Κεφ. ΙΙ Τυχαίος Περίπατος

2.1. ΑΠΛΟΣ ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΣ

Ας θεωρήσουμε ότι σωματίδιο ανά μονάδα χρόνου κινείται πάνω επάνω στον οριζόντιο άξονα x΄x με βήματα σταθερού μήκους $l = 1$. Με πιθανότητα p $(0 < p < 1)$ κινείται δεξιά και με πιθανότητα $q = 1 - p$ κινείται αριστερά. Έστω X_n η θέση του σωματιδίου μετά από n βήματα. Η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n = 1, 2, \dots\}$ αποτελεί μια στοχαστική ανέλιξη ανεξαρτήτων προσαυξήσεων, τούτο διότι έχουμε

$$X_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{1.1}$$

όπου X_0 είναι η θέση εκκίνησης και Z_i $(i = 1, 2, \dots)$ ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή

$$Z_i = \begin{cases} +1, & \text{με πιθανότητα } p \\ -1, & \text{με πιθανότητα } q. \end{cases}$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι το σωματίδιο έχει ως αρχική θέση $X_0 = 0$, τότε η θέση του X_n μετά από άρτιο αριθμό βημάτων $n = 2\nu$ $(\nu = 1, 2, ...)$ θα είναι άρτια και συγκεκριμένα θα είναι μια από τις $\{-2\nu, -2\nu-2, ..., 0, ..., 2\nu-2, 2\nu\}$, ενώ μετά από περιττό αριθμό βημάτων $n = 2\nu+1$ θα είναι περιττή και συγκεκριμένα θα είναι μια από τις $\{-2\nu-1, -2\nu-3, ..., -1, 1, ..., 2\nu-1, 2\nu+1\}$.

Η πιθανότητα με την οποία βρίσκεται το σωματίδιο σε κάθε μία από τις παραπάνω θέσεις υπολογίζεται ως ακολούθως. Θεωρούμε τις τ.μ.

$$Y_i = \frac{1}{2}(1 + Z_i) \quad (i = 1, 2, \dots) \tag{1.2}$$

και συνεπώς

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } p \\ 0, & \text{με πιθανότητα } q. \end{cases}$$

Δηλαδή οι τ.μ. Y_i ακολουθούν την κατανομή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p και ως εκ τούτου το άθροισμά τους $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{2}(n+X_n)$ ακολουθεί την Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p.

Άρα θα έχουμε

$$P[X_n = m] = P[S_n = \frac{1}{2}(n+m)] = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} p^{\frac{1}{2}(n+m)} q^{\frac{1}{2}(n-m)}, \qquad (1.3)$$

για m = -n, -n+2, …, n-2, n.

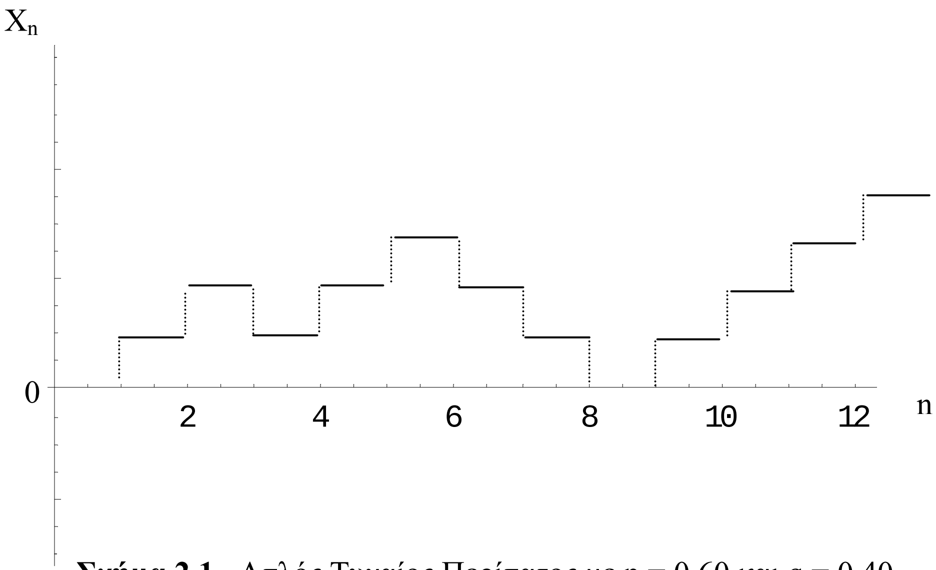
Είναι χρήσιμες τώρα οι παρακάτω διαπιστώσεις. Έχουμε

$$\mu = E[Z] = p - q,$$

$$E[Z^2] = p + q = 1,$$

και

$$\sigma^2 = V[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2 = 4pq.$$



Σχήμα 2.1. Απλός Τυχαίος Περίπατος με p = 0.60 και q = 0.40.

Εφαρμόζοντας τώρα το Κ.Ο.Θ. έχουμε:

$$\left| P[-a < X_n < b] - \left\{ \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right\} \right| \to 0 \text{ για } n \to \infty, \qquad (1.4)$$

όπου Φ είναι η αθροιστική συνάρτηση της τυποποιημένης Κανονικής $N(0, 1)$.

Παρατηρούμε τώρα τα παρακάτω:

(α) Όταν $p > q$ τότε $\mu > 0$, οπότε και οι δύο όροι μέσα στα άγκιστρα τείνουν στο μηδέν.

(β) Όταν $p = q$ τότε $\mu = 0$, οπότε και οι δύο όροι μέσα στα άγκιστρα τείνουν στο ½.

(γ) Όταν $p < q$ τότε $\mu < 0$, οπότε και οι δύο όροι μέσα στα άγκιστρα τείνουν στη μονάδα.

Συνεπώς για οποιοδήποτε $p \in (0, 1)$ και οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς a και b θα έχουμε:

$$P[-a < X_n < b] \to 0 \text{ για } n \to \infty. \tag{1.5}$$

Το παραπάνω οριακό αποτέλεσμα μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οσοδήποτε μεγάλοι και αν είναι οι θετικοί αριθμοί a και b, η πιθανότητα να παραμένει επ΄ άπειρον η σ.α. $\{X_n : n = 1, 2, \dots \}$ εντός της περιοχής $(-a, b)$ είναι μηδέν (γιατί;). Διαφορετικά διατυπωμένο αυτό σημαίνει ότι με πιθανότητα τη μονάδα η σ.α. $\{X_n : n = 1, 2, \dots \}$ θα βγει κάποια στιγμή από την περιοχή $(-a, b)$ όσο μεγάλο και είναι το εύρος της. Προκύπτει εύκολα ότι το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε περιοχή (a, b) με $-\infty < a < b < \infty$.

Σε ανάλογα συμπεράσματα καταλήγουμε με εφαρμογή του Ισχυρού Νόμου των Μεγάλων Αριθμών (Ι.Ν.Μ.Α.). Εδώ μάλιστα δεν απαιτείται η ύπαρξη διασποράς των Y_i. Πράγματι έχουμε από τον Ι.Ν.Μ.Α. ότι με πιθανότητα τη μονάδα $X_n/n \to E[Z] = p - q$ για $n \to \infty$, και συνεπώς η ακολουθία $\{X_n : n = 1, 2, \dots\}$ αποκλίνει θετικά όταν $p > q$ και αποκλίνει αρνητικά όταν $p < q$. Επίσης για $p = q$ πάλι αποδεικνύεται ότι με πιθανότητα τη μονάδα η σ.α. $\{X_n: n = 1, 2, \dots \}$ θα βγει κάποια στιγμή από οποιαδήποτε περιοχή της μορφής $(-a, b)$ με $-a < b$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα άμεσα γενικεύονται σε σ.α. με ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις με μέση τιμή μ και πεπερασμένη ή όχι διασπορά.

Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι τα ως άνω συμπεράσματα δεν δίνουν απάντηση σχετικά με το πότε ξεπερνιώνται τα παραπάνω δύο όρια για πρώτη φορά και με ποια πιθανότητα το καθένα. Μ' αυτό το πρόβλημα θα ασχοληθούμε στην παράγραφο που ακολουθεί.

2.2. ΑΠΛΟΣ ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΣ ΜΕ ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΑ ΦΡΑΓΜΑΤΑ

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα απλό τυχαίο περίπατο $\{X_n: n = 0, 1, 2,\ldots\}$ με αρχική κατάσταση $X_0 = 0$ ο οποίος διακόπτεται μόλις το σωματίδιο περάσει κάποια στιγμή στη κατάσταση $s = -a$ ή στη κατάσταση $s = b$, όπου a και b θετικοί ακέραιοι. Σκεφθείτε δύο παίκτες A και B, με αρχικά χρηματικά ποσά a€ και b€ αντίστοιχα, οι οποίοι παίζουν ένα τυχερό παιχνίδι στο οποίο ο παίκτης A κερδίζει κάθε φορά 1€ με πιθανότητα p ή χάνει 1€ με πιθανότητα $q = 1 - p$. Το παιχνίδι σταματά όταν ένας από τους δύο παίκτες χάσει το αρχικό του ποσό. Οι καταστάσεις -a και b ονομάζονται ***απορροφητικά φράγματα*** της σ.α.

Έχουμε απορρόφηση στο -a όταν $X_n = -a$ για κάποιο n. Ανάλογα έχουμε απορρόφηση στο b όταν $X_n = b$ για κάποιο n. Σύμφωνα μ΄ αυτά που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο ο τυχαίος περίπατος θα σταματήσει σε ένα από τα δύο απορροφητικά φράγματα -a , b με πιθανότητα την μονάδα. Θα προσδιορίσουμε τώρα τις δύο πιθανότητες απορρόφησης α και β αντίστοιχα.

2.2.1. Πιθανότητες Απορρόφησης

Θεωρούμε την τ.μ.

$$I = \begin{cases} -1, & \text{εάν η απορρόφηση γίνει στο } -a \\ +1, & \text{εάν η απορρόφηση γίνει στο } b. \end{cases} \tag{2.1}$$

Με αρχική συνθήκη $X_0 = 0$ και α την πιθανότητα απορρόφησης στο -a έχουμε:

$$\alpha = P[I = -1|X_0 = 0]. \tag{2.2}$$

Γενικεύοντας παραπάνω το πρόβλημα έστω

$$\alpha_i = P[I = -1|X_0 = i] \qquad (i = -a, -a+1, \ldots, b-1, b) \tag{2.3}$$

με $\alpha = \alpha_0$ και πλευρικές, ή συνοριακές, συνθήκες

$$\alpha_{-a} = 1 \text{ και } \alpha_b = 0. \tag{2.4}$$

Κάνοντας ανάλυση της πιθανότητας α_i με βάση το αποτέλεσμα του πρώτου βήματος έχουμε:

$$\alpha_i = P[\{I=-1\}\{X_1=i+1\}|X_0=i] + P[\{I=-1\}\{X_1=i-1\}|X_0=i]$$

$$= P[X_1=i+1|X_0=i]P[I=-1|X_1=i+1, X_0=i] + P[X_1=i-1|X_0=i]P[I=-1|X_1=i-1, X_0=i]$$

$$= P[Z_1=+1]P[I=-1|X_1=i+1, X_0=i] + P[Z_1=-1]P[I=-1|X_1=i-1, X_0=i]$$

$$= P[Z_1=+1]P[I=-1|X_1=i+1] + P[Z_1=-1]P[I=-1|X_1=i-1]$$

με την τελευταία ισότητα να οφείλεται στο ότι ο τυχαίος περίπατος, ως σ.α. ανεξαρτήτων προσαυξήσεων, έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα.

