Κεφ. ΙΙΙ Μαρκοβιανές Αλυσίδες

3.1. Πιθανοτητες Μεταβασης

Μαρκοβιανή Αλυσίδα (Μ.Α.) είναι μια Μαρκοβιανή ανέλιξη $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ με διακριτό χώρο καταστάσεων $\mathfrak{S} = \{s_1, s_2, \ldots\}$ και διακριτό παραμετρικό χώρο $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Ως συνέπεια της Μαρκοβιανής ιδιότητας η πιθανότητα με την οποία μία Μ.Α. βρίσκεται σε μια κατάσταση κατά την χρονική στιγμή $t = n$ δεν εξαρτάται από όλες τις προγενέστερες καταστάσεις από τις οποίες διήλθε παρά μόνο από την αμέσως προηγούμενη, δηλαδή την κατάσταση κατά τη χρονική στιγμή $t = n - 1$. Για απλούστευση του συμβολισμού θα συμβολίζουμε την κατάσταση s_i απλώς με i εφόσον δεν υπάρχει πρόβλημα ερμηνείας.

Συμβολίζοντας με α_i την αρχική πιθανότητα να βρίσκεται ένα Μαρκοβιανό σύστημα στην κατάσταση i κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ και $p_{ij}(n)$ την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j κατά το n-βήμα, δηλαδή με

$$\alpha_i = P[X_0 = i] \quad (i = 1,2, \ldots)$$

και (1.1)

$$p_{ij}(n) = P[X_n = j | X_{n-1} = i] \quad (i, j = 1, 2, \ldots) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

θα έχουμε για την εξέλιξη (διαδρομή, τροχιά) $\{X_\nu = i_\nu : \nu = 0, 1, \ldots, n\}$ ενός Μαρκοβιανού Συστήματος

$$P[X_\nu = i_\nu : \nu = 0, 1, \ldots, n] = P[X_0 = i_0] \prod_{\nu=1}^{n} P[X_\nu = i_\nu \mid X_{\nu-1} = i_{\nu-1}]$$
$$= \alpha_{i_0} \prod_{\nu=1}^{n} p_{i_{\nu-1} i_\nu}(\nu). \tag{1.2}$$

Το διάνυσμα-γραμμή $\mathbf{p}^{(0)}$ με στοιχεία $p_j^{(0)} = \alpha_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ ονομάζεται **κατανομή αρχικών καταστάσεων** και οι τετραγωνικοί πίνακες $\mathbf{P}(n)$ με στοιχεία $p_{ij}(n)$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ και $(n = 1, 2, \ldots)$ ονομάζονται **Πίνακες Πιθανοτήτων Μετάβασης**.

Μια μεγάλη κατηγορία Μαρκοβιανών αλυσίδων είναι εκείνη κατά την οποία οι Πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, δεν εξαρτώνται δηλαδή από τον χρόνο. Σ΄ αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε μια **ομογενή** Μαρκοβιανή αλυσίδα. Σε μια ομογενή Μ.Α. θα έχουμε συνεπώς χρονικά αναλλοίωτες τις πιθανότητες μετάβασης, δηλαδή $p_{ij}(n) = p_{ij}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ χωρίς φυσικά αυτό να σημαίνει ότι και οι πιθανότητες $P[X_n = j]$ παραμένουν χρονικά αναλλοίωτες.

Για την εξέλιξη $\{X_\nu = i_\nu : \nu = 0, 1, \ldots, n\}$ μιας ομογενούς Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ με κατανομή αρχικών καταστάσεων $\mathbf{p}^{(0)} = \boldsymbol{\alpha}$ και πιθανότητες μετάβασης

$$p_{ij} = P[X_n = j | X_{n-1} = i] \quad (i, j = 1, 2, \ldots) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.3}$$

θα έχουμε

$$P[X_\nu = i_\nu : \nu = 0, 1, \ldots, n] = p_{i_0}^{(0)} \prod_{\nu=1}^{n} p_{i_{\nu-1} i_\nu} = \alpha_{i_0} \prod_{\nu=1}^{n} p_{i_{\nu-1} i_\nu} . \tag{1.4}$$

Είναι προφανές ότι το άθροισμα των στοιχείων του διανύσματος $\mathbf{p}^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots)$ δίνει τη μονάδα. Το ίδιο επίσης ισχύει και για το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του στοχαστικού πίνακα **P**. Έχουμε δηλαδή

$$\sum_j p_j^{(0)} = 1 \tag{1.5.α}$$

και

$$\sum_j p_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{1.5.β}$$

Κάθε διάνυσμα-γραμμή $\mathbf{p}^{(0)}$ με μη αρνητικά στοιχεία $p_j^{(0)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ τα οποία ικανοποιούν την (1.5α) αποτελεί **κατανομή αρχικών καταστάσεων.** Κάθε τετραγωνικός πίνακας **P** με μη αρνητικά στοιχεία p_{ij} τα οποία ικανοποιούν την (1.5β) ονομάζεται **Στοχαστικός** και αποτελεί **Πίνακα Πιθανοτήτων Μετάβασης** μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας. Ότι ακολουθεί αφορά αποκλειστικά Ομογενείς Μαρκοβιανές αλυσίδες και συνεπώς όταν μιλάμε για Μαρκοβιανή αλυσίδα θα εννοούμε ομογενή.

Παράδειγμα 1. *Ημέρες χαμηλής/υψηλής βροχόπτωσης.* Κατά τη χειμερινή περίοδο μια ημέρα χαμηλής βροχόπτωσης ακολουθείται από ημέρα υψηλής βροχόπτωσης με πιθανότητα α ενώ μια ημέρα υψηλής βροχόπτωσης ακολουθείται από ημέρα χαμηλής βροχόπτωσης με πιθανότητα β. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ X \\ Y \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} X & \;\;Y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} \end{array}.$$

Παράδειγμα 2. *Απλός τυχαίος περίπατος.* Ο απλός τυχαίος περίπατος $\{X_n : n = 1, 2, \dots \}$ θετικού βήματος $Z_n = 1$ με πιθανότητα p και αρνητικού βήματος $Z_n = -1$ με πιθανότητα $q = 1 - p$ αποτελεί μια Μαρκοβιανή αλυσίδα. Με χώρο καταστάσεων το $\mathfrak{S} = \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης έχει στοιχεία $p_{ij} = 0$ για $j \neq i \pm 1$, $p_{i,i+1} = p = 1 - q$ και $q = p_{i,i-1}$, $i \in \mathbb{Z}$. Έχουμε συνεπώς πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccccccccc} . & . & . & -1 & 0 & 1 & . & . & . & . \end{array} \\ \begin{array}{c} . \\ . \\ . \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \end{array} & \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & & & & & \\ . & . & . & . & . & . & & & & \\ . & . & . & . & . & . & . & & & \\ . & 0 & q & 0 & p & 0 & . & . & & \\ . & . & 0 & q & 0 & p & 0 & . & . & \\ . & . & . & 0 & q & 0 & p & 0 & . & . \\ & & . & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \end{array}$$

Παράδειγμα 3. *Απλός τυχαίος περίπατος με απορροφητικές καταστάσεις.* Με χώρο καταστάσεων $\mathfrak{S} = \{-a, -a+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, b-1, b\}$, τις καταστάσεις -a και b απορροφητικές και πιθανότητα θετικού βήματος p ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{ccccccccc} -a & . & . & & 0 & & . & . & b \end{array} \\ \begin{array}{c} -a \\ . \\ . \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ q & 0 & p & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & q & 0 & p & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & q & 0 & p & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & q & 0 & p \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

3.2. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΥΨΗΛΟΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Σε μια Μ.Α. $\{X_n : n = 0, 1, 2, ...\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης **P** οι πιθανότητες p_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots)$ αποτελούν τις πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j σε ένα βήμα. Ως εκ τούτου ονομάζονται επίσης **πιθανότητες μετάβασης 1ης τάξης**. Ο όρος "μετάβαση" δεν χρησιμοποιείται με την στενή έννοια του όρου κατά την οποία οι καταστάσεις i και j πρέπει να είναι διαφορετικές. Αντίθετα, τίποτα από τα προηγούμενα δεν αποκλείει να έχουμε πιθανότητα $p_{ii} > 0$ και συνεπώς το σύστημα να παραμένει στην ίδια κατάσταση για μια ακόμη χρονική περίοδο.

Με εφαρμογή του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες υψηλότερων τάξεων που ορίζονται από τη σχέση

$$p_{ij}^{(k)} = P[X_k = j \mid X_0 = i] = P[X_{n+k} = j \mid X_n = i] \quad (k = 1, 2, ...) \tag{2.1}$$

γνωστές ως **πιθανότητες μετάβασης k-τάξεως**. Υπενθυμίζεται ότι οι ως άνω πιθανότητες δεν εξαρτώνται από το n διότι η Μ.Α. θεωρείται Ομογενής. Είναι φανερό ότι ισχύει

$$\sum_j p_{ij}^{(k)} = 1 \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \ldots \text{ και } k = 1,2, \ldots.$$

Πριν προχωρήσουμε στον προσδιορισμό των παραπάνω πιθανοτήτων αποδεικνύουμε το παρακάτω.

Θεώρημα 1. Εάν $\mathbf{P}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ είναι στοχαστικοί πίνακες της ίδιας διάστασης τότε το γινόμενο $\mathbf{P} = \prod_{k=1}^{m} \mathbf{P}_k$ είναι στοχαστικός πίνακας.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει για $m = 2$. Έστω **Q** και **R** δύο στοχαστικοί πίνακες της ίδιας διάστασης και **P** = **QR**. Έχουμε

$$p_{ij} = \sum_\nu q_{i\nu} r_{\nu j} \quad (i, j = 1, 2, \ldots)$$

και

$$\sum_j p_{ij} = \sum_j \sum_\nu q_{i\nu} r_{\nu j} = \sum_\nu \sum_j q_{i\nu} r_{\nu j} = \sum_\nu q_{i\nu} \{\sum_j r_{\nu j}\} = \sum_\nu q_{i\nu} = 1 \quad (i = 1, 2, ...).$$

■

Πόρισμα. Αν ο πίνακας **P** είναι στοχαστικός τότε και ο πίνακας $\mathbf{P}^n$ είναι στοχαστικός.

Σχετικά με τις πιθανότητες μεταβάσεων k-τάξεως είναι προφανές ότι ισχύουν οι αναδρομικές εξισώσεις

$$p_{ij}^{(k)} = \sum_{\nu} p_{i\nu} p_{\nu j}^{(k-1)} \qquad (k = 2, 3, ...) \tag{2.2.α}$$

και

$$p_{ij}^{(k)} = \sum_{\nu} p_{i\nu}^{(k-1)} p_{\nu j} \qquad (k = 2, 3, \dots). \tag{2.2.β}$$

Συμβολίζοντας με $\mathbf{P}^{(k)}$ τον πίνακα με στοιχεία τα $p_{ij}^{(k)}$ μπορούμε να γράψουμε τις παραπάνω δύο εξισώσεις υπό μορφή πινάκων ως ακολούθως:

$$\mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{P}\,\mathbf{P}^{(k-1)} \qquad (k = 2, 3, \dots.) \tag{2.3.α}$$

και

$$\mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{P}^{(k-1)}\,\mathbf{P} \qquad (k = 2, 3, \dots.). \tag{2.3.β}$$

Οι αναδρομικές σχέσεις (2.2.α) και (2.3.α) είναι γνωστές ως **οπισθοδρομικές (backward) εξισώσεις Chapman-Kolmogorov** και οι αναδρομικές σχέσεις (2.2.β) και (2.3.β) ως **προδρομικές (forward) εξισώσεις Chapman-Kolmogorov** καθόσον στις μεν (2.2.α) και (2.3.α) έχουμε ανάλυση η οποία αναφέρεται στο απώτερο παρελθόν και συγκεκριμένα στο πρώτο βήμα κατά το οποίο έχουμε τη μετάβαση $(i \rightarrow \nu)$, στις δε (2.2.β) και (2.3.β) έχουμε ανάλυση η οποία αναφέρεται στο πιο προχωρημένο στάδιο και συγκεκριμένα στο τελευταίο βήμα κατά το οποίο έχουμε μετάβαση $(\nu \rightarrow j)$ με $\nu = 1, 2, \dots$.

Επειδή για $k = 1$ έχουμε

$$p_{ij}^{(1)} \equiv p_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \dots)$$

θα έχουμε και

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}\,.$$

Συνεπώς από οποιαδήποτε από τις δύο σχέσεις (2.3.α), (2.3.β) προκύπτει ότι

$$\mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{P}^{k} \qquad (k = 1, 2, \dots.). \tag{2.4}$$

Ισχύει συνεπώς το παρακάτω.

Θεώρημα 2. Οι πιθανότητες μετάβασης k-τάξεως $p_{ij}^{(k)}$ δίνονται από τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{P}^{k}$.

Η πιθανότητα $p_{ij}^{(k)}$ μπορεί επίσης να ερμηνευθεί ως η δεσμευμένη πιθανότητα η Μ.Α. $\{X_n : n = 0, 1, 2, ...\}$ να βρίσκεται στην κατάσταση j, όχι κατ΄ ανάγκη για πρώτη φορά, κατά τη χρονική στιγμή $t = k$ με δεδομένο ότι έχει ξεκινήσει από την κατάσταση i. Επειδή τώρα έχουμε

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i = j \\ 0 & \text{για } i \neq j, \end{cases}$$

μπορούμε να θέσουμε

$$\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{P}^0 = \mathbf{I},$$

με $\mathbf{I}$ τον ταυτοτικό πίνακα της ίδιας διάστασης με τον $\mathbf{P}$. Έτσι οι σχέσεις (2.2) και (2.3) ισχύουν και για $k = 1$. Ομοίως για τη σχέση (2.4) έχουμε:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.5}$$

Γενικεύσεις των αποτελεσμάτων (2.2) έως (2.5) αποτελούν οι σχέσεις που ακολουθούν.

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{\nu} p_{i\nu}^{(m)} p_{\nu j}^{(n)} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

και υπό μορφή πινάκων

$$\mathbf{P}^{(m+n)} = \mathbf{P}^{(m)}\,\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{n+m} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.7}$$

Με εφαρμογή και πάλι του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας και της (2.5) έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα σχετικά με τις αδέσμευτες πιθανότητες $p_j^{(n)} = P[X_n = j]$, να βρίσκεται δηλαδή το Μ.Σ. $\{X_n : n = 0, 1, 2, ...\}$ στη κατάσταση j κατά τη χρονική στιγμή $t = n$. Οι εν λόγω πιθανότητες αποτελούν τα στοιχεία του διανύσματος-γραμμή $\mathbf{p}^{(n)}$ το οποίο ονομάζεται **κατανομή καταστάσεων σε χρόνο** n.

Θεώρημα 3. Η κατανομή καταστάσεων σε χρόνο n δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.8}$$

Απόδειξη. Πράγματι για τις αδέσμευτες πιθανότητες $p_j^{(n)} = P[X_n = j]$ έχουμε:

$$p_j^{(n)} = \sum_{\nu} p_{\nu}^{(0)} p_{\nu j}^{(n)} \quad (j = 1, 2, \ldots) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

η οποία υπό μορφή πινάκων γράφεται

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

Εισάγοντας τώρα στην παραπάνω σχέση την (2.5) προκύπτει η (2.8). ∎

3.3. Στοχαστικοι Πινακες Πεπερασμενης Διαστασης : Στασιμη Κατανομη

Θα ασχοληθούμε τώρα με Μ.Α. στις οποίες το σύνολο καταστάσεων S είναι πεπερασμένο με s έστω στοιχεία. Ο πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων $1^{ης}$ τάξεως **P** θα είναι συνεπώς ένας τετραγωνικός στοχαστικός πίνακας $s \times s$.

Θεώρημα 1. Εάν ο χώρος καταστάσεων S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο με το πλήθος στοιχείων s τότε για τις ιδιοτιμές του λ_j $(j = 1, \ldots, s)$ του πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων **P** ισχύει:

$$|\lambda_j| \le 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{3.1}$$

Απόδειξη. Έστω λ μια οποιαδήποτε ιδιοτιμή του **P** με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_s)^T \neq \mathbf{0}$. Έχουμε συνεπώς

$$\mathbf{P}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}.$$

Έστω τώρα $|x_m| = max\{|x_1|, \ldots, |x_s|\}$. Αναφερόμενοι στο m-στοιχείο του διανύσματος $\lambda\mathbf{x}$ θα έχουμε από την παραπάνω σχέση:

$$|\lambda||x_m| = |\lambda x_m| = |\sum_{j=1}^{s} p_{mj}x_j| \le \sum_{j=1}^{s} p_{mj}|x_j| \le \sum_{j=1}^{s} p_{mj}|x_m| = |x_m|\sum_{j=1}^{s} p_{mj} = |x_m|$$

και συνεπώς το ζητούμενο. ∎

Θεώρημα 2. Κάθε στοχαστικός πίνακας **P** έχει τη μονάδα ως ιδιοτιμή με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)^T$.

Απόδειξη. Προφανής, αφού για κάθε i έχουμε $\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1$ και συνεπώς $\mathbf{P}\,\mathbf{e} = \mathbf{e}$.

∎

Σχετικά με τη συμπεριφορά της κατανομής καταστάσεων $\mathbf{p}^{(n)} = (p_1^{(n)}, \ldots, p_s^{(n)})$ σε χρόνο n ισχύει το παρακάτω:

Θεώρημα 3. Έστω **P** στοχαστικός πίνακας $s \times s$ με διαφορετικές ιδιοτιμές λ_j $(j = 1, \ldots, s)$ και με $|\lambda_j| < 1$ για $j > 1$. Τότε υπάρχει το όριο

$$lim\ \mathbf{p}^{(n)} \equiv (\pi_1, ..., \pi_s)^T \quad \text{για} \quad n \to \infty. \tag{3.2}$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος αυτού θα μελετήσουμε περαιτέρω το Παράδειγμα 1 της προηγούμενης Ενότητας.

Παράδειγμα 1. Έστω Σ.Α. $\{X_n : n =1, 2, \ldots\}$ με δύο καταστάσεις και με στοχαστικό πίνακα

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

με $0 \le \alpha, \beta \le 1$.

Εάν $\alpha = \beta = 1$, η Σ.Α. $\{X_n : n =1, 2, \ldots\}$ μεταπηδά σε κάθε βήμα της από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 και από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 1. Συνεπώς σε άρτιο αριθμό βημάτων $n = 2m$, έστω, βρίσκεται πάντα στην κατάσταση από την οποία ξεκίνησε ενώ σε περιττό αριθμό βημάτων $n = 2m + 1$ θα βρίσκεται στην "εναλλακτική" κατάσταση. Οι δύο καταστάσεις συνεπώς 1 και 2 επανεμφανίζονται διαρκώς ανά δύο βήματα (περιοδικές καταστάσεις με περίοδο $d = 2$). Εάν πάλι $\alpha = \beta = 0$ η Σ.Α. θα βρίσκεται πάντα στην κατάσταση από την οποία ξεκίνησε (απορροφητικές καταστάσεις).

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το ζεύγος $(\alpha, \beta) \ne (0, 0), (1, 1)$. Τούτο σημαίνει ότι για τη δεύτερη ιδιοτιμή, λ έστω, του στοχαστικού πίνακα $\mathbf{P}$ έχουμε $\lambda = 1 - \alpha - \beta \ne \pm 1$ και ιδιαίτερα $|\lambda| < 1$ (από το Θεώρημα 2 η πρώτη ιδιοτιμή του $\mathbf{P}$ είναι η μονάδα). Οι δύο ιδιοτιμές συνεπώς του $\mathbf{P}$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Τούτο σημαίνει ότι ο πίνακα $\mathbf{P}$ αναλύεται ως ακολούθως:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{R}^{-1}, \tag{3.4}$$

όπου οι στήλες $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ του $\mathbf{R}$ ικανοποιούν αντίστοιχα τις εξισώσεις

$$\mathbf{P}\,\mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i \quad (i = 1, 2)$$

με $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = \lambda = 1 - \alpha - \beta$. Από το Θεώρημα 2 έχουμε $\mathbf{r}_1 = \mathbf{e} = (1, 1)^T$, ενώ η δεύτερη λύση είναι $\mathbf{r}_2 = (\alpha, -\beta)^T$. Εφαρμόζοντας την ανάλυση (3.4) λαμβάνουμε

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \mathbf{R}^{-1},$$

ή διαφορετικά

$$\mathbf{P}^{n} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} + \frac{\lambda^{n}}{\alpha+\beta}\begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

και επειδή $|\lambda| < 1$ θα έχουμε για $n \to \infty$

$$lim\,\mathbf{P}^{n} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi} \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

με

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \quad \pi_2] = \left[\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \quad \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right]. \tag{3.7}$$

Από την (2.8) τώρα λαμβάνουμε για $n \to \infty$ την οριακή κατανομή καταστάσεων (διάνυσμα γραμμή). Συγκεκριμένα έχουμε

$$lim\,\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} lim\,\mathbf{P}^{n} = \boldsymbol{\pi}. \tag{3.8}$$

Από τα αποτελέσματα (3.6) και (3.8) βλέπουμε ότι οι γραμμές του ορίου $lim\ \mathbf{P}^{n}$ για $n \to \infty$: (α) συμπίπτουν μεταξύ τους, (β) ταυτίζονται με την οριακή κατανομή καταστάσεων $lim\ \mathbf{p}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}$ και (γ) η τελευταία είναι ανεξάρτητη από την κατανομή αρχικών καταστάσεων $\mathbf{p}^{(0)}$. Επίσης από τις (3.3) και (3.6) διαπιστώνουμε ότι η οριακή κατανομή καταστάσεων $\boldsymbol{\pi}$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\boldsymbol{\pi}\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}, \tag{3.9}$$

αποτελεί δηλαδή το αριστερό ιδιοδιάνυσμα (γραμμή) του πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεων $\mathbf{P}$ το οποίο είναι “κανονικοποιημένο”, με την έννοια ότι το άθροισμα των στοιχείων του δίνει τη μονάδα, και αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$.

