ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ

Άσκ. 3.2.

Η συνάρτηση y= g(x), $\mathcal{S} \to \mathbb{T}$ είναι αντιστρέψιμη, και συνεπώς έχουμε

$$x = h(y) \equiv g^{-1}(y), \quad \forall\, y \in g(\mathcal{S}).$$

Θεωρούμε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P[Y_{n+1} = y_{i_{n+1}} | Y_0 = y_{i_0},...,Y_n = y_{i_n}]$ για οποιαδήποτε επιλογή καταστάσεων $y_{i_0},...,y_{i_n}, y_{i_{n+1}} \in \mathbb{T}$ και $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$P[Y_{n+1} = y_{i_{n+1}} | Y_0 = y_{i_0},...,Y_n = y_{i_n}] = P[X_{n+1} = h(y_{i_{n+1}}) | X_0 = h(y_{i_0}),...,X_n = h(y_{i_n})]$$

$$= P[X_{n+1} = h(y_{i_{n+1}}) | X_n = h(y_{i_n})] = P[Y_{n+1} = y_{i_{n+1}} | Y_n = y_{i_n}].$$

Συνεπώς η Σ.Α. $\{Y_n = g(X_n) : n = 0,1,...\}$ είναι Μαρκοβιανή.

Δεν είναι απαραίτητο να είναι η συνάρτηση g αμφιμονοσήμαντη (β. Άσκ. 3.1).

Άσκ. 3.5.

Θεωρούμε τη δείκτρια συνάρτηση I_n του ενδεχόμενου $\{X_n = i\}$ για $n \geq 1$, δηλαδή έχουμε $I_n = 1$ όταν $X_n = i$ και $I_n = 0$ όταν $X_n \neq i$. Ορίζουμε την τ.μ. $N_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$ η οποία εκφράζει το συνολικό αριθμό επανεμφανίσεων της κατάστασης i με εκκίνηση από την ίδια. Λαμβάνοντας την αντίστοιχη μέση τιμή προκύπτει:

$$E[N_{ii}] = E[\sum_{n=1}^{\infty} I_n | X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} E[I_n | X_0 = i].$$

Όμως

$$E[I_n | X_0 = i] = p_{ii}^{(n)} = P[X_n = i | X_0 = i].$$

Έχουμε συνεπώς

$$E[N_{ii}] = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = P_{ii}(1) - 1.$$

Το δεύτερο μέλος απειρίζεται εάν και μόνο εάν η κατάσταση i είναι επαναληπτική.

Άσκ. 3.7.

Έχουμε το στοχαστικό πίνακα

$$\mathbf{P}_1 = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Παρατηρούμε ότι $E_1 \to E_4 \to E_2 \to E_1$. Συνεπώς οι καταστάσεις αυτές αποτελούν μία κλειστή κλάση C_1. Η κατάσταση $E_3 \to E_4$ και συνεπώς αποτελεί μια ανοικτή κλάση C_2. Η κανονική μορφή του παραπάνω στοχαστικού πίνακα είναι:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_4 \\ E_3 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_4 & E_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Η ύπαρξη ενός τουλάχιστον μη μηδενικού διαγώνιου στοιχείου μέσα σε κάθε κλάση αποκλείει την περιοδικότητα αυτών.

Έχουμε δηλαδή τις κλάσεις επικοινωνουσών καταστάσεων $C_1=\{E_1,E_2,E_4\}$ και $C_2 =\{E_3\}$ με $C_2 \rangle C_1$. Η κλάση C_1 είναι επαναληπτική και η κλάση C_2 είναι παροδική. Επιπλέον η κλάση C_1 είναι γνήσια επαναληπτική αφού έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων. Και οι δύο κλάσεις είναι μη περιοδικές.

Για τον δεύτερο στοχαστικό πίνακα έχουμε:

$$\mathbf{P}_2 = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.3 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι $E_3 \rightarrow E_3$ αποκλειστικά. Άρα η κατάσταση E_3 είναι μια απορροφητική και συνεπώς αποτελεί από μόνη της μια κλάση C_1. Επίσης έχουμε $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_5 \rightarrow E_1$, και $E_5 \rightarrow E_4 \rightarrow E_2$ Οι καταστάσεις E_1, E_2, E_4 και E_5 επικοινωνούν μεταξύ τους και συνεπώς αποτελούν μια δεύτερη κλάση C_2. Έχουμε συνεπώς τις κλάσεις επικοινωνουσών καταστάσεων: $C_1 = \{E_3\}$και $C_2=\{E_1, E_2, E_4, E_5\}$. Επειδή έχουμε E2 $\rightarrow E_3$ θα έχουμε ότι $C_1 \rangle C_2$.

Η κανονική μορφή του στοχαστικού πίνακα P_2 είναι:

$$
\begin{array}{c} \\ \\ \mathbf{P}_2 = \end{array}
\begin{array}{c} \\ E_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_4 \\ E_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_3 & E_1 & E_2 & E_4 & E_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Η κλάση C_1 είναι επαναληπτική και η κλάση C_2 είναι παροδική. Και οι δύο κλάσεις είναι απεριοδικές.