Στην συνέχεια πάνω στο κοινό σύνορο  $S^1 \times S^1$  κολλάμε με έναν ομοιομορφισμό το  $D^2 \times S^1$  ο οποίος είναι επίσης ένας στερεός τόρος. Θυμίζουμε ότι στη διδιάστατη χειρουργική αφαιρούσαμε το  $S^0 \times D^2$  και κολλούσαμε το  $D^1 \times S^1$ , δηλαδή κολλούσαμε ένα αντικείμενο, που για να δούμε το αποτέλεσμα χρειαζόμασταν μία ακόμα διάσταση (Εικόνα 43).



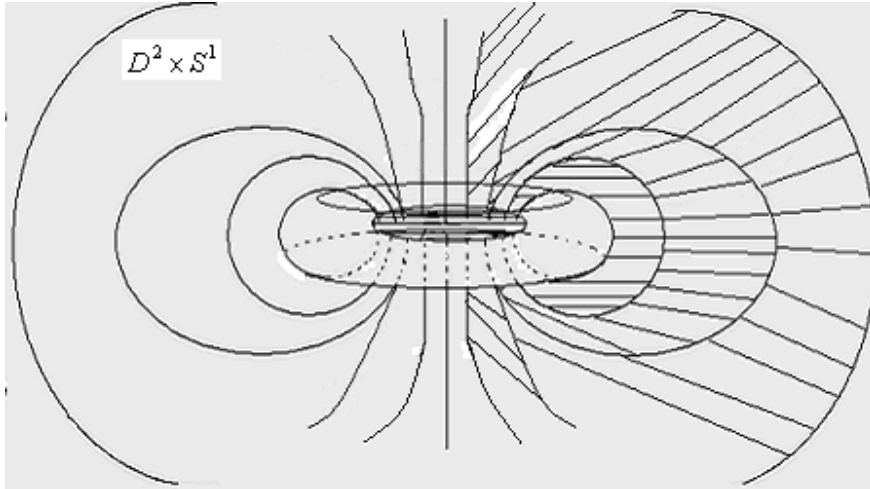
(Εικόνα 43)

Κατ' αναλογία στην τρισδιάστατη χειρουργική, χρειαζόμαστε και την τέταρτη διάσταση για να δούμε την επικόλληση του  $D^2 \times S^1$ . Μια ιδέα για το πώς γίνεται η τρισδιάστατη χειρουργική περιγράφεται στις δύο παρακάτω Εικόνες.



(Εικόνα 44)

Στην Εικόνα 44 έχουμε την αρχική πολλαπλότητα  $S^3$ . Η στρωμάτωση του  $S^1 \times D^2$  (τόρος που αφαιρούμε) στο  $S^3$  είναι κατά δίσκους. Αν ορίσω το σύνορο ενός τέτοιου δίσκου ως *μεσημβρινό*, μετά τη χειρουργική διαδικασία ο μεσημβρινός δεν θα είναι το σύνορο ενός δίσκου. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι κάθε τέτοιος δίσκος  $D^2$  θα γίνει το  $S^1$  του νέου τόρου  $D^2 \times S^1$  που κολλάμε. Οι καμπύλες που θα είναι σύνορα δίσκων μετά τη χειρουργική θα είναι οι παλιοί *παράλληλοι*. Δηλαδή οι παράλληλοι  $S^1$  του τόρου  $S^1 \times D^2$  γίνονται οι νέοι μεσημβρινοί του τόρου  $D^2 \times S^1$ .



(Εικόνα 45)

Απ' την Εικόνα 45 παίρνουμε μια ιδέα του αποτελέσματος της τρισδιάστατης χειρουργικής πάνω στο  $S^3$ . Οι νέοι δίσκοι του τόρου  $D^2 \times S^1$  φαίνονται να τέμνονται από τον συμπληρωματικό τόρο. Εδώ είναι που χρειαζόμαστε την τέταρτη διάσταση για να φανταστούμε το αποτέλεσμα της χειρουργικής.

