<u>ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ</u>

ΚΕΦ. 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Χρονοσειρές

Με τον όρο *χρονοσειρά* εννοούμε συνήθως μια ακολουθία $\{x_t : t = 0,1,2,...\}$, όπου κάθε x_t εκφράζει την κατά την χρονική στιγμή t κατάσταση ενός συστήματος το οποίο εξελίσσεται στο χρόνο κατά τυχαίο εν γένει τρόπο (*stochastic system*). Παραδείγματα τέτοιων χρονοσειρών είναι:

(i) Οι ημερήσιες, αεροπορικές και οδικές, αφίξεις τουριστών στην χώρα μας x_t με $t = 1,2,....$

(ii) Ο αριθμός x_t πελατών μέσα σε ένα πολυκατάστημα κατά τη χρονική στιγμή t με $t \in [0,T]$.

(iii) Ο συνολικός αριθμός τροχαίων ατυχημάτων x_t κατά μήκος μιας οδικής αρτηρίας στο χρονικό διάστημα [0,t] με $t \geq 0$.

(iv) Η ημερήσια κατανάλωση ηλεκτρικού ρεύματος καθώς και η ημερήσια κατανάλωση ύδατος, x_t και y_t αντίστοιχα, σε μια μεγάλη γεωγραφική περιοχή της χώρας με $t = 1,2,....$

(v) Οι οικονομικές χρονοσειρές, όπως το ετήσιο ακαθάριστο εθνικό προϊόν και ετήσιο ισοζύγιο εξωτερικών συναλλαγών x_t και y_t αντίστοιχα, με $t = 1,2,....$

(vi) Οι μετεωρολογικές χρονοσειρές, όπως η θερμοκρασία περιβάλλοντος και ατμοσφαιρική πίεση, $x_{\mathbf{t}}$ και $y_{\mathbf{t}}$ αντίστοιχα, σε συγκεκριμένη γεωγραφική περιοχή με γεωγραφικές συντεταγμένες (l,a,h) κατά την χρονική στιγμή t. Εδώ η χρησιμοποιούμενη παράμετρος $\boldsymbol{t}$ είναι περισσότερο σύνθετη και συγκεκριμένα $\boldsymbol{t} = (l,a,h,t)$.

Όπως διαπιστώνει κανείς από τα παραπάνω παραδείγματα, οι χρονοσειρές μπορούν να αφορούν *διακριτά* μεγέθη x_t σε διακριτό χρόνο *t*, περίπτωση (i), *διακριτά* μεγέθη x_t σε *συνεχή* χρόνο *t*, περιπτώσεις (ii) και (iii), *συνεχή* μεγέθη x_t σε διακριτό χρόνο *t*, περιπτώσεις (iv) και (v) και συνεχή μεγέθη x_t σε συνεχή χρόνο *t*, περίπτωση (vi). Το πρόβλημα είναι η "πρόβλεψη" μελλοντικών τιμών της χρονοσειράς με βάση τις μέχρι σήμερα τιμές τις ίδιας χρονοσειράς, περιπτώσεις (i)-(iii), είτε ακόμα και σε συνδυασμό με τις μέχρι σήμερα τιμές μιας άλλης χρονοσειράς η οποία εξελίσσεται παράλληλα με την πρώτη και επιδρά πάνω σ΄ αυτή, περιπτώσεις (iv)-(vi), οπότε μιλάμε για *πολυμεταβλητές χρονοσειρές*. Το σύνολο των δυνατών καταστάσεων ονομάζεται *χώρος καταστάσεων* και συμβολίζεται με $\mathcal{S}$, ένα (μονοδιάστατο) υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ή γενικότερα ένα πολυδιάστατο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, ενώ το σύνολο τιμών του *t* ονομάζεται *παραμετρικός χώρος*, συμβολίζεται με $\mathcal{T}$ και μπορεί επίσης να είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$, όταν χρειάζεται ένα πολυδιάστατο $\boldsymbol{t}$ για να καθορίσουμε πέραν του χρόνου *t* και γεωγραφικές π.χ. συντεταγμένες (l,a,h) σε χωρο-χρονοσειρές (*spatial time series*), βλ. παράδειγμα (vi) παραπάνω. Σημειώνεται οι όροι *διακριτά* και *συνεχή* μεγέθη είναι σε αντιστοιχία με τους όρους *διακριτές* και *συνεχείς* τυχαίες μεταβλητές.

1.2. Στοχαστικές Ανελίξεις

Όπως αναφέραμε παραπάνω, χρονοσειρά είναι μια ακολουθία τιμών $\{x_t : t = 0,1,2,...\}$ η οποία εκφράζει την εξέλιξη ενός *στοχαστικού* συστήματος, ενός συστήματος δηλαδή με τυχαία κατά μάλλον ή ήττον συμπεριφορά, σε αντίθεση με αυτήν ενός *προσδιοριστικού* (*deterministic*) συστήματος, η οποία συνήθως περιγράφεται από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Όπως είναι γνωστό από την Θεωρία των Στοχαστικών Ανελίξεων, η εξέλιξη ενός στοχαστικού συστήματος μπορεί να περιγραφεί πιθανοθεωρητικά μέσω μιας στοχαστικής ανέλιξης (σ.α.), μονοδιάστατης ή πολυδιάστατης, δηλαδή μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, ή γενικότερα μιας (υπεραριθμήσιμης) οικογένειας τυχαίων μεταβλητών $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$, που ορίζεται πάνω σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Σημειώνεται ότι για δεδομένο $\omega \in \Omega$, η $\{x_t = X_t(\omega) : t \in \mathcal{T}\}$ εκφράζει μια συνάρτηση του χρόνου t και αποτελεί την *τροχιά* ή *πραγματοποίηση* (*sample path*, *realization*) της σ.α. $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$. Σ΄ ότι ακολουθεί ο όρος *χρονοσειρά* χρησιμοποιείται τόσο για μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$, όσο και για μια τροχιά $\{x_t = X_t(\omega) : t \in \mathcal{T}\}$.

Έστω τώρα ότι έχουμε παραμετρικό χώρο $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ και τις διατεταγμένες χρονικές στιγμές $\{t_i \in \mathcal{T}\}$ με $t_i < t_{i+1}$ $(i = 1,...,n-1)$. Συμβολίζοντας με $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}^{(n)})$ την n-διάστατη τ.μ. $(X_{t_1},...,X_{t_n})$ και με $F_{\boldsymbol{t}^{(n)}}$ την σ.κ.π. της $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}^{(n)})$, είναι δυνατόν να καθορίσουμε ένα σύστημα κατανομών πεπερασμένης διάστασης

$$\mathcal{D} = \{F_{\boldsymbol{t}^{(n)}} : \boldsymbol{t}^{(n)} = (t_1,...,t_n) \text{ με } \mathrm{t_i} < \mathrm{t_{i+1}},\ \mathrm{i}=1,...,\mathrm{n}-1 \text{ και } n \in \mathbb{N}\},$$

όπου

$$F_{\boldsymbol{t}^{(n)}}(\boldsymbol{x}^{(n)}) = P[X_{t_1} \le x_1,...,X_{t_n} \le x_n],\ \boldsymbol{x}^{(n)} = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ και } n \in \mathbb{N},$$

όπως π.χ. ένα σύστημα πολυμεταβλητών κανονικών κατανομών $N_n(\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$. (βλ. παρακάτω §1.5 και §1.7).

Είναι προφανές ότι αν πάρουμε την m-διάστατη τ.μ. $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}^{(m)}) =\ (X_{t_1},...,X_{t_m})'$, με $m < n$, αν δηλαδή πάρουμε τις πρώτες m συνιστώσες του τ.δ. $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}^{(n)})$, η αντίστοιχη περιθώρια σ.κ.π. $F_{\boldsymbol{t}^{(m)}}$ θα πρέπει να συμφωνεί με αυτή που ορίζεται από το σύστημα κατανομών πεπερασμένης διάστασης $\mathcal{D}$. Τούτο διότι διαφορετικά παραβιάζεται το αξίωμα της (σ-) αθροιστικότητας των πιθανοτήτων. Θα πρέπει δηλαδή να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{t}^{(m)}}(\boldsymbol{x}^{(m)}) &= P[X_{t_1} \le x_1,...,X_{t_m} \le x_m] \\ &= P[X_{t_1} \le x_1,...,X_{t_m} \le x_m, X_{t_{m+1}} < \infty,...,X_{t_n} < \infty] \\ &= F_{\boldsymbol{t}^{(n)}}(\boldsymbol{x}^{(m)},\infty,...,\infty),\ \forall\, \boldsymbol{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^m \text{ και } \forall\, m,n \in \mathbb{N} \text{ με } m < n, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

όπου ο άνω δείκτης καθορίζει την αντίστοιχη διάσταση.

Κάνοντας χρήση χαρακτηριστικών συναρτήσεων η παραπάνω απαίτηση είναι ισοδύναμη με

$$\varphi_{\boldsymbol{t}^{(m)}}(\boldsymbol{u}^{(m)}) = \varphi_{\boldsymbol{t}^{(n)}}(\boldsymbol{u}^{(m)},0,...,0),\ \forall\ \boldsymbol{u}^{(m)} \in \mathbb{R}^m \text{ και } \forall\, m,n \in \mathbb{N} \text{ με } m < n. \tag{1.2.2}$$

Οι συνθήκες (1.2.1), ή ισοδύναμα οι συνθήκες (1.2.2), είναι γνωστές ως *συνθήκες συμβατότητας* κατανομών πεπερασμένης διάστασης (*Kolmogorov compatibility conditions*).

Το κρίσιμο ερώτημα που τίθεται εδώ είναι αν οι παραπάνω συνθήκες συμβατότητας, εκτός από *αναγκαίες*, είναι και *ικανές* να περιγράψουν τη στοχαστική συμπεριφορά μιας σ.α. $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$. Η απάντηση δίνεται από το παρακάτω.

Θεώρημα 1.2.1 (Kolmogorov). Όταν ένα σύστημα κατανομών πεπερασμένης διάστασης $\mathcal{D} = \{F_{\boldsymbol{t}^{(n)}} : \boldsymbol{t}^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ και $n \in \mathbb{N}\}$, ικανοποιεί τις συνθήκες συμβατότητας (1.2.1), ή ισοδύναμα τις συνθήκες (1.2.2), τότε υπάρχει σ.α. $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ της οποίας οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης αυτές του συστήματος $\mathcal{D}$.

Ορισμός 1.2.1 (Γκαουσιανές Χρονοσειρές). Μια χρονοσειρά $\{X_t : t \geq 0\}$ της οποίας όλες οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης είναι Κανονικές ονομάζεται *Γκαουσιανή*.