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.

Απόδειξη. Αφού ο στοχαστικός $(s \times s)$-πίνακας $\mathbf{P}$ έχει διαφορετικές ιδιοτιμές γράφεται υπό την μορφή (διαγωνιοποιείται)

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\mathbf{R}^{-1},$$

όπου $\boldsymbol{\Lambda}$ διαγώνιος $(s \times s)$-πίνακας με στοιχεία τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ του $\mathbf{P}$ και $\mathbf{R}$ ένας αντιστρέψιμος $(s \times s)$-πίνακας με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{P}$. Ως εκ τούτου θα έχουμε

$$\mathbf{P^n} = \mathbf{R}\,\mathbf{\Lambda^n}\,\mathbf{R^{-1}} = \mathbf{R}\begin{bmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & \lambda_s \end{bmatrix}^n \mathbf{R}^{-1}$$

ή διαφορετικά

$$\mathbf{P^n} = \mathbf{R}\,\mathbf{\Lambda^n}\,\mathbf{R^{-1}} = \mathbf{R}\begin{bmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & \lambda_s^n \end{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} \tag{3.10}$$

Επειδή εξ υποθέσεως έχουμε $\lambda_j < 1$ για $j > 1$, παίρνοντας τα όρια για $n \to \infty$ η (3.10) συνεπάγεται ότι

$$\mathit{lim}\,\mathbf{P^n} = \mathbf{R}(\mathit{lim}\,\mathbf{\Lambda^n})\,\mathbf{R^{-1}} = \mathbf{R}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} \equiv \mathbf{\Pi}. \tag{3.11}$$

Συμβολίζοντας τώρα με r^{ij} τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{R}^{-1}$, θέτοντας δηλαδή

$$\mathbf{R}^{-1} \equiv \{\, r^{ij} \,\} = \begin{bmatrix} r^{11} & r^{12} & . \; . \; . & r^{1s} \\ r^{21} & r^{21} & . \; . \; . & r^{2s} \\ . & . & . \; . \; . \; . & . \\ r^{s1} & r^{s2} & . \; . \; . & r^{ss} \end{bmatrix},$$

έχουμε

$$\mathbf{\Pi} = \mathit{lim}\,\mathbf{P^n} = \mathbf{R}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1s} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2s} \\ . & . & \ldots & . \\ r_{s1} & r_{s2} & \ldots & r_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{11} & r^{12} & \ldots & r^{1s} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11}r^{11} & r_{11}r^{12} & ... & r_{11}r^{1s} \\ r_{21}r^{11} & r_{21}r^{12} & ... & r_{21}r^{1s} \\ . & . & .... & . \\ r_{s1}r^{11} & r_{s1}r^{12} & ... & r_{s1}r^{1s} \end{bmatrix}.$$

Ο οριακός πίνακας **Π,** ως όριο στοχαστικών πινάκων, οφείλει να είναι στοχαστικός και συνεπώς τα στοιχεία του $\pi_{ij} \equiv r_{i1}\, r^{1j}$ (i, j = 1, 2, …., s) θα ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sum_{j=1}^{s} \pi_{ij} = 1 \qquad (i = 1, 2, …., s),$$

οπότε έχουμε

$$r_{i1} = \{\sum_{j=1}^{s} r^{1j}\}^{-1} = c \qquad (i = 1, 2, …., s).$$

Για $n \to \infty$ συνεπώς έχουμε

$$\mathit{lim}\ P^n = c\begin{bmatrix} r^{11} & r^{12} & ... & r^{1s} \\ r^{11} & r^{12} & ... & r^{1s} \\ . & . & .... & . \\ r^{11} & r^{12} & ... & r^{1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_s \\ \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_s \\ . & . & .... & . \\ \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_s \end{bmatrix},$$

δηλαδή

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} (\pi_1, ..., \pi_s) = \mathbf{e}\, \boldsymbol{\pi} \tag{3.12}$$

με $\boldsymbol{\pi}$ διάνυσμα-γραμμή που δίνεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\pi} = c(r^{11},\ r^{12},\ ...,\ r^{1s}) \tag{3.13}$$

και

$$c = \{\sum_{j=1}^{s} r^{1j}\}^{-1}.$$

■

Βλέπουμε πάλι ότι όλες οι γραμμές του οριακού πίνακα **Π** συμπίπτουν μεταξύ τους.

Επιπρόσθετα η οριακή κατανομή καταστάσεων είναι

$$\lim \mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \lim \mathbf{P}^n = \boldsymbol{\pi} = c(r^{11},\ r^{12},\ \ldots,\ r^{1s}), \tag{3.14}$$

τα στοιχεία δηλαδή του $\boldsymbol{\pi}$ είναι εκείνα της πρώτης γραμμής του πίνακα $\mathbf{R}^{-1}$, κανονικοποιημένα ώστε το άθροισμα τους να είναι 1. Η πρώτη γραμμή του $\mathbf{R}^{-1}$ όμως αποτελεί το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του $\mathbf{P}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$. Ως εκ τούτου η οριακή κατανομή $\boldsymbol{\pi}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\boldsymbol{\pi}\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}\,. \tag{3.15}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι αν ως αρχική κατανομή καταστάσεων $\mathbf{p}^{(0)}$ είχαμε την οριακή κατανομή $\boldsymbol{\pi}$, τότε για την κατανομή καταστάσεων σε χρόνο n θα είχαμε:

$$\mathbf{p}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{P}^n = (\boldsymbol{\pi}\mathbf{P})\,\mathbf{P}^{n-1} = \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{P}^{n-1} = \ldots = \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}\,, \tag{3.16}$$

δηλαδή η κατανομή καταστάσεων θα παρέμενε χρονικά αναλλοίωτη και ίση με $\boldsymbol{\pi}$. Ως εκ τούτου η οριακή κατανομή καταστάσεων $\boldsymbol{\pi}$ ονομάζεται **στάσιμη κατανομή** ή **κατανομή ισορροπίας.**

Σημείωση. Από την (3.10) βλέπουμε ότι η σύγκλιση γίνεται με γεωμετρική ταχύτητα η οποία καθορίζεται από την ιδιοτιμή λ_2, τη μέγιστη κατά μέτρο δηλαδή ιδιοτιμή μετά την λ_1 (= 1).

Από την αποδεικτική διαδικασία που εφαρμόσαμε στο Θεώρημα 3 η απαίτηση διαφορετικών ιδιοτιμών δεν είναι αναγκαία. Τούτο διότι επιτυγχάνεται πάλι κατάλληλη αναπαράσταση του στοχαστικού πίνακα $\mathbf{P}$ με ανάλογη συμπεριφορά των δυνάμεων $\mathbf{P}^n$. Συγκεκριμένα κάθε στοχαστικός πίνακας $\mathbf{P}$ είτε παραμένει ως έχει (*μη υποβιβάσιμος*) είτε μπορεί να πάρει block-διαγώνια ή block-υποδιαγώνια μορφή (*υποβιβάσιμος*). Δηλαδή ο στοχαστικός πίνακας $\mathbf{P}$ γράφεται υπό τη μορφή:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V} & \mathbf{T} \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

με τον πίνακα $\mathbf{V}$ ενδεχομένως μηδενικό. Από την παραπάνω μορφή του $\mathbf{P}$ βλέπουμε ότι ο πίνακας $\mathbf{Q}$ είναι στοχαστικός και συνεπώς είτε είναι μη υποβιβάσιμος είτε υποβιβάσιμος. Στην περίπτωση που είναι υποβιβάσιμος συνεχίζουμε την ως άνω διαδικασία και τελικά η μελέτη του στοχαστικού πίνακα $\mathbf{P}$ αναγάγεται στην μελέτη στοχαστικών πινάκων χαμηλότερης διάστασης οι οποίοι είτε είναι μη υποβιβάσιμοι είτε υποβιβάσιμοι της μορφής (3.17) με τον στοχαστικό πίνακα $\mathbf{Q}$ *μη υποβιβάσιμο* και τον πίνακα $\mathbf{T}$ *γνήσια υποστοχαστικό*, δηλαδή με άθροισμα στοιχείων μιας τουλάχιστον γραμμής, < 1. Για πίνακες της μορφής (3.17) έχουμε

$$\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_n & \mathbf{T}^n \end{bmatrix}, \tag{3.18}$$

και αποδεικνύεται με βάση τη γνήσια υποστοχαστικότητα του $\mathbf{T}$ ότι $lim\ \mathbf{T}^n = \mathbf{0}$. Η ασυμπτωτική, συνεπώς, συμπεριφορά των δυνάμεων του $\mathbf{P}$ καθορίζεται από αυτήν των δυνάμεων του μη υποβιβάσιμου πίνακα $\mathbf{Q}$.

Για την συμπεριφορά των δυνάμεων $\mathbf{Q}^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ έχουμε το παρακάτω θεώρημα από το οποίο αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 3.

Θεώρημα 4 ***(Perron–Frobenius)***. Κάθε μη υποβιβάσιμος στοχαστικός $(k \times k)$ πίνακας $\mathbf{Q}$ έχει d ιδιοτιμές $\lambda_{1\nu}$ $(\nu = 0, \ldots, d\text{-}1)$ που δίνονται από

$$\lambda_{1\nu} = \omega^{\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, d\text{-}1) \quad \text{με} \quad \omega = e^{2\pi i/d} \quad \text{και} \quad i = \sqrt{-1}, \tag{3.19}$$

δηλαδή τις d μιγαδικές ρίζες της μονάδας, και $(m\text{-}1)$ ιδιοτιμές λ_j πολλαπλότητας k_j $(j = 2, \ldots, m)$ που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$|\lambda_j| < 1 \quad (j = 2, \ldots, m) \tag{3.20}$$

με $k = d + \sum_{j=2}^{m} k_j$.

Επιπλέον, για τον στοχαστικό πίνακα $\mathbf{Q}$ ισχύει η ανάλυση κατά Jordan (Jordan canonical form) σύμφωνα με την οποία υπάρχει αντιστρέψιμος $(k \times k)$ πίνακας $\mathbf{H}$ τέτοιος ώστε

$$\mathbf{H}\,\mathbf{Q}\,\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{J}_{k_m}(\lambda_m) \end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

όπου $\mathbf{J}(\lambda_1)$ τετραγωνικός πίνακας $(d \times d)$ της μορφής

$$\mathbf{J}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{12} & 0\ \cdot\ \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{1d} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

και $\mathbf{J}_{k_j}(\lambda_j)$ $(j = 2, \ldots, m)$ τετραγωνικοί πίνακες $(k_j \times k_j)$ της μορφής

$$\mathbf{J}_{k_j}(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_j \end{bmatrix} = \lambda_j I + M. \qquad (3.23)$$

Με βάση το Διωνυμικό Τύπο και τη συνθήκη $|\lambda_j| < 1$ $(j = 2, \ldots, m)$ αποδεικνύεται ότι οι δυνάμεις $\{\mathbf{J}_{k_j}(\lambda_j)\}^n$ $(j = 2, \ldots, m)$ με $n > k_j$ είναι της μορφής

$$\{J_k(\lambda)\}^n = \lambda^n I + \binom{n}{1}\lambda^{n-1}M + \ldots + \binom{n}{k-1}\lambda^{k-1}M^{k-1}$$

και συνεπώς για $n \to \infty$ συγκλίνουν σε μηδενικούς πίνακες της αντίστοιχης διάστασης.

Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε ότι όταν το πλήθος των ιδιοτιμών $\lambda_{1\nu}$ του $\mathbf{Q}$ με μέτρο τη μονάδα είναι $d = 1$ τότε, ανεξαρτήτως της πολλαπλότητας των άλλων ιδιοτιμών, οι δυνάμεις $\mathbf{Q}^n$, και κατά συνέπεια οι δυνάμεις $\mathbf{P}^n$, συγκλίνουν για $n \to \infty$.

Όταν $d > 1$ παρουσιάζεται *περιοδικότητα* στις επανεμφανίσεις των καταστάσεων και ισχύει το παρακάτω:

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\mathbf{Q}^n = \lim \frac{1}{d}\sum_{\nu=0}^{d-1}\mathbf{Q}^{n+\nu} = \mathbf{\Pi} \quad \text{για } n \to \infty. \qquad (3.24)$$

Ως εκ τούτου ανάλογη συμπεριφορά παρουσιάζουν οι δυνάμεις του στοχαστικού πίνακα **P.**

Συμπεραίνουμε συνεπώς ότι σε κάθε Μαρκοβιανή αλυσίδα θα έχουμε δύο γενικές κατηγορίες καταστάσεων, έστω R και T, με την κατηγορία T ενδεχομένως κενή. Οι καταστάσεις της κατηγορίας R επανεμφανίζονται επ΄ άπειρον, "*επαναληπτικές καταστάσεις*", και μάλιστα με περιοδική συμπεριφορά όταν οι ιδιοτιμές του στοχαστικού πίνακα **P** με μέτρο τη μονάδα είναι περισσότερες της μιας $(d > 1)$, "*περιοδικές ή κυκλικές καταστάσεις περιόδου* d", ενώ οι καταστάσεις της κατηγορίας T σταδιακά παύουν να επανεμφανίζονται "*παροδικές καταστάσεις*". Έτσι η Μ.Α. εγκλωβίζεται τελικά στην κλάση R των επαναληπτικών καταστάσεων. Επίσης, όταν η περίοδος $d > 1$, η ακολουθία των πινάκων $\mathbf{P}^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ δεν συγκλίνει με την γνωστή έννοια του όρου αλλά υπό την έννοια της σύγκλισης (3.24) (*όριο κατά Cezaro*).

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την ασυμπτωτική συμπεριφορά των στοχαστικών πινάκων πεπερασμένης διάστασης ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο σύγγραμμα: Cox D.R. & Miller H.D., σελ. 118-129.

Οι ως άνω γενικές κατηγορίες, ***υποβιβάσιμων*** και ***μη υποβιβάσιμων*** Μαρκοβιανών αλυσίδων, ***επαναληπτικών*** και ***παροδικών*** καταστάσεων, ***περιοδικών*** και ***μη περιοδικών*** καταστάσεων, θα εξεταστούν διεξοδικά στα πλαίσια της μελέτης των Μαρκοβιανών αλυσίδων με άπειρο, αλλά αριθμήσιμο, πλήθος καταστάσεων αφού πρώτα εισάγουμε τις απαιτούμενες βασικές έννοιες και ορισμούς.

Παράδειγμα 2. Έστω Σ.Α. $\{X_n : n = 1, 2, \ldots\}$ με τρεις καταστάσεις και με στοχαστικό πίνακα

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & 1-\beta & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1-\gamma_1-\gamma_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

με $0 < \alpha, \beta, \gamma_1 + \gamma_2 < 1$.

Εδώ οι καταστάσεις E_1 και E_2 επανεμφανίζονται επ΄ άπειρον ενώ η κατάσταση E_3 σταδιακά θα παύσει να επανεμφανίζεται αφού έχουμε $p_{i3}^{(n)} = 0 \;\; (i = 1, 2)$ και $p_{33}^{(n)} = \{1 - \gamma_1 - \gamma_2\}^n \to 0$ για $n \to \infty$. Για $\alpha = \beta = 1$ οι καταστάσεις 1 και 2 θα επανεμφανίζονται διαδοχικά η μια μετά την άλλη αφού παρέλθει κάποιο χρονικό διάστημα.

Παράδειγμα 3. Ο παρακάτω στοχαστικός πίνακας αφορά την ποσότητα ύδατος σε δεξαμενή ενός δικτύου ύδρευσης κάθε πρωί. Ανάλογα με την ποσότητα ύδατος που υπάρχει η δεξαμενή θωρείται ότι βρίσκεται στην κατάσταση E_1 όταν περιέχει μικρή ποσότητα, στην E_2 όταν περιέχει μέτρια ποσότητα, στην E_3 όταν περιέχει υψηλή ποσότητα και στην E_4 όταν είναι πλήρης. Να προσδιοριστεί η κατανομή ισορροπίας αν υπάρχει.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Με βάση την (3.15) συμπεραίνουμε ότι αν υπάρχει κατανομή ισορροπίας $\boldsymbol{\pi}$ αυτή θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$\boldsymbol{\pi}\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi},$$

σε συνδυασμό με την συνθήκη

$$\sum_{i=1}^{4} \pi_i = 1 .$$

Έχουμε συνεπώς το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} &0.1\pi_2 = 0.8\pi_1 \\ &0.2\pi_3 = 0.7\pi_2 - 0.4\pi_1 \\ &0.5\pi_4 = 0.6\pi_3 - 0.4\pi_2 - 0.3\pi_1 \\ &\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\pi_2 = 8\pi_1$, $\pi_3 = 26\pi_1$ και $\pi_4 = (121/5)\pi_1$ με $\pi_1 = 5/296$, οπότε η κατανομή ισορροπίας είναι: $\boldsymbol{\pi} = (5/296, 40/296, 130/296, 121/296)$.

3.3.1. *Μοντέλο Διάχυσης Ehrenfest*

Πορώδης μεμβράνη χωρίζει ένα δοχείο σε δύο τμήματα A και B της αυτής χωρητικότητας. Εντός του δοχείου υπάρχουν c μόρια ενός αερίου τα οποία διαπερνούν τη μεμβράνη από το τμήμα A στο τμήμα B και αντίστροφα. Θεωρούμε ότι ανά μονάδα χρόνου (ενός millisecond π.χ.) ένα μόριο μετακινείται από το ένα τμήμα στο άλλο με πιθανότητα ανάλογη του αριθμού των μορίων που βρίσκονται στο ίδιο τμήμα. Μας ενδιαφέρει να βρούμε τις πιθανότητες καταστάσεων n-τάξεως καθώς και την κατανομή ισορροπίας, αν υπάρχει, του αριθμού των μορίων που βρίσκονται στο τμήμα A.

Έστω X_n ο αριθμός των μορίων στο τμήμα A κατά τη χρονική στιγμή $t = n$. Έχουμε συνεπώς να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της Σ.Α. $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Η εν λόγω Σ.Α. είναι Μαρκοβιανή με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \ldots, c\}$. Δεχόμενοι ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = n$ έχουμε αριθμό μορίων στο τμήμα A $X_n = i$, κατά τη χρονική στιγμή $t = n + 1$ θα έχουμε:

$$X_{n+1} = \begin{cases} i-1 & \text{με πιθανότητα } i/c \\ i+1 & \text{με πιθανότητα } 1\text{-}i/c. \end{cases} \tag{3.25}$$

Έχουμε συνεπώς μια (ομογενή) Μαρκοβιανή Αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 1/c & 0 & 1-1/c & . & . & 0 & 0 \\ . & . & 2/c & 0 & 1-2/c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1/c \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Δηλαδή, $p_{i,i-1} = i/c$, $p_{i,i+1} = 1 - i/c$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, c)$ και μηδενικές τις υπόλοιπες πιθανότητες μετάβασης.

Σημείωση. Μπορεί να επιβεβαιώσει κανείς, αν και όχι εύκολα, ότι για τις ιδιοτιμές λ_j του ως άνω στοχαστικού πίνακα **P** ισχύουν τα παρακάτω:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \text{ και } |\lambda_j| < 1 \text{ για } j = 3, \ldots, c+1,$$

έχουμε δηλαδή εδώ $d = 2$ (μιγαδικές) ρίζες της μονάδας.

