Κεφ. Ι Εισαγωγή

1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Η ανάγκη μαθηματικής περιγραφής και μοντελοποίησης συστημάτων τα οποία εξελίσσονται χρονικά κατά τρόπο που περιέχει, σε μικρό ή μεγάλο βαθμό, ***τυχαιότητα,*** (*stochasticity, randomness*) και όχι κατά τρόπο ***προσδιοριστικό*** (*deterministic*) οδήγησε στην ανάπτυξη της Θεωρίας των Στοχαστικών Ανελίξεων ή Στοχαστικών Διαδικασιών (*Stochastic Processes*).

Για τη μαθηματική περιγραφή της τυχαιότητας στην εξέλιξη ενός ***στοχαστικού συστήματος*** ας συμβολίσουμε με $X(t)$ την κατάσταση του συστήματος κατά την χρονική στιγμή t $(t \geq 0)$. Θεωρούμε ότι για κάθε t η κατάσταση $X(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία ορίζεται πάνω σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **κοινό** για όλα τα t. Είναι δηλαδή η $X(t)$, για συγκεκριμένο t, μια απεικόνιση $X(\omega,t)$ με πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο Ω ενός πειράματος τύχης και τιμές στο $\mathbb{R}$, ή στο $\mathbb{R}^k$ γενικότερα. Για συγκεκριμένο $\omega \in \Omega$ έχουμε την συνάρτηση $X(\omega,t) = x(t)$, $t \geq 0$, η οποία αποτελεί μια "**τροχιά**" (*sample path*) από όλες τις δυνατές τροχιές που μπορούν να προκύψουν από τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και την οικογένεια των τ.μ. $\{X(t): t \geq 0\}$. Γενικεύοντας την ερμηνεία του t ως στοιχείου ενός παραμετρικού συνόλου $\mathcal{T}$, και χρησιμοποιώντας τον όρο τυχαία μεταβλητή ενιαία, είτε δηλαδή πρόκειται για μονοδιάστατες είτε πρόκειται για πολυδιάστατες, έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός. Ονομάζουμε ***Στοχαστική Ανέλιξη*** κάθε οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t): t \in \mathcal{T}\}$ πάνω σε ένα κοινό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Το σύνολο των δυνατών τιμών των τυχαίων μεταβλητών $X(t)$ $(t \in \mathcal{T})$, συμβολιζόμενο με $\mathfrak{S}$, ονομάζεται ***χώρος καταστάσεων*** και το σύνολο $\mathcal{T}$ ονομάζεται ***παραμετρικός χώρος***. Σημειώνεται εδώ ότι, όπως ο χώρος καταστάσεων $\mathfrak{S}$ έτσι και ο παραμετρικός χώρος $\mathcal{T}$ δεν είναι κατ΄ ανάγκη μονοδιάστατος. Για παράδειγμα, η $X(t)$ μπορεί να είναι διδιάστατη και να αφορά την θερμοκρασία και την υγρασία με t τετραδιάστατο έτσι ώστε να καθορίζεται ο χρόνος καθώς και οι γεωγραφικές συντεταγμένες του σημείου στο οποίο αναφερόμαστε. Θεωρούμε συνεπώς ότι $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^k$ και $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m$.

Ανάλογα με το εάν οι χώροι $\mathcal{S}$ και $\mathcal{T}$ είναι συνεχή ή όχι υποσύνολα των $\mathbb{R}^k$ και $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα, η στοχαστική ανέλιξη θα είναι: (α) συνεχής με συνεχή παραμετρικό χώρο, (β) συνεχής με διακριτό παραμετρικό χώρο, (γ) διακριτή με συνεχή παραμετρικό χώρο και (δ) διακριτή με διακριτό παραμετρικό χώρο. Δεν αποκλείεται βέβαια και η περίπτωση μια στοχαστική ανέλιξη να είναι μικτή με διακριτό ή συνεχή παραμετρικό χώρο. Παραδείγματα των ως άνω κατηγοριών είναι:

Παράδειγμα 1ο. Η τάση του ηλεκτρικού ρεύματος σε δίκτυο διανομής κατά τη χρονική στιγμή t (συνεχής σ.α. με συνεχή παραμετρικό χώρο).

Παράδειγμα 2ο. Η ημερήσια κατανάλωση ύδατος σε συγκεκριμένη περιοχή (συνεχής σ.α. με διακριτό παραμετρικό χώρο).