Παραδείγματα Γκαουσιανών χρονοσειρών αποτελούν οι στάσιμες Κανονικές σ.α. και η κίνηση Brown.

1.3. Ισχυρή και Ασθενής Στασιμότητα

Είναι φανερό ότι έχοντας παρατηρήσει μια χρονοσειρά $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ από κάποια χρονική στιγμή $t = 0$, έστω, μέχρι και την παρούσα χρονική στιγμή $t = s$, αν δηλαδή γνωρίζουμε την *τροχιά* αυτής $\{x_t : 0 \leq t \leq s\}$, και θέλουμε να προβλέψουμε μελλοντικές τιμές αυτής X_{s+h}, με $h > 0$, θα πρέπει να βασιστούμε στις μέχρι τώρα γνωστές τιμές της και στην εξάρτηση που ενδέχεται να υπάρχει μεταξύ X_{s+h} και των τιμών $\{x_t : t \in [0,s]\}$ της χρονοσειράς στο παρελθόν. Τούτο βέβαια με την προϋπόθεση ότι όλα τα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά μιας χρονοσειράς, ή τουλάχιστον τα βασικότερα εξ αυτών, παραμένουν αναλλοίωτα στον χρόνο.

Όταν όλα τα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά μιας χρονοσειράς παραμένουν αναλλοίωτα στο χρόνο τότε μιλάμε για *αυστηρή στασιμότητα*. Συγκεκριμένα έχουμε.

Ορισμός 1.3.1 (Αυστηρή Στασιμότητα). Η χρονοσειρά $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ ονομάζεται *αυστηρά στάσιμη* όταν $\forall\ n \in N,\ t_i \in \mathcal{T}\ \ (i = 1,\ldots,n)$ και $h \in \mathcal{T}$ ισχύει η παρακάτω σχέση ισοδυναμίας

$$\left(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\right) \sim \left(X_{t_1+h},\ldots,X_{t_n+h}\right). \tag{1.3.1}$$

Εδώ το σύμβολο “ ~ ” διαβάζεται “κατανέμεται όπως”, ή “ισοκατανέμεται με”.

Συνεπώς οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης αυστηρώς στάσιμων χρονοσειρών παραμένουν αναλλοίωτες σε χρονικές μεταθέσεις (στάσιμες κατανομές).

Ως γνωστό, τα βασικότερα χαρακτηριστικά μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι μέση τιμή $\mu = E[X]$, η διασπορά $\sigma^2 = V[X]$ και, όταν έχουμε να κάνουμε με ζεύγη τυχαίων μεταβλητών, η μικτή ροπή 2ας τάξης, δηλαδή η συνδιακύμανση $\sigma_{xy} = Cov(X,Y)$. Κατ΄ επέκταση, τα βασικότερα χαρακτηριστικά μιας χρονοσειράς $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ είναι η *συνάρτηση μέσης τιμής*

$$\mu(t) = E[X_t], \quad t \in \mathcal{T}, \tag{1.3.2}$$

η *συνάρτηση διασποράς*

$$\sigma^2(t) = V[X_t] = E[(X_t - \mu_t)^2], \quad t \in \mathcal{T}, \tag{1.3.3}$$

καθώς και η *συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης* (ACVF)

$$\gamma(t,h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu_t)(X_{t+h} - \mu_{t+h})], \quad t,\, h \in \mathcal{T}. \tag{1.3.4}$$

Είναι προφανές ότι ισχύει η σχέση

$$\sigma^2(t) = \gamma(t,0) = Cov(X_t, X_t), \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.3.5}$$

Είναι γνωστό επίσης ότι όταν οι διασπορές δύο τυχαίων μεταβλητών, X και Y, είναι πεπερασμένες τότε, τόσο οι μέσες τιμές αυτών όσο και η συνδιακύμανση αυτών είναι πεπερασμένες ποσότητες. Τούτο διότι αφενός πρέπει να έχουμε $E[|X|^2],\ E[|Y|^2] < \infty$, αφού διαφορετικά δεν ορίζονται οι διασπορές, και αφετέρου, με εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwarz

$$E[|X||Y|] \le \{E[X^2]E[Y^2]\}^{1/2},$$

προκύπτει:

$$|E[X]| \le E[|X|] \le \{E[X^2]\}^{1/2} < \infty, \quad |E[Y]| \le E[|Y|] \le \{E[Y^2]\}^{1/2} < \infty,$$

και

$$|Cov(X,Y)| \le \{V[X]V[Y]\}^{1/2} < \infty.$$

Συνεπώς, για μια αυστηρά στάσιμη χρονοσειρά $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ θα έχουμε:

$$\mu = E[X_t], \quad t \in \mathcal{T}, \tag{i}$$

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h}), \quad t,h \in \mathcal{T}, \tag{ii}$$

με διασπορά $\sigma^2 = V[X_t] = \gamma(0) \ge |\gamma(h)| \ \ \forall\ h \in \mathcal{T}$.

Οι παραπάνω δύο συνθήκες είναι προφανώς ασθενέστερες από τη συνθήκη (1.3.1). Η απαίτηση τώρα να ισχύουν οι ως άνω δύο συνθήκες, μαζί με την απαίτηση της πεπερασμένης διασποράς σ^2, μας δίνουν την ιδιότητα της *ασθενούς*, ή *υπό ευρεία έννοια*, στασιμότητας. Έχουμε συνεπώς τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.3.2 (Ασθενής Στασιμότητα). Η χρονοσειρά $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ ονομάζεται *ασθενώς*, ή *υπό ευρεία έννοια*, *στάσιμη* όταν έχει πεπερασμένη διασπορά και ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii).

Σ΄ ότι ακολουθεί, η χρήση των όρων *στασιμότητα*, *στάσιμη χρονοσειρά* κ.λπ. θα είναι πάντα με την ασθενή τους έννοια.

Η *συνάρτηση αυτοσυσχέτισης* (ACF) στάσιμης χρονοσειράς ορίζεται από τη σχέση:

$$\rho(h) = Corr(X_0, X_h) = \frac{Cov(X_0, X_h)}{\sqrt{V[X_0]V[X_h]}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}, \quad h \in \mathcal{T}. \tag{1.3.6}$$

Προφανώς η ACF έχει όλες τις ιδιότητες της συνάρτησης αυτοσυνδιακύμανσης με την επιπρόσθετη ιδιότητα $|\rho(h)| \leq 1$, ως συνέπεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz.

Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν μια Γκαουσιανή χρονοσειρά είναι ασθενώς στάσιμη τότε είναι και αυστηρά στάσιμη. Τούτο διότι οι πολυμεταβλητές Κανονικές κατανομές ορίζονται μόνο από τις ροπές πρώτης και δευτέρας τάξης. Συνεπώς η στασιμότητα των ροπών αυτών συνεπάγεται τη στασιμότητα των Κανονικών κατανομών πεπερασμένης διάστασης. Επιπρόσθετα, βλ. §1.5 και §1.7 στη συνέχεια, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της πολυμεταβλητής Κανονικής κατανομής επιβεβαιώνεται ότι το ως άνω σύστημα κατανομών πεπερασμένης διάστασης ικανοποιεί τις συνθήκες συμβατότητας Kolmogorov.

Παράδειγμα 1: Έστω $X_t = U\cos(\theta t) + V\sin\theta t$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ και U, V δύο ασυσχέτιστες τ.μ. με μηδενικούς μέσους και μοναδιαίες διασπορές, δηλαδή $\mu_U = \mu_V = 0$, $\sigma_U^2 = \sigma_V^2 = 1$ και $\rho(X, Y) = 0$.

Η χρονοσειρά $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ είναι στάσιμη (υπό ευρεία έννοια). Πράγματι έχουμε:

(α) $E[X_t] = E[U]\cos(\theta t) + E[V]\sin(\theta t) = 0, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$

(β) $Cov(X_t, X_{t+h}) = E[X_t X_{t+h}] - E[X_t] \cdot E[X_{t+h}] = E[X_t X_{t+h}]$

$$
\begin{aligned}
&= E\Big[U^2 \cos(\theta t)\cos(\theta(t+h)) + UV\cos(\theta t)\sin(\theta(t+h)) \\
&\quad + UV\sin(\theta t)\cos(\theta(t+h)) + V^2\sin(\theta t)\sin(\theta(t+h))\Big] \\
&= E\left[U^2\right]\cos(\theta t)\cos(\theta(t+h)) + E[UV]\cos[\theta t]\sin(\theta(t+h)) \\
&\quad + E[UV]\sin(\theta t)\cos(\theta(t+h)) + E\left[V^2\right]\sin(\theta t)\sin(\theta(t+h))\Big] \\
&= \cos(\theta t)\cos(\theta(t+h)) + \sin(\theta t)\sin(\theta(t+h)) \\
&= \cos\big(\theta t - \theta(t+h)\big) = \cos(\theta h), \text{ ανεξάρτητο του } t.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 2: Έστω $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$, με $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma)$, $t \in \mathbb{Z}$, και ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Η χρονοσειρά $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ είναι στάσιμη. Πράγματι:

(α) $E[X_t] = E[\varepsilon_t] + \theta E[\varepsilon_{t-1}] = 0.$

(β) $Cov(X_t, X_{t+h}) = Cov(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+h} + \theta\varepsilon_{t+h-1})$

$$
\begin{aligned}
&= Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) + Cov(\varepsilon_t, \theta\varepsilon_{t+h-1}) + Cov(\theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+h}) + Cov(\theta\varepsilon_{t-1}, \theta\varepsilon_{t+h-1}) \\
&= Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) + \theta Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h-1}) + \theta Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+h}) + \theta^2 Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+h-1}) \\
&= \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2, & \text{εάν } h = 0, \\ \theta\sigma^2, & \text{εάν } h = \pm 1, \\ 0, & \text{εάν } |h| > 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Οι ροπές 1ης και 2ης τάξης είναι συνεπώς (πεπερασμένες και) ανεξάρτητες του *t*. Συνεπώς η χρονοσειρά είναι στάσιμη.

