ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ

Άσκ. 1.15. Από τον ορισμό της ροπογεννήτριας έχουμε

$$g_X(s) = E\left[e^{sX}\right] = E\left[e^{s(Y_1+\ldots+Y_N)}\right]$$

και από την γνωστή σχέση E[X] = E[E[X|Y]] λαμβάνουμε

$$g_X(s) = E\left[E\left[e^{s(Y_1+\ldots+Y_N)} \mid N\right]\right] = E\left[E\left[\prod_{i=1}^{N} e^{sY_i} \mid N\right]\right]$$
$$= E\left[\prod_{i=1}^{N} E\left[e^{sY_i}\right]\right] = E\left[\prod_{i=1}^{N} g(s)\right] = E\left[\{g(s)\}^N\right] = \pi(g(s)),$$

αφού εξ ορισμού έχουμε $\pi(s) = E[s^N]$.

Άσκ. 1.16. Με βάση το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης θα έχουμε:

$$g_X(s) = \pi(g(s)) \qquad (1)$$

με $\pi(s)$ τη γεννήτρια πιθανοτήτων της Γεωμετρικής κατανομής παραμέτρου p και $g(s)$ τη ροπογεννήτρια της Εκθετικής κατανομής παραμέτρου λ. Έχουμε συνεπώς

$$\pi(s) = E\left[s^N\right] = \sum_{n=1}^{\infty} s^n P[N = n] = \sum_{n=1}^{\infty} s^n pq^{n-1} = ps\sum_{n=0}^{\infty}(qs)^n = \frac{ps}{1-qs}, \text{ για } |s|<1/q,$$

και

$$g(s) = E\left[e^{sY}\right] = \int_0^{\infty} e^{sy}\lambda e^{-\lambda y}dy = \lambda\int_0^{\infty} e^{-(\lambda-s)y}dy = \frac{\lambda}{\lambda-s}, \text{ για } s<\lambda.$$

Εισάγοντας τα παραπάνω δύο αποτελέσματα στην (1) παίρνουμε:

$$g_X(s) = \pi(g(s)) = \frac{pg(s)}{1-qg(s)} = \frac{\frac{\lambda p}{\lambda-s}}{1-\frac{\lambda q}{\lambda-s}} = \frac{\lambda p}{\lambda p - s}, \text{ για } s<\lambda p.$$

Συνεπώς, η τ.μ. X ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο λp.

Σημείωση: Η απαίτηση $s<\lambda p$ προκύπτει από τις συνθήκες: (α) $s<\lambda$, για να ορίζεται η $g(s) = \lambda/(\lambda-s)$, και (β) $|g(s)|<1/q$, για να ορίζεται η $\pi(g(s))$.

Άσκ. 1.18. (α) Από την γνωστή σχέση $\mathrm{Cov}(U, V+W) = \mathrm{Cov}(U, V) + \mathrm{Cov}(U, W)$ έχουμε για $n \le m$:

$$\mathrm{Cov}(X_n, X_m) = \mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{n} Y_i, \sum_{i=1}^{m} Y_i) = \mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{n} Y_i, \sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=n+1}^{m} Y_i)$$

$$= \mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{n} Y_i, \sum_{i=1}^{n} Y_i) + \mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{n} Y_i, \sum_{i=n+1}^{m} Y_i) = \mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{n} Y_i, \sum_{i=1}^{n} Y_i) + 0,$$

αφού τα αθροίσματα $\sum_1^n Y_i$ και $\sum_{n+1}^m Y_i$ αφορούν ανεξάρτητες τ.μ. Συνεπώς

$$\mathrm{Cov}(X_n, X_m) = \mathrm{Cov}(X_n, X_n) = \mathrm{Var}[X_n] = \mathrm{Var}[\sum_{i=1}^{n} Y_i] = n\sigma^2, \quad n \le m.$$

(β) Κάνοντας χρήση της παραπάνω σχέσης λαμβάνουμε για $n \le m$:

$$\mathrm{Corr}(X_n, X_m) = \frac{\mathrm{Cov}(X_n, X_m)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X_n]\mathrm{Var}[X_m]}} = \frac{n\sigma^2}{\sqrt{(n\sigma^2)(m\sigma^2)}} = \sqrt{n/m}.$$