Λαμβάνοντας τις γεννήτριες πιθανοτήτων $f_n(s)$ των τ.μ. X_n με δεδομένο ότι $X_0 = x_0$ έχουμε:

$$f_n(s) = E[s^{X_n} | X_0 = x_0] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.27}$$

Κάνοντας δέσμευση σε αμέσως προηγούμενη κατάσταση έχουμε για την $f_{n+1}(s)$

$$f_{n+1}(s) = E[E[s^{X_{n+1}} | X_n, X_0 = x_0] | X_0 = x_0] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

και λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας

$$f_{n+1}(s) = E[E[s^{X_{n+1}} | X_n] | X_0 = x_0] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.28}$$

Όμως

$$E[s^{X_{n+1}} | X_n = i] = \frac{i}{c} s^{i-1} + \{1 - \frac{i}{c}\} s^{i+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

και συνεπώς

$$E[s^{X_{n+1}} | X_n] = \frac{X_n}{c} s^{X_n - 1} + \{1 - \frac{X_n}{c}\} s^{X_n + 1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

με την τ.μ. $X_n \in \{0, 1, 2, \ldots, c\}$.

Οπότε,

$$E[s^{X_{n+1}} | X_n] = \frac{1}{c}\{(1-s^2)X_n s^{X_n - 1} + (cs)s^{X_n}\}. \tag{3.29}$$

Παίρνοντας την μέση τιμή της παραπάνω ποσότητας με την δέσμευση ότι $X_0 = x_0$ θα έχουμε:

$$f_{n+1}(s) = \frac{1}{c}\{(1-s^2)E[X_n s^{X_n - 1} | X_0 = x_0] + (cs)E[s^{X_n} | X_0 = x_0]\}. \tag{3.30}$$

Όμως

$$f_n(s) = E[s^{X_n} | X_0 = x_0].$$

και

$$\frac{d}{ds} f_n(s) = E[X_n s^{X_n - 1} | X_0 = x_0],$$

οπότε η (3.30) γράφεται

$$f_{n+1}(s) = \frac{1}{c}\{(1-s^2)f_n'(s) + (cs)f_n(s)\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.31}$$

με αρχική συνθήκη την

$$f_0(s) = E[s^{X_0} | X_0 = x_0] = s^{x_0}. \tag{3.32}$$

Η ως άνω διαφοροεξίσωση μπορεί να λυθεί διαδοχικά για $n = 1, 2, \ldots,$ και να επιβεβαιωθεί αν υπάρχει ή όχι το όριο για $n \to \infty$. Αναπτύσσοντας την οριακή γεννήτρια σε δυναμοσειρά $a_0 + \sum_1^c a_k s^k$. έχουμε:

$$f(s) = \mathit{lim}\ f_n(s) = a_0 + \sum_{k=1}^{c} a_k s^k. \tag{3.33}$$

Οι συντελεστές a_k της δυναμοσειράς δίνουν τις οριακές πιθανότητες $P[X = k | X_0 = x_0]$ $(k = 0, 1, \ldots, c)$.

Επίσης, παραγωγίζοντας ως προς s τα μέλη της (3.33) και θέτοντας $s = 1$ προκύπτουν αναδρομικές σχέσεις από τις μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή $M_n = E[X_n | X_0 = x_0]$ καθώς και τη διασπορά $V_n = Var[X_n| X_0 = x_0]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (βλ. άσκηση 3.25).

Μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα του προσδιορισμού της οριακής κατανομής είναι η παρακάτω:

Έστω $f(s) = lim f_n(s)$ για $n \to \infty$. Τότε η (3.31) γράφεται

$$f(s) = \frac{1}{c}\{(1-s^2)f'(s) + (cs)f(s)\}$$

ή διαφορετικά,

$$(1-s^2)f'(s) = c(1-s)f(s)\}.$$

Οπότε με $s \neq -1$ θα έχουμε

$$\frac{1}{f(s)}f'(s) = \frac{c}{1+s}$$

από την οποία προκύπτει μετά από ολοκλήρωση

$$ln\, f(s) = c\, ln(1+s) + k$$

και συνεπώς

$$f(s) = A\{1+s\}^c. \qquad (3.34)$$

Παίρνοντας τα όρια των δύο μελών για $s \to 1$ λαμβάνουμε $2^c A = 1$, οπότε $A = 2^{-c}$.

Εισάγοντας την παραπάνω τιμή του A στην (3.34) έχουμε

$$f(s) = \{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s\}^c. \qquad (3.35)$$

Η τελευταία είναι η γεννήτρια πιθανοτήτων της Διωνυμική κατανομής με παραμέτρους $n = c$ και $p = ½$. Έχουμε συνεπώς ως κατανομή ισορροπίας την

$$P[X = k \mid X_0 = x_0] \cong \binom{c}{k}\frac{1}{2^c}. \qquad (3.36)$$

Βλέπουμε ότι η ως άνω κατανομή δεν εξαρτάται από την αρχική κατάσταση x_0, και αυτό είναι σωστό αφού έτσι πρέπει να είναι μια κατανομή ισορροπίας. Όμως παρατηρούμε την εξής αντινομία. Όταν έχουμε αρχική κατάσταση $\{X_0 = k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, c)$ η πιθανότητα να βρεθεί στην ίδια θέση σε περιττό αριθμό βημάτων είναι πάντα μηδέν και συνεπώς η υπακολουθία πιθανοτήτων $\{P[X_{2n+1} = k \mid X_0 = k] : n = 1, 2, \ldots\}$ έχει όριο το μηδέν. Η αντινομία αυτή οφείλεται στην περιοδικότητα της Μαρκοβιανής αλυσίδας και αίρεται αν θεωρήσουμε την οριακή κατανομή (3.36) ως όριο κατά Cezaro με $d = 2$ (βλ. (3.24)). Οι Διωνυμικές πιθανότητες (3.36) ερμηνεύονται πλέον ως ποσοστά του χρόνου κατά τον οποίο η Μαρκοβιανή αλυσίδα βρίσκεται στις καταστάσεις $k = 0, 1, \ldots, c$ αντίστοιχα.

3.4. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

Έστω Μ.Α. $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ με χώρο καταστάσεων $\mathfrak{S} = \{s_1, s_2, \ldots\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης **P.** Λέμε ότι η κατάσταση s_i *οδηγεί* στην s_j, και γράφουμε $s_i \to s_j$, όταν υπάρχει $n \geq 0$ τέτοιο ώστε $p_{ij}^{(n)} > 0$. Για την κατάσταση s_j τώρα είναι δυνατόν να έχουμε επίσης ότι $s_j \to s_i$. Σ΄ αυτή την περίπτωση μιλάμε για (*αμφίδρομη) **επικοινωνία*** μεταξύ των καταστάσεων s_i και s_j.

Ορισμός 1. Δύο καταστάσεις s_i και s_j λέγονται ***αμφίδρομα επικοινωνούσες***, ή απλώς ***επικοινωνούσες***, και γράφουμε $s_i \leftrightarrow s_j$, όταν υπάρχουν ακέραιοι m και n τέτοιοι ώστε

$$p_{ij}^{(m)} > 0 \quad \text{και} \quad p_{ji}^{(n)} > 0, \quad m, n \geq 0. \tag{4.1}$$

Η ως άνω έννοια της ***επικοινωνίας*** μεταξύ δύο καταστάσεων αποτελεί μια *σχέση **ισοδυναμίας*** πάνω στο S, έχει δηλαδή τις παρακάτω τρεις ιδιότητες: *(α) ανακλαστικότητα, (β) συμμετρικότητα* και *(γ) μεταβατικότητα.* Παρότι οι ιδιότητες αυτές φαίνονται προφανείς, είναι χρήσιμο να τις επιβεβαιώσουμε.

(α) Ανακλαστικότητα: Για κάθε κατάσταση s_i έχουμε $p_{ii}^{(0)} = 1$. Συνεπώς $s_i \leftrightarrow s_i$.

(β) Συμμετρικότητα: Για κάθε ζεύγος καταστάσεων s_i, s_j με $s_i \leftrightarrow s_j$ εξ ορισμού ότι υπάρχουν ακέραιοι m_1 $n_1 \geq 0$ τέτοιοι ώστε $p_{ij}^{(m_1)} > 0$ και $p_{ji}^{(n_1)} > 0$. Τότε όμως υπάρχουν επίσης ακέραιοι m_2 (= n_1) και n_2 (= m_1) ≥ 0 τέτοιοι ώστε $p_{ji}^{(m_2)} > 0$ και $p_{ij}^{(n_2)} > 0$. Άρα $s_j \leftrightarrow s_i$.

(γ) Μεταβατικότητα: Για κάθε τριάδα καταστάσεων s_i, s_j και s_k με $s_i \leftrightarrow s_j$ και $s_j \leftrightarrow s_k$ εξ ορισμού υπάρχουν ακέραιοι m_1, m_2 και n_1, n_2 ≥ 0 τέτοιοι $p_{ij}^{(m_1)} > 0$, $p_{jk}^{(m_2)} > 0$ και $p_{ji}^{(n_1)} > 0$, $p_{kj}^{(n_2)} > 0$. Τότε όμως

$$p_{ik}^{(m_1+m_2)} = \sum_{\nu} p_{i\nu}^{(m_1)} p_{\nu k}^{(m_2)} \geq p_{ij}^{(m_1)} p_{jk}^{(m_2)} > 0$$

και

$$p_{ki}^{(n_1+n_2)} = \sum_{\nu} p_{k\nu}^{(n_2)} p_{\nu i}^{(n_1)} \geq p_{kj}^{(m_2)} p_{ji}^{(m_1)} > 0.$$

Συνεπώς $s_i \leftrightarrow s_k$.

Από την παραπάνω σχέση ισοδυναμίας παράγεται μια διαμέριση του συνόλου των καταστάσεων S σε *κλάσεις ισοδυναμίας,* ή καλύτερα, *κλάσεις επικοινωνουσών καταστάσεων* C_1, C_2, ... Σε κάθε μια από τις κλάσεις αυτές οι καταστάσεις επικοινωνούν αμφίδρομα αλλά μεταξύ καταστάσεων διαφορετικών κλάσεων δεν μπορεί να υπάρχει αμφίδρομη επικοινωνία διότι τότε οι κλάσεις τους θα αποτελούσαν μία κλάση. Συγκεκριμένα για δύο καταστάσεις, έστω s_i και s_j, που ανήκουν σε δύο διαφορετικές κλάσεις επικοινωνουσών καταστάσεων C_I και C_J αντίστοιχα ισχύει ένα και μόνο από τα παρακάτω.

(α) $s_i \to s_j$ και $s_j \not\to s_i$,

(β) $s_j \to s_i$ και $s_i \not\to s_j$,

(γ) $s_i \not\to s_j$ και $s_j \not\to s_i$.

Για τις αντίστοιχες κλάσεις καταστάσεων C_I και C_J συνεπώς έχουμε:

(α΄) $C_I \to C_J$ και $C_J \not\to C_I$ όταν ισχύει η *(α),*

(β΄) $C_J \to C_I$ και $C_I \not\to C_J$ όταν ισχύει η *(β),*

(γ΄) $C_I \not\to C_J$ και $C_J \not\to C_I$ όταν ισχύει η *(γ).*

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει μια ***μερική διάταξη*** των κλάσεων επικοινωνουσών καταστάσεων.

Ορισμός 2. Για δύο κλάσεις επικοινωνουσών καταστάσεων C_I και C_J λέμε ότι η C_I ***υπερέχει*** της C_J, και γράφουμε $C_I \succ C_J$, ή ισοδύναμα $C_J \prec C_I$, όταν η $C_I \to C_J$ και $C_J \not\to C_I$.

Από τη σχέση *(γ΄)* είναι φανερό ότι ενδέχεται να υπάρχουν κλάσεις οι οποίες δεν διατάσσονται μεταξύ τους (μερική διάταξη). Ενδέχεται επίσης να υπάρχουν κλάσεις οι οποίες δεν οδηγούν σε καμία άλλη κλάση και ως εκ τούτου ονομάζονται κλειστές.

Ορισμός 3. Μια κλάση επικοινωνουσών καταστάσεων C λέγεται ***κλειστή*** (ως προς την έξοδο) όταν δεν οδηγεί σε καμία άλλη κλάση, διαφορετικά λέγεται ***ανοικτή***. Όταν μια κατάσταση αποτελεί από μόνη της μια κλειστή κλάση ονομάζεται ***απορροφητική.***

Με βάση τον παραπάνω ορισμό εάν μια κατάσταση s_i, έστω, ανήκει σε μια κλειστή κλάση C, τότε για κάθε άλλη κατάσταση s_j που δεν ανήκει στην C θα έχουμε $p_{ij}^{(n)} = 0$ για κάθε $n \geq 0$ και συνεπώς $P_{ij} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

Αντίστροφα, εάν οι πιθανότητες μετάβασης $p_{ij} = 0$ για όλα τα ζεύγη καταστάσεων (s_i, s_j) με s_i εντός μιας κλάσης C και s_j εκτός αυτής, τότε η κλάση C είναι κλειστή. Τούτο διότι έχουμε $p_{ik}p_{kj} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ και από αυτή προκύπτει ότι

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_k p_{ik} p_{kj} = 0 \quad \text{για κάθε } s_i \in C \text{ και } s_j \notin C.$$

Έτσι διαδοχικά έχουμε:

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_k p_{ik} p_{kj}^{(n)} = 0 \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Συνεπώς

$$p_{ij}^{(n)} = 0 \quad (n = 0\ 1, 2, \ldots) \text{ για κάθε } s_i \in C \text{ και } s_j \notin C.$$

Για δύο μη επικοινωνούσες καταστάσεις s_i και s_j μια, τουλάχιστον, από τις παρακάτω σχέσεις είναι αληθής:

$$P_{ij} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \qquad P_{ji} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} = 0.. \tag{4.2}$$

Παράδειγμα 1. Στη Μ.Α. με καταστάσεις E_i (i= 1, …, 5) και στοχαστικό πίνακα

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{array} \\ \mathbf{P} = \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \gamma & 0 & 1-\beta-\gamma \\ 0 & \delta & 0 & 1-\delta & 0 \\ \varepsilon & 0 & \zeta & 0 & 1-\varepsilon-\zeta \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.3}$$

με θετικές πιθανότητες όπου δεν υπάρχει "0" παρατηρούμε τα παρακάτω. Η κατάσταση E_2 οδηγεί αποκλειστικά στη ίδια, κατά συνέπεια αποτελεί από μόνη της μια κλειστή κλάση, έστω C_1, και η ίδια είναι απορροφητική. Η κατάσταση E_4 οδηγεί στην ίδια και στην E_2, κατά συνέπεια αποτελεί από μόνη της μια δεύτερη κλάση C_2 ανοικτή προς την κλάση C_1. Η κατάσταση E_1 οδηγεί στην ίδια όπως και στην E_2. Συνεπώς αποτελεί από μόνη της μια κλάση C_3 ανοικτή προς την κλάση C_1. Οι καταστάσεις E_3 και E_5 επικοινωνούν (αμφίδρομα) μεταξύ τους αλλά επίσης οδηγούν στην κατάσταση E_1 και μέσω αυτής στην E_2. Συνεπώς οι καταστάσεις E_3, E_5 αποτελούν μια τέταρτη κλάση C_4 η οποία είναι ανοικτή προς την κλάση C_3. Έχουμε συνεπώς τέσσερις κλάσεις επικοινωνουσών καταστάσεων και συγκεκριμένα τις κλάσεις:

$$C_1 = \{E_2\},\ C_2 = \{E_4\},\ C_3 = \{E_1\} \text{ και } C_4 = \{E_3, E_5\}.$$

Από πλευράς (μη αμφίδρομης) επικοινωνίας των κλάσεων έχουμε:

$$C_2 \to C_1, \quad C_3 \to C_1 \text{ και } C_4 \to C_3.$$

Από πλευράς διάταξης (ή ιεράρχησης) των κλάσεων έχουμε:

$$C_2 \succ C_1 \text{ και } C_4 \succ C_3 \succ C_1.$$

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε συνεπώς μερική διάταξη των κλάσεων.

Με βάση την παραπάνω διάταξη των κλάσεων και αναδιάταξη των καταστάσεων, ο πίνακας πιθανοτήτων μεταβάσεων παίρνει την παρακάτω block-υποδιαγώνια μορφή, γνωστή ως **κανονική μορφή** του **P**.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ E_2 \\ E_4 \\ E_1 \\ E_3 \\ E_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_2 & E_4 & E_1 & E_3 & E_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 1-\delta & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \gamma & 1-\beta-\gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon & \zeta & 1-\varepsilon-\zeta \end{bmatrix} \end{array}.$$

Από την παραπάνω μορφή του πίνακα **P** είναι φανερό ότι οι καταστάσεις των κλάσεων C_2, C_3 και C_4 θα επανεμφανίζονται όλο και με μικρότερη πιθανότητα αφού υπάρχουν θετικές πιθανότητες, δ, α και $\alpha(\beta + \varepsilon)$ αντίστοιχα, με τις οποίες το Μαρκοβιανό σύστημα μεταπηδά στην κλάση C_1 και παραμένει επ΄ άπειρον εκεί.

Παράδειγμα 2. Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις των παρακάτω Μ.Α. σε κλάσεις και να γίνει ιεράρχηση.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.3 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Παρατηρούμε ότι η κατάσταση E_3 δεν οδηγεί παρά μόνο στην ίδια. Συνεπώς είναι απορροφητική και αποτελεί από μόνη της μια κλειστή κλάση $C_1 = \{E_3\}$. Οι καταστάσεις E_1, E_2 και E_5 επικοινωνούν μεταξύ τους αφού η διαδρομή $E_1 \to E_2 \to E_5 \to E_1$ έχει θετική πιθανότητα $p = (0.5)(0.5)(0.1) = 0.025$. Συνεπώς αποτελούν μια δεύτερη κλάση $C_2 = \{E_1, E_2, E_5\}$. Επειδή έχουμε $E_2 \to E_3$, η κλάση $C_2 \succ C_1$.

Η κατάσταση E_4 δεν επικοινωνεί με καμία άλλη κατάσταση, όμως οδηγεί στην κατάσταση E_5 της κλάσης C_2, καθώς και στην κατάσταση E_3 της C_1. Συνεπώς αποτελεί από μόνη της μια κλάση C_3 με $C_3 \succ C_1$, C_2. Με βάση τα παραπάνω η ιεράρχηση των κλάσεων έχει ως ακολούθως: $C_3 \succ C_2 \succ C_1$.

Αναδιατάσσοντας τις καταστάσεις ο στοχαστικός πίνακας **P** στην **κανονική** του μορφή είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ E_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_5 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_3 & E_1 & E_2 & E_5 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Από την παραπάνω μορφή του πίνακα **P** είναι φανερό ότι οι καταστάσεις των κλάσεων C_2 και C_3 θα επανεμφανίζονται όλο και με μικρότερη πιθανότητα αφού σε κάθε βήμα υπάρχει θετική πιθανότητα απορρόφησης από την κατάσταση E_3. Συγκεκριμένα έχουμε ότι η πιθανότητα παραμονής στις κλάσεις C_2 και C_3 για χρόνο n, φράσσεται από την γεωμετρικά φθίνουσα ακολουθία p^n με $p \le 0.9$ $(= 1 - \min\{p_{i3}: i \neq 3\})$.

Μια Μ.Α. η οποία αποτελείται **μόνο** από κλειστές κλάσεις έχει στοχαστικό πίνακα της μορφής

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & 0 & . & . & . \\ 0 & \mathbf{P}_2 & 0 & . & . \\ . & 0 & . & 0 & . \\ . & . & 0 & \mathbf{P}_k & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

όπου κάθε πίνακας $\mathbf{P}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ είναι στοχαστικός. Οι δυνάμεις ενός πίνακα με την παραπάνω δομή έχουν πάλι την ίδια δομή. Συγκεκριμένα:

$$\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^n & 0 & . & . & . \\ 0 & \mathbf{P}_2^n & 0 & . & . \\ . & 0 & . & 0 & . \\ . & . & 0 & \mathbf{P}_k^n & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.5}$$

Η παραπάνω διαγώνια δομή του στοχαστικού πίνακα **P** για μια Μ.Α. η οποία αποτελείται μόνο από **κλειστές** κλάσεις, μας επιτρέπει να μελετήσουμε κάθε κλειστή κλάση χωριστά, σαν να είχαμε δηλαδή διάφορες Μαρκοβιανές αλυσίδες με κάθε μια να αποτελείται από μία μόνο κλάση επικοινωνουσών καταστάσεων.

Ορισμός 4. Μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα ονομάζεται ***μη υποβιβάσιμη*** (*irreducible*) εάν έχει μία μόνο κλάση επικοινωνουσών καταστάσεων, το σύνολο S.

Κατά συνέπεια μια Μ.Α. είναι μη υποβιβάσιμη εάν και μόνο εάν όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους.

Παράδειγμα 3. Η Μ.Α. με καταστάσεις E_i (i= 1, …, 5) και στοχαστικό πίνακα

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1-\beta & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-\gamma & 0 & \gamma \\ \delta & 0 & 0 & 1-\delta & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 1-\varepsilon \end{bmatrix} \end{array}$$

με $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon < 1$ είναι μη υποβιβάσιμη αφού όλες οι καταστάσεις της επικοινωνούν μεταξύ τους. Επί παραδείγματι η διαδρομή $E_1 \to E_3 \to E_5 \to E_2 \to E_4 \to E_1$ έχει πιθανότητα $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon > 0$.

