ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1^{ης} ΣΕΙΡΑΣ

1η.

Έστω:

$X =$ “αριθμός ελαττωματικών συσκευών σε πακέτο των N”,

$p_k = P(X = k)$, $k = 0,...,N$

$Y =$ “αριθμός ελαττωματικών συσκευών μεταξύ n ελεγχθέντων από πακέτο των N”.

(α)

$$P(X = r \mid Y = r) = \frac{P(\{X = r\} \cap \{Y = r\})}{P(Y = r)} = \frac{P(X = r)P(Y = r \mid X = r)}{\sum_{k=0}^{N} P(Y = r \mid X = k)P(X = k)} =$$

$$= \frac{p_r \binom{r}{r}\binom{N-r}{n-r} / \binom{N}{n}}{\sum_{k=r}^{N} p_k \binom{k}{r}\binom{N-k}{n-r} / \binom{N}{n}} = \frac{p_r \binom{N-r}{n-r}}{\sum_{k=r}^{N} p_k \binom{k}{r}\binom{N-k}{k-r}}.$$

(β) $P(X > r \mid Y = r) = 1 - P(X = r \mid Y = r) = ...$

2η.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$A_i =$ “το νόμισμα βρίσκεται στο κελί i”, $i = 1,2,...,n$,

$E_i =$ “βρίσκουμε νόμισμα όταν ψάχνουμε στο κελί i”, $i = 1,2,...,n$.

Έστω $p_i = P(A_i)$, $P(E_i \mid A_i) = a_i$, $P(\bar{E}_i \mid A_i) = 1 - a_i$, $i = 1,2,...,n$.

$$P(A_j \mid \bar{E}_i) = \frac{P(A_j \bar{E}_i)}{P(\bar{E}_i)} = \frac{P(A_j)P(\bar{E}_i \mid A_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(\bar{E}_i \mid A_k)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{p_i(1-a_i)}{\sum\limits_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} p_k + p_i(1-a_i)} & \text{για } i = j, \\[2ex] \dfrac{p_i}{\sum\limits_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} p_k + p_i(1-a_i)} & \text{για } i \neq j \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{p_i(1-a_i)}{1 - p_i a_i} & \text{για } i = j, \\[2ex] \dfrac{p_i}{1 - p_i a_i} & \text{για } i \neq j. \end{cases}$$

3η.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$\mathrm{A} =$ "ο Α έλυσε το πρόβλημα", $\mathrm{B} =$ "ο Β έλυσε το πρόβλημα", $\Gamma =$"'ο Γ έλυσε το πρόβλημα". Έχουμε $P(\mathrm{A}) = 0.85$, $P(\mathrm{B}) = 0.95$, $P(\Gamma) = 0.90$.

(α) $\mathrm{E} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \Gamma =$ "το πρόβλημα λύθηκε".

1ος τρόπος

$$P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \Gamma) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) + P(\Gamma) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \Gamma) - P(\mathrm{B} \cap \Gamma) + P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Gamma) =$$
$$= P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) + P(\Gamma) - P(\mathrm{A})P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A})P(\Gamma) - P(\mathrm{B})P(\Gamma) + P(\mathrm{A})P(\mathrm{B})P(\Gamma) = ...$$

2ος τρόπος

$P(\mathrm{E}) = 1 - P(\overline{\mathrm{E}}) = 1 - P(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}} \cap \overline{\Gamma}) = 1 - P(\overline{\mathrm{A}})P(\overline{\mathrm{B}})P(\overline{\Gamma}) = \ldots$, επειδή τα ενδεχόμενα $\overline{\mathrm{A}}$, $\overline{\mathrm{B}}$, $\overline{\Gamma}$ είναι ανεξάρτητα.

(β) $P(\mathrm{A} \mid \mathrm{E}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{E})}{P(\mathrm{E})} = \dfrac{P(\mathrm{A})P(\mathrm{E} \mid \mathrm{A})}{P(\mathrm{E})} = \dfrac{P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{E})} = \ldots$, αφού $P(\mathrm{E} \mid \mathrm{A}) = 1$.

(γ) $P(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\overline{\Gamma} \mid \mathrm{E}) = \dfrac{P(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\overline{\Gamma}\mathrm{E})}{P(\mathrm{E})} = \dfrac{P(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\overline{\Gamma})P(\mathrm{E} \mid \mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\overline{\Gamma})}{P(\mathrm{E})} = \dfrac{P(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\overline{\Gamma})}{P(\mathrm{E})} = \dfrac{P(\mathrm{A})P(\overline{\mathrm{B}})P(\overline{\Gamma})}{P(\mathrm{E})} = ...$

4η.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$\mathrm{A} =$ "το ανταλλακτικό προέρχεται από την μηχανή Α",

$\mathrm{B} =$ "το ανταλλακτικό προέρχεται από την μηχανή Β",

$\Gamma =$ "το ανταλλακτικό προέρχεται από την μηχανή Γ",

$\mathrm{E} =$ "το ανταλλακτικό είναι ελαττωματικό".

(α) $P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{A})P(\mathrm{E} \mid \mathrm{A}) + P(\mathrm{B})P(\mathrm{E} \mid \mathrm{B}) + P(\Gamma)P(\mathrm{E} \mid \Gamma) = ...$

(β) $P(\mathrm{A} \mid \mathrm{E}) = \dfrac{P(\mathrm{E} \mid \mathrm{A})P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{E})} = ...$

5η.

Έστω:

$X =$ "αριθμός ελαττωματικών στα n ανταλλακτικά",

$n = 100$, $p = 0.003$

(α)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - b(100 \mid n, p) = 1 - \binom{100}{0} p^0 (1-p)^{100} = 1 - (1-p)^{100} = ...$$

(β) $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} b(k \mid n, p) = ...$

επειδή $\lambda = np = 0.3$ μπορούμε να προσεγγίσουμε την Διωνυμική από την Poisson.

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = ...$$

6η.

- $\{$Από το Α στο Γ$\} = \{\mathrm{A} \to \mathrm{B}\}\ \{\mathrm{B} \to \Gamma\}$

$P[\{$Από το Α στο Γ$\}] = P[\{\mathrm{A} \to \mathrm{B}\}\{\mathrm{B} \to \Gamma\}] = P[\{\mathrm{A} \to \mathrm{B}\}]P[\{\mathrm{B} \to \Gamma\}] = pq = ...$

- $\{$Από το Α στο Γ$\} = \{\mathrm{A} \to \mathrm{B}\}\{\mathrm{B} \to \Gamma\} \cup \{\mathrm{A} \to \Gamma\}$

$$\begin{aligned} P[\{\text{Από το Α στο Γ}\}] &= P[\{\mathrm{A} \to \mathrm{B}\}\{\mathrm{B} \to \Gamma\} \cup \{\mathrm{A} \to \Gamma\}] = \\ &= P[\{\mathrm{A} \to \mathrm{B}\}\{\mathrm{B} \to \Gamma\}] + P[\{\mathrm{A} \to \Gamma\}] - P[\{\mathrm{A} \to \mathrm{B}\}\{\mathrm{B} \to \Gamma\}\{\mathrm{A} \to \Gamma\}] = \\ &= P[\{\mathrm{A} \to \mathrm{B}\}]P[\{\mathrm{B} \to \Gamma\}] + P[\{\mathrm{A} \to \Gamma\}] - P[\{\mathrm{A} \to \mathrm{B}\}]P[\{\mathrm{B} \to \Gamma\}]P[\{\mathrm{A} \to \Gamma\}] = \\ &= pq + r - pqr = ... \end{aligned}$$