Συνεπώς προκύπτει η παρακάτω σχέση (διαφοροεξίσωση)

$$\alpha_i = p\alpha_{i+1} + q\alpha_{i-1} \qquad (i = -a+1, \ldots, b-1). \tag{2.5}$$

Επειδή όμως $p + q = 1$, έχουμε επίσης

$$(p + q)\alpha_i = p\alpha_{i+1} + q\alpha_{i-1} \qquad (i = -a+1, \ldots, b-1)$$

και απ΄ αυτήν

$$p(\alpha_{i+1} - \alpha_i) = q(\alpha_i - \alpha_{i-1}) \qquad (i = -a-1, \ldots, b-1).$$

Θέτοντας τώρα

$$\Phi_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i \qquad (i = -a, \ldots, b-1) \tag{2.6}$$

και $\lambda = q/p$ προκύπτει η αναδρομική σχέση

$$\Phi_i = \lambda\Phi_{i-1} \qquad (i = -a+1, \ldots, b-1). \tag{2.7}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$\Phi_0 = \lambda\Phi_{-1} = \lambda^2\Phi_{-2} = \ldots = \lambda^a\Phi_{-a}$$

και

$$\Phi_{b-1} = \lambda\Phi_{b-2} = \lambda^2\Phi_{b-3} = \ldots = \lambda^{b-1}\Phi_0.$$

Έχουμε συνεπώς

$$\Phi_{-a} = \lambda^{-a}\Phi_0 \tag{2.8}$$

και

$$\Phi_{b-1} = \lambda^{b-1}\Phi_0. \tag{2.9}$$

Από τις πλευρικές συνθήκες (2.4) λαμβάνουμε

$$1 = -(\alpha_b - \alpha_{-a}) = -\{(\alpha_b - \alpha_{b-1}) + (\alpha_{b-1} - \alpha_{b-2}) + \ldots + (\alpha_{-a+1} - \alpha_{-a})\}$$

$$= -\{\Phi_{b-1} + \Phi_{b-2} + \ldots + \Phi_{-a}\}$$

$$= -\{\lambda^{b-1} + \lambda^{b-2} + \ldots + \lambda^{-a}\}\Phi_0$$

και συνεπώς

$$\Phi_0 = -\{\lambda^{b-1} + \lambda^{b-2} + \ldots + \lambda^{-a}\}^{-1}. \tag{2.10}$$

Παρόμοια, επίσης από τις πλευρικές συνθήκες (2.4), έχουμε

$$\alpha_0 = -(\alpha_b - \alpha_0) = -\{(\alpha_b - \alpha_{b-1}) + (\alpha_{b-1} - \alpha_{b-2}) + \ldots + (\alpha_1 - \alpha_0)\}$$

$$= -\{\Phi_{b-1} + \Phi_{b-2} + \ldots + \Phi_0\}$$

$$= -\{\lambda^{b-1} + \lambda^{b-2} + \ldots + 1\}\Phi_0$$

και συνεπώς

$$\Phi_0 = -\alpha_0\{\lambda^{b-1} + \lambda^{b-2} + \ldots + 1\}^{-1}. \tag{2.11}$$

Εξισώνοντας τώρα τα δεύτερα μέλη των (2.10) και (2.11) λαμβάνουμε

$$\alpha_0 = \{\lambda^{b-1} + \lambda^{b-2} + \ldots + 1\} / \{\lambda^{b-1} + \lambda^{b-2} + \ldots + \lambda^{-a}\},$$

είναι δηλαδή

$$\alpha_0 = \alpha = P[I = -1 | X_0 = 0] = \begin{cases} \dfrac{b}{a+b}, & \text{για } \lambda = q/p = 1, \\ \dfrac{\lambda^b - 1}{\lambda^b - \lambda^{-a}}, & \text{για } \lambda = q/p \neq 1, \end{cases} \tag{2.12}$$

όπου $\{I = -1\}$ να εκφράζει το ενδεχόμενο "απορρόφηση στο -a".

Με ανάλογο τρόπο, ή απλούστερα εναλλάσσοντας το a με το b και το p με το q (ή ισοδύναμα, το λ με το 1/λ), η πιθανότητα απορρόφησης στη θέση b θα είναι:

$$\beta_0=\beta=P[I=1|X_0=0]=\begin{cases}\dfrac{a}{a+b}, & \text{για } \lambda = q/p = 1,\\[2ex] \dfrac{(1/\lambda)^a-1}{(1/\lambda)^a-(1/\lambda)^{-b}}, & \text{για } \lambda = q/p \neq 1,\end{cases} \qquad (2.13)$$

ή ισοδύναμα

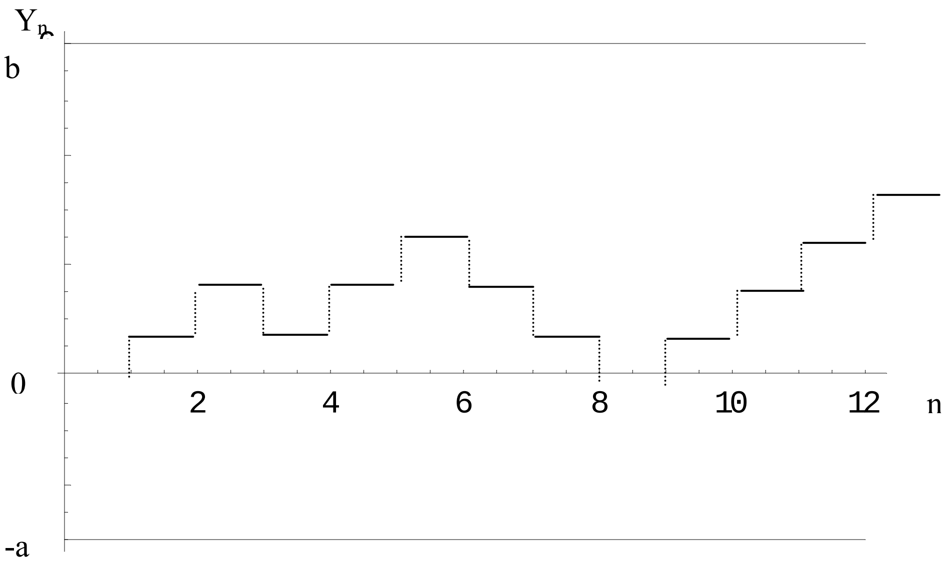
$$\beta_0=\beta=P[I=1|X_0=0]=\begin{cases}\dfrac{a}{a+b}, & \text{για } \lambda = q/p=1,\\[2ex] \dfrac{1-\lambda^{-a}}{\lambda^b-\lambda^{-a}}, & \text{για } \lambda = q/p\neq 1.\end{cases} \qquad (2.14)$$

Από τα αποτελέσματα (2.13) και (2.14) διαπιστώνουμε ότι $\alpha_0 + \beta_0 = 1$, δηλαδή, χωρίς την εφαρμογή οριακών θεωρημάτων, προκύπτει ότι ο απλός τυχαίος περίπατος με απορροφητικά φράγματα -a και b σταματά με πιθανότητα τη μονάδα.

2.2.2. Κατανομή του Χρόνου Απορρόφησης

Ο χρόνος T μέχρι να περάσει ο τυχαίος περίπατος $\{X_n\}$ σε μία από τις απορροφητικές καταστάσεις {-a} ή {b} είναι διακριτή τ.μ. με τιμές $k \geq \min\{a, b\}$. Ο χρόνος αυτός καλείται "***χρόνος απορρόφησης***" και εκφράζει την διάρκεια του τυχαίου περίπατου με απορροφητικά φράγματα. Έχουμε συνεπώς

$$T = \min\{n : X_n = -a \text{ ή } b\}. \qquad (2.15)$$



Σχήμα 2.2. Απλός Τυχαίος Περίπατος με απορροφητικά φράγματα.

Έστω τώρα

$$p_k = P[T = k|X_0 = 0] \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{2.16}$$

με μηδενικές τις πιθανότητες p_k για $k = 0, 1, \ldots, \min\{a, b\}-1$. Ορίζουμε ακόμα τις πιθανότητες

$$p_k^{(i)} = P[T = k|X_0 = i] \quad (k=0,1,\ldots) \text{ για } i \in \{-a, \ldots, b\}, \tag{2.17}$$

με

$$p_k^{(0)} = p_k$$

και

$$p_k^{(-a)} = p_k^{(b)} = \delta_{k0} = \begin{cases} 1, & \text{για } k = 0 \\ 0, & \text{για } k \neq 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Κάνοντας ανάλυση και πάλι με βάση το αποτέλεσμα του πρώτου βήματος και με χρήση της Μαρκοβιανής ιδιότητας έχουμε για $k \geq 1$ την παρακάτω σχέση:

$$p_k^{(i)} = P[Z_1=+1]P[T=k|X_1= i+1] + P[Z_1=-1]P[T=k|X_1= i-1]. \tag{2.19}$$

Όμως επειδή η κατανομή των βημάτων Z_i είναι αναλλοίωτη στο χρόνο μέχρι τη στιγμή της απορρόφησης, θα έχουμε τη σχέση

$$P[T=k|X_1= i+1] = P[T=k-1|X_0= i+1] = p_{k-1}^{(i+1)}$$

και

$$P[T=k|X_1= i-1] = P[T=k-1|X_0= i-1] = p_{k-1}^{(i-1)}.$$

Συνεπώς η (2.19) δίνει την παρακάτω διαφοροεξίσωση

$$p_k^{(i)} = p\, p_{k-1}^{(i+1)} + q\, p_{k-1}^{(i-1)} \quad (k = 1, 2, \ldots) \text{ για } i \in \{-a+1, \ldots, b-1\}, \tag{2.20}$$

με πλευρικές συνθήκες καθοριζόμενες από την (2.18).

Η ως άνω διαφοροεξίσωση είναι $1^{ης}$ τάξης ως προς k και $2^{ης}$ τάξης ως προς i. Με τον δείκτη i σταθερό, έστω $\pi_i(s)$ η γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων $\{p_k^{(i)}: k = 0,1,\ldots\}$, δηλαδή

$$\pi_i(s) = E[s^T|X_0= i] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k^{(i)} \quad (s \in \mathcal{S}) \text{ για } i \in \{-a, \ldots, b\}.$$

όπου $\mathcal{S}$ κοινή περιοχή σύγκλισης όλων των $\pi_i(s)$.