Παράδειγμα 3: Έστω $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ τυχαίος περίπατος. Έχουμε δηλαδή

$$X_n = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n \quad (n = 1, 2, ...)$$

με Z_v $(v = 1, 2, ...)$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή $\mu = 0$ και διασπορά σ^2. Η χρονοσειρά $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι στάσιμη. Τούτο διότι ναι μεν έχει σταθερή μέση τιμή, αφού $E[X_n] = nE[Z] = 0,$ όμως η συνδιακύμανση εξαρτάται από το n αφού

$$\begin{aligned} Cov(X_n, X_{n+k}) &= Cov\left(X_n,\, X_n + \sum_{v=n+1}^{n+k} Z_v \right) \\ &= Cov(X_n,\, X_n) + Cov\left(\sum_{v=1}^{n} Z_v,\, \sum_{v=n+1}^{n+k} Z_v \right) \\ &= V[X_n] = nV[Z] = n\sigma^2. \end{aligned}$$

1.4. Χρονοσειρές με Τάση και Περιοδικότητα

Είναι συχνό φαινόμενο στις χρονοσειρές η μέση τιμή τους να παρουσιάζει μια αυξητική, ή φθίνουσα, *τάση* ή/και να έχει εναλλαγές μεταξύ αυξητικών φάσεων και φθινουσών φάσεων, να παρουσιάζει δηλαδή μια "κυκλικά" επαναλαμβανόμενη δομή σε διαδοχικά χρονικά διαστήματα ή *εποχές*. Τέτοια συμπεριφορά είναι ιδιαίτερα εμφανής σε μετεωρολογικές χρονοσειρές καθώς και σε εμπορικά και οικονομικά μεγέθη. Πριν προχωρήσουμε σε οποιαδήποτε προσπάθεια μοντελοποίησης μιας χρονοσειράς είναι απαραίτητο να διερευνήσουμε αν εμφανίζει τέτοιου είδους συμπεριφορά και γενικά αν παραβιάζεται η απαίτηση της, υπό ευρεία έννοια, στασιμότητας. Η διερεύνηση αυτή γίνεται μέσω στατιστικών διαγραμμάτων και γραφικών παραστάσεων. Επίσης, από τη γραφική παράσταση μιας χρονοσειράς είναι δυνατόν να διαπιστώσουμε αν υπάρχουν "ιδιάζουσες" τιμές (outliers), τιμές δηλαδή που βρίσκονται σε προφανή απόκλιση από τις υπόλοιπες. Οι τιμές αυτές ενδέχεται να δημιουργήσουν σοβαρά προβλήματα στην μοντελοποίηση μιας χρονοσειράς και ως εκ τούτου χρειάζονται ειδική μεταχείριση αφού όμως πρώτα προσδιοριστεί το αίτιο το οποίο τις προκάλεσε.

Ένα γενικό μοντέλο αναπαράστασης μιας χρονοσειράς με τάση και εποχικότητα είναι το *προσθετικό*,

$$X_t = m_t + s_t + Y_t,\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.4.1}$$

όπου η συνιστώσα m_t είναι μια χαμηλών μεταβολών συνάρτηση του χρόνου t η οποία εκφράζει την *τάση*, η συνιστώσα s_t είναι μια περιοδική συνάρτηση η οποία εκφράζει την *εποχική συνιστώσα* και η συνιστώσα Y_t αποτελεί τον *θόρυβο* και είναι μια στάσιμη στοχαστική ανέλιξη.

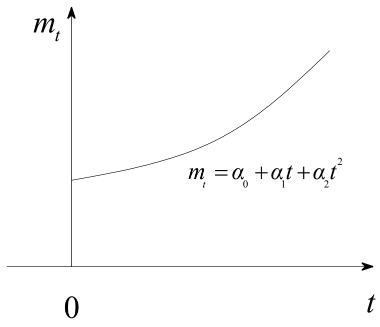
Συνήθως η τάση m_t είναι γραμμική ή εκθετική

$$m_t = \alpha + \beta t, \quad m_t = \alpha \exp\{\beta t\},$$

ή ένα χαμηλού βαθμού πολυώνυμο του t

$$m_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + ... + \alpha_k t^k.$$

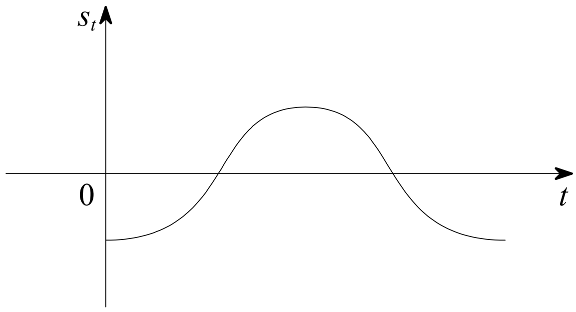
με γραφική παράσταση π.χ.



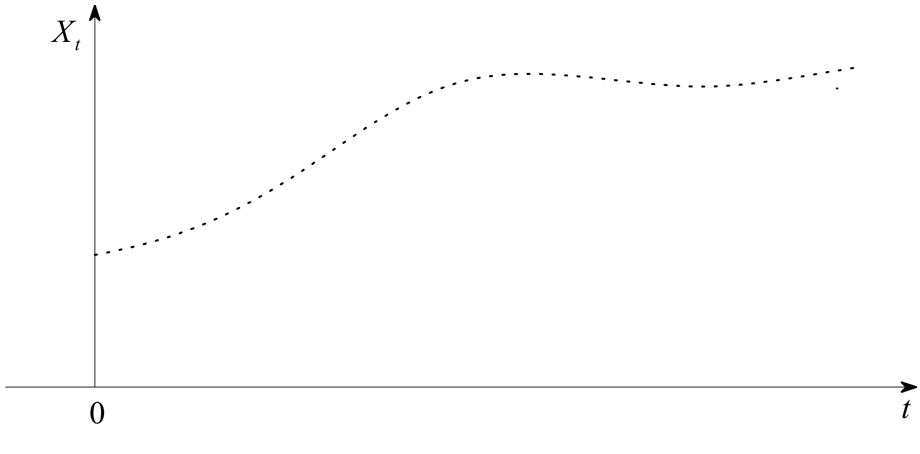
Η εποχική συνιστώσα s_t είναι της μορφής:

$$s_t = \alpha \sin 2\pi\omega t = \alpha \sin \frac{2\pi t}{d}, \text{ όπου } \omega, \text{ η συχνότητα και } d = \frac{1}{\omega}, \text{ η περίοδος,}$$

ή γενικότερα της μορφής: $s_t = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \sin\left(2\pi\omega_k t + \theta_k\right).$



Η σύνθεση τάσης, εποχικότητας και θορύβου δίνει την χρονοσειρά $X_t = m_t + s_t + Y_t$ με την παρακάτω γραφική παράσταση.



Στα παρακάτω θεωρούμε ότι η μεταβλητή t λαμβάνει τιμές στο $\mathbb{N}$.

(A) ***Εκτίμηση Τάσης*** (χαμηλή εποχική συνιστώσα)

Στην περίπτωση που η εποχική συνιστώσα s_t είναι χαμηλή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε

$$X_t = m_t + Y_t,\ t = 1,...,n. \tag{1.4.2}$$

Παρουσιάζουμε τώρα τρεις βασικές μεθόδους προσδιορισμού της τάσης m_t.

(A1) ***Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων***

Έχοντας παρατηρήσει τη χρονοσειρά $\{X_t\}$ για χρόνο n, έχοντας δηλαδή τις τιμές $\{x_t, t = 1,...,n\}$, και διαπιστώνοντας από τη γραφική παράστασή της ότι η τάση m_t είναι ένα χαμηλού βαθμού πολυώνυμο του t, μπορούμε με εφαρμογή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων να προσδιορίσουμε την τάση αυτή. Στην περίπτωση κατά την οποία έχουμε *γραμμική* τάση, δηλαδή όταν $m_t = \alpha + \beta t$, η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων ελαχιστοποιεί το άθροισμα: (1.4.3)

$$\sum_{t=1}^{n} \{x_t - \alpha - \beta t\}^2 ,$$

και δίνει

$$\hat{m}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} t, \tag{1.4.4}$$

με

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \overline{x} - \hat{\beta}\overline{t}, \\ \hat{\beta} &= C_{tx} / C_{tt}, \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

όπου $\overline{x} = n^{-1}\sum_t x_t$, $\overline{t} = n^{-1}\sum_t t = (n+1)/2$ και

$$\begin{aligned} C_{tx} &= \sum_t (t - \overline{t})(x_t - \overline{x}), \\ C_{tt} &= \sum_t (t - \overline{t})^2 = n(n^2 - 1)/12. \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Οι ίδιοι τύποι ισχύουν για το λογάριθμο της εκθετικής τάσης. Επίσης, ανάλογα αποτελέσματα προκύπτουν για πολυωνυμικές τάσεις από την παρακάτω ελαχιστοποίηση:

$$\min_{\{\alpha_j : j=0,\ldots,k\}} \sum_{t=1}^{n} \left\{ x_t - \alpha_0 - \alpha_1 t - \alpha_2 t^2 - \ldots - \alpha_k t^k \right\}^2 . \tag{1.4.7}$$

(A2) ***Μέθοδος Εξομάλυνσης Κινητού Μέσου***

Ένας εναλλακτικός τρόπος εκτίμησης της τάσης m_t είναι η *μέθοδος (αμφίπλευρης) εξομάλυνσης κινητού μέσου* (*moving average smoothing method*). Συγκεκριμένα με $1 \le q << n$ *εξομαλύνουμε* την $x_t = m_t + y_t$, $t = 1,\ldots,n,$ από την

$$w_t = \frac{1}{2q+1}\sum_{t=-q}^{q} x_{t+j} = \frac{1}{2q+1}\sum_{t=-q}^{q} m_{t+j} + \frac{1}{2q+1}\sum_{t=-q}^{q} y_{t+j},\ q+1 \le t \le n-q. \tag{1.4.8}$$

Επειδή έχουμε $E[Y_t] = 0,$ συμπεραίνουμε ότι το δεύτερο άθροισμα στα δεξιά της παραπάνω σχέσης είναι πολύ κοντά στο μηδέν και συνεπώς μπορούμε να δεχθούμε ότι τα m_t ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων

$$\frac{1}{2q+1}\sum_{t=-q}^{q} m_{t+j} = w_t = \frac{1}{2q+1}\sum_{t=-q}^{q} x_{t+j},\ q+1 \le t \le n-q. \tag{1.4.9}$$

Αν τώρα, με t σταθερό, τα m_{t+j}, $-q \le j \le q$, συνδέονται γραμμικά μεταξύ τους, τότε έχουμε τις παρακάτω *εκτιμήτριες κινητού μέσου*:

$$\hat{m}_t = \frac{1}{2q+1}\sum_{t=-q}^{q} x_{t+j}, \ \ q+1 \le t \le n-q. \tag{1.4.10}$$