Στην περίπτωση κατά την οποία η Μ.Α. είναι υποβιβάσιμη, με μια τουλάχιστον κλειστή κλάση και μία τουλάχιστον ανοικτή, τότε η Μ.Α. αναλύεται σε επί μέρους Μαρκοβιανές αλυσίδες. Συγκεκριμένα για κάθε κλειστή κλάση C_L (L = 1, 2, …) προσδιορίζουμε όλες τις ανοικτές κλάσεις οι οποίες οδηγούν σ΄ αυτήν. Δημιουργούνται έτσι νέοι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης οι οποίοι μπορούν να μελετηθούν ξεχωριστά. Έτσι, για μια κλειστή κλάση C_L έχουμε:

$$\mathbf{P}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{0} & . & . & . \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{0} & . & . \\ . & . & . & \mathbf{0} & . \\ \mathbf{V}_{k1} & . & . & \mathbf{T}_{kk} & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Η πρώτη γραμμή αντιστοιχεί στην κλειστή κλάση C_L και οι επόμενες στις ανοικτές κλάσεις C_{L_I} με $C_{L_I} \to C_L$ για I = 1, 2, ... Η κλειστή κλάση C_L έχει πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης τον στοχαστικό πίνακα $\mathbf{P}_{11}$. Ο πίνακας $\mathbf{P}_L$, όπως και οι πίνακες $\mathbf{T}_{kk}$, $(k .> 1)$ είναι γενικά υποστοχαστικοί, όμως αυτό δεν δημιουργεί κανένα πρόβλημα όπως θα δούμε παρακάτω.

Παράδειγμα 4. Αν θεωρήσουμε ότι ο στοχαστικός πίνακας (4.3) στο Παράδειγμα 1 έχει $\alpha = 0$ τότε οι κλάσεις $C_1 = \{E_2\}$ και $C_2 = \{E_1\}$ είναι κλειστές. Από τον στοχαστικό πίνακα $\mathbf{P}$ προκύπτουν δύο πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_2$. Συγκεκριμένα με $\alpha = 0$ ο στοχαστικός πίνακας $\mathbf{P}$ υπό την κανονική του μορφή είναι

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ E_2 \\ E_4 \\ E_1 \\ E_3 \\ E_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_2 & E_4 & E_1 & E_3 & E_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 1-\delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \gamma & 1-\beta-\gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon & \zeta & 1-\varepsilon-\zeta \end{bmatrix} \end{array},$$

από τον οποίο προκύπτουν οι πίνακες:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{array}{c} \\ E_2 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_2 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1-\delta \end{bmatrix} \end{array}$$

και

$$\mathbf{P}_2 = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_3 \\ E_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E_1 & E_3 & E_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 1-\beta-\gamma \\ \varepsilon & \zeta & 1-\varepsilon-\zeta \end{bmatrix} \end{array}.$$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία κάθε γραμμής των παραπάνω πινάκων έχουν άθροισμα τη μονάδα και συνεπώς είναι στοχαστικοί.

Σημείωση. Στην περίπτωση που δημιουργούνται υποστοχαστικοί πίνακες, η υποστοχαστικότητα μπορεί να αρθεί προσθέτοντας μια γραμμή, και μία στήλη αντίστοιχα, που αντιπροσωπεύει το σύνολο όλων των καταστάσεων που έχουν εξαιρεθεί, θεωρούμενο το σύνολο αυτό ως μία απορροφητική κατάσταση E_0. Δημιουργείται έτσι ένας νέος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης ο οποίος είναι στοχαστικός και μπορεί να μελετηθεί ξεχωριστά. Συγκεκριμένα έχουμε μία νέα Μ.Α. με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P}$ της μορφής:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & . & . & . & . \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{0} & . & . & . \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{0} & . & . \\ . & . & . & . & \mathbf{0} & . \\ \mathbf{V}_{k1} & \mathbf{V}_{kl} & . & . & \mathbf{T}_{kk} & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Η πρώτη γραμμή αντιστοιχεί στην κλάση $C_0 = \{E_0\}$, η δεύτερη γραμμή αντιστοιχεί αντιστοιχεί στην κλειστή κλάση C_L και οι επόμενες στις ανοικτές κλάσεις C_{L_I} με $C_{L_I} \to C_L$ για $I = 1, 2, ...$, όπως προηγουμένως.

Σε κάθε περίπτωση υποβιβάσιμων Μ.Α. απλουστεύοντας την αναπαράσταση των πινάκων μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{T} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{C} & \mathrm{T} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.7}$$

με $\mathbf{Q}$ στοχαστικό πίνακα. Με C συμβολίζουμε το σύνολο των καταστάσεων όλων των κλειστών κλάσεων και με T το σύνολο των καταστάσεων όλων των ανοικτών κλάσεων. Επειδή ο πίνακας $\mathbf{V}$ δεν μπορεί να είναι μηδενικός, αφού εξ ορισμού έχουμε ότι το σύνολο T οδηγεί στο C, έπεται ότι ο πίνακας $\mathbf{T}$ είναι **υποστοχαστικός.**

Οι δυνάμεις ενός στοχαστικού πίνακα $\mathbf{P}$ με τη δομή (4.7) είναι:

$$\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_n & \mathbf{T}^n \end{bmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.8}$$

με

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}\mathbf{Q}^n + \mathbf{T}\mathbf{V}_n. \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.9}$$

και $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}$.

Με βάση την σχέση (4.8), η ασυμπτωτική συμπεριφορά των στοχαστικών πινάκων $\mathbf{P}^n$ καθορίζεται από την ασυμπτωτική συμπεριφορά των **στοχαστικών πινάκων** $\mathbf{Q}^n$, οι οποίοι αφορούν το σύνολο C των καταστάσεων όλων *των* **κλειστών** κλάσεων, καθώς και από την ασυμπτωτική συμπεριφορά των **υποστοχαστικών πινάκων** $\mathbf{T}^n$, οι οποίοι αφορούν το σύνολο T των καταστάσεων όλων των **ανοικτών** κλάσεων. Αν και η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς πινάκων της παραπάνω μορφής είναι αντικείμενο της επόμενης ενότητας σημειώνουμε εδώ ότι, όπως και στις Μ.Α.

με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων έτσι και εδώ, η **υποστοχαστικότητα** του πίνακα $\mathbf{T}$ συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{T}^n \to \mathbf{0} \quad \text{για } n \to \infty. \tag{4.10}$$

Τούτο σημαίνει ότι $p_{ij}^{(n)} \to 0$ για κάθε ζεύγος καταστάσεων s_i, s_j που ανήκουν σε ανοικτές κλάσεις. Επίσης η (4.10), σε συνδυασμό με την (4.8), συνεπάγεται ότι η κατανομή καταστάσεων $\mathbf{p}^{(n)}$ έχει όλες τις συνιστώσες που αντιστοιχούν σε καταστάσεις ανοικτών κλάσεων να συγκλίνουν στο μηδέν. Δηλαδή $p_j^{(n)} \to 0$ όταν $s_i \in T$. Δηλαδή το σύνολο Τ έχει σταδιακά περιοριζόμενη πιθανότητα επανεμφάνισης και το Μαρκοβιανό σύστημα "απορροφάται" τελικά μέσα στο C.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι με βάση την έννοια της (αμφίδρομης) **επικοινωνίας** μεταξύ καταστάσεων έχουμε δύο βασικές κατηγορίες Μ.Α. Η πρώτη είναι η κατηγορία των **μη υποβιβάσιμων** (*irreducible*) Μ.Α. και η δεύτερη είναι η κατηγορία των **υποβιβάσιμων** (*reducible*) Μ.Α. Είδαμε επίσης ότι η κατηγορία των **υποβιβάσιμων** Μ.Α. τελικά αναγάγεται σε επί μέρους Μ.Α. η κάθε μία εκ των οποίων είτε είναι **μη υποβιβάσιμη** και συνεπώς μπορεί να μελετηθεί ξεχωριστά, είτε αποτελείται από μια **κλειστή**, και συνεπώς **μη υποβιβάσιμη**, κλάση C και ένα σύνολο Τ καταστάσεων **ανοικτών** κλάσεων.

Ακολουθούν επί μέρους ταξινομήσεις των καταστάσεων.

3.4.1. Επαναληπτικές, Παροδικές και Περιοδικές Καταστάσεις

Έστω T_{ij} ο χρόνος που παρέρχεται (αριθμός βημάτων) για να βρεθεί για πρώτη φορά ένα Μ.Σ. στην κατάσταση j ξεκινώντας από την κατάσταση i. Έστω επίσης $f_{ij}^{(n)}$ η πιθανότητα $P[T_{ij} = n|X_0 = i]$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Έχουμε δηλαδή

$$T_{ij} = \mathit{inf}\,\{n : X_n = j \text{ με } X_0 = i\} \quad (i, j = 1, 2, \ldots) \tag{4.11}$$

και

$$f_{ij}^{(n)} = P[T_{ij} = n | X_0 = i] \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4.12.α}$$

ή ισοδύναμα

$$f_{ij}^{(n)} = P[X_n = j,\, X_\nu \neq j \ (\nu = 1, 2, \ldots, n-1) \,|\, X_0 = i] \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.12.β}$$

Η πιθανότητα να διέλθει η Μ.Α. κάποια στιγμή από την κατάσταση j έχοντας ξεκινήσει από την κατάσταση i δίνεται συνεπώς από την

$$f_{ij} = P[T_{ij} < \infty \,|\, X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \quad (i, j = 1, 2, \ldots). \tag{4.13}$$

Για $i = j$ η (4.13) δίνει την πιθανότητα να επανέλθει η Μ.Α. κάποια στιγμή στην κατάσταση i. Έχουμε δηλαδή

$$f_{ii} = P[T_{ii} < \infty \mid X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{4.14}$$

Η ποσότητα $f_{ij}^{(n)}$ ονομάζεται ***πιθανότητα 1ης μετάβασης*** (διέλευσης) της Μ.Α. στην (από την) κατάσταση j έχοντας ξεκινήσει από την κατάσταση i. Ανάλογα η *"τυχαία μεταβλητή"* T_{ij} ονομάζεται ***χρόνος 1ης μετάβασης*** της Μ.Α. $\{X_n\}$ στην κατάσταση j έχοντας ξεκινήσει από την κατάσταση i. Όταν έχουμε $i = j$ τότε μιλάμε για την πιθανότητα, αντίστοιχα τον χρόνο, της ***1ης επανόδου*** στην κατάσταση i. Πρέπει να τονίσουμε ότι επειδή μιλάμε για **πρώτη μετάβαση** σε μια κατάσταση και **πρώτη επάνοδο** σε μια κατάσταση έχουμε εξ ορισμού $f_{ij}^{(0)} = 0$ για όλα τα i, j.

Σημείωση: Η ποσότητα T_{ij} αναφέρεται παραπάνω ως *"τυχαία μεταβλητή"* καθ΄ υπέρβαση της γνωστής έννοιας του όρου. Τούτο διότι δεν γνωρίζουμε αν πράγματι $\sum_n f_{ij}^{(n)} = 1$ (i, j = 1, 2, …). Το αντίθετο μάλιστα, όπως θα δούμε σε διάφορα παραδείγματα παρακάτω, πολύ συχνά οι πιθανότητες $f_{ij}^{(n)}$ έχουν άθροισμα $\sum_n f_{ij}^{(n)} < 1$. Το πρόβλημα αυτό παύει να είναι ουσιαστικό επιτρέποντας στην "τυχαία μεταβλητή" T_{ij} να λαμβάνει την τιμή ∞ με, όχι κατ΄ ανάγκη μηδενική, πιθανότητα $1 - f_{ij}$.

Ορισμός 1. Η απεικόνιση $T: \Omega \longrightarrow \{0, 1, \ldots\} \cup \{\infty\}$ ονομάζεται ***χρόνος διακοπής*** (*stopping time*) όταν για κάθε n το ενδεχόμενο $\{T = n\}$ εξαρτάται αποκλειστικά από τις τ.μ. $\{X_\nu : \nu = 0, 1, \ldots, n\}$.

Τούτο σημαίνει ότι για κάθε $n \in \{0, 1, \quad\}$ το ενδεχόμενο $\{T \le n\}$ εξαρτάται μόνο από όλο το παρελθόν μέχρι και το παρόν και όχι από το μέλλον. Πιο συγκεκριμένα, το ενδεχόμενο $\{T \le n\}$ ανήκει στο σ-πεδίο που παράγεται από τις τ.μ. $\{X_\nu : \nu = 0, 1, \ldots, n\}$, δηλαδή από την εξέλιξη της $\{X_\nu\}$ μέχρι τη χρονική στιγμή n. Με βάση τον παραπάνω ορισμό οι χρόνοι 1ης μετάβασης / επανόδου T_{ij}, όπως και οι χρόνοι ν-οστής διέλευσης από την κατάσταση j, $T_{ij}^{(\nu)}$ έστω, αποτελούν χρόνους διακοπής.. Επίσης το $sup\{\, T_{ij}^{(\nu)} : \nu \in 1, 2, \ldots\}$ αποτελεί χρόνο διακοπής. Σε αντίθεση, ο χρόνος ***τελευταίας*** μετάβασης / επανόδου $T_{ij}^{(\tau)} = sup\{n \ge 0 : X_n = j\}$ δεν αποτελεί χρόνο διακοπής αφού το ενδεχόμενο $\{T_{ij}^{(\tau)} = n\}$ δεν εξαρτάται μόνο από τις τ.μ. $\{X_\nu : \nu = 0, 1, \ldots, n\}$ αλλά και από τις μελλοντικές $\{X_\nu : \nu > n\}$.

Είναι προφανές ότι το ενδεχόμενο $\{T_{ij} < \infty\}$ είναι ταυτόσημο με το ενδεχόμενο "να διέλθει κάποια στιγμή η Μ.Α. από την κατάσταση j έχοντας ξεκινήσει από την κατάσταση i", να διέλθει δηλαδή ***τελικά,*** αλλά όχι κατ΄ ανάγκη για τελευταία φορά, από την j. Σύμφωνα με την (4.13) έχουμε $f_{ij} = P[T_{ij} < \infty \,|\, X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει το παρακάτω.

Θεώρημα 1. Μια Μ.Α. η οποία ξεκινά από την κατάσταση i έχει πιθανότητα να διέλθει από την κατάσταση j τουλάχιστον k φορές ίση με

$$P[\text{διέλευσης από την } s_j \text{ τουλάχ. k φορές} \mid X_0 = i] = f_{ij}\{f_{jj}\}^{k-1}. \tag{4.15}$$

Απόδειξη. *α΄τρόπος:* Για να διέλθει από την κατάσταση j τουλάχιστον k φορές πρέπει να διέλθει από την κατάσταση αυτή κάποια στιγμή για πρώτη φορά και εν συνεχεία να την επανεπισκεφθεί τουλάχιστον k–1 φορές. Το πρώτο έχει πιθανότητα f_{ij}. Λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας κάθε επόμενη επίσκεψη στην κατάσταση j έχει πιθανότητα f_{jj}. Συνεπώς για τις k–1 τουλάχιστον νέες επισκέψεις στην κατάσταση j η πιθανότητα είναι $\{f_{jj}\}^{k-1}$. Το γινόμενο $f_{ij}\{f_{jj}\}^{k-1}$ δίνει τη ζητούμενη πιθανότητα.

β΄τρόπος: Έστω K_{ij} ο αριθμός διελεύσεων από την κατάσταση j με εκκίνηση από την κατάσταση i. Εφαρμόζοντας διαδοχικά την Μαρκοβιανή ιδιότητα έχουμε:

$$P[K_{ij} \geq k] = f_{ij} \times P[K_{jj} \geq k-1] = f_{ij}f_{jj} \times [K_{jj} \geq k-2] = \ldots = f_{ij}\{f_{jj}\}^{k-1}.$$

■

Από το θεώρημα αυτό προκύπτουν άμεσα τα παρακάτω συμπεράσματα:

(α) Εάν $f_{ii} = 1$ τότε η κατάσταση i επανεμφανίζεται άπειρες φορές με πιθανότητα τη μονάδα. Δηλαδή η κατάσταση i έχει πεπερασμένο πλήθος επανεμφανίσεων με πιθανότητα μηδέν (αφού για κάθε k έχουμε $\{f_{ii}\}^k = 1$).

(β) Εάν $f_{ii} < 1$ τότε η κατάσταση i επανεμφανίζεται άπειρες φορές με πιθανότητα μηδέν. Δηλαδή η κατάσταση i έχει πεπερασμένο πλήθος επανεμφανίσεων με πιθανότητα τη μονάδα (αφού $\{f_{ii}\}^k \to 0$).

(γ) Με εκκίνηση από την κατάσταση i οι διελεύσεις από την κατάσταση j γίνονται άπειρες φορές με πιθανότητα f_{ij} όταν $f_{jj} = 1$ και πιθανότητα 0 όταν $f_{jj} < 1$.

Ορισμός 2. Η κατάσταση i μιας Μαρκοβιανής Αλυσίδας λέγεται ***επαναληπτική*** ή ***έμμονη*** (*recurrent, persistent*) όταν $f_{ii} = 1$ και ***παροδική*** (*transient*) όταν $f_{ii} < 1$.

Θεώρημα 2. Ισχύει η παρακάτω σχέση

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} f_{ij}^{(\nu)} p_{jj}^{(n-\nu)} \qquad n = 1, 2, ... \quad (i, j = 1, 2, \ldots). \tag{4.16}$$

Απόδειξη. Με αναφορά στο χρόνο 1ης διέλευσης από την κατάσταση j το ενδεχόμενο $\{X_n = j\}$ αναλύεται σε ένωση ασυμβιβάστων ενδεχομένων. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\{X_0 = i\}\{X_n = j\} = \bigcup_{\nu=1}^{n} \{X_0 = i\}\{X_n = j\}\{T_{ij} = \nu\} \quad (i, j = 1, 2, \ldots).$$

Συνεπώς δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο της 1ης διέλευσης έχουμε:

$$P[X_n = j \mid X_0 = i] = \sum_{\nu=1}^{n} P[\{X_n = j\}\{T_{ij} = \nu\} \mid X_0 = i],$$

από την οποία προκύπτει:

$$P[X_n = j \mid X_0 = i] = \sum_{\nu=1}^{n} P[T_{ij} = \nu \mid X_0 = i] P[X_n = j \mid \{X_0 = i\}\{T_{ij} = \nu\}]. \tag{4.17}$$

Για τον πρώτο παράγοντα του γινομένου μέσα στο παραπάνω άθροισμα εξ ορισμού έχουμε:

$$P[T_{ij} = \nu \mid X_0 = i] = f_{ij}^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 2, ...). \tag{4.18}$$

Για το δεύτερο παράγοντα λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας διαπιστώνουμε τα παρακάτω:

Για $\nu = 1$ έχουμε

$$P[X_n = j \mid \{X_0 = i\}\{T_{ij} = 1\}] = P[X_n = j \mid X_1 = j] = p_{jj}^{(n-1)}. \tag{4.19}$$

Για $\nu > 1$

$$P[X_n = j \mid \{X_0 = i\}\{T_{ij} = \nu\}] = P[X_n = j \mid \{X_0 = i\}\{X_k \neq j, k = 1, ..., \nu - 1\}\{X_\nu = j\}]$$

και συνεπώς

$$P[X_n = j \mid \{X_0 = i\}\{T_{ij} = \nu\}] = P[X_n = j \mid X_\nu = j] = p_{jj}^{(n-\nu)}. \tag{4.20}$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (4.18) - (4.20) στην (4.17) προκύπτει η (4.16). ■

Είναι φανερό ότι μέσω της (4.16) η ακολουθία $\{f_{ij}^{(n)} : n \geq 1\}$ δίνει την ακολουθία $\{p_{ij}^{(n)} : n \geq 0\}$ και αντίστροφα, η ακολουθία $\{p_{ij}^{(n)} : n \geq 0\}$ δίνει την $\{f_{ij}^{(n)} : n \geq 1\}$. Η αντίστροφη σχέση είναι η παρακάτω:

$$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{\nu=1}^{n-1} f_{ij}^{(\nu)} p_{jj}^{(n-\nu)} \qquad n = 1, 2, \ldots \quad (i, j = 1, 2, \ldots). \tag{4.21}$$

Υπενθυμίζεται ότι $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$.