Πολλαπλασιάζοντας τώρα τα μέλη των (2.18) και (2.20) επί s^k και αθροίζοντας για $k = 0, 1, \ldots,$ λαμβάνουμε την παρακάτω διαφοροεξίσωση ($2^{ης}$ τάξης ως προς i)

$$\pi_i(s) = s\{p\, \pi_{i+1}(s) + q\, \pi_{i-1}(s)\} \quad \text{για } i \in \{-a+1, \ldots, b-1\} \tag{2.21}$$

με πλευρικές συνθήκες

$$\pi_i(s) = 1 \quad \text{για } i = -a, b. \tag{2.22}$$

Η διαφοροεξίσωση (2.21) λύνεται όπως και μια γραμμική διαφορική εξίσωση $2^{ας}$ τάξεως. Συγκεκριμένα, διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση

$$\pi_i(s) = \{\alpha(s)\}^i \tag{2.23}$$

με $\alpha(s)$ τη ρίζα της "*χαρακτηριστικής εξίσωσης*" της (2.21)

$$x = s\{px^2 + q),$$

αποτελεί μια ειδική λύση. Η ως άνω χαρακτηριστική εξίσωση για $0 < |s| < 1/(2\sqrt{pq})$ έχει δύο λύσεις και συγκεκριμένα τις

$$\alpha(s) = \frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2ps} \quad \text{και} \quad \beta(s) = \frac{1+\sqrt{1-4pqs^2}}{2ps}$$

οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Συνεπώς, η γενική λύση της (2.21) είναι ο γραμμικός συνδυασμός

$$\pi_i(s) = A(s)\{\alpha(s)\}^i + B(s)\{\beta(s)\}^i \quad \text{για } i \in \{-a+1, \ldots, b-1\} \tag{2.24}$$

με τις συναρτήσεις $A(s)$ και $B(s)$ να ικανοποιούν τις πλευρικές συνθήκες (2.22).

Εισάγοντας την γενική λύση (2.24) στην (2.22) λαμβάνουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} A(s)\{\alpha(s)\}^{-a} + B(s)\{\beta(s)\}^{-a} &= 1 \\ A(s)\{\alpha(s)\}^{b} + B(s)\{\beta(s)\}^{b} &= 1. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Έχουμε συνεπώς

$$A(s) = \frac{\{\beta(s)\}^b - \{\beta(s)\}^{-a}}{\{\alpha(s)\}^{-a}\{\beta(s)\}^b - \{\alpha(s)\}^b\{\beta(s)\}^{-a}} \tag{2.26}$$

και

$$\mathrm{B(s)} = \frac{\{\alpha(s)\}^{-a} - \{\alpha(s)\}^{b}}{\{\alpha(s)\}^{-a}\{\beta(s)\}^{b} - \{\alpha(s)\}^{b}\{\beta(s)\}^{-a}}\,. \tag{2.27}$$

Μας ενδιαφέρει η γεννήτρια των πιθανοτήτων $p_k = p_k^{(0)}$ για $k = 0,1,\ldots,$ δηλαδή η συνάρτηση

$$\pi(s) \equiv \pi_0(s) = E[s^T|X_0 = 0] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k^{(0)}\,.$$

Για $i = 0$ στη σχέση (2.24) έχουμε

$$\pi(s) = A(s) + B(s) = \frac{[\{\alpha(s)\}^{-a} + \{\beta(s)\}^{b}] - [\{\alpha(s)\}^{b} + \{\beta(s)\}^{-a}]}{\{\alpha(s)\}^{-a}\{\beta(s)\}^{b} - \{\alpha(s)\}^{b}\{\beta(s)\}^{-a}} \quad (s \in \mathcal{S}), \tag{2.28}$$

από την οποία με παραγωγίσεις στη θέση $s = 0$ λαμβάνουμε τις πιθανότητες

$$p_k = \frac{1}{k!}\pi^{(k)}(0)\} = \frac{1}{k!}\{A^{(k)}(0) + B^{(k)}(0)\} \qquad (k = m, m+1, \ldots) \tag{2.29}$$

με $m = \min\{a, b\}$.

Σχετικά με τον χρόνο απορρόφησης T έχουμε τα παρακάτω:

$$P[T < \infty \mid X_0 = 0] = \pi(1) \equiv A(1) + B(1) = \alpha + \beta = 1, \tag{2.30}$$

με μέση τιμή

$$\mu_T = E[T] = \pi'(1), \tag{2.31}$$

και διασπορά

$$\sigma_T^2 = V[T] = E[X(X-1)] + E[X] - E[X]^2 = \pi''(1) + \pi'(1)\{1 - \pi'(1)\}. \tag{2.32}$$

Το γεγονός ότι στον απλό τυχαίο περίπατο, με a και b άρτιους, ο χρόνος απορρόφησης T μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών T_i που εκφράζουν τον χρόνο που απαιτείται μέχρι να μεταπηδήσει από μια κατάσταση, έστω j, στην κατάσταση $j + 2$ ή στην κατάσταση $j - 2$ (το πλήθος των T_i δεν είναι γνωστό αλλά αυτό δεν έχει ιδιαίτερη σημασία εφόσον γνωρίζουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά του αθροίσματός τους), μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το Κ.Ο.Θ. για να προσδιορίσουμε προσεγγιστικά πιθανότητες που αφορούν τον χρόνο απορρόφησης. Υποτίθεται βέβαια ότι τα απορροφητικά φράγματα -a και b δεν είναι πολύ κοντά στο μηδέν για να έχει κάποια διάρκεια ο τυχαίος περίπατος. Έχουμε συνεπώς για $t_1 < t_2$ την προσέγγιση:

$$P[t_1 < T \leq t_2 \mid X_0 = 0] \cong \Phi(\frac{t_2 - \mu_T}{\sigma_T}) - \Phi(\frac{t_1 - \mu_T}{\sigma_T}). \tag{2.33}$$

Η ως άνω προσέγγιση βελτιώνεται εφαρμόζοντας τη διόρθωση συνεχείας, θέτοντας δηλαδή στη θέση των t_1, t_2 τα $t_1 + 0.5$, $t_2 + 0.5$ αντίστοιχα.

2.3. Τυχαιος Περιπατος με Απορροφητικα Φραγματα: Ταυτοτητα του Wald

Θα γενικεύσουμε τώρα τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου αναφερόμενοι σε γενικότερης μορφής τυχαίους περιπάτους.

Ορισμός. Τυχαίος περίπατος (τ.π.) είναι μια σ.α. $\{X_n: n = 1, 2, \ldots\}$ ανεξάρτητων και ισόνομων προσαυξήσεων Y_i $(i = 1, 2, \ldots)$ με μέση τιμή $\mu = E[Y_i]$ πεπερασμένη.

Η θέση μετά από n βήματα είναι πάλι:

$$X_n = X_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.1}$$

Στα παρακάτω θεωρούμε ότι η θέση εκκίνησης $X_0 = 0$. Όπως και στον απλό τυχαίο περίπατο έτσι και εδώ, με εφαρμογή είτε του Κ.Ο.Θ. είτε του Ι.Ν.Μ.Α., προκύπτει ότι με $-\infty < a < b < +\infty$ έχουμε

$$P[-a < X_n < b] \to 0 \text{ για } n \to \infty$$

και από αυτήν ότι

$$P[-a < X_n < b \text{ για όλα τα } n] = 0.$$

Αν θεωρήσουμε τώρα τους αριθμούς $-a$ και b ως απορροφητικά φράγματα του ως άνω τ.π. η τελευταία σχέση σημαίνει ότι ο χρόνος απορρόφησης

$$T = \min\{n: X_n \notin (-a, b)\} \tag{3.2}$$

δεν απειρίζεται με πιθανότητα τη μονάδα. Μπορούμε συνεπώς να μιλήσουμε για την τ.μ. X_T (είναι πράγματι τυχαία μεταβλητή;), την κατάσταση δηλαδή την οποία καταλαμβάνει η σ.α. $\{X_n: n = 1, 2, \ldots\}$ κατά την στιγμή της απορρόφησης T.

Έστω τώρα

$$g(s) = E[e^{sY}], \quad s \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

η ροπογεννήτρια συνάρτηση των ανεξάρτητων και ισόνομων προσαυξήσεων Y_i.

Αποδεικνύεται ότι η $g(s)$ συνδέεται με την κατάσταση X_T κατά τη στιγμή της απορρόφησης, είτε αυτή γίνεται στο κάτω φράγμα $-a$ είτε στο άνω φράγμα b, μέσω της παρακάτω σχέσης η οποία είναι γνωστή ως *Ταυτότητα του Wald*.

Θεώρημα (**Ταυτότητα του Wald**). Έστω ότι η τ.μ. X_T εκφράζει τη θέση της σ.α. κατά τη στιγμή της απορρόφησης T με αρχική κατάσταση $X_0 = 0$. Τότε

$$E[\{g(s)\}^{-T} exp\{sX_T\}] = 1, \quad \text{για κάθε } s \in \mathcal{S}. \tag{3.4}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν ορισμένα πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

Παραγωγίζοντας ως προς s τα μέλη της ταυτότητας του Wald λαμβάνουμε

$$E[-T\{g(s)\}^{-T-1} g'(s)e^{sX_T} + X_T\{g(s)\}^{-T} e^{sX_T}] = 0 \quad \text{για κάθε } s \in \mathcal{S}. \tag{3.5}$$

Επειδή για $s = 0$ $(0 \in \mathcal{S})$ έχουμε $g(0) = 1$ και $g'(0) = \mu = E[Y]$, αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση λαμβάνουμε

$$E[-T\mu + X_T] = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$E[X_T] = \mu\, E[T]. \tag{3.6}$$

Δηλαδή, η μέση θέση κατά τη στιγμή της απορρόφησης δίνεται από το γινόμενο του μέσου βήματος επί το μέσο χρόνο απορρόφησης. Η παραπάνω ισότητα είναι γνωστή ως *Ταυτότητα του Little*.

2.3.1. *Μέσος Χρόνος Απορρόφησης*

Υποθέτοντας ότι οι προσαυξήσεις Y_i έχουν πεπερασμένη διασπορά σ^2 και παραγωγίζοντας για άλλη μία φορά την (3.5) ως προς s λαμβάνουμε μετά από λίγες πράξεις με $\mu = 0$:

$$E[X_T^2] = \sigma^2\, E[T]. \tag{3.7}$$

Συνεπώς, συνδυάζοντας τις (3.6) και (3.7) έχουμε:

$$E[T] = \begin{cases} E[X_T]/\mu, & \text{για } \mu \neq 0, \\ E[X_T^2]/\sigma^2, & \text{για } \mu = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Επειδή τώρα έχουμε $X_T \cong -a$ ή $X_T \cong b$, ανάλογα με το αν η απορρόφηση γίνεται στο $-a$ ή στο b, θα έχουμε $E[X_T] \cong -\alpha a + \beta b$ και $E[X_T^2] \cong \alpha a^2 + \beta b^2$, όπου με α και β

συμβολίζουμε τις πιθανότητες απορρόφησης στο -a και b αντίστοιχα. Οπότε έχουμε:

$$E[T] \cong \begin{cases} \dfrac{-\alpha a + \beta b}{\mu}, & \text{για } \mu \neq 0, \\ \dfrac{\alpha a^2 + \beta b^2}{\sigma^2}, & \text{για } \mu = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

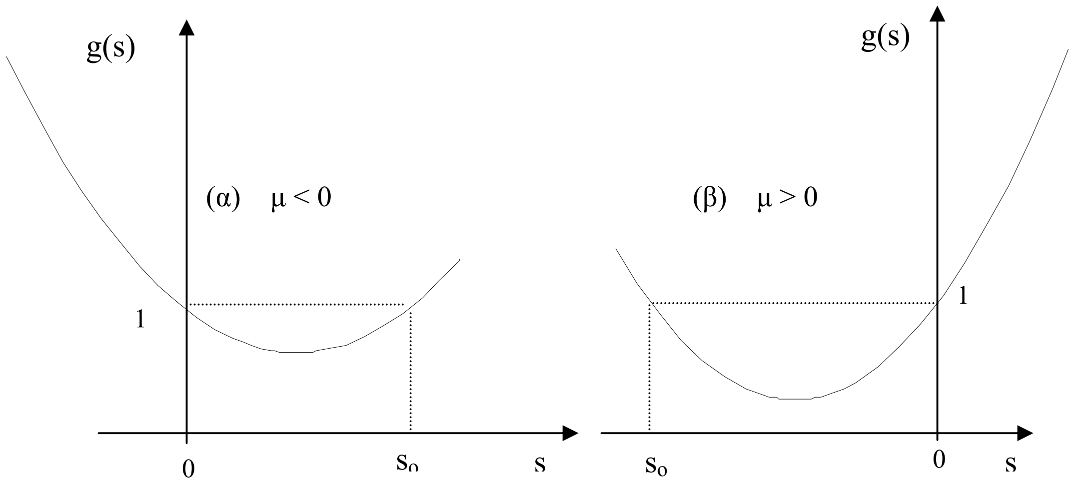
***Σημείωση**:* Στον απλό τυχαίο περίπατο όπου κάθε βήμα είναι μήκους $l = 1$, με a, b ακεραίους θα έχουμε κατ΄ ανάγκη $X_T = -a$ ή $X_T = b$. Συνεπώς το παραπάνω προσεγγιστικό αποτέλεσμα ισχύει ακριβώς.