Άσκ. 1.19. Από τον ορισμό της κίνησης Brown, η σ.α. $\{X(t)\colon t \ge 0\}$ είναι ανεξάρτητων και στάσιμων προσαυξήσεων με $X(0) = 0$ και $X(t) \sim N(0, c^2 t)$ για $t > 0$. Τούτο σημαίνει ότι για κάθε $n \ge 1$ και $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, η από κοινού κατανομή των τ.μ. $X(t_1),\ldots,X(t_n)$ είναι η n-διάστατη Κανονική κατανομή, αφού το τυχαίο διάνυσμα $(X(t_1),\ldots,X(t_n))^T$ αποτελεί γραμμικό μετασχηματισμό (ποιος είναι ακριβώς;) του τυχαίου διανύσματος $(Y(t_1),\ldots,Y(t_n))^T$, με $Y(t_i) = X(t_i) - X(t_{i-1})$, $i = 1,\ldots,n$, $(t_0 = 0)$, ανεξάρτητες και Κανονικά κατανεμημένες προσαυξήσεις. (Από την Θεωρία Πιθανοτήτων είναι γνωστό ότι κάθε γραμμικός μετασχ. Κανονικών τ.μ. ακολουθεί Κανονική Κατανομή με μέση τιμή τη μέση τιμή του γραμμικού μετασχ. και διασπορά (πίνακα διασποράς) την διασπορά (πίνακα διασποράς) του γραμικού μετασχ. βλ. "Εισαγωγή στις Πιθανότητες: Γ. Κοκολάκης και Ι. Σπηλιώτης", αποτέλ.(4.3) σελ. 174).

Συνεπώς η οποιαδήποτε διαφορά $X(t) - X(s) \sim N(E[X(t) - X(s)], \mathrm{Var}[X(t) - X(s)])$ με

$$E[X(t) - X(s)] = E[X(t)] - E[X(s)] = 0$$

και, για $s \le t$,

$$\mathrm{Var}[X(t) - X(s)] = \mathrm{Cov}\left[X(t) - X(s), X(t) - X(s)\right]$$

$$= \mathrm{Cov}\left[X(t), X(t)\right] - 2\mathrm{Cov}\left[X(t), X(s)\right] + \mathrm{Cov}\left[X(s), X(s)\right]$$

$$= \mathrm{Var}[X(t)] - 2\mathrm{Cov}\left[X(t), X(s)\right] + \mathrm{Var}[X(s)]$$

$$= c^2 t - 2c^2 s + c^2 s = c^2 (t - s),$$

αφού λόγω ανεξάρτητων προσαυξήσεων έχουμε, (βλ. "Σημειώσεις Στοχαστικών Ανελίξεων: Γ. Κοκολάκης", αποτέλεσμα (2.4), σελ. 10),

$$g(s,t) \equiv \mathrm{Cov}[X(s),X(t)] = \mathrm{Var}[X(\mathit{min}\{t,s\})] = \mathrm{Var}[X(s)] = c^2 s, \quad \text{για} \;\; s \le t.$$

Άρα $X(t) - X(s) \sim N(0, c^2(t-s))$.

Άσκ. 1.20. Για να βρούμε την δεσμευμένη κατανομή του $X(s)$ με δεδομένο $X(t)$ ($s \le t$), μας χρειάζεται η από κοινού κατανομή των $X(s)$, $X(t)$. Επειδή έχουμε κίνηση Brown, η από κοινού κατανομή των $X(s)$, $X(t)$ είναι η διμεταβλητή Κανονική κατανομή, βλ. προηγούμενα συμπεράσματα, με μέση τιμή το διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} E[X(s)] \\ E[X(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και πίνακα διασποράς τον

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}(s,t) = \begin{bmatrix} g(s,s) & g(s,t) \\ g(t,s) & g(t,t) \end{bmatrix} = c^2 \begin{bmatrix} s & s \\ s & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & s \\ s & t \end{bmatrix},$$

αφού έχουμε $c = 1$ και

$$g(s,t) \equiv \mathrm{Cov}[X(s),X(t)] = \mathrm{Var}[X(\mathit{min}\{t,s\})] = \mathrm{Var}[X(s)] = s, \quad \text{για κάθε} \;\; s,t \;\; \text{με} \;\; s \le t.$$

Εύκολα τώρα προκύπτει ότι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ $X(s)$ και $X(t)$, για $s < t$ είναι:

$$\rho = \mathrm{Corr}[X(s),X(t)] = g(s,t) / \sqrt{g(s,s)g(t,t)} = \sqrt{s/t}.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα αποτελεί το "συνεχές ανάλογο" του αποτελέσματος (β) της Άσκ. 1.18.

Θέτοντας $X=X(t)$ και $Y=X(s)$, η δεσμευμένη κατανομή του Y για δεδομένο X θα είναι Κανονική με (δεσμευμένη) μέση τιμή, βλ. "Εισαγωγή στις Πιθανότητες: Γ. Κοκολάκης και Ι Σπηλιώτης", αποτέλ. (5.5), σελ. 79, και αποτέλ. (6.4), σελ. 82,

$$E[Y \mid X] = E[Y] + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\{X - E[X]\}$$

και (δεσμευμένη) διασπορά

$$\mathrm{Var}[Y \mid X] = \sigma_Y^2 (1 - \rho^2).$$

Συνεπώς έχουμε αντίστοιχα

$$E[X(s) \mid X(t)] = E[X(s)] + \rho \frac{\sqrt{g(s,s)}}{\sqrt{g(t,t)}}\{X(t) - E[X(t)]\} = \frac{s}{t} X(t)$$

και

$$\mathrm{Var}[X(s) \mid X(t)] = \mathrm{Var}[X(s)]\{1 - \rho^2\} = \frac{s(t-s)}{t}.$$