Παράδειγμα 3ο. Ο αριθμός πελατών σε ένα κατάστημα κατά την χρονική στιγμή t (διακριτή σ.α. με συνεχή παραμετρικό χώρο).

Παράδειγμα 4ο. Ο αριθμός των μετοχών με ανοδική κίνηση σε συγκεκριμένη ημέρα (διακριτή σ.α. με διακριτό παραμετρικό χώρο).

Για την πιθανοθεωρητική περιγραφή των στοχαστικών ανελίξεων με συνεχή παραμετρικό χώρο $\mathcal{T}$ μας χρειάζεται η έννοια της από κοινού κατανομής για ένα υπεραριθμήσιμο πλήθος τυχαίων μεταβλητών. Τούτο όμως θα παραβίαζε το αξίωμα της σ-αθροιστικότητας του μέτρου πιθανότητας P. Εν τούτοις, με βάση το Θεώρημα Επέκτασης Μέτρου, ο Kolmogorov απέδειξε ότι δια μέσου κατανομών "***πεπερασμένης διάστασης***" είναι δυνατόν να οριστεί κατά μοναδικό τρόπο η κατανομή πιθανότητας για ένα υπεραριθμήσιμο πλήθος τ.μ. Οι ως άνω κατανομές πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες, γνωστές ως ***συνθήκες συμβατότητας του Kolmogorov***.

Έστω $T_n = \{t_1, \ldots, t_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων του παραμετρικού χώρου $\mathcal{T}$ και $D_{T_n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, η από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας των τ.μ. $X(t_1), \ldots, X(t_n)$. Η D_{T_n} αποτελεί κατανομή n-διάστατης τ.μ. και ως εκ τούτου ονομάζεται ***κατανομή πεπερασμένης διάστασης***. Έστω τώρα $\{D_{T_n}\}$ η οικογένεια κατανομών πεπερασμένης διάστασης με $T_n = \{t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{T}^n$ και $n \in \mathbb{N}$. Οι κατανομές της οικογένειας αυτής οφείλουν να ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

Συνθήκες Συμβατότητας. Για οποιαδήποτε n και m με $n < m$ και με οποιαδήποτε σύνολα δεικτών T_n και T'_m με k κοινά στοιχεία $t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}$ $(1 \le k \le n)$, οι περιθώριες κατανομές $D_{T_k}(\mathbf{x})$ και $D_{T'_k}(\mathbf{x})$ που προκύπτουν από τις υψηλότερης διάστασης κατανομές $D_{T_n}(\mathbf{x})$ και $D_{T'_m}(\mathbf{x})$ πρέπει να συμπίπτουν για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$.

Οι ως άνω συνθήκες συμβατότητας, εκτός του ότι είναι ικανές για τη μοναδικότητα της επέκτασης του μέτρου πιθανότητας, είναι και αναγκαίες για λόγους πέραν αυτών της επέκτασης. Τούτο διότι αν οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης δεν ικανοποιούσαν τις ως άνω συνθήκες θα προέκυπταν αντιφατικά συμπεράσματα, όπως π.χ. η τ.μ. $X(t)$ να έχει περισσότερες της μιας κατανομές.

1.2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ

Παρουσιάζουμε τώρα ορισμένες κατηγορίες στοχαστικών ανελίξεων τις οποίες θα μελετήσουμε συστηματικά στα επόμενα κεφάλαια.

Από τις γενικότερες κατηγορίες στοχαστικών ανελίξεων είναι αυτή των *στασίμων*. Η στασιμότητα εδώ έχει να κάνει με τη διατήρηση στο χρόνο όλων, ή τουλάχιστον των βασικότερων, ¨στατιστικών¨ χαρακτηριστικών μιας σ.α.

Ορισμός 1. Μια σ.α. $\{X(t)\text{: } t \geq 0\}$ ονομάζεται ***στάσιμη υπό αυστηρή έννοια*** (*strict-sense stationary*) όταν οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης είναι αναλλοίωτες σε χρονικές μεταθέσεις.

Τούτο σημαίνει ότι για κάθε πεπερασμένο σύνολο χρονικών στιγμών, έστω $T_n = \{t_1, \ldots, t_n\}$ η κατανομή D_{T_n} των τ.μ. $X(t_1), ..., X(t_n)$ συμπίπτει με την κατανομή D_{T_n+s} των τ.μ. $X(t_1+s), ..., X(t_n+s)$ για κάθε $s > 0$.