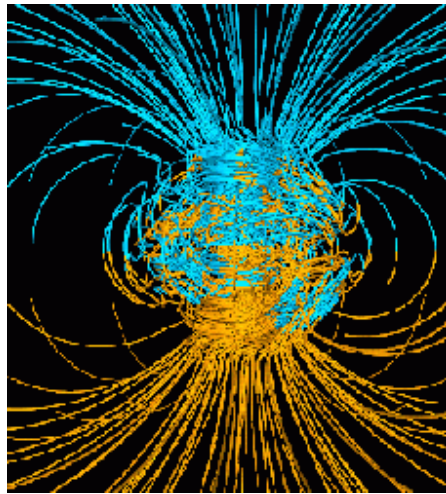
## **6.2 Η εξίσωση δυναμό:**

Θα αναφέρουμε τώρα μια εξίσωση που πιστεύουμε ότι μπορεί να συσχετιστεί με την τρισδιάστατη χειρουργική.

Ως γνωστόν, κάθε αστροφυσικό αντικείμενο που είναι ρευστό και περιστρέφεται θα δημιουργήσει και θα διατηρήσει ένα μαγνητικό πεδίο. Η θεωρία που εξηγεί ως τώρα πειστικότερα τη δημιουργία αυτού μαγνητικού πεδίου είναι η *Θεωρία δυναμό* (dynamo theory). Η Θεωρία δυναμό έχει χρησιμοποιηθεί για το μαγνητικό πεδίο της γης, του ηλίου, των αστέρων νετρονίων, των λευκών νάνων, των γαλαξιών και άλλων πυκνών αντικειμένων. Η γενική ιδέα του μηχανισμού δυναμό βασίζεται στον μηχανισμό επανατροφοδότησης. Ένα αρχικό μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ρεύμα το οποίο με τη σειρά του δημιουργεί το δικό του μαγνητικό πεδίο που αυξάνει το αρχικό μέχρι να επιτευχθεί μια κατάσταση ισορροπίας. Η διανυσματική εξίσωση δυναμό είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \wedge (V \wedge B) + \frac{n}{\mu_0} \nabla^2 B$$

Όσον αφορά τη γη, πιστεύεται ότι το μαγνητικό της πεδίο οφείλεται στα ηλεκτρικά ρεύματα που δημιουργούνται από τη σύζευξη των μεταγωγικών επιδράσεων και της περιστροφής στο στροβιλιζόμενο υγρό μεταλλικό εξωτερικό πυρήνα της. Παρακάτω βλέπουμε την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης δυναμό για το μαγνητικό πεδίο της γης από τους Gary A.Glatzmaier και Paul H.Roberts.



(Εικόνα 46)

Η Εικόνα 46 είναι ακριβώς η απεικόνιση του  $S^3$  ως ένωση δύο τόρων. Δηλαδή η λύση της εξίσωσης δυναμό προετοιμάζει το έδαφος για την τρισδιάστατη χειρουργική.

Πιστεύουμε ότι μια παραπλήσια εξίσωση της εξίσωσης δυναμό ή μια διαταραχή της θα μπορούσε να μοντελοποιήσει την τρισδιάστατη χειρουργική.



## **Παρόρτημα Matlab:**

Παραθέτουμε εδώ τα δύο m-files που χρησιμοποιήθηκαν στο Matlab για την επίλυση του τρισδιάστατου συστήματος Lotka-Volterra:

stiff1.m:

```
function stiff=stiff1(t,x)
global a;
global b;
global c;
%Choose the parameter space
a=0.05;
b=0.0545;
c=0.3;
%stiff defines the Lotka-Volterra dynamical system in this case
stiff=[x(1)-x(1)*x(2)+c*(x(1)^2)-a*x(3)*(x(1)^2);-x(2)+x(1)*x(2);-
b*x(3)+a*x(3)*(x(1)^2)];
```

job.m:

```
%The job m-files calls the stiff1 m-file
%Choose a [t0,tfinal] and a starting point [x0,y0,z0]
%The numerical solutions will be saved in the matrices t and x
[t,x]=ode45('stiff1',[0,2500],[1;1;1]);
%Solutions are displayed
%First the projections that take significantly less time to be drawn
disp('xz projection');
plot(x(:,1),x(:,3));
pause;
disp('xy projection');
plot(x(:,1),x(:,2));
pause;
disp('xyz projection');
plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3));
```