Παραλλαγή της παραπάνω μεθόδου είναι η μέθοδος της *μονόπλευρης* εξομάλυνσης η οποία είναι γνωστή επίσης και ως *εκθετική εξομάλυνση*. Με $\alpha \in [0,1]$ θεωρούμε ότι οι εκτιμήτριες $\hat{m}_t$ ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\hat{m}_t = ax_t + (1-a)\,\hat{m}_{t-1}, \ \ t = 2,...,n, \ \text{ με } \hat{m}_1 = x_1. \tag{1.4.11}$$

Με διαδοχική αντικατάσταση εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$\hat{m}_t = \alpha\sum_{j=0}^{t-2}(1-a)^j\, x_{t-j} + (1-\alpha)^{t-1}x_1 \ \text{ για } \ t \ge 2, \tag{1.4.12}$$

όπου το άθροισμα συντελεστών δίνει τη μονάδα όπως και στην περίπτωση του αμφίπλευρου κινητού μέσου.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να θεωρήσουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις η εκτιμηθείσα τάση $\hat{m}_t$ είναι το αποτέλεσμα της δράσης ενός γραμμικού φίλτρου πάνω στην $\{X_t\}$. Τούτο διότι έχουμε:

$$\hat{m}_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j x_{t-j} \ \ t \in \mathbb{Z} \ \text{ με } \ \sum\nolimits_j |\,\alpha_j\,| < \infty. \tag{1.4.13}$$

Το αποτέλεσμα αυτής της δράσης πάνω στην $\{x_t\}$ είναι απαλλαγμένο από τον θόρυβο υψηλής συχνότητας $\{Y_t\}$ ενώ διατηρεί τις χαμηλές συχνότητες (*φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων*).

$$\{x_t\} \longrightarrow \boxed{\text{Γραμμικό φίλτρο}} \longrightarrow \left\{\hat{m}_t = \sum a_j x_{t+j}\right\}$$

Σημειώνεται επίσης ότι όταν η τάση m_t είναι ένα χαμηλού βαθμού πολυώνυμο του t είναι δυνατόν, με κατάλληλη επιλογή του q και των *βαρών* α_j, με $|\,j\,| \le q$, να απαλλαγεί από τον θόρυβο υψηλών συχνοτήτων χωρίς να αλλοιωθεί η υπάρχουσα πολυωνυμική σχέση μεταξύ της τάσης m_t και του χρόνου t.

(Α3) ***Μέθοδος των Διαφορών***

Με τη μέθοδο των αυτή επιδιώκουμε να εξαλείψουμε την τάση m_t που υπάρχει σε μια χρονοσειρά $\{x_t\}$ σχηματίζοντας μια νέα χρονοσειρά από τις διαφορές μεταξύ διαδοχικών όρων $x_t - x_{t-1}$ για $t = 2,3,...,n$. Έτσι, όταν η τάση m_t είναι γραμμική, η χρονοσειρά $\{v_t = x_t - x_{t-1}\}$ που παράγεται έχει μηδενική τάση. Όταν η τάση m_t είναι πολυωνυμική, η διαδικασία των διαφορών μεταξύ διαδοχικών όρων επαναλαμβάνεται μέχρις ότου εξαλειφθεί η τάση πλήρως.

Στην παραπάνω διαδικασία βοηθά ιδιαίτερα η χρήση του τελεστή B, γνωστός ως ο οπισθοδρομικός τελεστής (*backward operator*) και ο τελεστής ∇, γνωστός ως ο τελεστής διαφοράς (*difference operator*).

Οπισθοδρομικός τελεστής: $Bx_t = x_{t-1}$.
Τελεστής Διαφοράς: $\nabla x_t = x_t - x_{t-1} = (1-B)\,x_t$.

Εφαρμόζοντας τους τελεστές αυτούς k φορές λαμβάνουμε αντίστοιχα:

$$B^k x_t = x_{t-k},$$

και

$$\nabla^k x_t = \nabla(\nabla^{k-1} x_t) \ \text{ με } \nabla^0 x_t = I x_t = x_t,$$

όπου I συμβολίζει τον ταυτοτικό τελεστή. Για $k = 2$ η τελευταία δίνει

$$\nabla^2 x_t = \nabla(\nabla x_t) = \nabla(x_t - x_{t-1}) = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2} = (I - 2B + B^2)x_t,$$

και, όπως εύκολα διαπιστώνεται, ισχύει η Διωνυμικός τύπος

$$\nabla^k = (I-B)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l B^l. \tag{1.4.14}$$

Συνεπώς

$$\nabla^k x_t = (I - B)^k x_t = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l x_{t-l}. \tag{1.4.15}$$

Έτσι όταν η τάση m_t είναι πολυωνυμική βαθμού k, όταν δηλαδή έχουμε

$$x_t = m_t + y_t = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j t^j + y_t, \; t \in \mathbb{Z},$$

τότε, εφαρμόζοντας τον τελεστή ∇^k εξαλείφεται η πολυωνυμική τάση και προκύπτει η στάσιμη χρονοσειρά

$$x_t^{(k)} \equiv \nabla^k x_t = k!\alpha_k + \nabla^k y_t, \; t \in \mathbb{Z}.$$

Στην πράξη η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται σταδιακά. Τούτο διότι για κάθε τιμή του k, χρειάζεται να γίνει η γραφική αναπαράσταση της χρονοσειράς $\{x_t^{(k)}, t = 1,\ldots, n-k\}$, από την οποία προκύπτει αν έχει επιτευχθεί ή όχι στασιμότητα. Αν όχι, ο τελεστής ∇ εφαρμόζεται άλλη μία φορά και συνεχίζουμε τη διαδικασία. Συνήθως δεν χρειάζεται να επαναλάβουμε τη διαδικασία αυτή πάνω από δύο ή το πολύ τρεις φορές.

(Β) ***Εκτίμηση Τάσης και Εποχικότητας***

Εδώ έχουμε το γενικό μοντέλο

$$X_t = m_t + s_t + Y_t \;\text{ με }\; E[Y_t] = 0, \;\; t = 1, 2, \ldots. \tag{1.4.16}$$

Όταν στη γραφική παράσταση της χρονοσειράς $\{x_t : t = 1, 2, \ldots, n\}$ είναι σαφής η ύπαρξη εποχικότητας, τότε είναι αναγκαίο κατά την εκτίμηση της τάσης m_t να ληφθεί υπόψη η εποχική συνιστώσα s_t. Τούτο σημαίνει ότι θα πρέπει να έχουμε ήδη εκτιμήσει την εποχική συνιστώσα πράγμα το οποίο πάλι προϋποθέτει ότι γνωρίζουμε την τάση. Έτσι η εκτίμηση των δύο αυτών συνιστωσών γίνεται με επαναληπτικές διαδικασίες διαδοχικών εκτιμήσεων των δύο αυτών συνιστωσών ή με μία διαδικασία ταυτόχρονου προσδιορισμό και των δύο.

Για απλούστευση του προβλήματος θα θεωρήσουμε ότι η εποχική συνιστώσα s_t παρουσιάζει ένα μόνο κύκλο με συγκεκριμένη και γνωστή χρονική διάρκεια, π.χ. ετήσια. Αυτό συμβαίνει συχνά σε οικονομικές χρονοσειρές, όμως συχνό είναι το φαινόμενο να υπάρχουν συντιθέμενοι κύκλοι διαφορετικών περιόδων, όπως π.χ. σε μετεωρολογικά δεδομένα, όπου εκτός του ετήσιου κύκλου υπάρχουν και άλλοι κύκλοι μεγαλύτερης διάρκειας. Το πρόβλημα της αναγνώρισης της ύπαρξης ή όχι κύκλων σε μια χρονοσειρά $\{x_t : t = 1, 2, ...\}$ είναι βασικό αντικείμενο της Φασματικής Ανάλυσης και δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω με το θέμα αυτό. Για την περιγραφή των μεθόδων θα θεωρήσουμε εδώ ότι στη χρονοσειρά υπάρχει ένας μόνο κύκλος με γνωστή περίοδο d ($d > 1$).

Έστω $\{x_t : t = 1, 2, ...\}$ μια χρονοσειρά η οποία παρουσιάζει ετήσια περιοδικότητα και ο χρόνος t μετράται σε μήνες. Η περίοδος της χρονοσειράς είναι συνεπώς $d = 12$. Η εποχική συνιστώσα s_t της χρονοσειράς θα πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις: $s_t = s_{t+d}$ και $\sum_{l=1}^{d} s_{t+l} = 0, \quad \forall\ t \in \mathbb{N}$. Ως εκ τούτου θα πρέπει να προσδιορίσουμε την εποχική συνιστώσα κατά τρόπο που να ικανοποιούνται οι εξισώσεις αυτές.

Για διευκόλυνση στην ανάπτυξη των μεθόδων που εφαρμόζονται σε περιοδικές χρονοσειρές με περίοδο d, συμβολίζουμε με $x_{k,l}$ την παρατήρηση x_t με $t = (k-1)d + l$, ($k = 1, ..., K$ και $l = 1, ..., d$). Τούτο σημαίνει $l = t \bmod d$. (Για απλούστευση θεωρούμε ότι το μήκος n της παρατηρηθείσας χρονοσειράς $\{x_t\}$, είναι πολλαπλάσιο της περιόδου d και συγκεκριμένα $n = Kd$).

(B1) ***Μέθοδος Χαμηλής Τάσης***

Όταν η συνιστώσα τάσης m_t παρουσιάζει χαμηλό βαθμό μεταβολής τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, σε ετήσια βάση, η τάση m_t διατηρεί ένα σταθερό επίπεδο τιμών. Το σταθερό αυτό επίπεδο τιμών μπορεί να εκτιμηθεί από τον μέσο όρο των τιμών x_t του αντίστοιχου έτους.

Έτσι για το έτος k, το επίπεδο τιμών m_k εκτιμάται από το (δειγματικό) μέσο μέσο ετήσιο επίπεδο τιμών, δηλαδή

$$\hat{m}_k = \frac{1}{d}\sum_{l=1}^{d} x_{k,l}, \ k = 1, ..., K, \tag{1.4.17}$$

όπου K το πλήθος των ετών στα οποία αναφέρεται η εν λόγω χρονοσειρά.