2.3.2. *Πιθανότητες Απορρόφησης*

Αν παραγωγίσουμε την ροπογεννήτρια συνάρτηση g(s) των προσαυξήσεων Y_i δύο φορές έχουμε:

$$g''(s) = E[Y^2 e^{sY}] > 0 \quad \text{για κάθε } s \in \mathcal{S}.$$

Συνεπώς η ροπογεννήτρια συνάρτηση g(s) είναι κυρτή στο $\mathcal{S}$, εκτός εάν οι τ.μ. Y_i είναι μηδενική με πιθανότητα τη μονάδα.



Σχήμα 2.3. Ροπογεννήτρια συνάρτηση των ανεξαρτήτων προσαυξήσεων.

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι όταν οι πιθανότητες P[Y > 0] και P[Y < 0] είναι μη μηδενικές, τότε η ροπογεννήτρια $g(s) = E[e^{sY}]$ αυξάνεται απεριόριστα για $s \to +\infty$ όπως και για $s \to -\infty$. Τούτο διότι η g(s) γράφεται

$$g(s) = E[e^{sY}] = p\,E[e^{sY}|Y \geq 0] + q\,E[e^{sY}|Y < 0],$$

όπου $p = P[Y\geq 0]$ και $q = P[Y<0]$. Οι δύο όροι συνεπώς στα δεξιά της παραπάνω σχέσης είναι θετικοί. Ο πρώτος αυξάνεται απεριόριστα για $s \to \infty$ και ο δεύτερος για $s \to -\infty$. Συνεπώς, με $\mu \neq 0$ και με θετικές τις πιθανότητες $P[Y > 0]$ και $P[Y < 0]$, υπάρχει μη μηδενική ρίζα της εξίσωσης $g(s) = 1$. Υπάρχει δηλαδή μέσα στο $\mathcal{S}$ σημείο

$$s_0 \neq 0 \text{ τέτοιο ώστε } g(s_0) = E[e^{s_0 Y}] = 1.$$

Θέτοντας την ως άνω τιμή του s στην Ταυτότητα του Wald παίρνουμε

$$E[e^{s_0 X_T}] = 1. \tag{3.10}$$

Με απορροφητικά φράγματα $-a$ και b, και έχοντας αποδείξει ότι ο τυχαίος περίπατος σταματά με πιθανότητα τη μονάδα, ας θεωρήσουμε και πάλι τα δύο ενδεχόμενα απορρόφησης $A = \{I = -1\}$ και $B = \{I = 1\}$ στο $-a$ και b αντίστοιχα. Δηλαδή

$$A = \{I = -1\} = \{\text{ο τ.π. } \{X_n\} \text{ με απoροφ. φράγματα } -a \text{ και } b \text{ απορροφάται στο } -a\}$$

και

$$B = \{I = 1\} = \{\text{ο τ.π. } \{X_n\} \text{ με απoροφ. φράγματα } -a \text{ και } b \text{ απορροφάται στο } b\}.$$

Με $\alpha = \alpha(a, b) = P[A]$ και $\beta = 1 - \alpha = P[B]$ και με δέσμευση στα ενδεχόμενα απορρόφησης $A = \{I = -1\}$ και $B = \{I = 1\}$ έχουμε την παρακάτω ανάλυση:

$$E[e^{sX_T}] = \alpha\,E[e^{sX_T} \mid A] + (1\text{-}\alpha)\,E[e^{sX_T} \mid B] \tag{3.11}$$

και σύμφωνα με την (3.10) θα έχουμε για $s = s_0$:

$$A\,E[e^{s_0 X_T} \mid A] + (1\text{-}\alpha)\,E[e^{s_0 X_T} \mid B] = 1, \tag{3.12}$$

σχέση από την οποία προκύπτει ότι η πιθανότητα απορρόφησης στο $-a$ είναι:

$$\alpha = \frac{E[e^{s_0 X_T} \mid B] - 1}{E[e^{s_0 X_T} \mid B] - E[e^{s_0 X_T} \mid A]}. \tag{3.13}$$

Όμως, όταν η απορρόφηση γίνεται στο $-a$ έχουμε $X_T \cong -a$ και όταν η απορρόφηση γίνεται στο b έχουμε $X_T \cong b$. Συνεπώς

$$E[e^{s_0 X_T} \mid A] \cong e^{-as_0} \quad \text{και} \quad E[e^{s_0 X_T} \mid B] \cong e^{bs_0}, \tag{3.14}$$

οπότε η σχέση (3.10) δίνει

$$\alpha \cong \frac{e^{bs_0}-1}{e^{bs_0}-e^{-as_0}}, \quad s_0 \neq 0 \ \text{ για } \ \mu \neq 0. \tag{3.15}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα προέκυψαν με βάση την υπόθεση ότι $s_0 \neq 0$. Αυτό συμβαίνει όταν μέση τιμή των προσαυξήσεων $\mu \neq 0$. Επειδή για $\mu \to 0$ έχουμε επίσης $s_0 \to 0$, παίρνοντας το όριο στην παραπάνω σχέση για $s_0 \to 0$ και κάνοντας χρήση του κανόνα De l΄ Hospital λαμβάνουμε:

$$\alpha \cong \frac{b}{a+b}, \quad \text{για } \ \mu = 0. \tag{3.16}$$

Εισάγοντας τώρα τα παραπάνω δύο αποτελέσματα στην (3.9), η οποία αφορά την μέση τιμή του χρόνου απορρόφησης T, λαμβάνουμε τελικά

$$E[T] \cong \begin{cases} \dfrac{a(1-e^{bs_0})+b(1-e^{-as_0})}{\mu(e^{bs_0}-e^{-as_0})}, & \text{για } \mu \neq 0, \\ \dfrac{ab}{\sigma^2}, & \text{για } \mu = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Σημειώνουμε εδώ πάλι ότι στον απλό τυχαίο περίπατο με a και b ακεραίους τα παραπάνω προσεγγιστικά αποτελέσματα ισχύουν ακριβώς.

Συμπεράσματα. Από τις σχέσεις (3.13) και (3.14) διαπιστώνουμε τα παρακάτω.

1^ον^. **Όταν $s_0 > 0$**, δηλαδή όταν ο τ.π. έχει αρνητική τάση μ (=E[Y] < 0), τότε για την πιθανότητα απορρόφησης στο κάτω φράγμα -a έχουμε:

$$\alpha = \alpha(a, b) \to 1 \ \text{ για } \ b \to \infty.$$

Αντίστοιχα, για την πιθανότητα απορρόφησης στο άνω φράγμα b έχουμε:

$$\beta = 1\text{-}\ \alpha(a, b) \to 1/E[e^{s_0 X_T}\,|B] \leq \exp\{-s_0 b\} \quad \text{για } \ a \to \infty.$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει διότι για μια μονότονα αύξουσα συνάρτηση h(x) έχουμε $E[h(X) \mid X \geq c\,] \geq h(c)$. Ομοίως, για μια μονότονα φθίνουσα συνάρτηση h(x) έχουμε $E[h(X) \mid X \leq c\,] \geq h(c)$, ανισότητα την οποία χρησιμοποιούμε παρακάτω.

2^ον^. **Όταν $s_0 < 0$**, δηλαδή όταν ο τ.π. έχει θετική τάση μ, τότε για την πιθανότητα απορρόφησης στο άνω φράγμα b έχουμε:

$$\beta = 1- \alpha(a,b) \to 1 \text{ για } a \to \infty.$$

Αντίστοιχα, για την πιθανότητα απορρόφησης στο κάτω φράγμα $-a$ έχουμε:

$$\alpha = \alpha(a, b) \to 1/ E[e^{s_0 X_T} |A] \leq \exp\{as_0\} \quad \text{για } b \to \infty.$$

2.3.3. *Ροπογεννήτρια του Χρόνου Απορρόφησης*

Για τον προσδιορισμό της ροπογεννήτριας του χρόνου απορρόφησης T θεωρούμε τις ρίζες της εξίσωσης

$$g(s) = e^{-t} \quad \text{με } t \in \mathcal{T} \subset \mathbb{R}. \tag{3.18}$$

Λόγω κυρτότητας της g με κατάλληλη επιλογή του $\mathcal{T}$ θα υπάρχουν δύο ρίζες, έστω s_1 και s_2, με $s_1 < s_2$. Έχουμε δηλαδή $s_1 = s_1(t) < s_2 = s_2(t)$, $t \in \mathcal{T}$. Αντικαθιστώντας στην Ταυτότητα του Wald λαμβάνουμε τις παρακάτω δύο εξισώσεις:

$$E[exp\{tT + s_i(t)X_T\}] = 1, \quad t \in \mathcal{T} \ \ (i = 1, 2). \tag{3.19}$$

Επίσης με δέσμευση στα ενδεχόμενα απορρόφησης A και B αντίστοιχα έχουμε την ανάλυση:

$$\begin{aligned} &E[exp\{tT + s_i(t)X_T\}] \\ &\quad = \alpha\, E[exp\{tT + s_i(t)X_T\}|A] + \beta\, E[exp\{tT + s_i(t)X_T\}|B] \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \tag{3.20}$$

και συνεπώς η (3.19) δίνει για κάθε $t \in \mathcal{T}$

$$\alpha\, E[exp\{tT + s_i(t)X_T\}|A] + \beta\, E[exp\{tT + s_i(t)X_T\}|B] = 1 \quad (i = 1, 2).$$