## **Βιβλιογραφία:**

- “Encyclopedic Dictionary of Mathematics” – The MIT Press, (1993).
- “The encyclopaedia of Physics” – Edited by Robert M. Besancon, (1974).
- Gilbert String – “Linear Algebra and Applications”.
- Ν. Σταυρακάκης – “Συνήθειες διαφορικές εξισώσεις”, Παπασωτηρίου (1997).
- Jamew Morrow – The Lotka-Volterra predator-prey model.
- V.Arnold – “Ordinary Differential Equation”, MIT Press, (1973).
- Σημειώσεις μαθήματος Μαθηματικής προτυποποίησης του κ.Τζανετή.
- D.N Burghes, MS Borrie – “Modelling with Mathematics”, Ellis Horwood Limited (1981).
- V. Volterra – “Lecons sur la Theorie Mathematique de la lutte pour la Vie”, Paris, (1931).
- Reinhard Illner, C.Sean Bohm, Samantha McCollin, Thea van Roodle – “Modelling with Mathematics A case studie approach,” A.M.S, (2005).
- N.Samardzija, L. Greller – Explosive route to chaos through a fractal torus in a generalized Lotka-Volterra Model, (1988).
- N.Samardzija, L. Greller – Nested tori in a 3-variable mass action model, (1992).
- John S.Costello – Synchronization of Chaos in a Generalized Lotka-Volterra attractor, The Nonlinear Journal Vol.1, pp 11-17, (1999).
- Christian V.Frost – Chaotic Interactions of Self-Replicating RNA, Elsevier Science Ltd, (1996).
- Robert M.May, Warren J.Leonard - Nonlinear Aspects of Competition between three species, SIAM J. APPL. MATH, (1975).
- John Fraleigh – “Εισαγωγή στη Άλγεβρα”, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, (2002).
- Alexei Sossinsky – “Noeuds” , Edition du Seuil, (1999).
- Charles Livingston – “Knot theory”, The Mathematical Association of America, (1993).
- S.S.F Lambropoulou – “Surgery on 3-Manifolds and pure Braids”, M.sc Dissertation, (1989).
- S.S.F Lambropoulou – “A study of braids in 3-manifolds”, Phd Thesis, Warrick Univ, (1993).
- Gary A.Glatzmaier, Paul H.Roberts - Three-dimensional self-consistent computer simulation of the geomagnetic field reversal, Nature vol. 377, (1995).
- Gary A.Glatzmaier, Paul H.Roberts – A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle, Physics of the Earth and Planetary Ineteriors, (1995).
- Paul Demorest - Dynamo theory and Earth’s Magnetic Field, (1991).
- Gunnar Hornig – The geometry of reconnection.
- Gunnar Hornig, Vyachelav S.Titov – The role of magnetic connectivity in the solar corona, Journal of Geophysical Research, (2001).
- Reconnection of Magnetic Flux Tube - S.Antiochos/NRL, (2001).

- R. M. Kiehn – Non-Equilibrium Systems and Irreversible Processes, Adventures in Applied Topology Vol. 1, Non Equilibrium Thermodynamics, University of Houston Copyright CSDC. INC, (2004).
- Adrian Biran, Moshe Breimer – Matlab 5 for Engineers, Addison-Wesley, (1995).
- Eva Part-Enander, Anders Sjoberg – The Matlab 5 Handbook, Addison-Wesley, (1999).
- Duane Hanselman, Bruce Littlefield – The Student Edition of Matlab, The Mathworks, Inc., (1997).