Μένει τώρα να εκτιμήσουμε τις εποχικές συνιστώσες s_l ($l = 1, ..., d$). Προς τούτο χρησιμοποιούμε τις μέσες αποκλίσεις από το εκάστοτε μέσο ετήσιο επίπεδο τιμών. Έχουμε δηλαδή ως εκτιμήτρια της περιοδικής συνιστώσας για το μήνα l την

$$\hat{s}_l = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}(x_{k,l} - \hat{m}_k),\ l = 1,...,d, \tag{1.4.18}$$

από την οποία εύκολα προκύπτει ότι οι εκτιμήτριες των εποχικών συνιστωσών ικανοποιούν την συνθήκη $\sum_{l=1}^{d}\hat{s}_l = 0.$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$x_{k,l} = \hat{m}_k + \hat{s}_l + \hat{Y}_{k,l},\ k = 1,...,K,\ l = 1,...,d, \tag{1.4.19}$$

από όπου προκύπτει η χωρίς τάση και εποχικότητα χρονοσειρά

$$\hat{Y}_{k,l} = x_{k,l} - \hat{m}_k - \hat{s}_l,\ k = 1,...,K,\ l=1,...,12. \tag{1.4.20}$$

της οποίας η στασιμότητα πρέπει να εξεταστεί γραφικά.

Σημείωση. Έχοντας τις εκτιμήσεις $\hat{s}_l,\ l = 1,...,d,$ είναι προφανές ότι μπορούμε να κάνουμε επανεκτίμηση των m_t, θέτοντας στη θέση της εποχικής συνιστώσας s_t την εκτίμηση $\hat{s}_l$, με $l = t \bmod d\ (t = 1,...,n),$ και θεωρώντας την τάση m_t σταθερή για μικρότερο του έτους χρονικό διάστημα.

(B2) ***Μέθοδος Κινητού Μέσου***

Η μέθοδος *κινητού μέσου* εφαρμόζεται σε χρονοσειρές $\{X_t\}$ στις οποίες η υπόθεση ότι η συνιστώσα τάσης m_t *δ*ιατηρεί "σταθερό" επίπεδο τιμών καθ΄ όλην τη διάρκεια του έτους δεν ευσταθεί. Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζεται μια μέθοδος τριών βημάτων. Στο πρώτο βήμα γίνεται αμφίπλευρη εξομάλυνση κινητού μέσου. Στο δεύτερο βήμα υπολογίζεται η φασματική συνιστώσα και στο τρίτο υπολογίζεται η τάση έχοντας προηγουμένως "αποεποχικοποιήσει" την χρονοσειρά (*desea-sonalization*). Συγκεκριμένα έχουμε:

1ο βήμα (Εξομάλυνση).

Με άρτια περίοδο $d = 2q$, λαμβάνουμε τους κινητούς μέσους της $\{x_t,\ t = 1,...,n\}$,

$$\hat{m}_t = \left\{0,5x_{t-q} + x_{t-q+1} + ... + x_{t+q-1} + 0,5x_{t+q}\right\}/d,\ t = 1,2,..., \tag{1.4.21}$$

ενώ με περιττή περίοδο $d = 2q+1$, λαμβάνουμε τους κινητούς μέσους

$$\hat{m}_t = \left\{x_{t-q} + x_{t-q+1} + \ldots + x_{t+q-1} + x_{t+q}\right\}/d,\ t = 1,2,\ldots. \qquad (1.4.22)$$

Έχουμε δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις εξομάλυνση κινητού μέσου της μορφής

$$\hat{m}_t = \sum_{j=-q}^{q} a_j x_{t+j} \quad \text{με} \quad \sum_{j=-q}^{q} a_j = 1.$$

Με την ως άνω διαδικασία προσδιορισμού των $\hat{m}_t,\ t = 1,2,\ldots,$ εξαλείφεται η επίδραση της εποχικής συνιστώσας s_t, αφού στις δύο παραπάνω περιπτώσεις έχουμε $\sum_{j=-q}^{q} a_j s_{t+j} = 0,$ για κάθε *t*.

2ο βήμα

Λαμβάνουμε τους μέσους

$$w_l = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left\{x_{(k-1)d+l} - \hat{m}_{(k-1)d+l}\right\},\ l = 1,\ldots,d.$$

Οι μέσοι αυτοί εκφράζουν την εποχική συνιστώσα όμως δεν ικανοποιούν την συνθήκη $\sum_{l=1}^{d} w_l = 0.$ Ως εκ τούτου αντί αυτών χρησιμοποιούμε τις διαφορές $w_l - \bar{w},$ όπου $\bar{w}$ είναι ο αριθμητικός μέσος των $w_l,\ l = 1,\ldots,d.$ Συνεπώς η εκτιμήτρια της εποχικής συνιστώσας είναι:

$$\hat{s}_l = w_l - \bar{w} = w_l - \frac{1}{d}\sum_{l=1}^{d} w_l \qquad l = 1,\ldots,d, \qquad (1.4.23)$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\hat{s}_t = \hat{s}_l \quad \text{με } l = t \bmod d,\ t = 1,\ldots,n. \qquad (1.4.24)$$

3ο βήμα

Έχοντας εκτιμήσει την εποχική συνιστώσα s_t μπορούμε να επανέλθουμε στη αρχική χρονοσειρά και να την "αποεποχικοποιήσουμε" λαμβάνοντας τις διαφορές

$$d_t = x_t - \hat{s}_t, \quad t = 1,...,n. \tag{1.4.25}$$

Οι ως άνω διαφορές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επανεκτίμηση της τάσης m_t εφαρμόζοντας μια από τις μεθόδους εκτίμησης τάσης της προηγούμενης Ενότητας.

Έχοντας ολοκληρώσει τα παραπάνω βήματα χρειάζεται όπως πάντα να εξετάσουμε γραφικά αν ο εκτιμώμενος θόρυβος

$$\hat{Y}_t = x_t - \hat{m}_t - \hat{s}_l, \ t = 1,...,n, \tag{1.4.26}$$

είναι στάσιμος ή όχι.

(B3) ***Μέθοδος Διαφορών με Υστέρηση d***

Επειδή στις περιοδικές, χρονοσειρές ισχύει η σχέση $s_t = s_{t+d}$, $t = 1,2,...$, συμπεραίνουμε ότι αν λάβουμε τις διαφορές $X_t - X_{t-d}$, $t = d, d+1,...,n$, η εποχική συνιστώσα s_t εξαλείφεται. Εφαρμόζοντας συνεπώς τον τελεστή διαφοράς με υστέρηση d (*difference operator at lag d*) $\nabla_d = I - B^d$ πάνω στην χρονοσειρά $X_t = m_t + s_t + Y_t$, $t = 1,2,...$, λαμβάνουμε τη μη περιοδική χρονοσειρά

$$\nabla_d X_t = X_t - X_{t-d} = \nabla_d (m_t + s_t + Y_t) = m_t - m_{t-d} + Y_t - Y_{t-d}, \ t = d+1, d+2,....$$

Έχοντας τώρα την απεριοδική χρονοσειρά $\{\nabla_d X_t : t = d+1,2,...\}$, οι διαφορές $\delta_t = \nabla_d m_t = m_t - m_{t-d}$, $t = d+1,2,...$, εκτιμώνται εφαρμόζοντας μια από τις μεθόδους της Ενότητας Α, και στην προκειμένη περίπτωση τη μέθοδο των διαφορών τάξης *k*, δηλαδή εφαρμόζοντας τον τελεστή $\nabla^k = (I - B)^k$ πάνω στην $\{\delta_t, t = d+1,...\}$, με κατάλληλο *k*.

1.5. Γνήσια μη Αρνητικές Συναρτήσεις

Θα ασχοληθούμε εδώ με μια ειδική κατηγορία συναρτήσεων που παίζουν σημαντικό ρόλο στην αναπαράσταση συναρτήσεων αυτοσυνδιακύμανσης και αυτοσυσχέτισης στάσιμων χρονοσειρών. Πρόκειται για τις *γνήσια μη αρνητικές* συναρτήσεις

Ορισμός 1: Μία πραγματική συνάρτηση $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ λέγεται *γνήσια μη αρνητική* (αντίστοιχα, *γνήσια θετική*) εάν και μόνο εάν $\forall\ n\in\mathbb{N}$ και $\forall\ \boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)'\in\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i g\left(i-j\right)\alpha_j \geq 0 \quad \text{(αντίστοιχα, με την ισότητα να ισχύει μόνο για } \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\text{).}$$

Ο ως άνω ορισμός επεκτείνεται και σε συναρτήσεις $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Στην περίπτωση αυτή απαιτείται να ισχύει η συνθήκη

$$\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i g(t_i-t_j)\alpha_j \geq 0 \quad \text{(αντίστοιχα, με την ισότητα να ισχύει μόνο για } \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\text{)}$$
$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ \boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)'\in\mathbb{R} \text{ και } \forall\ t_i\in\mathbb{R}\ (i=1,\dots,n).$$

Θεώρημα 1: (Χαρακτηρισμός της συνάρτησης αυτοσυνδιακύμανσης).

Μία πραγματική συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{Z}$ είναι συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης στάσιμης χρονοσειράς *εάν και μόνο εάν* είναι *άρτια* και *γνήσια μη αρνητική*.

Απόδειξη:

(*αναγκαίο*)

Έστω $g:\ \mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης μιας στάσιμης χρονοσειράς $\left\{X_n : n\in\mathbb{Z}\right\}$. Λόγω στασιμότητας έχουμε

$$g(h)=Cov\left(X_n,X_{n+h}\right)=Cov\left(X_{n-h},X_n\right)=g(-h),\quad \forall\ h\in\mathbb{Z}. \tag{1.5.1}$$

Ταυτόχρονα $\forall\ \boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)'\in\mathbb{R}^n$ και $\forall\ \boldsymbol{t}=(t_1,\dots,t_n)'\in\mathbb{Z}^n$ έχουμε

$$0\leq V\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_{t_i}\right]=V\left[\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{X}\right]=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Gamma}_n\boldsymbol{\alpha},$$

όπου $\boldsymbol{\Gamma}_n = \left[\gamma_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ συμμετρικός (nxn)-πίνακας με στοιχεία

$$\gamma_{ij} = Cov(X_{t_i}, X_{t_j}) = g(|t_i - t_j|),\ i, j = 1, ..., n, \tag{1.5.2}$$

γνωστός ως *πίνακας αυτοσυνδιακυμάνσεων* της στάσιμης χρονοσειράς $\{X_n : n \in \mathbb{Z}\}$.

(*Ικανό*)

Έστω $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, μια άρτια και γνήσια μη αρνητική συνάρτηση. Ας θεωρήσουμε την οικογένεια των πολυμεταβλητών Κανονικών κατανομών με μέση τιμή $\mathbf{0}\ (\in \mathbb{R}^n)$ και με πίνακα συνδιασποράς $\boldsymbol{\Gamma}_n = \left[\gamma_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$, με $\gamma_{ij} = g(|t_i - t_j|)$, $(i, j = 1, ..., n)$ και ας υποθέσουμε ότι στην εν λόγω οικογένεια ανήκει η από κοινού κατανομή των τ.μ. X_{t_i} $(i = 1, ..., n)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ και $\boldsymbol{t} = (t_1, ..., t_n)' \in \mathbb{R}^n$. Έχουμε έτσι ένα σύστημα κατανομών πεπερασμένης διάστασης για την σ.α. $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$. Το ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί τώρα είναι αν το εν λόγω σύστημα κατανομών ικανοποιεί τις συνθήκες συμβατότητας του Kolmogorov. Η απάντηση δίνεται μέσω χαρακτηριστικών συναρτήσεων.