Σημείωση. Το δεξιό μέλος της (4.16) εκφράζει την συνέλιξη μεταξύ των ακολουθιών $\{f_{ij}^{(n)} : n = 1, 2, \ldots\}$ και $\{p_{jj}^{(n)} : n = 0, 1, 2, \ldots\}$, είναι δηλαδή μια ακολουθία $\{q_n\} = \{f_n\} * \{p_n\}$. Όμως η γεννήτρια συνάρτηση της συνέλιξης δύο ακολουθιών ταυτίζεται με το γινόμενο των αντιστοίχων γεννητριών (η απόδειξη είναι σχετικά εύκολη). Κατά συνέπεια, αν με Q_{ij}, F_{ij} και P_{jj} συμβολίσουμε τις γεννήτριες συναρτήσεις των εν λόγω ακολουθιών, θα έχουμε τη σχέση $Q_{ij}(s) = F_{ij}(s)P_{jj}(s)$. Επειδή τώρα στη σχέση (4.16) δεν υπάρχει ο όρος $p_{ij}^{(0)}$ $(= \delta_{ij})$, αφού η σχέση ισχύει για $n > 0$, θα έχουμε $Q_{ij}(s) = P_{ij}(s) - \delta_{ij}$. Οπότε προκύπτει η παρακάτω σχέση, γνωστή ως ***ανανεωτική εξίσωση***:

$$P_{ij}(s) - \delta_{ij} = F_{ij}(s)P_{jj}(s) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots). \tag{4.22}$$

Μια διεξοδική απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος δίνεται στη επόμενη Ενότητα.

Σχετικά με τον μέσο χρόνο $1^{ης}$ επανόδου στην κατάσταση i, αντίστοιχα τον μέσο χρόνο $1^{ης}$ διέλευσης από την κατάσταση j έχουμε το παρακάτω:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} & \text{όταν } f_{ij} = 1 \\ \infty & \text{όταν } f_{ij} < 1 \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots). \tag{4.23}$$

Μια παροδική κατάσταση i έχει μέσο χρόνο επανόδου $\mu_{ii} = \infty$, αφού εξ ορισμού υπάρχει πιθανότητα $1 - f_{ii} > 0$ με την οποία ο χρόνος επανόδου $T_{ii} = \infty$.

Επίσης, μια επαναληπτική κατάσταση i δεν είναι απαραίτητο να έχει πεπερασμένο μέσο χρόνο επανόδου. Ομοίως, δύο επαναληπτικές και επικοινωνούσες μεταξύ τους καταστάσεις i και j δεν είναι απαραίτητο να έχουν πεπερασμένους μέσους χρόνους μετάβασης από τη μία στην άλλη.

Ορισμός 3. Μια επαναληπτική κατάσταση i μιας Μαρκοβιανής Αλυσίδας λέγεται ***γνήσια επαναληπτική*** *(positive recurrent)* όταν $\mu_{ii} < \infty$, και ***μη γνήσια επαναληπτική*** *(null recurrent, null)* όταν $\mu_{ii} = \infty$.

Ορισμός 4. Κατάσταση i μιας Μαρκοβιανής Αλυσίδας λέγεται ***περιοδική*** (*periodic*) όταν υπάρχει ακέραιος $d > 1$ έτσι ώστε

$$p_{ii}^{(n)} = 0 \quad \text{όταν } n \neq kd \text{ με } k = 1, 2, \dots \tag{4.24}$$

Ο μεγαλύτερος ακέραιος, d_i έστω, με την παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται ***περίοδος*** της κατάστασης i.

Ο παραπάνω ορισμός σημαίνει ότι η Μ.Α. μπορεί να επανέρχεται στην κατάσταση i μόνο σε χρόνους $n = kd_i$.

Διαφορετικά διατυπωμένος ο παραπάνω ορισμός έχει ως εξής: Η περίοδος d_i μιας κατάστασης i είναι ο **μ.κ.δ.**$\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$. Δηλαδή, ως περίοδος μιας κατάστασης i ορίζεται ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των χρόνων κατά τους οποίους η επιστροφή στη κατάσταση αυτή είναι επιτρεπτή. Η κατάσταση i λέγεται ***περιοδική*** εφόσον $d_i > 1$.

Παράδειγμα 1. Στη Μ.Α. με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

παρατηρούμε ότι κάθε κατάσταση εδώ είναι περιοδική με περίοδο $d = 2$. Πράγματι, αν η Μ.Α. ξεκινήσει από την κατάσταση E_1 ή την E_3, οι καταστάσεις αυτές θα επανεμφανίζονται μόνο σε άρτιο αριθμό βημάτων, ενώ οι καταστάσεις E_2 και E_4 θα επανεμφανίζονται μόνο σε περιττό αριθμό βημάτων. Ομοίως, αν η Μ.Α. ξεκινήσει από την κατάσταση E_2 ή την E_4, οι καταστάσεις αυτές θα επανεμφανίζονται μόνο σε άρτιο αριθμό βημάτων, ενώ οι καταστάσεις E_1 και E_3 θα επανεμφανίζονται μόνο σε περιττό αριθμό βημάτων. Η συμπεριφορά αυτή φαίνεται πιο καθαρά προσδιορίζοντας τον πίνακα $\mathbf{P}^2$.

$$\mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.61 & 0 & 0.39 & 0 \\ 0 & 0.42 & 0 & 0.58 \\ 0.55 & 0 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0.36 & 0 & 0.64 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Κάθε άρτια δύναμη του στοχαστικού πίνακα **P** θα έχει μηδέν στις ίδιες θέσεις που έχει μηδέν ο πίνακας $\mathbf{P}^2$. Κάθε περιττή δύναμη του **P** θα έχει μηδέν στις ίδιες θέσεις που έχει ο **P**.

Όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω, αν μια **μη υποβιβάσιμη** Μ.Α. έχει μια κατάσταση περιοδική τότε έχει όλες τις καταστάσεις της περιοδικές με την ίδια περίοδο. Επίσης, όταν η περίοδος είναι d (>1) ο πίνακας $\mathbf{P}^n$, με $n = k \; mod \; d$, έχει μηδέν στις ίδιες θέσεις που έχει ο πίνακας $\mathbf{P}^k$ $(k = 0, 1, \ldots, d\text{-}1)$.

Παράδειγμα 2. Ο απλός τυχαίος περίπατος είναι περιοδικός αφού σε άρτιο αριθμό βημάτων δεν μπορεί να βρεθεί σε περιττή θέση όταν ξεκινά από άρτια, ούτε επίσης μπορεί να βρεθεί σε άρτια θέση όταν ξεκινά από περιττή.

Ορισμός 5. Μια απεριοδική και γνήσια επαναληπτική κατάσταση i μιας Μαρκοβιανής Αλυσίδας λέγεται ***εργοδική*** (*ergodic).*

Δηλαδή μια κατάσταση i είναι εργοδική εάν και μόνο εάν ισχύουν τα παρακάτω:

(i) $d_i = 1$,

(ii) $f_{ii} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$,

(iii) $\mu_{ii} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} < \infty$.

Ορισμός 6. Μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα λέγεται ***εργοδική*** όταν όλες οι καταστάσεις της είναι εργοδικές.

Είναι χρήσιμος ο παρακάτω ορισμός που αφορά τις τροχιές μιας Μ.Α.

Ορισμός 7. Λέμε ότι η Μ.Α. διαγράφει ***μονότονη τροχιά*** όταν σε κάθε βήμα επισκέπτεται μια κατάσταση διαφορετική των προηγουμένων.

Σημειώνεται ότι το σύνολο των μονότονων τροχιών που μπορεί να διαγράψει μια Μ.Α. σε πεπερασμένο χρόνο n είναι αριθμήσιμο αφού το σύνολο $\mathfrak{S}^n$ είναι αριθμήσιμο.

Θεώρημα 3. Εάν $i \longrightarrow j$ $(i \neq j)$ τότε υπάρχει μονότονη τροχιά από την i στη j με θετική πιθανότητα.

Απόδειξη. Τούτο διότι σε διαφορετική περίπτωση η Μ.Α. θα επανέρχεται επ΄ άπειρον σε καταστάσεις που έχει επισκεφθεί στο παρελθόν χωρίς ποτέ να διέρχεται από την κατάσταση j. ■

Είναι προφανές ότι μια Μ.Α. με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων N, δεν είναι δυνατόν να διαγράψει μονότονη τροχιά σε χρόνο $n \geq N$. Κατά συνέπεια αν μια κατάσταση i οδηγεί στην κατάσταση j η μετάβαση γίνεται με θετική πιθανότητα p σε χρόνο $T \leq N$. (Εδώ συμπεριλαμβάνεται και η περίπτωση $i = j$).

3.5. ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Για τις πιθανότητες πρώτης μετάβασης, αντίστοιχα πρώτης επανόδου, $f_{ij}^{(n)} = P[T_{ij} = n \mid X_o = i]$ $(n = 1,2, \ldots)$ ορίζουμε τις γεννήτριες πιθανοτήτων

$$F_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n f_{ij}^{(n)}, \quad s \in \mathcal{S}_F \quad (i, j = 1, 2, \ldots), \tag{5.1}$$

όπου $\mathcal{S}_F$ είναι η κοινή περιοχή σύγκλισης όλων των $F_{ij}(s)$. Για κάθε ζεύγος καταστάσεων (i, j) οι πιθανότητες $f_{ij}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ αποτελούν κατανομή ως προς n, όχι κατ΄ ανάγκη *πλήρη*, και συνεπώς $\sum_n f_{ij}^{(n)} \leq 1$. Ως εκ τούτου η σύγκλιση των ως άνω δυναμοσειρών ισχύει, τουλάχιστον, για $|s| \leq 1$. Άρα $\mathcal{S}_F \supseteq [-1, 1]$.

Ανάλογα για την ακολουθία πιθανοτήτων $p_{ij}^{(n)} = P[X_n = j \mid X_o = i]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ορίζουμε τις γεννήτριες συναρτήσεις

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_{ij}^{(n)}, \quad s \in \mathcal{S}_P \quad (i, j = 1, 2, \ldots), \tag{5.2}$$

όπου $\mathcal{S}_P$ είναι η κοινή περιοχή σύγκλισης όλων των $P_{ij}(s)$.

Σημείωση. Εδώ οι πιθανότητες $p_{ij}^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ δεν αποτελούν κατανομή ως προς n και συνεπώς το άθροισμά τους δυνατόν να υπερβαίνει τη μονάδα ή και να αποκλίνει. Εν τούτοις, με βάση το Θεώρημα Cauchy-Hadamard, η ακτίνα σύγκλισης αυτών είναι $R \geq 1$. Συνεπώς, για τη κοινή περιοχή σύγκλισης των ως άνω δυναμοσειρών έχουμε γενικά $\mathcal{S}_P \supseteq (-1, 1)$.

Έστω τώρα $T_{ij}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, ...)$ ο χρόνος της ν-οστής διέλευσης από την κατάσταση j έχοντας ξεκινήσει από την κατάσταση i (για $i = j$ πρόκειται για τον χρόνο της ν-οστής επανόδου στην κατάσταση i). Προφανώς $T_{ij} = T_{ij}^{(1)}$.

Θεώρημα 1. Οι πιθανότητες μετάβασης n-τάξης ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} P[T_{ij}^{(\nu)} = n \mid X_0 = i] \quad \text{για } n = 1, 2, \ldots \quad (i, j = 1, 2, \ldots). \tag{5.3}$$

Απόδειξη. Το ενδεχόμενο $\{X_0 = i\}\{X_n = j\}$, δηλαδή να ξεκινήσει από την κατάσταση i και να βρεθεί στην κατάσταση j σε χρόνο n, αναλύεται σε ένωση ασυμβιβάστων ενδεχομένων ως ακολούθως:

$$\{X_0 = i\}\{X_n = j\} = \{X_0 = i\}\left\{\bigcup_{\nu=1}^{n}\{T_{ij}^{(\nu)} = n\}\right\} . \tag{5.4}$$

Δηλαδή, ξεκινώντας η Μ.Α. από την κατάσταση i, βρίσκεται στην κατάσταση j σε χρόνο n με ν συνολικά διελεύσεις από την κατάσταση j (ν = 1, 2, ...,n).

Οπότε έχουμε

$$P[\{X_0 = i\}\{X_n = j\}] = \sum_{\nu=1}^{n} P[\{T_{ij}^{(\nu)} = n\}\{X_0 = i\}],$$

και συνεπώς

$$P[X_n = j | X_0 = i] = \sum_{\nu=1}^{n} P[T_{ij}^{(\nu)} = n | X_0 = i].$$

■

Για τους χρόνους $T_{ij}^{(\nu)}$ της ν-οστής διέλευσης της Μ.Α. από την κατάσταση j, έχοντας ξεκινήσει από την κατάσταση i, ισχύει η παρακάτω *ανανεωτική* σχέση.

$$\begin{aligned} &T_{ij}^{(\nu)} = T_{ij}^{(1)} + T_{jj}^{(\nu-1)} \quad (\nu = 2, 3, ...) \\ \text{με} \qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i, j = 1, 2, \dots) \\ &T_{ij}^{(1)} = T_{ij}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Επιπρόσθετα οι τ.μ T_{ij} και $T_{jj}^{(\nu-1)}$ (ν = 2, 3, ...) είναι ανεξάρτητες λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας. Για τις γεννήτριες συναρτήσεις

$$F_{ij}(s) = \sum_n s^n f_{ij}^{(n)} \quad \text{και} \quad P_{ij}(s) = \sum_n s^n p_{ij}^{(n)}$$

των

$$f_{ij}^{(n)} = P[T_{ij} = n | X_o = i] \quad (n \geq 1) \quad \text{και} \quad p_{ij}^{(n)} = P[X_n = j | X_o = i] \quad (n \geq 0)$$

αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι ισχύει το παρακάτω.

Θεώρημα 2. (Ανανεωτική Εξίσωση). Οι γεννήτριες $P_{ij}(s)$ και $F_{ij}(s)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$P_{ij}(s) = \delta_{ij} + F_{ij}(s)P_{jj}(s), \quad s \in \mathcal{S} \supseteq (-1, 1) \quad (i, j = 1, 2, \dots). \tag{5.6}$$

Απόδειξη. Έστω $F_{ij\nu}(s)$ η γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων

$$f_{ijv}^{(n)} = P[T_{ij}^{(v)} = n \mid X_0 = i], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (i, j, v = 1, 2, \dots) \tag{5.7}$$

με

$$f_{ijv}^{(n)} = 0 \quad \text{για} \quad n < v = 1, 2, \dots \quad (i, j = 1, 2, \dots) \tag{5.8}$$

και

$$f_{ij0}^{(0)} = p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{όταν } i = j \\ 0 & \text{όταν } i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \dots). \tag{5.9}$$

Έχουμε δηλαδή

$$F_{ijv}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ijv}^{(n)} s^n \qquad (i, j, v = 1, 2, ...), \tag{5.10}$$

Από την (5.5) για $v = 1$ έχουμε $T_{ij}^{(1)} = T_{ij}$ και συνεπώς

$$F_{ij1}(s) = F_{ij}(s) \quad (i, j = 1, 2, ...). \tag{5.11}$$

Από την (5.5) επίσης για $v \geq 2$ έχουμε

$$T_{ij}^{(v)} = T_{ij} + T_{jj}^{(v-1)} \qquad (i, j = 1, 2, ...)$$

Επειδή οι τ.μ. T_{ij} και $T_{jj}^{(v-1)}$ είναι ανεξάρτητες, η γεννήτρια πιθανοτήτων του αθροίσματος $T_{ij} + T_{jj}^{(v-1)}$ είναι το γινόμενο των γεννητριών τους. Συνεπώς έχουμε την παρακάτω αναδρομική εξίσωση:

$$F_{ijv}(s) = F_{ij}(s)\, F_{jjv-1}(s) \quad \text{για} \quad v \geq 2 \quad (i, j = 1, 2, ...). \tag{5.12}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.11) για $v = 1$, και (5.12) για $v \geq 2$, γράφουμε

$$F_{ijv}(s) = F_{ij}(s)\, F_{jjv-1}(s), \quad (i, j, v = 1, 2, ...) \tag{5.13}$$

με

$$F_{ij0}(s) = 1, \quad (i, j, v = 1, 2, ...) \tag{5.14}$$

Κάνοντας χρήση της (5.8) το προηγούμενο Θεώρημα δίνει

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} P[T_{ij}^{(\nu)} = n \mid X_0 = s_i] \quad \text{για } n = 1, 2, \ldots \quad (i, j = 1, 2, \ldots).$$

Πολλαπλασιάζοντας επί s^n τα μέλη της παραπάνω εξίσωσης και αθροίζοντας για $n = 1, 2, \ldots$ λαμβάνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} P[T_{ij}^{(\nu)} = n \mid X_0 = s_i] s^n$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P[T_{ij}^{(\nu)} = n \mid X_0 = s_i] = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{ij\nu}(s).$$

Όμως $P_{ij}(s) = p_{ij}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ και επειδή $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$ θα έχουμε

$$P_{ij}(s) - \delta_{ij} = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{ij\nu}(s). \tag{5.15}$$

Εισάγοντας τώρα την (5.13) στην παραπάνω σχέση λαμβάνουμε

$$P_{ij}(s) - \delta_{ij} = F_{ij}(s) \sum_{\nu=0}^{\infty} F_{jj\nu}(s).$$

Όμως από την (5.14) έχουμε $G_{ij0}(s) = 1$. Συνεπώς

$$P_{ij}(s) - \delta_{ij} = F_{ij}(s)\{1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{jj\nu}(s)\} \ .$$

Σύμφωνα με την (5.15), η σειρά στα δεξιά της παραπάνω σχέσης είναι $P_{jj}(s) – \delta_{jj} = P_{jj}(s) – 1$ και συνεπώς

$$P_{ij}(s) = \delta_{ij} + F_{ij}(s) P_{jj}(s), \quad s \in \mathcal{S} \supseteq (-1, 1) \quad (i, j = 1, 2, \ldots). \tag{5.16}$$

■

Σημείωση. Σύμφωνα με το θεώρημα του Abel για δυναμοσειρές $G(s) = \sum_n \alpha_n s^n$ με $\alpha_n \geq 0$, έχουμε ότι για $s \uparrow 1$, $\lim G(s) = \sum_n \alpha_n$, είτε το όριο είναι πεπερασμένο είτε όχι.

Από την εξίσωση (5.16) για $i = j$ έχουμε:

$$P_{ii}(s) = 1 + F_{ii}(s) P_{ii}(s), \quad s \in (-1, 1) \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{5.17}$$

ή ισοδύναμα τις σχέσεις

$$P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}, \quad s \in (-1, 1) \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{5.18.α}$$

$$F_{ii}(s) = \frac{P_{ii}(s) - 1}{P_{ii}(s)}, \quad s \in (-1, 1) \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{5.18.β}$$

ενώ για $i \neq j$

$$P_{ij}(s) = F_{ij}(s)P_{jj}(s), \quad s \in (-1, 1) \quad (i \neq j = 1, 2, \ldots). \tag{5.19}$$

Από τις σχέσεις (5.16) και (5.19) εύκολα αποδεικνύονται τα παρακάτω:

Θεώρημα 3. Μια κατάσταση i είναι παροδική εάν και μόνο εάν $P_{ii}(1) < \infty$.

Απόδειξη. Εξ ορισμού έχουμε ότι μια κατάσταση i είναι παροδική εάν και μόνο εάν $f_{ii} = \sum_n f_{ii}^{(n)} < 1$, δηλαδή εάν και μόνο εάν $F_{ii}(1) < 1$. Παίρνοντας τα όρια των μελών της (5.18.α) για $s \uparrow 1$ το τελευταίο είναι ισοδύναμο με $P_{ii}(1) < \infty$. ■

Συνέπεια του παραπάνω αποτελέσματος αποτελεί το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 4. Εάν η κατάσταση j είναι παροδική τότε $P_{ij}(1) < \infty$ για κάθε κατάσταση i.

Απόδειξη. Τούτο προκύπτει παίρνοντας τα όρια των μελών της (5.17) για $s \uparrow 1$ και κάνοντας χρήση του προηγούμενου θεωρήματος. ■

Διαπιστώνουμε επίσης τα παρακάτω:

Παραγωγίζοντας ως προς s τα μέλη της (5.16) λαμβάνουμε

$$F'_{ij}(s) = \frac{P'_{ij}(s) - F_{ij}(s)P'_{jj}(s)}{P_{jj}(s)} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots). \tag{5.20.α}$$

Ειδικά για $i = j$ έχουμε λόγω της (5.19)

$$F'_{ii}(s) = \frac{P'_{ii}(s)}{\{P_{ii}(s)\}^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{5.20.β}$$

Παίρνοντας τώρα τα όρια των μελών των παραπάνω σχέσεων για $s \uparrow 1$ έχουμε:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \mathit{lim} \dfrac{P'_{ij}(s) - F_{ij}(s)P'_{jj}(s)}{P_{jj}(s)}, & \text{για } i \neq j = 1, 2, \ldots \\ \mathit{lim} \dfrac{P'_{ii}(s)}{\{P_{ii}(s)\}^2}, & \text{για } i = j = 1, 2, \ldots \end{cases} . \tag{5.21}$$

Ορισμός 1. Μια ιδιότητα ονομάζεται ***ιδιότητα κλάσης*** όταν ισχύει για όλες τις καταστάσεις μιας κλάσης επικοινωνουσών καταστάσεων.