Όμως, όπως προηγουμένως, όταν η απορρόφηση γίνεται στο $-a$ έχουμε $X_T \cong -a$ και όταν η απορρόφηση γίνεται στο b έχουμε $X_T \cong b$. Οπότε έχουμε:

$$\alpha\, exp\{-a\, s_i(t)\}E[e^{tT}|A] + \beta\, exp\{b\, s_i(t)\}E[e^{tT}|B] \cong 1 \quad (i = 1, 2). \tag{3.21}$$

Θέτοντας τώρα

$$g_A(t) = E[e^{tT}|A] \tag{3.22}$$

και

$$g_B(t) = E[e^{tT}|B], \tag{3.23}$$

συναρτήσεις οι οποίες αποτελούν τις δεσμευμένες ροπογεννήτριες του χρόνου απορρόφησης T σε σχέση με την περιοχή απορρόφησης, το σύστημα εξισώσεων (3.21) γίνεται:

$$\begin{aligned} &\alpha\, exp\{-a\, s_1(t)\}g_A(t) + \beta\, exp\{\, b\, s_1(t)\}g_B(t) \cong 1 \\ &\alpha\, exp\{-a\, s_2(t)\}g_A(t) + \beta\, exp\{\, b\, s_2(t)\}g_B(t) \cong 1, \end{aligned} \tag{3.24}$$

σύστημα δύο γραμμικών, ως προς τις ποσότητες αg_A και βg_B, εξισώσεων από το οποίο προκύπτει:

$$\alpha\, g_A(t) \cong \frac{e^{bs_2(t)} - e^{bs_1(t)}}{e^{bs_2(t)-as_1(t)} - e^{bs_1(t)-as_2(t)}}, \quad t \in \mathcal{T} \tag{3.25.α}$$

και

$$\beta\, g_B(t) \cong \frac{e^{-as_1(t)} - e^{-as_2(t)}}{e^{bs_2(t)-as_1(t)} - e^{bs_1(t)-as_2(t)}}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{3.25.β}$$

Όμως η ροπογεννήτρια συνάρτηση του χρόνου απορρόφησης Τ μπορεί να αναλυθεί σε σχέση με την περιοχή απορρόφησης ως ακολούθως:

$$g_T(t) = E[e^{tT}] = \alpha\, E[e^{tT}|A] + \beta\, E[e^{tT}|B] = \alpha\, g_A(t) + \beta\, g_B(t)$$

και συνεπώς

$$g_T(t) \cong \frac{(e^{bs_2(t)} + e^{-as_1(t)}) - (e^{bs_1(t)} + e^{-as_2(t)})}{e^{bs_2(t)-as_1(t)} - e^{bs_1(t)-as_2(t)}}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{3.26}$$

Η παραπάνω σχέση είναι η υπό μορφή ροπογεννητριών αντίστοιχη έκφραση της (2.28) και ισχύει ακριβώς στον απλό τυχαίο περίπατο. Από τη σχέση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά του χρόνου απορρόφησης Τ. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$E[T] = g_T'(0)$$

και

$$V[T] = E[T^2] - \{E[T]\}^2 = g_T''(0) - \{g_T'(0)\}^2.$$

Κάνοντας εφαρμογή του Κ.Ο.Θ. και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να προσδιορίσουμε με ικανοποιητική προσέγγιση τις πιθανότητες που αφορούν στον χρόνο απορρόφησης Τ.

2.4. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΤΥΧΑΙΟΥ ΠΕΡΙΠΑΤΟΥ

Θα κάνουμε εφαρμογή τώρα των παραπάνω αποτελεσμάτων σε διάφορες σ.α. ανεξαρτήτων προσαυξήσεων.

2.4.1. *Απλός Τυχαίος Περίπατος - Καταστροφή του Παίκτη*

Έστω $\{X_n : n = 1, 2, \dots \}$ απλός τυχαίος περίπατος. Έχουμε δηλαδή

$$X_n = X_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

όπου $X_0 = 0$, η θέση εκκίνησης, και Y_i $(i = 1, 2, \dots)$ ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή

$$Y_i = \begin{cases} +1, & \text{με πιθανότητα } p \\ -1, & \text{με πιθανότητα } q. \end{cases}$$

Ο ως άνω τ.π. μπορεί να θεωρηθεί ως η κατάσταση ενός παίκτη μετά από n παιχνίδια στα οποία κερδίζει ή χάνει κάθε φορά 1€ με πιθανότητες p και q αντίστοιχα.

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση των Y_i είναι

$$g(s) = E[e^{sY}] = p\, e^{s} + q\, e^{-s}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

Για τον προσδιορισμό της μη μηδενικής λύσης s_0 της εξίσωσης $g(s) = 1$, γράφουμε

$$p\, e^{s} + q\, e^{-s} = 1 = p + q$$

από την οποία προκύπτει η εξίσωση

$$(p\, e^{s} - q)\,(1 - e^{-s}) = 0,$$

οπότε $s_0 = \mathit{ln}(q/p) = \mathit{ln}\, \lambda$ με $\lambda = q/p$. Η λύση αυτή είναι μη μηδενική όταν το $\lambda \neq 1$ ή, ισοδύναμα, όταν $p \neq q$. Με εφαρμογή τώρα της (3.15), η οποία ισχύει ακριβώς εδώ, λαμβάνουμε το γνωστό αποτέλεσμα

$$\alpha = \frac{\lambda^{b} - 1}{\lambda^{b} - \lambda^{-a}}.$$

Για τον προσδιορισμό της πιθανότητας α όταν έχουμε $p = q$ λαμβάνουμε το όριο της παραπάνω παράστασης για $\lambda \to 1$ κάνοντας χρήση του κανόνα De l΄ Hospital. Οπότε για $\lambda \to 1$ προκύπτει:

$$\alpha = \frac{b}{a + b}.$$

Είναι φανερό ότι όταν έχουμε $\lambda \geq 1$, δηλαδή $\mu = E[Y] = p - q \leq 0$ (μη θετική τάση), τότε

$$\alpha_\infty \equiv \alpha(a, +\infty) = lim\ \alpha(a, b) = 1 \quad \text{για } b \to +\infty.$$

Όταν όμως έχουμε $\lambda < 1$, δηλαδή $\mu = p - q > 0$ (θετική τάση), τότε

$$\alpha_\infty = \alpha(a, +\infty) = lim\ \alpha(a, b) = \lambda^a \quad \text{για } b \to +\infty.$$

Τούτο σημαίνει ότι όταν ένας παίκτης με κεφάλαιο a παίζει με παίκτη ο οποίος διαθέτει απεριόριστο κεφάλαιο, η μόνη περίπτωση να μη χάσει το κεφάλαιό του είναι να παίζει παιχνίδι με θετική τάση, δηλαδή με $p > q$. Και πάλι όμως αυτό δεν είναι βέβαιο αλλά είναι με πιθανότητα $1- \lambda^a$. Το "αντιστάθμισμα" εδώ είναι ότι το αναμενόμενο κέρδος είναι άπειρο σε χρόνο άπειρο!.

Σχετικά με τη μέση διάρκεια του παιχνιδιού T έχουμε τα παρακάτω. Με $\mu = E[Y] \neq 0$ η σχέση (3.15), η οποία ισχύει ακριβώς εδώ, δίνει

$$E[T] = \frac{b(1-\alpha) - a\alpha}{\mu}$$

και αντικαθιστώντας την πιθανότητα α έχουμε μέση διάρκεια παιχνιδιού:

$$E[T] = \frac{1}{p-q}\{b\frac{1-\lambda^{-a}}{\lambda^b - \lambda^{-a}} - a\frac{\lambda^b - 1}{\lambda^b - \lambda^{-a}}\}. \tag{4.1}$$

Για τον προσδιορισμό της μέσης διάρκειας του παιχνιδιού όταν $\mu = 0$ λαμβάνουμε το όριο της παραπάνω έκφρασης για $\lambda \to 1$. Έτσι για $\mu = 0$ λαμβάνουμε

$$E[T] = a\, b. \tag{4.2}$$

Θεώρημα. Στον απλό τυχαίο περίπατο χωρίς απορροφητικά φράγματα και με αρνητική τάση $p - q$, η κατανομή του $M = \max\{X_n : n = 1, 2, \ldots\}$ ακολουθεί την Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\theta = 1/\lambda = p/q$.

Απόδειξη. Το ενδεχόμενο $\{M \geq m\}$ στον χωρίς φράγματα απλό τυχαίο περίπατο είναι ταυτόσημο με το ενδεχόμενο B απορρόφησης στο άνω φράγμα $b = m$ του απλού τυχαίου περίπατου με κάτω φράγμα $-a = -\infty$. Συνεπώς από τα προηγούμενα έχουμε

$$P[M \geq m] = \lambda^{-m} = \theta^m.$$

Όμως

$$P[M = m] = P[M \geq m] - P[M \geq m+1],$$

από την οποία αντικαθιστώντας λαμβάνουμε

$$P[M = m] = \theta^m - \theta^{m+1} = \theta^m (1 - \theta), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

■

2.4.2. *Τυχαίος Περίπατος Κανονικών Προσαυξήσεων - Ταμείο Τράπεζας*

Έστω τ.π. $\{X_n : n = 1, 2, \ldots\}$ ο οποίος εκφράζει την κίνηση σε ταμείο μιας τράπεζας. Οι μεταβολές που γίνονται στο ταμείο από τις καταθέσεις/αναλήψεις των πελατών θεωρούνται ότι ακολουθούν Κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Έχουμε δηλαδή μετά την εξυπηρέτηση του n-πελάτη

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

με Y_i $(i = 1, 2, \ldots)$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $N(\mu, \sigma^2)$ κατανομή.

Η ροπογεννήτρια της $N(\mu, \sigma^2)$ είναι (βλ. Παράδειγμα 5 της §1.3)

$$g(s) = exp\{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\}, \quad s \in \mathcal{S} = \mathbb{R}.$$

με μη μηδενική ρίζα της εξίσωσης $g(s) = 1$ την $s_0 = -2\mu/\sigma^2$.

Έστω τώρα ότι το ταμείο της τράπεζας ξεκινά κάθε πρωί με ένα ποσό a€ για την κάλυψη των αναλήψεων της ημέρας. Έστω επίσης ότι το σύνολο των καταθέσεων που μπορούν να γίνουν σε μια ημέρα στο συγκεκριμένο ταμείο εκτιμάται ότι είναι b€. Η πιθανότητα απορρόφησης στο -a, να έλθει δηλαδή στιγμή που δεν θα μπορεί να καλύψει κάποια ανάληψη, με βάση την (3.15) για $\mu \neq 0$ είναι:

$$\alpha \cong \frac{e^{bs_0} - 1}{e^{bs_0} - e^{-as_0}} = \frac{e^{-2b\mu/\sigma^2} - 1}{e^{-2b\mu/\sigma^2} - e^{2a\mu/\sigma^2}}. \tag{4.3}$$

Παίρνοντας τα όρια για $\mu \to 0$ η πιθανότητα απορρόφησης στο -a με μέσο $\mu = 0$ είναι:

$$\alpha \cong \frac{b}{a + b}.$$

Για $b \to \infty$ η απορρόφηση στο -a γίνεται με βεβαιότητα όταν ο μέσος $\mu \leq 0$, ενώ όταν $\mu > 0$ γίνεται με πιθανότητα:

$$\alpha \cong e^{-2a\mu/\sigma^2}. \tag{4.4}$$

Υπενθυμίζεται ότι το δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης αποτελεί ένα άνω φράγμα της πιθανότητας απορρόφησης (βλ. Συμπεράσματα στην §2.3.2).