Πράγματι, σύμφωνα με το παραπάνω σύστημα κατανομών έχουμε ότι η n-διάστατη τ.μ. $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{t}^{(n)}} = (X_{t_1}, ..., X_{t_n})' \sim N_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Gamma}_n)$, με πίνακα διασποράς $\boldsymbol{\Gamma}_n = \left[\gamma_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$, όπου $\gamma_{ij} = g(|t_i - t_j|)$, $i, j = 1, ..., n$, και συνεπώς (βλ. επίσης §1.7 παρακάτω) έχει χ.σ. την

$$\varphi_{\boldsymbol{t}^{(n)}}(\boldsymbol{u}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{\Gamma}_n\boldsymbol{u}\right\}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5.3}$$

Ταυτόχρονα, με $m < n$, η m-διάστατη τ.μ. $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{t}^{(m)}} = (X_{t_1}, ..., X_{t_m})' \sim N_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Gamma}_m)$, με πίνακα διασποράς $\boldsymbol{\Gamma}_m = \left[\gamma_{ij}\right]_{i,j=1}^{m}$, όπου $\gamma_{ij} = g(|t_i - t_j|)$, $i, j = 1, ..., m$, και χ.σ. την

$$\varphi_{\boldsymbol{t}^{(m)}}(\boldsymbol{u}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{\Gamma}_m\boldsymbol{u}\right\}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m. \tag{1.5.4}$$

Οι συνθήκες συμβατότητας του Kolmogorov τώρα απαιτούν τη συμφωνία μεταξύ των άνω χαρακτηριστικών συνάρτησεων. Τούτο σημαίνει ότι πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\varphi_{t^{(m)}}(\boldsymbol{u}) = \varphi_{t^{(n)}}(\boldsymbol{u},\mathbf{0}),\ \forall\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m \ \text{ και } \forall\ m,n \in \mathbb{N} \text{ με } \mathrm{m<n}, \tag{1.5.5}$$

η οποία πράγματι ισχύει αφού με $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ έχουμε:

$$(\boldsymbol{u}',\mathbf{0}')\boldsymbol{\Gamma}_n \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}',\mathbf{0}') \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma}_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{\Gamma}_m\boldsymbol{u}.$$

Στις δύο Παραγράφους που ακολοθούν δίνουμε μερικά χρήσιμα αποτελέσματα που αφορούν πολυδιάστατες τ.μ.

1.6. Μέση Τιμή, Πίνακας Διασποράς και Πίνακας Συνδιακύμανσης

Έστω τυχαίες μεταβλητές X_i $(i=1,...,n)$ με μέσες τιμές $\mu_i = E[X_i]$, διασπορές $\sigma_{ii} \equiv \sigma_i^2 = V[X_i],\quad i=1,...,n,$ αντίστοιχα, και συνδιακυμάνσεις $\sigma_{ij} = Cov[X_i, X_j]$ $(i \neq j = 1,...,n)$. Όλες οι παραπάνω ποσότητες θεωρούνται πεπερασμένες και προς τούτο αρκεί οι διασπορές να είναι πεπερασμένες. Τότε

(α) Ως μέση τιμή του τυχαίου διανύσματος (τ.δ.) $\boldsymbol{X} = (X_1,...,X_n)'$ ορίζουμε το διάνυσμα

$$\boldsymbol{\mu} = E[\boldsymbol{X}] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{bmatrix}. \tag{1.6.1}$$

(β) Ως πίνακα διασποράς (dispersion matrix) του τ.δ. $\boldsymbol{X} = (X_1,...,X_n)'$ ορίζουμε τον $(n \times n)$-πίνακα

$$\boldsymbol{\Sigma} = D[\boldsymbol{X}] = \left[Cov(X_i, X_j) \right]. \tag{1.6.2}$$

Επεκτείνοντας την έννοια της μέσης τιμής πάνω σε πίνακες τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένες μέσες τιμές έχουμε για τον $(n \times m)$ τυχαίο πίνακα $\mathbf{X} = [X_{i,j}]$,

$$\mathbf{M} = E[\mathbf{X}] = \left[E(X_{ij}) \right]. \tag{1.6.3}$$

Έστω τώρα δύο τυχαία διανύσματα $\boldsymbol{X} = (X_1,...,X_n)'$ και $\boldsymbol{Y} = (Y_1,...,Y_m)'$, των οποίων οι συνιστώσες έχουν πεπερασμένες διασπορές. Ορίζονται συνεπώς οι συνδιακυμάνσεις $Cov(X_i, Y_j)$ για όλα τα i και j. Προκύπτει έτσι ένας $(n \times m)$-πίνακας συνδιακυμάνσεων $\boldsymbol{\Sigma}_{XY} = [Cov(X_i, Y_j)]$, ο οποίος ονομάζεται *πίνακας συσχέτισης* των τ.δ. $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{Y}$. Έχουμε συνεπώς

$$\boldsymbol{\Sigma}_{XY} = Cov(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = E[(\boldsymbol{X} - E[\boldsymbol{X}])(\boldsymbol{Y} - E[\boldsymbol{Y}])']. \tag{1.6.4}$$

Είναι προφανές ότι ο πίνακας διασποράς ενός τ.δ. $\boldsymbol{X}$ ταυτίζεται με τον πίνακα συσχέτισης του τ.δ. $\boldsymbol{X}$ με τον εαυτό του, έχουμε δηλαδή $D[\boldsymbol{X}] = Cov(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\Sigma}_{XX}$. Επίσης εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{XY} = E[\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}'] - E[\boldsymbol{X}]E[\boldsymbol{Y}]' \tag{1.6.5}$$

και

$$\boldsymbol{\Sigma}_{YX} = Cov(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) = [Cov(Y_j, X_i)] = [Cov(X_i, Y_j)]' = Cov(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})' = \boldsymbol{\Sigma}'_{XY}. \tag{1.6.6}$$

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς και τις ιδιότητες της μέσης τιμής προκύπτουν τα παρακάτω θεωρήματα.

Θεώρημα 1. Έστω $\boldsymbol{X}$ $n-$διάστατη τ.μ. με μέση τιμή $\boldsymbol{\mu}$ και πίνακα διασποράς $\boldsymbol{\Sigma}$. Έστω επίσης $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$, όπου $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_m)' \in \mathbb{R}^m$ και $\boldsymbol{B}$ ένας $(m \times n)$-πίνακας. Τότε

$$\begin{aligned} &(\alpha) \quad E[\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu}, \\ &(\beta) \quad D[\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{B}'. \end{aligned} \tag{1.6.7}$$

Απόδειξη:

(α) Προφανές, αφού λόγω της γραμμικότητας της μέσης τιμής έχουμε

$$E[\boldsymbol{Y}] = E[\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{B}E[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu}.$$

(β) Εδώ έχουμε

$$\begin{aligned} D[\boldsymbol{Y}] &= E[(\boldsymbol{Y} - E[\boldsymbol{Y}])(\boldsymbol{Y} - E[\boldsymbol{Y}])'] \\ &= E[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{B}'] = \boldsymbol{B}E[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})']\boldsymbol{B}' \\ &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}'. \end{aligned}$$

Θεώρημα 2. Ισχύει η σχέση

$$Cov(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{BX},\boldsymbol{c}+\boldsymbol{DY}) = \boldsymbol{B}Cov[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]\boldsymbol{D}', \tag{1.6.8}$$

Απόδειξη: Θέτοντας $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{BX}$ και $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{DY}$ και κάνοντας χρήση της πρότασης (α) του προηγούμενου θεωρήματος έχουμε:

$$\begin{aligned}Cov(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{BX},\boldsymbol{c}+\boldsymbol{DY}) &= E[(\boldsymbol{Z}-E[\boldsymbol{Z}])(\boldsymbol{W}-E[\boldsymbol{W}])'] \\ &= E[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}-E[\boldsymbol{X}])(\boldsymbol{Y}-E[\boldsymbol{Y}])'\boldsymbol{D}'] \\ &= \boldsymbol{B}E[(\boldsymbol{X}-E[\boldsymbol{X}])(\boldsymbol{Y}-E[\boldsymbol{Y}])']\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{B}Cov[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]\boldsymbol{D}'.\end{aligned}$$

Τα παραπάνω θεωρήματα αποτελούν άμεσες γενικεύσεις αντίστοιχων θεωρημάτων για μονοδιάστατες τυχαίες μεταβλητές. Με $Z=\alpha+bX$ και $W=c+dY$ π.χ. είναι γνωστό ότι ισχύει η σχέση $Cov(Z,W)=bdCov(X,Y)$.

Θεώρημα 3: Ο πίνακας διασποράς $\boldsymbol{\Sigma}=D[\boldsymbol{X}]$ είναι συμμετρικός και γνήσια μη αρνητικός.

Η συμμετρικότητα του πίνακα διασποράς $\boldsymbol{\Sigma}$ προκύπτει άμεσα από τη γνωστή σχέση για τ.μ. X και Y,

$$Cov(X,Y)=E[(X-\mu_X)(X-\mu_Y)]=Cov(Y,X).$$

Το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος προκύπτει από την πρόταση (β) του Θεωρήματος 1, με $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ και $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{b}'=(b_1,...,b_n)'\neq\boldsymbol{0}'$. Πράγματι για τη μονοδιάστατη τ.μ. $Y=\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}$ έχουμε:

$$0\le Var[Y]=Var[\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}]=\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{b}.$$

Θεώρημα 4: Κάθε συμμετρικός και γνήσια μη αρνητικός ($n\times n$)-πίνακας $\boldsymbol{\Sigma}$ μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{P\Lambda P}', \tag{1.6.9}$$

όπου $\boldsymbol{P}$ ορθογώνιος ($n\times n$)-πίνακας και $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,....,\lambda_n)$ με $\lambda_j\ge 0$ $(j=1,...,n)$ οι ιδιοτιμές του πίνακα $\boldsymbol{\Sigma}$. Όταν ο πίνακας $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι γνήσια θετικός τότε $\lambda_j>0$ $(j=1,...,n)$.