Θεώρημα 5. Οι παρακάτω ιδιότητες είναι ιδιότητες κλάσεως:

(α) *Επαναληπτικότητα,*
(β) *Γνήσια Επαναληπτικότητα,*
(γ) *Περιοδικότητα.*

Απόδειξη.

(α) *Επαναληπτικότητα.* Αφού οι καταστάσεις i και j είναι (αμφίδρομα) επικοινωνούσες, υπάρχουν ακέραιοι m και n τέτοιοι ώστε

$$p_{ij}^{(m)} > 0 \quad \text{και} \quad p_{ji}^{(n)} > 0 .$$

Επειδή $\{X_{m+k+n} = i\} \supset \{X_m = j\}\{X_{m+k} = j\}\{X_{m+k+n} = i\}$ θα έχουμε για τις αντίστοιχες δεσμευμένες πιθανότητες με δεδομένο ότι $X_0 = i$,

$$P[X_{m+k+n} = i \mid X_0 = i] \;\geq\; P[\{X_m = j\}\{X_{m+k} = j\}\{X_{m+k+n} = i\} \mid X_0 = i]$$

Εφαρμόζοντας την Μαρκοβιανή ιδιότητα παίρνουμε

$$p_{ii}^{(m+k+n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(n)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

και συνεπώς

$$p_{ii}^{(m+k+n)} \geq A p_{jj}^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.22}$$

με $A = p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(n)} > 0$.

Αθροίζοντας ως προς k προκύπτει:

$$\sum_k p_{ii}^{(m+k+n)} \geq A \sum_k p_{jj}^{(k)} \qquad \text{με} \qquad A > 0 .$$

Από την παραπάνω ανισότητα συμπεραίνουμε ότι όταν $\sum_k p_{ii}^{(k)} < \infty$ τότε και $\sum_k p_{jj}^{(k)} < \infty$. Όταν δηλαδή η κατάσταση i είναι παροδική τότε και η κατάσταση j είναι παροδική. Εναλλάσσοντας μεταξύ τους τα i, j συμπεραίνουμε ότι όταν η κατάσταση i είναι επαναληπτική τότε και η κατάσταση j είναι επαναληπτική.

(β) Γνήσια Επαναληπτικότητα. Προκύπτει από την (5.22) αφού πρώτα αποδειχθεί ότι μια επαναληπτική κατάσταση i είναι μηδενικά επαναληπτική εάν και μόνο εάν $p_{ii}^{(n)} \to 0$ για $n \longrightarrow \infty$. Το αποτέλεσμα αυτό εμπεριέχεται στο Θεώρημα 6.4 της επόμενης Ενότητας και χάριν συντομίας αποφεύγουμε να δώσουμε ειδική απόδειξη εδώ. Έτσι λαμβάνοντας τα όρια των μελών της (5.22) για $k \longrightarrow \infty$ προκύπτει ότι εάν $p_{ii}^{(k)} \to 0$ τότε και $p_{jj}^{(k)} \to 0$, δηλαδή όταν η επαναληπτική κατάσταση i είναι μηδενικά επαναληπτική τότε και η επαναληπτική κατάσταση j είναι μηδενικά επαναληπτική. Εναλλάσσοντας μεταξύ τους τα i, j συμπεραίνουμε ότι όταν η επαναληπτική κατάσταση i είναι γνήσια επαναληπτική τότε και η επαναληπτική κατάσταση j είναι γνήσια επαναληπτική.

(γ) Περιοδικότητα. Έστω d_i και d_j οι περίοδοι των καταστάσεων i και j αντίστοιχα. Από τη σχέση (5.22) με $k = 0$ παίρνουμε

$$p_{ii}^{(m+n)} \geq A\, p_{jj}^{(0)} = A > 0. \tag{5.23}$$

Έχουμε συνεπώς $p_{ii}^{(m+n)} > 0$. Από τον ορισμό της περιοδικότητας τούτο σημαίνει ότι το άθροισμα m+n είναι πολλαπλάσιο της περιόδου d_i της κατάστασης i. Γράφουμε $d_i \mid m+n$. Αλλά από την (5.22) πάλι προκύπτει ότι εάν για κάποιο k έχουμε $p_{jj}^{(k)} > 0$ τότε και $p_{ii}^{(m+k+n)} > 0$ και συνεπώς $d_i \mid m+k+n$. Οπότε έχουμε ότι $d_i \mid (m+k+n)-(m+n) = k$, δηλαδή η περίοδος d_i είναι **κ.δ.**$\{k$: με $p_{jj}^{(k)} > 0\}$. Επειδή από τον ορισμό της περιοδικότητας η περίοδος d_j της κατάστασης j είναι ο **μ.κ.δ.**$\{k$: με $p_{jj}^{(k)} > 0\}$, έπεται ότι $d_i \mid d_j$. Εναλλάσσοντας μεταξύ τους τα i, j έχουμε επίσης ότι $d_j \mid d_i$. Συνεπώς $d_i = d_j$. ∎

3.6. ΕΡΓΟΔΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Εδώ θα εξετάσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των πιθανοτήτων μεταβάσεων n-τάξης $p_{ij}^{(n)}$, καθώς και αυτήν των κατανομών καταστάσεων n-τάξης $\mathbf{p}^{(n)}$ για $n \to \infty$ σε Μ.Α. με αριθμήσιμο πλήθος καταστάσεων.

Ήδη από την προηγούμενη Ενότητα προέκυψαν ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με την ασυμπτωτική συμπεριφορά των ως άνω ποσοτήτων. Άμεσα επίσης από το αποτελέσματα της Παραγράφου 3.5 προκύπτουν τα παρακάτω δύο θεωρήματα.

Θεώρημα 1. Αν η κατάσταση i είναι παροδική τότε

$$p_{ii}^{(n)} \to 0 \quad \text{για } n \to \infty. \tag{6.1}$$

Απόδειξη. Κατά το Θεώρημα 5.3 η κατάσταση i είναι παροδική εάν και μόνο εάν η σειρά $\sum_n p_{ii}^{(n)}$ συγκλίνει. Τότε όμως πρέπει $p_{ii}^{(n)} \to 0$ για $n \to \infty$. ■

Επειδή η παροδικότητα είναι ιδιότητα κλάσης το παραπάνω θεώρημα συνεπάγεται ότι για κάθε κατάσταση j η οποία επικοινωνεί (αμφίδρομα) με μια παροδική κατάσταση i θα έχουμε επίσης $p_{jj}^{(n)} \to 0$ για $n \to \infty$. Επίσης ισχύει το παρακάτω.

Θεώρημα 2. Όταν κατάσταση j είναι παροδική τότε για οποιαδήποτε κατάσταση i

$$p_{ij}^{(n)} \to 0 \quad \text{για } n \to \infty. \tag{6.2}$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.4. ■

Θεώρημα 3. Εάν $i \to j$ και η κατάσταση i είναι επαναληπτική, τότε

$$f_{ji} = 1. \tag{6.3}$$

Απόδειξη. Αφού $i \to j$ υπάρχει μία τουλάχιστον μονότονη τροχιά από την i στη j με πιθανότητα α > 0. Από την κατάσταση j η πιθανότητα να μη μεταβεί ποτέ στη κατάσταση i είναι $1 - f_{ji}$. Οπότε η πιθανότητα ξεκινώντας από την κατάσταση i να μην επανέλθει ποτέ στην κατάσταση αυτή είναι $1 - f_{ii} \geq \alpha(1 - f_{ji}) \geq 0$. Όμως η κατάσταση i είναι επαναληπτική και συνεπώς $f_{ii} = 1$. Άρα $f_{ji} = 1$. ■

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι το παρακάτω.

Πόρισμα 1. Όταν $i \to j$ και η κατάσταση i είναι επαναληπτική τότε $f_{ij} = f_{ji} =1$.

Πόρισμα 2. Όταν $i \to j$ και η κατάσταση j είναι παροδική τότε και η κατάσταση i είναι παροδική, έχουμε δηλαδή

$$f_{ii} < 1. \tag{6.3}$$

Με βάση το Θεώρημα 3, και τα Πορίσματα 1 και 2, συμπεραίνουμε ότι όταν ένα Μαρκοβιανό σύστημα ξεκινά από μια επαναληπτική κατάσταση τότε κάθε κατάσταση την οποία επισκέπτεται καθίσταται επαναληπτική και επικοινωνούσα με τις προηγούμενες. Η επαναληπτική κατάσταση i συνεπώς "παράγει" μια **κλειστή κλάση** *C* επικοινωνουσών καταστάσεων. Το Μαρκοβιανό σύστημα συνεπώς ξεκινώντας από την επαναληπτική κατάσταση i της κλειστής κλάσης *C* θα διέλθει με πιθανότητα τη μονάδα από κάθε κατάσταση της κλάσης αυτή και μόνο αυτής. Σε Μαρκοβιανές αλυσίδες με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων, έστω s, κάθε **κλειστή κλάση** *C* επικοινωνουσών καταστάσεων αποτελείται συνεπώς από επαναληπτικές καταστάσεις. Επιπρόσθετα, οι χρόνοι επανεπίσκεψης / μετάβασης είναι μεγαλύτεροι του s με πιθανότητα $q < 1$. Ως εκ τούτου σε πεπερασμένες Μαρκοβιανές Αλυσίδες οι μέσοι χρόνοι επανόδου / μετάβασης μεταξύ καταστάσεων μιας κλειστής κλάσης είναι πεπερασμένοι και συνεπώς οι καταστάσεις αυτές είναι γνήσια επαναληπτικές. Έτσι κάθε **κλειστή κλάση** πεπερασμένου Μαρκοβιανού συστήματος είναι **γνήσια επαναληπτική** και **κάθε ανοικτή κλάση** είναι **παροδική**.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα σχετικά με τους μέσους χρόνους επανόδου στις καταστάσεις μιας Μαρκοβιανής Αλυσίδας με αριθμήσιμο πλήθος καταστάσεων:

(i) Όταν η κατάσταση i είναι παροδική, τότε

$$\mu_i = E[T_{ii}] = \infty, \tag{6.4.α}$$

και για οποιαδήποτε κατάσταση j επικοινωνούσα με την i

$$\mu_j = E[T_{jj}] = \infty. \tag{6.4.β}$$

(ii) Όταν είναι η κατάσταση i είναι επαναληπτική, τότε

$$E[T_{ii}] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = \begin{cases} \infty, & \text{όταν είναι μη γνήσια επαναληπτική,} \\ \mu_i < \infty, & \text{όταν είναι γνήσια επαναληπτική.} \end{cases} \tag{6.5.α}$$

και για οποιαδήποτε κατάσταση j επικοινωνούσα με την i

$$E[T_{jj}] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} = \begin{cases} \infty, & \text{όταν είναι μη γνήσια επαναληπτικές,} \\ \mu_j < \infty, & \text{όταν είναι γνήσια επαναληπτικές.} \end{cases} \tag{6.5.β}$$

Στα παρακάτω θα ασχοληθούμε με την οριακή συμπεριφορά των πιθανοτήτων $p_{ij}^{(n)}$ και τη σύνδεση της οριακής αυτής συμπεριφοράς με τύπους των καταστάσεων i και j. Το θεώρημα που ακολουθεί αφορά αποκλειστικά την κατάσταση i και για απλούστευση του συμβολισμού παραλείπουμε τον δείκτη i στην όλη αποδεικτική διαδικασία, θέτουμε δηλαδή $p^{(n)}$ αντί $p_{ii}^{(n)}$, $f^{(n)}$ αντί $f_{ii}^{(n)}$, μ αντί μ_i κ.ο.κ. Η απόδειξη του θεωρήματος θα γίνει σε τρία στάδια.

Θεώρημα 4. Όταν η κατάσταση i είναι απεριοδική, τότε

$$p_{ii}^{(n)} \to \pi_i = \begin{cases} 0, & \text{αν μη γνήσια επαναληπτική ή παροδική,} \\ \dfrac{1}{\mu_i} > 0, & \text{αν γνήσια επαναληπτική.} \end{cases} \tag{6.6}$$

Απόδειξη.

1ο Στάδιο. Όταν η κατάσταση i είναι παροδική το θεώρημα ισχύει λόγω του Θεωρήματος 1.

Έστω ότι η κατάσταση i είναι επαναληπτική. Τότε έχουμε $f = \sum_n f^{(n)} = 1$. Ορίζουμε τη φθίνουσα ακολουθία

$$F_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} f^{(n)} \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{6.7}$$

Για την ως άνω ακολουθία έχουμε:

$$F_0 = \sum_n f^{(n)} = 1, \tag{6.8}$$

$$0 \le F_k \le F_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

και

$$f^{(k)} = F_{k-1} - F_k \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{6.9}$$

Παίρνοντας το άθροισμα των F_k για $k = 0, 1, \ldots$ έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} f^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} nf^{(n)}.$$

Εξ ορισμού όμως

$$\sum_{n=1}^{\infty} nf^{(n)} = E[T],$$

με μέση τιμή $\mu = E[T]$ πεπερασμένη ή όχι ανάλογα με το εάν η κατάσταση i είναι γνήσια επαναληπτική ή όχι.

Συνεπώς

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k = E[T] = \mu . \qquad (6.10)$$

2ο Στάδιο. Από τη γνωστή συνελικτική σχέση

$$p^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)} p^{(n-k)} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (6.11)$$

με $f^{(k)} = F_{k-1} - F_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ λαμβάνουμε

$$p^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)} p^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{n} \{F_{k-1} - F_k\} p^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F_{k-1} p^{(n-k)} - \sum_{k=1}^{n} F_k p^{(n-k)}$$

και συνεπώς

$$p^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} F_k p^{(n-1-k)} - \sum_{k=1}^{n} F_k p^{(n-k)} .$$

Φέρνοντας στα αριστερά το δεύτερο άθροισμα έχουμε:

$$p^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} F_k p^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} F_k p^{(n-1-k)} .$$

Επειδή λόγω επαναληπτικότητας εξ υποθέσεως $F_0 = 1$, , θα έχουμε $p^{(n)} = F_0\, p^{(n)}$ και συμπτύσσοντας το αριστερό μέλος σε ένα άθροισμα προκύπτει η αναδρομική σχέση

$$\sum_{k=0}^{n} F_k p^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} F_k p^{(n-1-k)} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (6.12)$$

Από την παραπάνω σχέση τώρα παίρνουμε διαδοχικά

$$\sum_{k=0}^{n} F_k p^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} F_k p^{(n-1-k)} = \sum_{k=0}^{n-2} F_k p^{(n-2-k)} = \ldots = F_0 p^{(0)} = 1,$$

έχουμε δηλαδή

$$A_n \equiv \sum_{k=0}^{n} F_k p^{(n-k)} = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Επειδή $p^{(n)} = 0$ για $n < 0$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το παραπάνω άθροισμα επεκτείνεται και σε όρους με $k > n$. Γράφουμε συνεπώς

$$A_n = \sum_{k=0}^{\infty} F_k p^{(n-k)} = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6.13}$$

με τη σειρά να συγκλίνει απολύτως αφού οι όροι της είναι μη αρνητικοί. Παίρνοντας τώρα το όριο της ακολουθίας $\{A_n\}$ για $n \to \infty$ έχουμε:

$$\mathit{lim} A_n = \mathit{lim} \sum_{k=0}^{\infty} F_k p^{(n-k)} = 1 \quad \text{για } n \to \infty. \tag{6.14}$$

Με k σταθερό θα μπορούσαμε να περάσουμε το όριο μέσα στο άθροισμα εάν γνωρίζαμε ότι η ακολουθία $\{p^{(n-k)}\}$, και συνεπώς η $\{p^{(n)}\}$, συγκλίνει για $n \to \infty$. Ας υποθέσουμε προς στιγμή ότι συγκλίνει και έστω π το όριο αυτής. Τότε από την (6.14) προκύπτει ότι

$$\pi \sum_{k=0}^{\infty} F_k = 1,$$

από την οποία με εισαγωγή της (6.11) λαμβάνουμε:

$$\pi = \{\sum_{k=0}^{\infty} F_k\}^{-1} = \mu^{-1}. \tag{6.15}$$

3ο Στάδιο. Η απόδειξη ότι η ακολουθία $p^{(n)}$ ($= p_{ii}^{(n)}$) συγκλίνει είναι αρκετά εκτεταμένη και γι΄ αυτό θα περιοριστούμε εδώ σε μια σύντομη περιγραφή της. Έστω $\alpha \equiv \mathit{limsup}\, p^{(n)}$ και $\beta \equiv \mathit{liminf}\, p^{(n)}$. Προφανώς έχουμε $1 \geq \alpha \geq \beta \geq 0$ και υπάρχουν υπακολουθίες $\{p^{(n')}\}$ και $\{p^{(n'')}\}$ της $\{p^{(n)}\}$ με $\mathit{lim}\, p^{(n')} = \alpha$ και $\mathit{lim}\, p^{(n'')} = \beta$. Κάνοντας χρήση βασικών αποτελεσμάτων της Θεωρίας Αριθμών εύκολα αποδεικνύεται ότι για μια μη περιοδική κατάσταση i υπάρχει αριθμός N πέραν του οποίου έχουμε $p^{(n)} > 0$ για όλα τα $n > N$. (Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι οι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης υψηλότερης τάξης $\{p_{ij}^{(n)}\}$ ($= P^n$) σταδιακά “γεμίζουν”, καθώς δηλαδή το n αυξάνεται, όλο και μεγαλύτερο πλήθος μη μηδενικών στοιχείων $p_{ij}^{(n)}$ έχουν.) Με βάση την παραπάνω ανισότητα και τη συνελικτική σχέση (6.11) αποδεικνύεται ότι για οποιοδήποτε σταθερό k οι υπακολουθίες $\{p^{(n'-k)}\}$ και $\{p^{(n''-k)}\}$ της $\{p^{(n)}\}$ έχουν όρια $\mathit{lim}\, p^{(n'-k)} = \mathit{lim}\, p^{(n')} = \alpha$ και $\mathit{lim}\, p^{(n''-k)} = \mathit{lim}\, p^{(n'')} = \beta$. Συνεπώς με $n < n'$ από τη σχέση (6.13) έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} F_k p^{(n'-k)} \leq 1.$$

Επίσης από την ίδια σχέση έχουμε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για $n < n''$ αρκετά μεγάλα.

$$\sum_{k=0}^{n} F_k p^{(n'')} \geq 1-\varepsilon\,.$$

Από την πρώτη ανισότητα παίρνοντας, με σταθερό n, το όριο για $n' \to \infty$ και εν συνεχεία το όριο για $n \to \infty$ λαμβάνουμε $\alpha \leq 1/\mu$. Τούτο σημαίνει ότι για $\mu = \infty$ έχουμε $\alpha = \beta = 0$ και συνεπώς $lim\, p^{(n)} = 0$. Για $\mu < \infty$ εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία και στη δεύτερη ανισότητα και λαμβάνουμε την σχέση $\beta \geq 1/\mu$, οπότε σε συνδυασμό με την $\alpha \leq 1/\mu$ και την $1 \geq \alpha \geq \beta \geq 0$ έχουμε $\alpha = \beta = 1/\mu$ και συνεπώς $lim\, p^{(n)} = \mu$. ■

Για περισσότερες λεπτομέρειες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο Feller (1968, σελ. 336-337).

Η ερμηνεία του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι μια απεριοδική κατάσταση i είναι γνήσια επαναληπτική, και συνεπώς εργοδική, εάν και μόνο εάν $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ και $p_{ii}^{(n)} \to \pi > 0$. Είναι μη γνήσια επαναληπτική εάν και μόνο εάν $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ και $p_{ii}^{(n)} \to 0$. Με βάση το συμπέρασμα αυτό εύκολα αποδεικνύεται ότι η γνήσια επαναληπτικότητα είναι ιδιότητα κλάσεως (βλ. Θεώρημα 5.5.(β) της προηγούμενης Ενότητας).

Σημείωση. Για περιοδική κατάσταση i με περίοδο d μας ενδιαφέρει η σύγκλιση της ακολουθίας $p_{ii}^{(nd)}$ για $n \longrightarrow \infty$, αφού για n μη ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου d έχουμε $p_{ii}^{(n)} = 0$. Στη περίπτωση αυτή η αποδεικτική διαδικασία παραμένει η ίδια με $(n'd)$, $(n''d)$ και (kd) στη θέση των αντιστοίχων ποσοτήτων.