Με εφαρμογή του αποτελέσματος (3.17) ο αναμενόμενος αριθμός πελατών μέχρι την απορρόφηση στο -a ή b είναι:

$$E[N] \cong \begin{cases} \dfrac{a(1-e^{-2\mu b/\sigma^2}) + b(1-e^{2\mu a/\sigma^2})}{\mu(e^{-2\mu b/\sigma^2} - e^{2\mu a/\sigma^2})}, & \text{για } \mu \neq 0, \\ \dfrac{ab}{\sigma^2}, & \text{για } \mu = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Λύνοντας ως προς s την εξίσωση $g(s) = e^{-t}$, ή ισοδύναμα την εξίσωση

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 + \mu s + t = 0,$$

λαμβάνουμε για $t < \mu^2/2\sigma^2$

$$s_1 = s_1(t) = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2 t}}{\sigma^2}, \quad s_2 = s_2(t) = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2 t}}{\sigma^2}. \tag{4.6}$$

Για τις ως άνω τιμές του s η ταυτότητα του Wald δίνει το παρακάτω γραμμικό σύστημα εξισώσεων [βλ. (3.24)]

$$\begin{aligned} &\alpha\, exp\{-a\, s_1(t)\} g_A(t) + (1-\alpha)\, exp\{b\, s_1(t)\} g_B(t) \cong 1 \\ &\alpha\, exp\{-a\, s_2(t)\} g_A(t) + (1-\alpha)\, exp\{b\, s_2(t)\} g_B(t) \cong 1. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Λύνοντας το παραπάνω γραμμικό σύστημα ως προς τις ποσότητες $\alpha g_A(t)$ και $(1-\alpha)g_B(t)$ προκύπτει ότι η προσεγγιστική έκφραση της ροπογεννήτριας του χρόνου απορρόφησης N και συγκεκριμένα της

$$g_N(t) = \alpha\, g_A(t) + (1-\alpha)\, g_B(t)$$

είναι:

$$g_N(t) \cong \frac{[e^{bs_2(t)} - e^{bs_1(t)}] + [e^{-as_1(t)} - e^{-as_2(t)}]}{e^{bs_2(t)-as_1(t)} - e^{bs_1(t)-as_2(t)}}, \quad t \in \mathcal{T} = (-\infty, \mu^2/2\sigma^2) \subset \mathcal{S}.$$

με $s_i(t)$ $(i = 1, 2)$ από την (4.6).

Θέτοντας *ln*t στην θέση του t, και συνεπώς με

$$s_1 = s_1(t) = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\, ln\, t}}{\sigma^2}, \quad s_2 = s_2(t) = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2\, ln\, t}}{\sigma^2}$$

προκύπτει η γεννήτρια πιθανοτήτων $\pi_N(t)$ του χρόνου απορρόφησης N. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\pi_N(t) \cong \frac{[\{z_2(t)\}^b - \{z_1(t)\}^b] + [\{z_1(t)\}^{-a} - \{z_2(t)\}^{-a}]}{\{z_2(t)\}^b\{z_1(t)\}^{-a} - \{z_1(t)\}^b\{z_2(t)\}^{-a}}, \tag{4.8}$$
$$t \in \mathcal{T} = (0, exp\{\mu^2/2\sigma^2\}),$$

όπου $z_i(t) = exp\{s_i(t)\}$ $(i = 1, 2)$.

2.4.3. *Τυχαίος Περίπατος Ανεξαρτήτων Προσαυξήσεων - Ασφαλιστικά Συμβόλαια*

Σε ασφαλιστική εταιρεία φθάνουν αιτήματα αποζημίωσης ασφαλισμένων σε τυχαίες χρονικές στιγμές T_i $(i = 1, 2, \ldots)$ με $T_i \le T_{t+1}$. Υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι $X_i = T_i - T_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, με $T_0 = 0$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (μη αρνητικές) τ.μ. με μέση τιμή μ_X ($\mu_X > 0$). Υποθέτουμε επίσης τα ποσά των αποζημιώσεων Y_i (i = 1, 2, …) επίσης ανεξάρτητες και ισόνομες (μη αρνητικές) τ.μ. με μέση μ_Y. Αν N(t) είναι ο αριθμός των αιτουμένων αποζημιώσεων στο χρονικό διάστημα (0, t], τότε το συνολικό ποσό αποζημίωσης θα είναι:

$$S_Y(t) = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{N(t).}$$

Παράλληλα η ασφαλιστική εταιρεία έχει από τα ασφάλιστρα έσοδα τα οποία, αφαιρουμένου του λειτουργικού κόστους στον αντίστοιχο χρόνο, είναι ct. Αν A_0 είναι το αρχικό κεφάλαιο της εταιρείας μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε με ποια πιθανότητα η ασφαλιστική εταιρεία ενδέχεται να αδυνατεί κάποια στιγμή να υποστηρίξει τα συμβόλαιά της. Μας ενδιαφέρει δηλαδή η πιθανότητα

$$p = P[A_0 + ct - S_Y(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \in (0, +\infty)].$$

Επειδή η χρονική στιγμή της αδυναμίας κάλυψης ασφαλιστικής υποχρέωσης συμπίπτει με τον χρόνο κάποιου αιτήματος αποζημίωσης, είναι χρήσιμο να αναφερόμαστε στις χρονικές κατά τις οποίες προκύπτουν αιτήματα αποζημίωσης. Έτσι κατά την χρονική στιγμή κατά την οποία προκύπτει το n-αίτημα αποζημίωσης θα έχουμε τυχαίο συνολικό χρόνο

$$T = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

με συνολικές αποζημιώσεις

$$S_{Y,n} = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n.$$

Η οικονομική κατάσταση της εταιρείας θα είναι συνεπώς

$$A_0 + c\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i = A_0 - \sum_{i=1}^{n} U_i, \tag{4.9}$$

με $U_i = Y_i - cX_i$ (i=1,2, …). Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$p = P[S_{U,n} = \sum_{i=1}^{n} U_i > A_0 \text{ για κάποιο n}].$$

Επειδή τα U_i είναι ανεξάρτητα και ισόνομα η $\{S_{U,n}: n = 1, 2, …\}$ είναι μια σ.α. ανεξαρτήτων και ισονόμων προσαυξήσεων, δηλαδή ένας τυχαίος περίπατος. Συνεπώς όταν $\mu = E[U] = E[Y] - c\ E[X] \geq 0$, τότε με πιθανότητα τη μονάδα η ασφαλιστική εταιρεία θα αντιμετωπίσει αδυναμία υποστήριξης των συμβολαίων της κάποια στιγμή. Όταν όμως $E[U] < 0$, τότε υπάρχει θετική πιθανότητα $1 – p$ να μην αντιμετωπίσει τέτοια κατάσταση. Η πιθανότητα p αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο απορρόφησης στο άνω φράγμα τυχαίου περίπατου με τάση μ αρνητική, όπου το άνω φράγμα εδώ είναι $b = A_0$ και το κάτω φράγμα $-a = -\infty$. Η πιθανότητα απορρόφησης συνεπώς είναι:

$$p \cong \exp\{-A_0 s_0\} \tag{4.10}$$

με s_0 τη μη-μηδενική ρίζα της εξίσωσης

$$g_U(s) = E[e^{sU}] = 1.$$

Λόγω της ανεξαρτησίας μεταξύ των X_i και Y_i θα έχουμε

$$g_U(s) = E[e^{sU}] = E[e^{s(Y-cX)}] = g_Y(s)\, g_X(-cs),$$

και συνεπώς θα έχουμε ως s_0 τη μη-μηδενική ρίζα της εξίσωσης

$$E[e^{sY}]\cdot E[e^{-scX}] = 1. \tag{4.11}$$

Σημειώνεται ότι η ως άνω ρίζα είναι θετική αφού η ροπογεννήτρια g_U έχει παράγωγο στη θέση μηδέν $g'_U(0) = \mu = E[U] < 0$.

2.4.4. *Συστήματα Εξυπηρέτησης*

Θεωρούμε ένα χώρο στον οποίο προσέρχονται πελάτες για να διεκπεραιώσουν μια υπόθεση τους ή γενικότερα να κάνουν χρήση των προσφερομένων υπηρεσιών. Ο χώρος αυτός μπορεί να είναι ένα κατάστημα τραπέζης, ένα ιατρείο ή μια κλινική, ένα internet café ή ένα δικτυακό κέντρο, ένας χώρος αναψυχής κ.λπ. Τα κύρια χαρακτηριστικά ενός χώρου εξυπηρέτησης είναι τα εξής:

(α) Ο ρυθμός αφίξεων πελατών και πιο συγκεκριμένα η από κοινού κατανομή των χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων πελατών. Οι χρόνοι αυτοί συμβολίζονται με X_n $(n = 1, 2,\ldots)$.

(β) Ο ρυθμός εξυπηρέτησης και πιο συγκεκριμένα η από κοινού κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης συμβολίζονται με V_n $(n = 1, 2,\ldots)$.

(γ) Ο αριθμός m των μονάδων εξυπηρέτησης.

Σχετικά με το πρώτο χαρακτηριστικό ενός χώρου εξυπηρέτησης πελατών, ή Συστήματος Εξυπηρέτησης, (Σ.Ε.) στο εξής, συνήθης πρακτική είναι να θεωρούμε ότι οι πελάτες φθάνουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο με ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με γενική κατανομή συμβολιζόμενη με G. Σχετικά με το δεύτερο χαρακτηριστικό, συνήθως θεωρούμε ότι σε κάθε μονάδα εξυπηρέτησης του συστήματος οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι πάλι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με γενική κατανομή G, ίδια για όλες τις μονάδες του συστήματος και μη εξαρτώμενη από το πλήθος των πελατών μέσα στο σύστημα. Αν m είναι ο αριθμός των μονάδων του Σ.Ε. τότε αυτό συμβολίζεται με G/G/m. Το γράμμα G στους χρόνους αφίξεων και στους χρόνους εξυπηρέτησης αποδίδει την γενικότητα των δύο κατανομών και δεν σημαίνει ότι ταυτίζονται. Ειδικές περιπτώσεις των Σ.Ε. έχουμε όταν οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ακολουθούν Εκθετική κατανομή, σύστημα M/G/m, ή όταν οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν Εκθετική κατανομή, σύστημα G/M/m ή ακόμα όταν τόσο οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων όσο και οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν Εκθετικές κατανομές, σύστημα M/M/m. Ο συμβολισμός M προέρχεται από την χαρακτηριστική ιδιότητα της Εκθετικής κατανομής και συγκεκριμένα την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης (*memoryless*).

Άλλα ενδιαφέροντα στοιχεία ενός Σ.Ε. είναι το μέγεθος του χώρου υποδοχής, δηλαδή πόσοι πελάτες το πολύ επιτρέπεται να παραμένουν στο σύστημα πριν ξεκινήσει η εξυπηρέτησή τους, οι χρόνοι παραμονής στο χώρο υποδοχής, συμβολιζόμενοι με Q_n, ο συνολικός αριθμός των πελατών στο σύστημα, το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα υπολειτουργεί ή βρίσκεται χωρίς απασχόληση κλπ.

