Άσκ. 3.6

(α) Έχουμε $P[V_i \geq k|X_0 = i] = f_{ii}^k$ με $f_{ii} = P[T_{ii} < \infty \mid X_0 = i] = 1$, όταν η κατάσταση i είναι επαναληπτική και < 1, όταν η κατάσταση i είναι παροδική. Επομένως

$$\eta_{ii} = P[V_i = \infty|X_0 = i] = \lim_{k\to\infty} P[V_i \geq k|X_0 = i] = \lim_{k\to\infty} f_{ii}^k = \begin{cases} 1, \text{όταν η κατάσταση i είναι επαναληπτική,} \\ 0, \text{όταν η κατάσταση i είναι παροδική.} \end{cases}$$

(β) Έχουμε επίσης $P[V_j \geq k|X_0 = i] = f_{ij} f_{ii}^{k-1}$, και επομένως

$$\eta_{ij} = P[V_j = \infty|X_0 = i] = \lim_{k\to\infty} P[V_j \geq k|X_0 = i] = f_{ij} \bullet \lim_{k\to\infty} f_{jj}^{k-1} = \begin{cases} f_{ij}, \text{όταν η κατάσταση j είναι επαναληπτική,} \\ 0, \text{όταν η κατάσταση j είναι παροδική.} \end{cases}$$

Έχουμε όμως $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} P[T_{ij} = n|X_0 = i] = P[T_{ij} < \infty|X_0 = i]$, και συνεπώς το ζητούμενο.

Ασκήσεις 3.7, 3.8 και 3.9

Επιλύονται με διαγωνιοποίηση των στοχαστικών πινάκων όταν έχουν διαφορετικές ιδιοτιμές. Εφαρμόζουμε ανάλυση κατά Jordan (Θεώρημα Perron-Frobenius) στην περίπτωση πολλαπλών ιδιοτιμών.

Άσκ. 3.10(β)

Ο στοχαστικός πίνακας εδώ είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ . \\ . \\ . \\ i \\ . \\ . \end{array} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & . & . & . & \alpha_i & . & . \\ 1-r & r & 0 & . & . & . & 0 & . & . \\ 0 & 1-r & r & 0 & . & . & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1-r & r & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}.$$

Επιλύοντας το σύστημα $\pi\mathbf{P} = \pi$, με $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, ..., \pi_i, ...)$, λαμβάνουμε διαδοχικά:

$$\pi_1 = \pi_0 \times \frac{1-\alpha_0}{1-r},$$

$$\pi_2 = \{\pi_1(1-r) - \pi_0\alpha_1\}/(1-r) = \pi_1 - \pi_0 \frac{\alpha_1}{1-r} = \pi_0 \times \frac{1-\alpha_0-\alpha_1}{1-r},$$

και γενικά

$$\pi_i = \pi_0 \times \frac{1-\alpha_0-\alpha_1-...-\alpha_{i-1}}{1-r}, \; (i \geq 1).$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1,$ και θέτοντας

$$A_i = 1-\alpha_0-\alpha_1-...\alpha_{i-1} = \sum_{j=i}^{\infty} \alpha_j, \qquad (i \geq 1),$$

έχουμε

$$\pi_i = A_i \pi_0 /(1-r), \qquad (i \geq 1).$$

Όμως οι πιθανότητες $\pi_i = A_i \pi_0 /(1-r),\; (i \geq 1),$ μαζί με τη π_0, πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$. Συνεπώς:

$$\pi_0 = \left\{ 1 + \frac{1}{1-r} \times \sum_{i=1}^{\infty} A_i \right\}^{-1} = \frac{1-r}{1-r+A},$$

με $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$. Συνεπώς, ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη κατανομής ισορροπίας είναι να έχουμε $A < \infty,$ και τότε

$$\pi_i = \pi_o \times \frac{A_i}{1-r} = \frac{A_i}{1-r+A}, \qquad (i > 0).$$

Σημείωση: Επειδή η ακολουθία {α_i: i=0,1,…} αποτελεί την κατανομή του "άλματος" Z από τη θέση "0" στη θέση "i", θα έχουμε:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} \alpha_j = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \alpha_i = E[Z].$$

Άσκ. 3.11

Στον συμμετρικό απλό τυχαίο περίπατο η επιστροφή στην ίδια θέση γίνεται σε άρτιο αριθμό βημάτων με πιθανότητα:

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} / 2^{2n}, \qquad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Ο περίπατος αυτός είναι επαναληπτικός εάν και μόνο εάν ισχύει η σχέση:

$$p_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} / 2^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} / 2^{2n} = \infty.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling, $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, όπου το σύμβολο "$\approx$" εκφράζει ότι ο λόγος των δύο μελών τείνει στην μονάδα για $n \to \infty,$ λαμβάνουμε :

$$\tilde{p}_{00}^{(2n)} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

και συνεπώς έχουμε

$$\tilde{p}_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_{00}^{(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Λόγω της σχέσης $p_{00}^{(2n)} / \tilde{p}_{00}^{(2n)} \to 1$ για $n \to \infty$, οι δύο σειρές είτε θα συγκλίνουν και οι δύο είτε θα αποκλίνουν και οι δύο. Όμως η τελευταία σειρά είναι γνωστό ότι αποκλίνει, άρα και η πρώτη σειρά αποκλίνει και συνεπώς η κατάσταση “0”, όπως και κάθε άλλη κατάσταση, αφού όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν, είναι επαναληπτική.

Εφαρμόζοντας την ίδια προσέγγιση για το n! αποδεικνύεται ότι ο συμμετρικός τυχαίος περίπατος σε d διαστάσεις έχει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_{00}^{(2n)} \leq C_d \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi n} \right\}^{\frac{d}{2}},$$

και συνεπώς η σειρά αποκλίνει για d=2 και συγκλίνει για d >2.

Άσκ. 3.20

Αφού **P** διπλά στοχαστικός, ο πίνακας $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}$ είναι στοχαστικός. Έστω επίσης $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_N)$ η κατανομή ισορροπίας του **P**. Έχουμε δηλαδή για $n \to \infty$

$$\mathbf{\Pi} = \lim \mathbf{P}^{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} (\pi_1, \ldots, \pi_N) = \mathbf{e}\, \boldsymbol{\pi}.$$

Επειδή $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}$ για $n \to \infty$ θα έχουμε επίσης:

$$\lim \mathbf{Q}^n = \lim (\mathbf{P}^{\mathbf{T}})^n = (\lim \mathbf{P}^{\mathbf{n}})^T = (\mathbf{e}\, \boldsymbol{\pi})^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\pi}^{\mathbf{T}} \mathbf{e}^{\mathbf{T}}$$

$$= \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi_N \end{pmatrix} (1, \ldots, 1) = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_1 & \cdot\ \cdot\ \cdot & \pi_1 \\ \pi_2 & \pi_2 & \cdot\ \cdot\ \cdot & \pi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \pi_N & \pi_N & \cdot\ \cdot\ \cdot & \pi_N \end{bmatrix}.$$

Επειδή ο τελευταίος πίνακας είναι στοχαστικός έπεται ότι $N\, \pi_i = 1$ $(i=1,\ldots,N)$, δηλαδή η κατανομή ισορροπίας του στοχαστικού πίνακα **P** (όπως και του **Q**) είναι η Ομοιόμορφη.