Θεώρημα 5. Έστω κατάσταση j απεριοδική. Τότε για οποιαδήποτε άλλη κατάσταση i που επικοινωνεί με την j

$$p_{ij}^{(n)} \to \pi_j = \begin{cases} 0, & \text{αν j μη γνήσια επαναληπτική ή παροδική,} \\ \dfrac{1}{\mu_j}, & \text{αν j γνήσια επαναληπτική.} \end{cases} \tag{6.16}$$

Απόδειξη. Το πρώτο σκέλος του θεωρήματος για παροδικές καταστάσεις ισχύει αφού η παροδικότητα είναι ιδιότητα κλάσεως. Για επαναληπτικές καταστάσεις, γνήσια ή όχι, ξεκινάμε πάλι από την γνωστή συνελικτική σχέση

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Για τις διαφορές μεταξύ $p_{ij}^{(n)}$ και f_{ij}/μ_j τώρα έχουμε:

$$p_{ij}^{(n)} - f_{ij}/\mu_j = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} - \{\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}\}/\mu_j = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \times \{p_{jj}^{(n-k)} - \frac{1}{\mu_j}\}. \qquad (6.17)$$

Από το προηγούμενο όμως θεώρημα έχουμε για την επαναληπτική κατάσταση j ότι

$$p_{jj}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j} \quad \text{για } n \to \infty.$$

Ταυτόχρονα η σειρά στο δεξιό μέλος της (6.17) συγκλίνει απολύτως αφού:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \times |p_{jj}^{(n-k)} - \frac{1}{\mu_j}| \le \{1 + \frac{1}{\mu_j}\} \times \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \le 1 + \frac{1}{\mu_j}.$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας τα όρια ως προς n των δύο μελών της (6.17) και περνώντας το όριο μέσα στη σειρά λαμβάνουμε

$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{f_{ij}}{\mu_j}.$$

Επειδή τώρα οι καταστάσεις i και j επικοινωνούν και είναι επαναληπτικές από το Θεώρημα 3 έχουμε $f_{ij} = 1$.

■

Επειδή η σχέση (6.17) ισχύει για οποιοδήποτε ζεύγος καταστάσεων i και j, έπεται ότι ισχύει και το παρακάτω:

Πόρισμα. Σε μια απεριοδική Μαρκοβιανή Αλυσίδα για κάθε ζεύγος καταστάσεων i και j έχουμε:

$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{f_{ij}}{\mu_j}, \qquad (6.18)$$

όπου ως όριο θεωρούμε το μηδέν όταν $\mu_j = \infty$.

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των προηγουμένων θεωρημάτων έχουμε το παρακάτω γενικό θεώρημα.

Εργοδικό Θεώρημα (Kolmogorov). Έστω $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ μια μη υποβιβάσιμη και απεριοδική Μαρκοβιανή Αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P}$. Ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Είτε όλες οι καταστάσεις είναι *παροδικές* είτε όλες *μη γνήσια επαναληπτικές* με

$$lim\, p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \text{για} \quad n \to \infty \quad (i, j = 1, 2, \ldots). \tag{6.19}$$

(ii) Είτε όλες οι καταστάσεις είναι *γνήσια επαναληπτικές* και υπάρχουν αριθμοί $\pi_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$ τέτοιοι ώστε

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1 \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\, \mathbf{P}, \tag{6.20}$$

και τότε όλες οι καταστάσεις είναι *εργοδικές* και ανεξάρτητα από την κατάσταση i έχουμε

$$lim\, p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \frac{1}{\mu_j} > 0 \quad \text{για} \quad n \to \infty \quad (i, j = 1, 2, \ldots), \tag{6.21}$$

όπου μ_j είναι ο μέσος χρόνος επανόδου στην κατάσταση j.

Αντίστροφα, σε μια μη υποβιβάσιμη απεριοδική Μαρκοβιανή Αλυσίδα εάν υπάρχουν αριθμοί $\pi_i \geq 0$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις (6.20) τότε όλες οι καταστάσεις είναι εργοδικές και ικανοποιούν την (6.21). Διαφορετικά, όλες οι καταστάσεις είναι παροδικές ή όλες είναι μη γνήσια επαναληπτικές ανάλογα με το εάν συγκλίνει ή όχι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ για μια κατάσταση i.

Στην περίπτωση μιας ***μη υποβιβάσιμης περιοδικής*** Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P}$ και ***περίοδο*** d, ο πίνακας $\mathbf{P}^d$ είναι κατά μπλοκ διαγώνιος, δηλαδή $\mathbf{P}^d = \text{block-diag}\{R_k : k = 0, 1, \ldots, d-1\}$. Η αλυσίδα $\{X_n\}$ αποτελείται από d μη υποβιβάσιμες κλάσεις καταστάσεων $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1}$ και μετακινείται κυκλικά από κατάσταση της κλάσης C_k σε κατάσταση της κλάσης C_{k+1} με C_d την C_0 κ.ο.κ. Λόγω της παραπάνω κυκλικότητας δεν έχει σημασία ποια κλάση θα ονομάσουμε C_0, εξυπηρετεί όμως από πλευράς απλούστευσης του συμβολισμού να θεωρήσουμε ως C_0 την κλάση εκείνη από κατάσταση της οποίας ξεκινά. Έτσι εξετάζοντας τις Μαρκοβιανές ανελίξεις $\{Y_n^{(k)} = X_{nd+k} : n = 1, 2, \ldots\}$ $(k = 0, 1, \ldots, d-1)$ προκύπτει εύκολα ότι πρόκειται για μη υποβιβάσιμες απεριοδικές Μαρκοβιανές αλυσίδες με κοινό πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P}^d$, και για κάθε $k = 0, 1, \; , d-1$, η αλυσίδα $Y_n^{(k)}$ παραμένει επ΄

άπειρον εντός της κλάσης C_k. Εφαρμόζοντας το Εργοδικό Θεώρημα στις Μαρκοβιανές αλυσίδες $\{Y_n^{(k)}\}$ (k = 0, 1, …, d-1) και επανερχόμενοι στην $\{X_n\}$ έχουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:

(α)
$$p_{ij}^{(nd)} \to \pi_j = \begin{cases} d/\mu_j & \text{όταν i, j ανήκουν στην ίδια κλάση} \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \tag{6.22}$$

(β) Όταν $\mu_j < \infty$ (ισοδύναμα $\pi_j > 0$) για κάποιο j, τότε οι πιθανότητες $\pi_i = d/\mu_i > 0$ (i = 1, 2, …) και αποτελούν τη **στάσιμη** κατανομή του στοχαστικού πίνακα **P**, ικανοποιούν δηλαδή το σύστημα εξισώσεων (6.20).

(γ) Στην ως άνω περίπτωση ($\mu_j < \infty$ για κάποιο j) η σύγκλιση της ακολουθίας $\{\mathbf{P}^n : n = 1, 2, \ldots\}$ είναι κατά Cezaro, και ισχύει:

$$lim\, \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}^n = lim\, \frac{1}{d}\sum_{\nu=0}^{d-1}\mathbf{P}^{n+\nu} = \mathbf{\Pi} \quad \text{για } n \to \infty \tag{6.23}$$

με τις γραμμές του οριακού πίνακα **Π** να συμπίπτουν με την στάσιμη κατανομή $\boldsymbol{\pi}$ του **P**. Έτσι, κάθε πιθανότητα π_i εκφράζει το ποσοστό του χρόνου κατά τον οποίο η $\{X_n\}$ βρίσκεται στην κατάσταση i.

(δ) Επίσης στην ως άνω περίπτωση ($\mu_j < \infty$ για κάποιο j) οι πιθανότητες $r_i = 1/\mu_i$, $i \in C_k$, αποτελούν την στάσιμη κατανομή του στοχαστικού πίνακα R_k (k = 0, 1, …, d-1).

Εφαρμογή. Εξάρτημα μηχανής επιθεωρείται σε τακτά χρονικά διαστήματα. Το εξάρτημα αντικαθίσταται με ένα καινούργιο αν θεωρηθεί ότι έχει κάποιο λειτουργικό πρόβλημα ή, διαφορετικά, περνά από συντήρηση και επανατοποθετείται στη μηχανή για μια ακόμα περίοδο λειτουργίας. Δίνεται ότι η πιθανότητα αντικατάστασης μετά από k περιόδους λειτουργίας είναι $p_k > 0$ ($k \geq 1$). Λέμε ότι η μηχανή κατά την n-περίοδο λειτουργίας της βρίσκεται στην κατάσταση i όταν το εξάρτημα διανύει την i-περίοδο λειτουργίας του (i = 1, 2, …). Η ανέλιξη $\{X_n: n \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή με πιθανότητες μεταβάσεων $p_{i1} = p_i$ και $p_{i,i+1} = q_i = 1 - p_i$ (k = 1, 2, ...). Έχουμε δηλαδή

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & . & . & . \\ p_2 & 0 & q_2 & 0 & . & . \\ p_3 & 0 & 0 & q_3 & 0 & . \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & q_4 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι από την κατάσταση 1 είναι δυνατόν να πάμε διαδοχικά σε οποιαδήποτε κατάσταση j και από αυτήν στην κατάσταση 1 πάλι. Συνεπώς όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν με την κατάσταση 1, άρα και μεταξύ τους. Άρα η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι μη υποβιβάσιμη. Η κατάσταση 1 έχει περίοδο επανεμφάνισης $d = 1$ αφού $p_1 > 0$. Συνεπώς η κατάσταση 1 είναι απεριοδική, και η αλυσίδα επίσης απεριοδική. Θα εξετάσουμε τώρα αν η αλυσίδα είναι παροδική. Προς αυτό αρκεί να εξετάσουμε αν η κατάσταση 1 είναι παροδική ή όχι.

Από τον πίνακα **P** έχουμε ότι το σύστημα ξεκινώντας από την κατάσταση 1 θα χρειαστεί χρόνο επανόδου στην ίδια κατάσταση $T > n$ με πιθανότητα

$$P[T > n] = q_1 \ldots q_n \equiv d_n \quad (n \geq 1).$$

Συνεπώς έχουμε $P[T \leq n] = 1 - d_n$ με την ακολουθία $\{d_n\}$ φραγμένη και φθίνουσα. Έστω $d = \mathit{lim}\, d_n$ για $n \to \infty$. Η πιθανότητα να χρειαστεί πεπερασμένος χρόνος για την επάνοδο στην κατάσταση 0 είναι $P[T < \infty] = 1 - \mathit{lim}\, d_n = 1 - d$. Ως εκ τούτου η αλυσίδα είναι παροδική εάν και μόνο εάν $d = \mathit{lim}\, d_n > 0$.

Σημείωση. Αποδεικνύεται ότι $d = \mathit{lim}\, d_n > 0$ εάν και μόνο εάν $\sum_k p_k < \infty$.

Πράγματι εάν $\sum_k p_k = \infty$, από την ανισότητα $1 - x \leq e^{-x}$ έχουμε $q_k = 1 - p_k \leq$ *exp*$\{-p_k\}$ και συνεπώς

$$d_n = \prod_{k=1}^{n} q_k = \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{-p_k} = \exp\{-\sum_{k=1}^{n} p_k\}.$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι εάν $\sum_k p_k = \infty$ τότε $d_n \to 0$.

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι $\sum_k p_k < \infty$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και αρκετά μεγάλο m θα έχουμε:

$$\sum_{k=m}^{\infty} p_k < \varepsilon.$$

Από τη γνωστή ανισότητα για θετικούς α_k $(k = 1, 2, \ldots)$

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - \alpha_k) > 1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

(αποδεικνύεται με επαγωγή εύκολα) έχουμε για αρκετά μεγάλο m και $n \to \infty$

$$\mathit{lim} \prod_{k=m}^{n} q_k = \mathit{lim} \prod_{k=m}^{n} (1 - p_k) > 1 - \mathit{lim} \sum_{k=m}^{n} p_k = 1 > \sum_{k=m}^{\infty} p_k > 1 - \varepsilon > 0$$

και συνεπώς όταν $\sum_k p_k < \infty$ έχουμε

$$d = lim\, d_n = lim \prod_{k=1}^{n} q_k > 0 \quad \text{για } n \to \infty.$$

Διαπιστώσαμε συνεπώς ότι η αλυσίδα είναι παροδική εάν και μόνο εάν $\sum_k p_k < \infty$, και συνεπώς είναι επαναληπτική εάν και μόνο εάν $\sum_k p_k = \infty$. Για να είναι γνήσια επαναληπτική, και συνεπώς εργοδική, πρέπει $E[T] < \infty$. Όμως

$$E[T] = \sum_{n=1}^{\infty} nP[T = n] = \sum_{n=1}^{\infty} n\{P[T > n-1] - P[T > n]\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\{d_{n-1} - d_n\} = (d_0 - d_1) + (2d_1 - 2d_2) + (3d_2 - 3d_3) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$$

με $d_0 = P[T > 0] = 1$. Συνεπώς η αλυσίδα είναι γνήσια επαναληπτική, και άρα εργοδική, εάν και μόνο εάν $\sum_n d_n < \infty$. Στην περίπτωση αυτή, σύμφωνα με το Εργοδικό Θεώρημα υπάρχει στάσιμη κατανομή η οποία δίνεται από την λύση του συστήματος των εξισώσεων

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1 \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\, \mathbf{P}, \tag{6.24}$$

και ισχύει $lim\, p_{ij}^{(n)} = \pi_j = 1/\mu_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Αντίστροφα, ας διερευνήσουμε την ύπαρξη λύσης του ως άνω συστήματος. Από την εξίσωση $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\, \mathbf{P}$ προκύπτουν οι αναδρομικές σχέσεις

$$\pi_{k+1} = q_k \pi_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

και συνεπώς

$$\pi_{k+1} = d_k \pi_1 \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{6.25}$$

με

$$d_k = q_1 \cdots q_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Από την απαίτηση $\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = 1$ προκύπτει ότι $\pi_1 = 1/\sum_{k=0}^{\infty} d_k = 1$ με $d_0 = 1$. Εισάγοντας την τελευταία στην (6.25) λαμβάνουμε $\pi_k = d_k / \sum_{k=0}^{\infty} d_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Καταλήγουμε συνεπώς και πάλι στο συμπέρασμα ότι υπάρχει κατανομή ισορροπίας $\boldsymbol{\pi}$ εάν και μόνο εάν $\sum_{k=0}^{\infty} d_k < \infty$.

3.7. ΜΕΣΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΠΑΡΟΔΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

Ας συμβολίσουμε με R το σύνολο όλων των επαναληπτικών καταστάσεων από όλες τις επαναληπτικές κλάσεις R_I (I = 1, 2, …) μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας και με T το σύνολο όλων των παροδικών καταστάσεων από όλες τις παροδικές κλάσεις T_I (I = 1, 2, …). Θεωρούμε ότι $R \neq \varnothing$ για να έχει νόημα ο χρόνος εξόδου από το σύνολο T των παροδικών καταστάσεων.

Θεώρημα 1. Έστω R_I μια επαναληπτική κλάση. Εάν $i \in R_I$ τότε $p_{ij} = 0$ για όλα τα $j \notin R_I$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $p_{ij} > 0$ για κάποιο $j \notin R_I$. Όταν περάσει η Μ.Α. στην κατάσταση j δύο πράγματα μπορούν να συμβούν: είτε επανέρχεται στη κατάσταση i είτε δεν επανέρχεται ποτέ. Η επάνοδος στην κατάσταση i αποκλείεται, αφού τότε οι καταστάσεις i και j θα ήσαν επικοινωνούσες και συνεπώς θα ανήκαν στην ίδια κλάση. Επίσης η μη επάνοδος στην κατάσταση i αποκλείεται, αφού τότε η κατάσταση i θα ήταν παροδική και όχι επαναληπτική. Συνεπώς $p_{ij} = 0$ για όλα τα $j \notin R_I$. ∎

Με βάση το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι κάθε επαναληπτική κλάση είναι κλειστή και κάθε ανοικτή κλάση είναι παροδική. Το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε κλειστή κλάση είναι επαναληπτική και κάθε παροδική κλάση είναι ανοικτή, δεν ισχύει σε Μ.Α. με άπειρο πλήθος καταστάσεων αλλά μόνο σε Μ.Α. με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων. Επί παραδείγματι, στον χωρίς φράγματα **μη συμμετρικό** απλό τυχαίο περίπατο όλες οι καταστάσεις είναι **παροδικές** παρότι επικοινωνούν μεταξύ τους και συνεπώς αποτελούν μια κλειστή κλάση. Επίσης, το ίδιο συμβαίνει στο **συμμετρικό** τυχαίο περίπατο σε τρεις ή υψηλότερες διαστάσεις ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο σε μία και σε δύο διαστάσεις (βλ. Άσκ. 3.11).

Με βάση το παραπάνω θεώρημα ο στοχαστικός πίνακας **P** μετά από κατάλληλη αναδιάταξη των καταστάσεων γράφεται υπό την παρακάτω ***κανονική*** μορφή:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} & . & . & . \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2 & \mathbf{0} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & \mathbf{0} & \mathbf{R}_I & \mathbf{0} \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}, \tag{7.1}$$

όπου ο στοχαστικός πίνακας **R** αφορά όλες τις επαναληπτικές καταστάσεις του συνόλου R όλων των επαναληπτικών κλάσεων R_I, και ο υποστοχαστικός πίνακας **T** αφορά όλες τις παροδικές. Από την παραπάνω μορφή του πίνακα **P**, ή διαφορετικά επαναλαμβάνοντας την αποδεικτική διαδικασία του προηγούμενου θεωρήματος, είναι προφανές ότι για κάθε επαναληπτική κλάση R_I θα έχουμε $p_{ij}^{(n)} = 0$ για όλα τα n όταν $i \in R_I$ και $j \notin R_I$. Συνεπώς

$$f_{ij} = \sum_n f_{ij}^{(n)} = 0\,, \quad i \in R_I,\ j \notin R_I, \qquad . \tag{7.2}$$

αφού έχουμε, βλ. (4.21),

$$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{\nu=1}^{n-1} f_{ij}^{(\nu)} p_{jj}^{(n-\nu)} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7.3}$$

Στα παρακάτω θεωρούμε Μ.Α. με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων. Συνεπώς κάθε παροδική κλάση είναι ανοικτή. Το θεώρημα που ακολουθεί είναι άμεση συνέπεια των παραπάνω συμπερασμάτων.

Θεώρημα 3. Σε κάθε πεπερασμένη Μ.Α. ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Κάθε επαναληπτική κατάσταση είναι γνήσια επαναληπτική.
(ii) Μία τουλάχιστον κατάσταση είναι επαναληπτική.

Απόδειξη. Απλή και αφήνεται στον αναγνώστη. ■

Είναι ενδιαφέρον τώρα να προσδιορίσουμε τις πιθανότητες της (οριστικής) εγκατάλειψης του συνόλου T των παροδικών καταστάσεων και μετάβασης σε επαναληπτική κατάσταση j. Συγκεκριμένα θέλουμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες f_{ij} με κατάσταση i παροδική και j επαναληπτική.