2.4.4.α *Σύστημα Εξυπηρέτησης G/G/1*

Θα μελετήσουμε το Σ.Ε. G/G/1, με μια δηλαδή μονάδα εξυπηρέτησης και γενικές κατανομές για τους χρόνους αφίξεων και τους χρόνους εξυπηρετήσεων. Έστω X_n ο χρόνος που παρήλθε από τη στιγμή προσέλευσης του (n-1)-πελάτη μέχρι την στιγμή προσέλευσης του n-πελάτη και V_n ο χρόνος εξυπηρέτησης του n-πελάτη. Έστω επίσης W_n ο συνολικός χρόνος κατά τον οποίον βρίσκεται μέσα στο Σ.Ε. ο n-πελάτης και $Q_n = W_n - V_n$ ο χρόνος αναμονής, δηλαδή ο χρόνος κατά τον οποίον οφείλει να παραμείνει στη "γραμμή αναμονής", ή διαφορετικά στην "ουρά", μέχρις ότου αρχίσει η εξυπηρέτησή του. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την πιθανότητα:

$$p_n = P[Q_n \geq c] \quad \text{για } c > 0 \text{ και } n >> 1. \tag{4.12}$$

Είναι φανερό ότι όταν ο συνολικός χρόνος W_n παραμονής μέσα στο σύστημα του n-πελάτη είναι μικρότερος από τον χρόνο X_{n+1} που παρέρχεται μέχρι την προσέλευση του επόμενου, τότε ο πελάτης αυτός δεν θα χρειαστεί να περιμένει καθόλου στη σειρά. Στην περίπτωση αυτή ο (n+1)-πελάτης θα έχει συνολικό χρόνο παραμονής στο σύστημα $W_{n+1} = V_{n+1}$ και χρόνο παραμονής στη σειρά $Q_{n+1} = 0$. Αντίθετα, όταν ο συνολικός χρόνος W_n παραμονής μέσα στο σύστημα του n-πελάτη είναι μεγαλύτερος από τον χρόνο X_{n+1} που παρέρχεται μέχρι την προσέλευση του επόμενου, τότε ο πελάτης αυτός οφείλει να περιμένει στην γραμμή αναμονής για χρόνο $Q_{n+1} = W_n - X_{n+1} = Q_n + V_n - X_{n+1}$. Έχουμε συνεπώς για τον (n+1)-πελάτη χρόνο αναμονής στη σειρά:

$$\begin{aligned} &Q_{n+1} = \max\{0, Q_n + V_n - X_{n+1}\} \quad (n = 1, 2, ...) \\ &\text{με} \quad Q_1 = 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση $U_n = V_n - X_{n+1}$ λαμβάνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= \max\{0, U_n + Q_n\} = \max\{0, U_n + \max\{0, U_{n-1} + Q_{n-1}\}\} \\ &= \max\{0, U_n, U_n + U_{n-1} + Q_{n-1}\} \\ &= \max\{0, U_n, U_n + U_{n-1}, U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + Q_{n-2}\} \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ &= \max\{0, U_n, U_n + U_{n-1}, U_n + U_{n-1} + U_{n-2}, \ldots, U_n + U_{n-1} + U_{n-2}, \ldots, + U_1\}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

με

$$U_n = V_n - X_{n+1} \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{4.15}$$

Θεώρημα. Στο Σύστημα Εξυπηρέτησης G/G/1 με ανεξάρτητους και ισόνομους ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων X_i και ανεξάρτητους και ισόνομους χρόνους εξυπηρέτησης V_i $(i = 1, 2, \ldots)$, η πιθανότητα ο $(n+1)$-πελάτης να περιμένει χρόνο μεγαλύτερο του c δίνεται από την πιθανότητα που έχει ένας τυχαίος περίπατος με ανεξάρτητες προσαυξήσεις $U_i = V_i - X_{i+1}$ να υπερβεί το c προ του $(n+1)$-βήματος.

Απόδειξη: Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P[Q_{n+1} \geq c] \\ &= P[\text{ο τ.π. } \{S_\nu : \nu = 1,2, \ldots\} \text{ υπερβαίνει το } c \text{ προ του } (n+1)\text{-βήματος}], \end{aligned} \tag{4.16}$$

όπου

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} U_i = \sum_{i=1}^{\nu} (V_i - X_{i+1}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{4.17}$$

και $S_0 = 0$.

Προφανώς οι τ.μ. $U_i = V_i - X_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ είναι επίσης ανεξάρτητες και ισόνομες με σ.π., έστω h. Τούτο σημαίνει ότι οι από κοινού κατανομές των τ.μ. U_1, $U_2, \ldots, U_n$, για όλα τα n, είναι αναλλοίωτες στις μεταθέσεις των μεταβλητών αφού η από κοινού σ.π. αυτών, έστω f, γράφεται ως γινόμενο των ίδιων περιθωρίων h. Έχουμε δηλαδή,

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \prod_{i=1}^{n} h(u_i) = \prod_{j=1}^{n} h(u_{i_j}) = f(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}),$$

$$\forall \ (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\text{και } \forall \text{ μετάθεση } (u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}) \text{ των } \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι γνωστό ως **αρχή της δυϊκότητας**.

Κατά συνέπεια η ζητούμενη πιθανότητα p_{n+1} δεν αλλάζει αν αντικαταστήσουμε στη σχέση (4.14) το U_{n-k+1} με το U_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Οπότε η (4.12) γράφεται:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P[Q_{n+1} \geq c] \\ &= P[\max\{0, U_1, U_1 + U_2, U_1 + U_2 + U_3, \ldots, U_1 + U_2 + U_3, \ldots, + U_n\} \geq c] \\ &= P[\text{ο τ.π. } \{S_\nu : \nu = 1,2, \ldots\} \text{ υπερβαίνει το } c \text{ προ του } (n+1)\text{-βήματος}]. \end{aligned}$$

■

Από την (4.16) είναι προφανές ότι έχουμε $p_n \le p_{n+1}$ και συνεπώς η ακολουθία $\{p_n\}$ συγκλίνει. Εάν τώρα έχουμε $E[U] = E[V] - E[X] \ge 0$, δηλαδή μη αρνητική τάση, τότε για $n \to \infty$, $p_n \to 1$. Εάν όμως έχουμε $E[U] = E[V] - E[X] < 0$, δηλαδή αρνητική τάση, θα έχουμε το όριο (κατανομή ισορροπίας του χρόνου αναμονής Q_n)

$$\begin{aligned} p_n \to P[Q_\infty \ge c] &= P[\text{ο τ.π. } \{S_n: n=1,2,\ldots\} \text{ υπερβαίνει το } c \text{ για κάποιο } n] \\ &\cong \exp\{-cs_0\} \end{aligned} \tag{4.18}$$

με s_0 τη μη μηδενική ρίζα της εξίσωσης

$$g_U(s) = E[e^{sU}] = 1,$$

ή ισοδύναμα, της εξίσωσης

$$E[e^{sV}]\, E[e^{-sX}] = 1,$$

ρίζα η οποία είναι θετική αφού $E[U] = E[V - X] < 0$.

2.4.4.β *Σύστημα Εξυπηρέτησης G/M/1*

Στο σύστημα αυτό ισχύουν ότι και στο προηγούμενο με το επιπρόσθετο στοιχείο ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης V_n ακολουθούν την Εκθετική κατανομή, δηλαδή έχουμε:

$$f(v) = \alpha\, e^{-\alpha v} \quad (v > 0) \text{ με παράμετρο } \alpha > 0.$$

Συνεπώς έχουμε μέσο χρόνο εξυπηρέτησης $E[V] = 1/\alpha$ με την παράμετρο α να εκφράζει τον ***ρυθμό εξυπηρέτησης***.

Υπενθυμίζεται εδώ η χαρακτηριστική ιδιότητα της Εκθετικής κατανομής, συγκεκριμένα η ιδιότητα της έλλειψης μνήμης, η οποία εκφράζεται από την σχέση:

$$P[V > v + c \mid V \ge c] = P[V > v] = e^{-\alpha v} \quad (v > 0) \quad \text{για κάθε } c > 0.$$

Τούτο σημαίνει ότι για κάθε $c > 0$ η τ.μ. $V - c$, όταν δίνεται ότι $V \ge c$, έχει την ίδια κατανομή με την τ.μ. V και συνεπώς δεν εξαρτάται από την εκάστοτε τιμή του c, δεν “θυμάται” δηλαδή τον χρόνο που έχει παρέλθει.

Για τη ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας Εκθετικά κατανεμημένης τ.μ. V συνεπώς ισχύει:

$$g(s) = E[e^{sV}] = E[e^{s(V-c)} \mid V \ge c] = \frac{\alpha}{\alpha - s} \quad (s < \alpha) \text{ για κάθε } c > 0. \tag{4.19}$$

Από την (4.18) λαμβάνουμε:

$$p_n \to P[Q_\infty \geq c] = P[\text{ο τ.π. } \{S_n : n = 1, 2, \ldots\} \text{ υπερβαίνει το c για κάποιο n}]. \qquad (4.20)$$

Με βάση την Ταυτότητα του Wald επίσης έχουμε ότι για ένα τ.π. $\{S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$, n =1, 2, …} με απορροφητικά φράγματα -a και b ισχύει η σχέση

$$E[e^{s_0 S_N} \mid S_N \leq -a]\, P[S_N \leq -a] + E[e^{s_0 S_N} \mid S_N \geq b]\, P[S_N \geq b] = 1$$

με s_0 την μη-μηδενική ρίζα της εξίσωσης

$$g_U(s_0) = 1.$$

Από την παραπάνω σχέση λαμβάνουμε:

$$P[S_N \geq b] = \{1 - E[e^{s_0 S_N} \mid S_N \leq -a]\} \,/\, \{E[e^{s_0 S_N} \mid S_N \geq b] - E[e^{s_0 S_N} \mid S_N \leq -a]\} \qquad (4.21)$$

με

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} U_i = V_N - X_{N+1} + \sum_{i=1}^{N-1} (V_i - X_{i+1}) = V_N + R_N,$$

όπου N ο πελάτης στον χρόνο εξυπηρέτησης του οποίου προξενήθηκε η υπέρβαση $\{Q_{N+1} \geq c\}$ στον επόμενο πελάτη, και

$$R_N = \sum_{i=1}^{N-1} (V_i - X_{i+1}) - X_{N+1} = \sum_{i=1}^{N-1} V_i - \sum_{i=2}^{N} X_i,$$

όπου το πρώτο άθροισμα δεξιά δίνει το συνολικό χρόνο απασχόλησης του συστήματος μέχρι και την εξυπηρέτηση του (N – 1)-πελάτη και το δεύτερο άθροισμα δεξιά δίνει τον χρόνο που παρήλθε από την άφιξη του $1^{ου}$ πελάτη μέχρι την άφιξη του (N+1)-πελάτη. Δηλαδή, η ποσότητα R_N εκφράζει τη χρονική "επιβάρυνση" του Σ.Ε. κατά τη στιγμή άφιξης του (N+1)-πελάτη. Προφανώς πρέπει $R_N < c$ διότι διαφορετικά ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη, προηγούμενου του (N+1), θα είχε υπερβεί το c.