Απόδειξη: Τυπικό αποτέλεσμα της Θεωρίας Πινάκων για συμμετρικούς και γνήσια μη αρνητικούς ή γνήσια θετικούς τετραγωνικούς πίνακες.

Σημειώνεται ότι η $j-$στήλη του $\boldsymbol{P}$ είναι το δεξί ιδιοδιάνυσμα του $\boldsymbol{\Sigma}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_j \quad (j=1,\ldots,n)$

1.7. Πολυμεταβλητή Κανονική Κατανομή

Ο συνήθης ορισμός της πολυμεταβλητής Κανονικής κατανομής είναι μέσω της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας αυτής. Συγκεκριμένα, το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)'$ λέγεται ότι ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέση τιμή $\boldsymbol{\mu}$ και πίνακα διασποράς $\boldsymbol{\Sigma}$ όταν έχει σ.π.π.

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}Q(\boldsymbol{x})\right\} \tag{1.7.1}$$

με

$$Q(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n. \tag{1.7.2}$$

Ο ως άνω ορισμός προϋποθέτει ότι η ορίζουσα του πίνακα διασποράς $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι μη μηδενική ($|\boldsymbol{\Sigma}|\neq 0$). Επειδή η απαίτηση αυτή είναι περιοριστική ορίζουμε την πολυμεταβλητή Κανονική κατανομή ως ακολούθως:

Ορισμός 1. Το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)'$ λέγεται ότι ακολουθεί πολυμεταβλητή Κανονική κατανομή εάν και μόνο εάν υπάρχει $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$ και ένας $(n\times m)$-πίνακας $\boldsymbol{B}$ έτσι ώστε να έχουμε $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{BZ}$, όπου $\boldsymbol{Z}=(Z_1,\ldots,Z_m)'$ τυχαίο διάνυσμα ανεξάρτητων και ισόνομων συνιστωσών $Z_i,\ i=1,\ldots,n,$ με κατανομή N(0,1).

Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι το τ.δ. $\boldsymbol{Z}$ έχει σ.π.π. η οποία είναι:

$$f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})=(2\pi)^{-m/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}z_k^2\right\}, \quad \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^m, \tag{1.7.3}$$

και ότι έχει μέση τιμή $E[\boldsymbol{Z}]=\boldsymbol{0}$ και πίνακα διασποράς $D[\boldsymbol{Z}]=\mathbf{I}_n$, ο ταυτοτικός $(n\times n)$-πίνακας.

Κατά συνέπεια, η μέση τιμή $\boldsymbol{\mu}$ και ο πίνακας διασποράς $\boldsymbol{\Sigma}$ του τ.δ. $\boldsymbol{X}$ είναι αντίστοιχα:

$$\boldsymbol{\mu}=E[\boldsymbol{X}]=\boldsymbol{\alpha} \text{ και } \boldsymbol{\Sigma}=D[\boldsymbol{X}]=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'. \tag{1.7.4}$$

Σημείωση 1. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δεν αποκλείεται να έχουμε $n>m$. Σ' αυτή την περίπτωση ο πίνακας διασποράς $\boldsymbol{\Sigma}=D[\boldsymbol{X}]$ είναι ιδιάζων, έχει δηλαδή μηδενική ορίζουσα και τάξη $k \le m < n$. Ως εκ τούτου δεν ορίζεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{X}$ και οποιεσδήποτε $n-k$ συνιστώσες αυτού εκφράζονται γραμμικά μέσω των υπολοίπων k συνιστωσών (με πιθανότητα τη μονάδα).

Σημείωση 2. Η χαρακτηριστική συνάρτηση (χ.σ.) $\varphi(\boldsymbol{t})$ ενός τ.δ. $\boldsymbol{X}=(X_1,...,X_n)'$ ορίζεται από την

$$\varphi(\boldsymbol{t})=E\left[e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X}}\right], \quad \boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^n \text{ με } i=\sqrt{-1}. \tag{1.7.5}$$

Κάθε χ.σ. $\varphi(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^n$, είναι ομαλά συνεχής και $|\varphi(\boldsymbol{t})| \le \varphi(\boldsymbol{0})=1$.

Σημείωση 3. Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ χαρακτηριστικών συναρτήσεων και συναρτήσεων κατανομών. Αν θεωρήσουμε την διαμέριση $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1',\boldsymbol{X}_2')'$, όπου η διάσταση του τ.δ. $\boldsymbol{X}_k$ είναι n_k, $k=1,2$, με $n_1+n_2=n$, τότε αν η χ.σ. της $\boldsymbol{X}_1$ δίνεται από την:

$$\varphi_1(\boldsymbol{t}_1)=E\left[e^{i\boldsymbol{t}_1'\boldsymbol{X}_1}\right]=E\left[e^{i(\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{0}'\boldsymbol{X}_2)}\right]=\varphi(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{0}), \quad \boldsymbol{t}_1\in\mathbb{R}^{n_1}. \tag{1.7.6}$$

Σημείωση 4. Είναι φανερό ότι όταν οι συνιστώσες X_k, $j=1,...,n$, είναι ανεξάρτητες τ.μ. τότε η χ.σ. του τ.δ. $\boldsymbol{X}=(X_1,...,X_n)'$ γράφεται ως γινόμενο χ.σ. των αντίστοιχων συνιστωσών. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\varphi(\boldsymbol{t})=E\left[e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X}}\right]=E\left[\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}t_jX_j\right\}\right]=\prod_{i=1}^{n}E\left[\exp\left\{it_jX_j\right\}\right]=\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(t_j), \quad \boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^n.$$

Λόγω της αμφιμονοσήμαντης σχέσης μεταξύ κατανομών και χαρακτηριστικών συναρτήσεων η παραπάνω πρόταση ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή όταν η χ.σ. ενός τ.δ. γράφεται ως γινόμενο δύο χ.σ. τότε η αντίστοιχη σ.κ. αναλύεται σε γινόμενο δύο σ.κ. και τα αντίστοιχα τ.δ. είναι ανεξάρτητα.

Είναι γνωστό ότι η χ.σ. της τυποποιημένης Κανονικής τ.μ. Z είναι:

$$\varphi(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.7.7}$$

Ως εκ τούτου έχουμε το παρακάτω:

Λήμμα 1. Η χ.σ. του τ.δ. $\boldsymbol{Z} = (Z_1,...,Z_m)'$ με ανεξάρτητες τυποποιημένες Κανονικές συνιστώσες $Z_j,\ j = 1,...,m,$ είναι:

$$\varphi(\boldsymbol{t}) = \prod_{j=1}^{m} \varphi_j(t_j) = \prod_{j=1}^{m} \exp\left\{-\frac{1}{2}t_j^2\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} t_j^2\right\}, \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^m. \tag{1.7.8}$$

Λήμμα 2. Έστω $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{B}$ ένας $(n \times m)$-πίνακας και $\varphi_{\boldsymbol{X}}$ η χ.σ. της m-διάστατης τ.μ. $\boldsymbol{X} = (X_1,...,X_m)'$. Τότε η χ.σ. της n-διάστατης τ.μ. $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{BX}$ είναι

$$\varphi_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{t}) = e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\alpha}} \varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{t}), \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n. \tag{1.7.9}$$

Απόδειξη: Προφανής με βάση τον ορισμό της χ.σ. (βλ. 1.7.5).

Θεώρημα 1: Εάν το τ.δ. $\boldsymbol{X} = (X_1,...,X_n)'$ ακολουθεί Κανονική κατανομή με μέση τιμή $\boldsymbol{\mu}$ και πίνακα διασποράς $\boldsymbol{\Sigma}$ τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση αυτού είναι:

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \exp\left\{i\,\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\,\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{t}\right\}, \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n. \tag{1.7.10}$$

Εάν επιπρόσθετα $|\boldsymbol{\Sigma}| > 0,$ τότε το τ.δ. $\boldsymbol{X}$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας η οποία ορίζεται από την

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{1.7.11}$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό της πολυμεταβλητής Κανονικής κατανομής έχουμε ότι το τ.δ. $\boldsymbol{X} = (X_1,...,X_n)'$ έχει την αναπαράσταση $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{BZ}$ με όπου $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{BB}' = \boldsymbol{\Sigma}$, και $\boldsymbol{Z} = (Z_1,...,Z_m)'$ τυχαίο διάνυσμα ανεξάρτητων και ισόνομων συνιστωσών Z_j, $j = 1,...,n$, με κατανομή N(0,1).

Με βάση τα Λήμματα 1 και 2 τώρα η χ.σ. του τ.δ. $\boldsymbol{X}$ είναι:

$$\begin{aligned}\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = E\left[e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X}}\right] = e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\alpha}}\varphi_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{t}) = e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\alpha}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\boldsymbol{BB}'\boldsymbol{t}\right\} \\ = \exp\left\{i\,\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\boldsymbol{BB}'\boldsymbol{t}\right\}, \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Εάν τώρα έχουμε $|\boldsymbol{\Sigma}| > 0$, τότε ο πίνακας $\boldsymbol{\Sigma}$ γράφεται υπό τη μορφή

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{P\Lambda P}'$$

με $\boldsymbol{PP}' = \mathbf{I}_n$, ο ταυτοτικός $(n \times n)$-πίνακας, και $\boldsymbol{\Lambda}$ διαγώνιος $(n \times n)$-πίνακας με θετικές ιδιοτιμές λ_j, $j = 1,...,n$. Έχουμε δηλαδή

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{P\Lambda P}',\ \boldsymbol{\Lambda} = diag(\lambda_1,...,\lambda_n) \text{ με } \lambda_j > 0,\ j = 1,...,n, \text{ και } \boldsymbol{PP}' = \mathbf{I}_n.$$

Κατά συνέπεια ο αντίστροφος $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ του πίνακα $\boldsymbol{\Sigma}$ και η τετραγωνική ρίζα αυτού είναι αντίστοιχα:

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \boldsymbol{P\Lambda}^{-1}\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}diag(\lambda_1^{-1},...,\lambda_n^{-1})\boldsymbol{P}' \tag{1.7.12}$$

και

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} = \boldsymbol{P\Lambda}^{-1/2}\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}diag(\lambda_1^{-1/2},...,\lambda_n^{-1/2})\boldsymbol{P}'. \tag{1.7.13}$$

Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα 2, η χ.σ. του τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\alpha})$ είναι:

$$\varphi_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{t}) = \exp\{-\boldsymbol{t}'\boldsymbol{t}/2\} = \exp\{-\sum_{j=1}^{n} t_j^2/2\} = \prod_{j=1}^{n}\exp\{-t_j^2/2\},\ \ \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Τούτο σημαίνει ότι το τ.δ. $\boldsymbol{Z}$ ακολουθεί πολυμεταβλητή Κανονική κατανομή με $E[\boldsymbol{Z}]=\mathbf{0}$ και πίνακα διασποράς $V[\boldsymbol{Z}]=\mathbf{I}_n$. Οι τ.μ. Z_j, $j=1,...,n$, είναι συνεπώς ανεξάρτητες τυποποιημένες Κανονικές. Ως εκ τούτου το τ.δ. $\boldsymbol{Z}$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την

$$f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})=(2\pi)^{-n/2}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}z_j^2\}=(2\pi)^{-n/2}\exp\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}\},\quad \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n.$$

Επειδή τώρα ο μετασχηματισμός $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{z}$ είναι αμφιμονοσήμαντος με $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})$ και Ιακωβιανή $J(\mathbf{z})=|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}\neq 0$, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα το τ.δ. $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{Z}$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})=f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}))\left|J(\boldsymbol{x})\right|=(2\pi)^{-n/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\},\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n.$$

Θεώρημα 2: Η $n-$διάστατη τ.μ. $\boldsymbol{X}=(X_1,...,X_n)'$ έχει Κανονική κατανομή με μέση τιμή $\boldsymbol{\mu}$ και πίνακα διασποράς $\boldsymbol{\Sigma}$ εάν και μόνο εάν για κάθε διάνυσμα $\boldsymbol{c}=\left(c_1,...,c_n\right)'\in\mathbb{R}^n$ η μονοδιάστατη τ.μ. $Y=\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}$ έχει $N(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu},\,\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{c})$ κατανομή.