Θεώρημα 4. Έστω R επαναληπτική κλάση μιας πεπερασμένης Μ.Α. Τότε

$$f_{ij} = \sum_{k\in T} p_{ik} f_{kj} + \sum_{k\in R} p_{ik}\,, \quad i \in T \ \text{ και } \ j \in R. \tag{7.4}$$

Απόδειξη. Με ανάλυση στο αποτέλεσμα του 1ου βήματος και εφαρμογή της Μαρκοβιανής ιδιότητας έχουμε τα παρακάτω:

$$f_{ij} \equiv P[T_{ij} < \infty \mid X_0 = i] = \sum_k p_{ik} P[T_{ij} < \infty \mid X_1 = k, X_0 = i]$$

$$= \sum_k p_{ik} P[T_{kj} < \infty \mid X_1 = k]$$

$$= \sum_{k\in T} p_{ik} P[T_{kj} < \infty \mid X_1 = k] + \sum_{k\in R} p_{ik} P[T_{kj} < \infty \mid X_1 = k] + \sum_{k\notin T\cup R} p_{ik} P[T_{kj} < \infty \mid X_1 = k]$$

$$= \sum_{k\in T} p_{ik} f_{kj} + \sum_{k\in R} p_{ik} f_{kj} + \sum_{k\notin T\cup R} p_{ik} f_{kj}\,,$$

$$= \sum_{k\in T} p_{ik} f_{kj} + \sum_{k\in R} p_{ik}\,,$$

αφού $f_{kj} = 1$ όταν $k \in R$ και $f_{kj} = 0$ όταν $k \notin R$ με βάση την (7.2). ■

Σχετικά με τον μέσο χρόνο παραμονής στο σύνολο T των παροδικών καταστάσεων έχουμε τα παρακάτω: Έστω i και j δύο παροδικές καταστάσεις και N_{ij} ο συνολικός αριθμός των χρονικών περιόδων με $\{X_n = j\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ έχοντας ξεκινήσει από την κατάσταση i. Η τ.μ. N_{ij} εκφράζει δηλαδή τον συνολικό χρόνο τον οποίο η Μ.Α. θα διανύσει στην παροδική κατάσταση j. Θέτοντας $m_{ij} = E[N_{ij} \mid X_0 = i]$ και κάνοντας ανάλυση της μέσης τιμής με δέσμευση στο αποτέλεσμα του 1ου βήματος έχουμε τα παρακάτω:

$$m_{ij} = E[N_{ij} \mid X_0 = i] = \delta_{ij} + \sum_k E[N_{ij} \mid \{X_0 = i\}\{X_1 = k\}]p_{ik}$$
$$= \delta_{ij} + \sum_k E[N_{kj} \mid X_1 = k\}]p_{ik}.$$

Συνεπώς

$$m_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k p_{ik} m_{kj}.$$

Επειδή όμως οι επαναληπτικές κλάσεις είναι κλειστές έχουμε $m_{kj} = 0$. Συνεπώς το άθροισμα στα δεξιά της παραπάνω σχέσης περιορίζεται πάνω στο σύνολο T των παροδικών καταστάσεων. Έχουμε συνεπώς:

$$m_{ij} = \delta_{ij} + \sum_T p_{ik} m_{kj} \quad (i, j \in T). \tag{7.5}$$

Υπό μορφή πινάκων η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \mathbf{TM}, \tag{7.6}$$

όπου **I** ο ταυτοτικός πίνακας και **T** ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης μεταξύ των παροδικών καταστάσεων. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{T})\mathbf{M} = \mathbf{I}. \tag{7.7}$$

Επειδή $\mathbf{T}^n \to \mathbf{0}$, από την προφανή σχέση

$$(\mathbf{I} - \mathbf{T})\{\mathbf{I} + \mathbf{T} + \mathbf{T}^2 + \ldots + \mathbf{T}^{n-1}\} = \mathbf{I} - \mathbf{T}^n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας $\mathbf{I} - \mathbf{T}$ έχει αντίστροφο και ισχύει η σχέση

$$\mathbf{N} \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{T} + \mathbf{T}^2 + \mathbf{T}^3 + \ldots. \tag{7.8}$$

Σε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, με παροδικές και επαναληπτικές καταστάσεις, ο πίνακας **N** ονομάζεται **πρωταρχικός** (*fundamental*).

Από τις (7.7) και (7.8) λαμβάνουμε τους μέσους χρόνους m_{ij} παραμονής σε παροδικές καταστάσεις. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\mathbf{M} = \mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{T} + \mathbf{T}^2 + \mathbf{T}^3 + ... \tag{7.9}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι όταν το σύστημα ξεκινά από παροδική κατάσταση i, ο μέσος χρόνος εισόδου στο σύνολο R των επαναληπτικών καταστάσεων δίνεται από το άθροισμα των στοιχείων της i-γραμμής του πρωταρχικού πίνακα **N**. Συμβολίζοντας με T_{iR} τον χρόνο εισόδου στο σύνολο R λαμβάνουμε:

$$E[T_{iR} \mid X_0 = i] = \sum_{k\in T} n_{ik} \quad (i \in T). \tag{7.10}$$

Η τελευταία δίνει παράλληλα και τον μέσο χρόνο παραμονής της Μ.Α. στο σύνολο T των παροδικών καταστάσεων με εκκίνηση από κατάσταση $i \in T$.

Όπως θα περίμενε κανείς η πιθανότητα f_{ij} να μεταβεί κάποια στιγμή η Μ.Α. στην παροδική κατάσταση j από την παροδική i συνδέεται με την μέση χρονική διάρκεια m_{ij} που η Μ.Α. διανύει στην κατάσταση j. Πράγματι κάνοντας ανάλυση της μέσης τιμής m_{ij} με δέσμευση στο αν η Μ.Α. διέρχεται κάποια στιγμή από την παροδική κατάσταση j ή όχι, έχουμε:

$$m_{ij} = E[N_{ij} \mid \{T_{ij} < \infty\}\{X_0 = i\}]P[T_{ij} < \infty \mid X_0 = i]$$
$$+ E[N_{ij} \mid \{T_{ij} = \infty\}\{X_0 = i\}]P[T_{ij} = \infty \mid X_0 = i].$$

Με βάση την Μαρκοβιανή ιδιότητα όμως

$$E[N_{ij} \mid \{T_{ij} < \infty\}\{X_0 = i\}] = E[N_{jj} \mid X_0 = j] = m_{jj},$$

ενώ

$$E[N_{ij} \mid \{T_{ij} = \infty\}\{X_0 = i\}] = 0.$$

Θέτοντας $f_{ij} = P[T_{ij} < \infty \mid X_0 = i]$ παίρνουμε

$$m_{ij} = m_{jj}\, f_{ij} \quad (i, j \in T) \tag{7.11}$$

και από αυτήν

$$f_{ij} = m_{ij}/m_{jj} \quad (i, j \in T). \tag{7.12}$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε το "πρόβλημα της καταστροφής" ενός παίκτη Α με αρχικό κεφάλαιο $a = 2$ και κεφάλαιο αντιπάλου $b = 2$. Έστω X_n το κεφάλαιο που διαθέτει ο παίκτης Α αμέσως μετά το n-παιχνίδι ($X_0 = 2$). Ο στοχαστικός πίνακας **P** είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Με αναδιάταξη των καταστάσεων ο πίνακας **P** παίρνει την παρακάτω κανονική μορφή:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & p & 0 & q & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

οπότε, ο υποστοχαστικός πίνακας **T** είναι:

$$\mathbf{T} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

και ο πρωταρχικός πίνακας **N** είναι:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p+q^2 & p & p^2 \\ q & 1 & p \\ q^2 & q & q+p^2 \end{bmatrix} \end{array} /(p^2+q^2).$$

Συνεπώς, με **M** = **N** έχουμε $n_{21} = q/(p^2+q^2)$, $n_{22} = 1/(p^2+q^2)$ και $n_{23} = p/(p^2+q^2)$. Η μέση διάρκεια του παιχνιδιού είναι το άθροισμα $m_{20} = n_{21} + n_{22} + n_{23} = 2/(p^2+q^2)$.

Για $p = q = 0.5$ έχουμε μέση διάρκεια παιχνιδιού $\mu = 4$. Επίσης, $f_{23} = m_{23}/m_{33} = n_{23}/n_{33} = p/(q + p^2)$ και για $p = q = 0.5$ έχουμε $f_{23} = 2/3$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η f_{23}, η πιθανότητα δηλαδή τελικής μετάβασης από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 3, δίνει επίσης την πιθανότητα να κερδίσει τελικά ο παίκτης Α στην περίπτωση κατά την οποία ο αντίπαλος Β είχε αρχικό ποσό $b = 1$. Πράγματι από το πρόβλημα της καταστροφής του παίκτη στον απλό τυχαίο περίπατο έχουμε ότι η πιθανότητα απορρόφησης στη θέση b είναι:

$$\beta = \frac{1-\lambda^{-a}}{\lambda^{b}-\lambda^{-a}} = \frac{1-\{p/q\}^{a}}{\{q/p\}^{b}-\{p/q\}^{a}}\,.$$

Θέτοντας $a = 2$ και $b = 1$ παίρνουμε τελικά

$$\beta = \frac{p}{q^2+pq+p^2} = \frac{p}{q+p^2} = f_{23}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.1. Έστω $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ο απλός τυχαίος περίπατος με $X_0 = 0$ και $Y_n = |X_n|$. Να δειχθεί ότι η σ.α. $\{Y_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ αποτελεί Μ.Α. Να προσδιοριστεί ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P}$.

3.2. Έστω $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ μια Μ.Α. με χώρο καταστάσεων $\mathfrak{S}$ και συνάρτηση $g : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ αμφιμονοσήμαντη. Να δειχθεί ότι η $\{Y_n = g(X_n): n = 0, 1, 2, \ldots\}$ αποτελεί Μαρκοβιανή αλυσίδα πάνω στο χώρο καταστάσεων $\mathfrak{T}$. Να εξεταστεί αν το αμφιμονοσήμαντο της g είναι αναγκαία συνθήκη για να ισχύει το παραπάνω.

3.3. Έστω $\{X_n\}$ ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων διακριτών τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{Z}$. Έστω επίσης $S_n = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu$ και $Y_n = \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ με $S_0 = 0$. Να εξεταστεί ποια από τα παρακάτω αποτελούν Μ.Α.

(α) $\{S_n : n \geq 0\}$;
(β) $\{Y_n : n \geq 0\}$;
(γ) Τα ζεύγη $\{(S_n, Y_n) : n \geq 0\}$;

3.4. Έστω $\{X_n\}$ μια Μ.Α. με την κατάσταση i απορροφητική. Να δεχθεί ότι κάθε άλλη κατάσταση j η οποία επικοινωνεί (μονόδρομα) με την i είναι παροδική.

3.5. Να δειχθεί ότι μια κατάσταση i είναι επαναληπτική εάν και μόνο εάν ο μέσος αριθμός διελεύσεων από την κατάσταση αυτή, με εκκίνηση από την ίδια, είναι μη πεπερασμένος.

3.6. Έστω $I(A)$ η δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου Α. Έστω Μ.Α. $\{X_n\}$ και $V_j = \sum_{n=1}^{\infty} I\{X_n = j\}$ ο αριθμός των διελεύσεων από την κατάσταση j. Έστω επίσης $\eta_{ij} = P[V_j = \infty | X_0 = i]$. Να δειχθεί ότι

(α) $$\eta_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{εάν η κατάσταση i είναι επαναληπτική} \\ 0 & \text{εάν η κατάσταση i είναι παροδική,} \end{cases}$$

(β) $$\eta_{ij} = \begin{cases} P[T_{ij} < \infty | X_0 = i] & \text{εάν η κατάσταση j είναι επαναληπτική} \\ 0 & \text{εάν η κατάσταση j είναι παροδική,} \end{cases}$$

όπου T_{ij} ο χρόνος πρώτης διέλευσης από την κατάσταση j με εκκίνηση από την κατάσταση i.

3.7. Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις των παρακάτω Μ.Α. και να ιεραρχηθούν οι κλάσεις. Να προσδιοριστούν αν υπάρχουν κλειστές κλάσεις. Υπάρχουν παροδικές καταστάσεις και ποιες;

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.3 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

3.8. Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις των Μ.Α. με στοχαστικούς πίνακες

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες n-τάξης καθώς και οι γεννήτριες συναρτήσεις $P_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n$.

3.9. Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις των Μ.Α. με στοχαστικούς πίνακες

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 2p & 1-2p & 0 \\ 0.5-p & 2p & 0.5-p \\ 0 & 1-2p & 2p \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστούν οι γεννήτριες συναρτήσεις $P_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n$ καθώς και οι μέσοι χρόνοι επανόδου σε κάθε κατάσταση.

3.10. Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις των Μ.Α. με στοιχεία στοχαστικών πινάκων:

(α) $p_{ij} = 0$ όταν $|i - j| > 1$ $(i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, (β) $p_{0j} = \alpha_j$, $p_{ii} = r$ και $p_{i,i-1} = 1-r$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$.

3.11. Να δειχθεί ότι ο συμμετρικός απλός τυχαίος περίπατος σε μία και σε δύο διαστάσεις είναι επαναληπτικός. Είναι παροδικός σε τρεις ή υψηλότερες διαστάσεις.

3.12. Στον απλό τυχαίο περίπατο με χώρο καταστάσεων $\mathfrak{S} =\{0, 1, 2, ...\}$ και $p_{i,i+1} = v_i = 1 - p_{i,i-1}$ με $v_0 = 1$ να καθοριστούν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε η Μ.Α. να είναι γνήσια επαναληπτική και να προσδιοριστεί η κατανομή ισορροπίας στην περίπτωση αυτή.

3.13. Θεωρούμε τον τυχαίο περίπατο $\{X_n\}$ πάνω στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ ο οποίος κάνει άλματα δύο μονάδων προς τη θετική κατεύθυνση με πιθανότητα p και άλματα μιας μονάδος προς την αρνητική κατεύθυνση με πιθανότητα $q = 1 - p$. Έχουμε δηλαδή $p_{i,i+2} = p$ και $p_{i,i-1} = 1 - p$. Να προσδιοριστεί η τιμή του p για την οποία η Μ.Α. είναι επαναληπτική.

3.14. Να μελετηθούν οι καταστάσεις στον τυχαίο περίπατο πάνω στο σύνολο ακεραίων $\mathbb{Z}$ με πιθανότητες μεταβάσεων $p_{i,i+2} = v_i$ και $p_{i0} = 1 - v_i$.

3.15. ***Τυχαίος περίπατος με απορροφητικά φράγματα***. Στον απλό τυχαίο περίπατο με χώρο καταστάσεων τον $\mathfrak{S} = \{0, 1, \ldots, N\}$ οι καταστάσεις "0" και "N" αποτελούν απορροφητικά φράγματα, δηλαδή $p_{00} = p_{NN} =1$. Να κατασκευαστεί ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης και να προσδιοριστεί η κατανομή ισορροπίας.

3.16. ***Τυχαίος περίπατος με ελαστικά φράγματα.*** Στον απλό τυχαίο περίπατο με χώρο καταστάσεων τον $\mathfrak{S} = \{0, 1, \ldots, N\}$ οι καταστάσεις "0" και "N" αποτελούν *ελαστικά φράγματα* όταν $p_{01} = p$ και $p_{N,N-1} = 1 - p$ με $p > 0$. ($p_{i,i+1} = p = 1 - p_{i,i-1}$, $1 < i < N$). (α) Να εξεταστεί αν η Μ.Α. είναι περιοδική. (β) Να προσδιοριστεί η κατανομή ισορροπίας.

3.17. ***Τυχαίος περίπατος με ανακλαστικά φράγματα.*** Στον απλό τυχαίο περίπατο με χώρο καταστάσεων τον $\mathfrak{S} = \{0, 1, \ldots, N\}$ με $p_{01}= p_{N,N-1} = 1$ ($p_{i,i+1} = p = 1 - p_{i,i-1}$, $1 < i < N$). οι καταστάσεις "0" και "N" αποτελούν ανακλαστικά φράγματα, όταν έχουμε . (α) Να εξεταστεί αν η Μ.Α. είναι περιοδική. (β) Να προσδιοριστεί η κατανομή ισορροπίας. (γ) Έστω $m_i = E[T_{i,i+1}|X_0 = i]$. Να προσδιοριστεί αναδρομική σχέση για τις ποσότητες m_i και εξ αυτής να προσδιοριστεί ο μέσος χρόνος μετάβασης στην κατάσταση N με κατάσταση εκκίνησης την i.

3.18. Έστω $T = \{1, 2, ..., t\}$ το σύνολο των παροδικών καταστάσεων και $\mathbf{Q}$ ο γνήσια υποστοχαστικός πίνακας μεταβάσεων πάνω στο T. Έστω επίσης

$m_{ij}(n)$ ο αναμενόμενος χρόνος που βρίσκεται στην παροδική κατάσταση j με εκκίνηση την παροδική κατάσταση i στα πρώτα n παιχνίδια και M_n ο (t x t)-πίνακας με στοιχεία $m_{ij}(n)$. Δείξτε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

(α) $\mathbf{M}_n = \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \ldots + \mathbf{Q}^n$.
(β) $\mathbf{M}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{n+1})$.

3.19. ***Πρόβλημα καταστροφής του παίκτη.*** Έστω X_n το ποσό που έχει ο παίκτης Α μετά το n-παιχνίδι (n = 0, 1, 2,…) με $X_0 = i$. Το παιχνίδι σταματά όταν $X_n = 0$ ή $X_n = N$. Με N = 6, p = 0.6 και με αρχική κατάσταση i = 3 να προσδιοριστούν τα παρακάτω:

(α) Ο αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων στην κατάσταση 5.
(β) Ο αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων στην κατάσταση 5 στα πρώτα 6 παιχνίδια.

(γ) Την πιθανότητα να επισκεφθεί μια τουλάχιστον φορά την κατάσταση 5 πριν τελειώσει το παιχνίδι.

(δ) Αν ο αντίπαλος είχε αρχικό ποσό b = 2, δηλαδή με N = 5, ποια η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης Α;

3.20. ***Διπλά Στοχαστικοί Πίνακες.*** Ένας στοχαστικός πίνακας **P** ονομάζεται διπλά στοχαστικός όταν, παράλληλα με το άθροισμα των στοιχείων των γραμμών του και το άθροισμα των στοιχείων των στηλών του είναι η μονάδα. Έχουμε συνεπώς

$$\textstyle\sum_i p_{ij} = 1 \quad \text{για όλα τα } j.$$

Να δειχθεί ότι σε μια διπλά στοχαστική, απεριοδική και μη υποβιβάσιμη Μ.Α. με πλήθος καταστάσεων **N**, η κατανομή ισορροπίας είναι η Ομοιόμορφη.

3.21. Έστω N το πλήθος καταστάσεων πεπερασμένης Μ.Α. και T_{ii} ο χρόνος επανεμφάνισης μιας επαναληπτικής κατάστασης i. Να δειχθεί ότι υπάρχει $q < 1$ έτσι ώστε για $n \geq N$ η πιθανότητα $P[T_{ii} > n|X_0 = i] < q^n$.

3.22. Μια κατάσταση j πεπερασμένης Μ.Α. είναι παροδική εάν και μόνο εάν υπάρχει κατάσταση i με $j \to i$ αλλά $i \not\to j$. (Τούτο δεν είναι αληθές σε μη πεπερασμένες Μ.Α.).

3.23. Να δειχθεί ότι μια μη υποβιβάσιμη Μ.Α. η οποία έχει ένα (τουλάχιστον) διαγώνιο στοιχείο $p_{ii} > 0$ είναι απεριοδική.

3.24. Μια πεπερασμένη και μη υποβιβάσιμη Μ.Α. είναι απεριοδική εάν και μόνο εάν υπάρχει ακέραιος n έτσι ώστε $p_{ij}^{(n)} > 0$ για όλα τα i και j.

3.25. ***Μοντέλο Διάχυσης Ehrenfest.*** Στο μοντέλο διάχυσης Ehrenfest της Παραγράφου 3.3 να δειχθεί ότι:

(α) $M_n = E[X_n \mid X_0 = x_0] = \{1 - 2/c\}M_{n-1}$ $(n \geq 1)$.
(β) $P_n = E[X_n(X_n - 1) \mid X_0 = x_0] = \{1 - 4/c\}P_{n-1} + 2\{1 - 1/c\}M_{n-1}$ $(n \geq 1)$.

Επιλύοντας τις παραπάνω αναδρομικές σχέσεις να προσδιοριστεί η μέση θέση $M_n = E[X_n \mid X_0 = x_0]$ και η διασπορά $V_n = Var[X_n \mid X_0 = x_0]$ $(n > 0)$.

3.26. ***Μοντέλο Διάχυσης Bernoulli-Laplace.*** Όπως στο μοντέλο διάχυσης Ehrenfest έστω ότι πορώδης μεμβράνη χωρίζει ένα δοχείο σε δύο τμήματα A και B της αυτής χωρητικότητας. Εντός των τμημάτων A και B του δοχείου υπάρχουν από c μόρια δύο μη συμπιεστών υγρών $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ αντίστοιχα. Μεταβάσεις μορίων από το ένα τμήμα του δοχείου στο άλλο γίνονται αλλά λόγω της μη συμπιεστότητας των υγρών οι μεταβάσεις αυτές πρέπει να γίνονται ταυτόχρονα έτσι ώστε ο αριθμός των μορίων σε κάθε τμήμα παραμένει διαρκώς c. Έστω X_n των μορίων τύπου $\mathfrak{A}$ στο τμήμα A του δοχείου. Να προσδιοριστεί ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης **P** και να προσδιοριστεί η κατανομή ισορροπίας.

3.27. Ο παρακάτω στοχαστικός πίνακας αφορά την ποσότητα ύδατος σε δεξαμενή ενός δικτύου ύδρευσης κάθε πρωί. Ανάλογα με την ποσότητα ύδατος που υπάρχει κάθε πρωί η δεξαμενή θωρείται ότι βρίσκεται στην κατάσταση E_1 όταν η ποσότητα ύδατος που περιέχει είναι πολύ χαμηλή, στην κατάσταση E_2 όταν η ποσότητα ύδατος είναι μέτρια, στην κατάσταση E_3 όταν η ποσότητα ύδατος είναι υψηλή και στην E_4 ότι η δεξαμενή είναι πλήρης. Να προσδιοριστεί η κατανομή ισορροπίας. Ποιοι οι μέσοι χρόνοι επανόδου σε κάθε κατάσταση. Αν για την επαρκή υδροδότηση της περιοχής στο διάστημα μιας ημέρας απαιτείται η δεξαμενή να βρίσκεται το πρωί σε μία από τις E_2, E_3, E_4, ποιο το ποσοστό των ημερών κατά τις οποίες η δεξαμενή θα περιέχει επαρκή ποσότητα ύδατος;

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}.$$