Παίρνοντας το όριο της (4.21) για $a \longrightarrow \infty$ με b = c σταθερό και έχοντας $s_0 > 0$ λαμβάνουμε:

$$P[S_N \geq b] = 1 \,/\, E[e^{s_0 S_N} \mid S_N \geq b]. \qquad (4.22)$$

Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης κάθε πελάτη δεν επηρεάζεται από την κατάσταση του συστήματος. Συνεπώς για δεδομένη τιμή του N, έστω n, και δεδομένη τιμή του R_N, έστω r (r < c), η τ.μ. V_n ακολουθεί Εκθετική κατανομή παραμέτρου α.

Κάνοντας τώρα χρήση της ιδιότητας της έλλειψης μνήμης της Εκθετικής κατανομής θα δείξουμε ότι η δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. S_N – c, όταν δίνεται ότι

$S_N \geq c$, είναι η Εκθετική με παράμετρο α, έχει δηλαδή την ίδια κατανομή με τα V_n $(n = 1, 2,\ldots)$. Πράγματι δεσμεύοντας, προς στιγμή, ως προς τα ενδεχόμενα $\{N = n\}$, $\{R_N = r\}$ και $\{S_N \geq c\}$ = {απορρόφηση στο c}, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&P[S_N - c > t|N = n, R_N = r, S_N \geq c] \\
&\qquad = P[V_N + R_N - c > t|N = n, R_N = r, V_N + R_N \geq c] \\
&\qquad = P[V_n > t + c - r|N = n, R_n = r, V_n \geq c - r] \\
&\qquad = P[V_n > t + c - r|V_n \geq c - r] \quad \text{και από την (4.19)} \\
&\qquad = P[V_n > t] = e^{-\alpha t}.
\end{aligned}
$$

Εφόσον η τελευταία πιθανότητα δεν εξαρτάται από τα ενδεχόμενα $\{N = n\}$ και $\{R_n = r\}$, λαμβάνοντας τη μέση τιμή της δεσμευμένης πιθανότητας $P[S_N - c > t|N = n, R_N = r, S_N \geq c]$ ως προς τις τ.μ. N και R_N, παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
&P[S_N - c > t|\, S_N \geq c] \\
&\qquad = E\{P[S_N - c > t|N = n, R_N = r, S_N \geq c]\} = e^{-\alpha t} \qquad (t > 0).
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, με δεδομένη την απορρόφηση στο c, η δεσμευμένη ροπογεννήτρια του S_N στη θέση $s = s_0$ $(< \alpha)$ θα είναι:

$$E[e^{s_0 S_N}|S_N \geq c] = e^{s_0 c} E[e^{s_0(S_N - c)}|S_N \geq c\,] = e^{s_0 c}\frac{\alpha}{\alpha - s_0}. \tag{4.23}$$

Θεώρημα. Σε Σύστημα Εξυπηρέτησης G/M/1 με χρόνους εξυπηρέτησης V_i $(i \geq 1)$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με Εκθετική κατανομή παραμέτρου α και με ανεξάρτητους και ισόνομους ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων X_i $(i \geq 1)$, όταν έχουμε $E[V] < E[X]$ τότε

$$P[Q_\infty \geq c] = \frac{\alpha - s_0}{\alpha} e^{-s_0 c}, \qquad c > 0, \tag{4.24}$$

$$P[Q_\infty = 0] = \frac{s_0}{\alpha}, \tag{4.25}$$

όπου s_0 είναι η μη μηδενική ρίζα της εξίσωσης

$$E[e^{-sX}] = \frac{\alpha - s}{\alpha}.$$

Απόδειξη. Εισάγοντας την (4.20) και την (4.23) στην (4.22) με $b = c$ λαμβάνουμε την (4.24). Από την τελευταία λαμβάνοντας τα όρια για $c \to 0$ λαμβάνουμε $P[Q_\infty > 0] = (\alpha - s_0)/\alpha$ και απ' αυτήν την (4.25). ∎

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1. Με εφαρμογή του 1ου Λήμματος Borel-Cantelli να αποδείξετε ότι στον απλό τυχαίο περίπατο όταν $p \neq q$ το ενδεχόμενο

$$\textit{limsup}\ A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

με $A_n = \{X_n = 0\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ έχει πιθανότητα μηδέν. (Να ερμηνευτεί το αποτέλεσμα αυτό).

2.2. Να αποδειχθεί ότι στον απλό τυχαίο περίπατο η σ.α. $\{X_n/n : n = 1, 2, \ldots\}$ συγκλίνει με πιθανότητα τη μονάδα στο $p - q$.

2.3. Να αποδείξετε ότι στον απλό τυχαίο περίπατο για κάθε αριθμό a έχουμε:

$$P[X_n > a] \to \begin{cases} 1, & \text{όταν } p > q \\ 0, & \text{όταν } p < q \end{cases} \quad \text{για } n \to \infty.$$

2.4. Στον απλό τυχαίο περίπατο με $X_0 = 0$ έστω α η πιθανότητα να φθάσει το σωματίδιο κάποια στιγμή στη θέση $s = 1$. Με αναφορά στο αποτέλεσμα του 1ου βήματος να δείξετε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

(α) $\alpha = p + (1 - p)\alpha^2$.

(β) $\alpha = \begin{cases} 1, & \text{για } p \geq 1/2 \\ p/q, & \text{για } p < 1/2. \end{cases}$

2.5. (Συνέχεια προηγούμενης). Να απαντηθούν τα παρακάτω:

(α) Ποια η πιθανότητα να φθάσει κάποια στιγμή στη κατάσταση m; $(m>0)$.
(β) Για $p < ½$ και με δεδομένο ότι κάποια στιγμή φθάνει την κατάσταση m $(m>0)$ να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα να περάσει από την κατάσταση k στην κατάσταση $k+1$ με $k < m$.

2.6. Αν T είναι ο χρόνος (ο αριθμός των βημάτων) στον απλό τ.π. μέχρι να φθάσει το σωματίδιο για πρώτη φορά στην κατάσταση 1, να δείξετε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

(α) $E[T] = \begin{cases} 1/(2p-1), & \text{για } p > 1/2 \\ \infty, & \text{για } p \leq 1/2. \end{cases}$

(β) Για $p > ½$,

$$\mathrm{Var}[T] = \frac{4p(1-p)}{(2p-1)^3}.$$

2.7. Με βάση τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης να προσδιορίσετε τα παρακάτω.

(α) Το μέσο χρόνο μέχρι να φθάσει το σωματίδιο στη κατάσταση m (m>0).
(β) Τη διασπορά του χρόνου μέχρι να φθάσει το σωματίδιο στη κατάσταση m (m>0).

2.8. Στον απλό τ.π. να υπολογιστεί ο μέσος αριθμός των επισκέψεων στην κατάσταση k.

2.9. Παίκτης κερδίζει ή χάνει 1 μονάδα με ίσες πιθανότητες. Αν ξεκίνησε με ποσό I να δειχθεί ότι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι τη στιγμή που τα χρήματά του γίνονται K ή 0 είναι I(K - I), I = 0, 1, …, K.

2.10. Να δείξετε ότι στον τ.π. $\{X_n : n = 1, 2, \ldots\}$ με $X_0 = 0$, $\mu = E[X_{n+1} - X_n] \neq 0$ και φράγματα -a, b (a, b > 0) η τ.μ.

$$N = \mathit{min}\{n:\ X_n \leq -a \text{ ή } X_n \geq b\}$$

έχει πεπερασμένη μέση τιμή.

2.11. Σωματίδιο ανά μονάδα χρόνου κινείται ένα βήμα δεξιά ή αριστερά με πιθανότητες p και q αντίστοιχα, ή παραμένει στην ίδια θέση με πιθανότητα r = 1 – p – q. Να προσδιοριστούν τα παρακάτω:

(α) Η γεννήτρια πιθανοτήτων $G_n(s)$ της θέσης X_n.
(β) Η μέση τιμή και η διασπορά της θέσης X_n.
(γ) Η γεννήτρια συνάρτηση $G(s,t) = \sum_0^\infty G_n(s)t^n$.

2.12. Στον τυχαίο περίπατο της προηγούμενης άσκησης να προσδιοριστεί η κατανομή της πλέον ακραίας προς τα αριστερά θέσης $M_n = \min\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots)$ με $X_0 = 0$.

2.13. Θεωρείστε συμμετρικό τυχαίο περίπατο πάνω στο $\mathfrak{S} = \{0, 1, \ldots, a\}$ με την κατάσταση "0" απορροφητική και την κατάσταση "a" ανακλαστική με πιθανότητα θ. Έχουμε δηλαδή $P[X_n = i + 1|X_{n-1} = i] = 0.5 = 1 - P[X_n = i - 1|X_{n-1} = i]$ $(i \neq 0, a)$, $P[X_n = 0|X_{n-1} = 0] = 1$ και $P[X_n = a - 1|X_{n-1} = a] = \theta = 1 - P[X_n = a|X_{n-1} = a]$ (n = 1, 2, …). Να δειχθεί ότι η απορρόφηση στη θέση "0" είναι βεβαία. Να ευρεθεί η κατανομή του χρόνου απορρόφησης.

2.14. Έστω $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ μια Μαρκοβιανή ανέλιξη με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ για την οποία ισχύει η σχέση $E[X_{n+1}|X_n = i] = Ai+B,\ i \in S$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ με $A \neq 0$. Να δειχθεί ότι ισχύει η σχέση:

$$E[X_n] = B(1-A)^{-1} + A^n\{E[X_0] - B(1-A)^{-1}\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

2.15. Έστω X, Y ανεξάρτητες τ.μ. και $Z = X - Y$. Εάν οι τ.μ. X, Y ακολουθούν Εκθετική κατανομή με παραμέτρους α και β αντίστοιχα να προσδιοριστεί η ροπογεννήτρια $g(s)$ της τ.μ. Z καθώς και οι ρίζες των εξισώσεων $g(s) = 1$ και $g'(s) = 0$.

2.16. Εφαρμόζοντας την αποδεικτική διαδικασία της §2.3.3 να προσδιοριστεί η γεννήτρια πιθανοτήτων του χρόνου N μέχρι την απορρόφηση στον απλό τ.π. με απορροφητικά φράγματα στα σημεία -a και b.

2.17. Να αποδειχθεί ότι στον απλό τ.π. με απορροφητικά φράγματα στα σημεία -a και b οι ροπές της X_N όπου N ο χρόνος απορρόφησης είναι:

$$E[X_N^k] = \begin{cases} \dfrac{b^k p^b(p^a - q^a) + (-a)^k q^a(p^b - q^b)}{p^{a+b} - q^{a+b}}, & \text{όταν } p \neq q, \\[2ex] \dfrac{ab^k + b(-a)^k}{a+b}, & \text{όταν } p = q. \end{cases}$$

2.18. (Συνέχεια προηγουμένης) Να αποδειχθεί ότι για τον χρόνο απορρόφησης $N = \min\{n : X_n \notin (-a, b)\}$ ισχύει:

$$E[N] = \begin{cases} \dfrac{bp^b(p^a - q^a) - aq^a(p^b - q^b)}{(p-q)(p^{a+b} - q^{a+b})}, & \text{όταν } p \neq q, \\[2ex] ab, & \text{όταν } p = q. \end{cases}$$