Απόδειξη:

(*αναγκαίο*) Προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 3 θέτοντας $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ και $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{c}'$.

(*ικανό*) Έστω ότι $\forall\ \boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$ η τ.μ. $Y=\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}$ ακολουθεί κατανομή $N(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu},\,\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{c})$. Τούτο σημαίνει ότι η χ.σ. της τ.μ. Y είναι:

$$\varphi_Y(t)=E[\exp\{i\,tY\}]=E[\exp\{i\,t\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}\}]=\exp\{i\,t\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{c}\,t^2\},\ t\in\mathbb{R},\ \forall\ \boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n.$$

Για $t=1$ τώρα λαμβάνουμε:

$$\varphi_Y(1)=E[\exp\{i\,Y\}]=E[\exp\{i\,\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}\}]=\exp\{i\,\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{c}\},\ \forall\ \boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n.$$

Από τους δύο τελευταίους όρους της παραπάνω σχέσης όμως έχουμε ότι

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{c})=E[\exp\{i\,\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}\}]=\exp\{i\,\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{c}\},\ \nabla\ \boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n,$$

πράγμα το οποίο σημαίνει ότι το τ.δ. $\boldsymbol{X}$ ακολουθεί την κατανομή $N(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{c})$.

Με βάση το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ένας δεύτερος (ισοδύναμος με τον προηγούμενο) ορισμός της πολυμεταβλητής Κανονικής κατανομής. Συγκεκριμένα έχουμε:

Ορισμός 2. Το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)'$ λέγεται ότι ακολουθεί πολυμεταβλητή Κανονική κατανομή εάν για κάθε $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$, ο γραμμικός συνδυασμός $Y=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{X}$, ακολουθεί Κανονική κατανομή.

Σημείωση 5. Ο πρώτος ορισμός της πολυμεταβλητής Κανονικής κατανομής έχει το πλεονέκτημα να είναι "κατασκευαστικός", με την έννοια ότι μέσω αυτού μπορούμε να "παράγουμε" τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)'$ που ακολουθεί την πολυμεταβλητή Κανονική κατανομή $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$. Προς τούτο αρκεί να πάρουμε το γραμμικό μετασχηματισμό $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{Z}$ με $\boldsymbol{Z}=(Z_1,\ldots,Z_n)'$, όπου οι τ.μ. $Z_i,\ i=1,\ldots,n,$ είναι ανεξάρτητες τυποποιημένες Κανονικές.

Θεώρημα 3: Έστω ότι το τ.δ. $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)'$ ακολουθεί την κατανομή $N\left(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\right)$. Θεωρούμε την παρακάτω διαμέριση του τ.δ. $\boldsymbol{X}$

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}\begin{matrix}n_1\\ n_2\end{matrix},\qquad (n_1+n_2=n)$$

και τις αντίστοιχες διαμερίσεις των $\boldsymbol{\mu}$ και $\boldsymbol{\Sigma}$,

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \boldsymbol{\mu}_2\end{bmatrix}\begin{matrix}n_1\\ n_2\end{matrix}\quad \text{και}\quad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{bmatrix}\begin{matrix}n_1\\ n_2\end{matrix}$$

με $\boldsymbol{\mu}_k=E\left[\boldsymbol{X}_k\right],\quad \boldsymbol{\Sigma}_{k\ell}=Cov\left(\boldsymbol{X}_k,\boldsymbol{X}_\ell\right),\quad \left(k,\ell=1,2\right)$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(α) Τα τ.δ. $\boldsymbol{X}_1$ και $\boldsymbol{X}_2$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους εάν και μόνο εάν $\boldsymbol{\Sigma}_{12}=\boldsymbol{0}$.

(β) Εάν $\left|\boldsymbol{\Sigma}_{22}\right|>0$, τότε η δεσμευμένη κατανομή του $\boldsymbol{X}_1$ με δεδομένο το $\boldsymbol{X}_2$ είναι:

$$N\left[\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2\right),\ \boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}\right]. \tag{1.7.14}$$

Απόδειξη: (α) Εάν $\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2$ είναι ανεξάρτητα τότε

$$Cov\left(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\right) = \mathbf{0} \text{ και συνεπώς } \boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}.$$

Τότε όμως και $\boldsymbol{\Sigma}_{21} = \mathbf{0}$, οπότε ο πίνακας $\boldsymbol{\Sigma}$ γράφεται

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}.$$

Για τη χ.σ. του $\boldsymbol{X}$ τώρα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\varphi_{X}\left(\boldsymbol{t}\right) &= \exp\left\{ i\,\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{t} \right\} \\
&= \exp\left\{ i\left(\boldsymbol{t}_1^T, \boldsymbol{t}_2^T\right)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{t}_1^T, \boldsymbol{t}_2^T\right)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_1 \\ \boldsymbol{t}_2 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \exp\left\{ i\left(\boldsymbol{t}_1^T\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{t}_2^T\boldsymbol{\mu}_2\right) - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{t}_1^T\boldsymbol{\Sigma}_{11}\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{t}_2^T\boldsymbol{\Sigma}_{22}\boldsymbol{t}_2\right) \right\} \\
&= \prod_{j=1}^{2} \exp\left\{ i\,\boldsymbol{t}_j^T\boldsymbol{\mu}_j - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}_j^T\boldsymbol{\Sigma}_{jj}\boldsymbol{t}_j \right\}, \quad \forall\ \boldsymbol{t}_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \text{ και } \boldsymbol{t}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}.
\end{aligned}$$

Έχουμε δηλαδή γινόμενο χ.σ. οπότε, σύμφωνα με τη Σημείωση 4, τα τ.δ. $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ είναι ανεξάρτητα.

(β) Με $|\boldsymbol{\Sigma}_{22}| \neq \mathbf{0}$ μπορούμε να θεωρήσουμε την τ.μ.

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2\right), \tag{1.7.15}$$

για την οποία προφανώς έχουμε $E\left[\boldsymbol{Y}\right] = \mathbf{0}$. Επίσης έχουμε

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{YY}} = D[\boldsymbol{Y}] = Cov(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}) &= \\
&= Cov\left(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2),\ \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)\right) \\
&= Cov\left(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{X}_2,\ \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{X}_2\right) \\
&= Cov(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_1) - Cov(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} \\
&\qquad - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}Cov(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_1) + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}Cov(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_2)\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} \\
&= \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21},
\end{aligned}
$$

και αφ' ετέρου

$$
\begin{aligned}
Cov(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}_2) = Cov\left(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2), \boldsymbol{X}_2\right) &= \\
&= Cov\left(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_2\right) \\
&= Cov(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2) - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\,\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_2) \\
&= \boldsymbol{\Sigma}_{12} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{22} = \boldsymbol{\Sigma}_{12} - \boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς,

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \right), \tag{1.7.16}
$$

και σύμφωνα με το πρώτο μέρος του θεωρήματος έχουμε ότι οι τ.μ. $\boldsymbol{Y}$ και $\boldsymbol{X}_2$ είναι ανεξάρτητες.

Με δεδομένη την $\boldsymbol{X}_2$, η δεσμευμένη χ.σ. της $\boldsymbol{X}_1$ είναι η δεσμευμένη μέση τιμή $E\left[\exp\{i\,\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X}_1\} \mid \boldsymbol{X}_2\right]$, για την οποία έχουμε:

$$
\begin{aligned}
E\left[\exp\{i\,\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X}_1\} \mid \boldsymbol{X}_2\right] &= E\left[\exp\left\{i\,\boldsymbol{t}'\left[\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)\right]\right\} \mid \boldsymbol{X}_2\right] \\
&= E\left[\exp\{i\,\boldsymbol{t}'\boldsymbol{Y}\} \times \exp\left\{i\,\boldsymbol{t}'\left[\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)\right]\right\} \mid \boldsymbol{X}_2\right] \\
&= \exp\left\{i\,\boldsymbol{t}'\left[\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)\right]\right\} \times E\left[\exp\{i\,\boldsymbol{t}'\boldsymbol{Y}\} \mid \boldsymbol{X}_2\right] \\
&= \exp\left\{i\,\boldsymbol{t}'\left[\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)\right]\right\} \times E\left[\exp\{i\,\boldsymbol{t}'\boldsymbol{Y}\}\right],
\end{aligned}
$$

με την τελευταία ισότητα ως συνέπεια της ανεξαρτησίας μεταξύ $\boldsymbol{Y}$ και $\boldsymbol{X}_2$. Εισάγοντας τώρα την χ.σ. της $\boldsymbol{Y}$ σύμφωνα με την (1.7.16), θέτοντας δηλαδή

$$E\left[\exp\left\{i\,\boldsymbol{t}'\boldsymbol{Y}\right\}\right]=\exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\left[\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}\right]\boldsymbol{t}\right\},$$

έχουμε

$$E\left[\exp\left\{i\,\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X}_1\right\}\middle|\boldsymbol{X}_2\right]=\exp\left\{i\,\boldsymbol{t}'\left[\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2\right)\right]-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\left[\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}\right]\boldsymbol{t}\right\},$$

η οποία είναι η χ.σ. της $N\left[\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2\right),\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}\right]$.