Τα πλέον βασικά χαρακτηριστικά μιας σ.α. είναι η συνάρτηση του ***μέσου***

$$\mu(t) = E[X(t)], \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

και η συνάρτηση ***Αυτοσυνδιακύμανσης***

$$g(t, s) = \mathrm{Cov}[X(t), X(s)] = E[\{X(t) - \mu(t)\}\{X(s) - \mu(s)\}], \quad t, s \geq 0. \tag{2.2}$$

Ανάλογα έχουμε και τη συνάρτηση ***Αυτοσυσχέτισης***

$$\rho(t, s) = \mathrm{Corr}[X(t), X(s)] = \frac{g(t,s)}{\sqrt{g(t,t)g(s,s)}}, \quad t, s \geq 0. \tag{2.3}$$

Επειδή για δύο τ.μ. X, Y έχουμε Cov(X, Y) = Cov(Y, X) είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις αυτοσυνδιακύμανσης και αυτοσυσχέτισης είναι συμμετρικές, είναι δηλαδή $g(t, s) = g(s, t)$ και $\rho(t, s) = \rho(s, t)$ για κάθε $t, s \geq 0$.

Ορισμός 2. Μια σ.α. $\{X(t): t \geq 0\}$ λέγεται **στάσιμη υπό ευρεία έννοια** (*wide-sense stationary*) όταν η συνάρτηση του μέσου είναι:

$$\mu(t) = \mu, \quad t \geq 0,$$

και η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης είναι:

$$g(t, s) = h(|t-s|), \quad \text{για κάθε} \quad t, s \geq 0.$$

Ορισμός 3. Μια σ.α. $\{X(t): t \geq 0\}$ λέγεται ***ανεξαρτήτων προσαυξήσεων*** εάν για κάθε n και κάθε $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ οι διαφορές

$$Y(t_j) = X(t_j) - X(t_{j-1}) \quad (j = 1, 2, \ldots.n)$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Είναι φανερό ότι μια σ.α. είναι ανεξαρτήτων προσαυξήσεων εάν και μόνο εάν οι μεταβολές της σε μη αλληλοεπικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 1. Εάν Z_n (n = 1, 2, …) είναι μια ακολουθία ανεξαρτήτων τ.μ. τότε η σ.α. $\{X(n) = \sum_1^n Z_i : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ανεξαρτήτων προσαυξήσεων.

Θεώρημα 1. Αν η σ.α. $\{X(t): t \geq 0\}$ είναι ανεξαρτήτων προσαυξήσεων τότε η συνάρτηση Αυτοσυνδιακύμανσης είναι:

$$g(t, s) = h(\mathit{min}\{t, s\}) = \begin{cases} \mathrm{Var}[X(t)], & \text{εάν } t \leq s, \\ \mathrm{Var}[X(s)], & \text{εάν } t > s. \end{cases} \tag{2.4}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της συνάρτησης αυτοσυνδιακύμανσης με $\tau = s - t \geq 0$ έχουμε

$$g(t, t + \tau) = \mathrm{Cov}[X(t), X(t+\tau)] = \mathrm{Cov}[X(t), X(t+\tau) - X(t) + X(t)]$$

$$= \mathrm{Cov}[X(t), X(t+\tau) - X(t)] + \mathrm{Cov}[X(t), X(t)]$$

$$= \mathrm{Cov}[X(t), X(t)] = h(t) = \mathrm{Var}[X(t)].$$

Ομοίως, για $\tau = t - s \geq 0$ και λόγω της συμμετρικότητας της $g(t, s)$ έχουμε:

$$g(s + \tau, s) = g(s, s + \tau) = \mathrm{Var}[X(s)]. \qquad \blacksquare$$

Ορισμός 4. Μια σ.α. $\{X(t): t \geq 0\}$ λέγεται ότι έχει ***στάσιμες προσαυξήσεις*** όταν οι τ.μ. $X(t + s) – X(t)$ έχουν την ίδια κατανομή για όλα τα t.

Τούτο σημαίνει ότι μια σ.α. είναι στάσιμων προσαυξήσεων εάν και μόνο εάν η κατανομή των μεταβολών μεταξύ δύο χρονικών στιγμών εξαρτάται αποκλειστικά από την απόσταση μεταξύ των χρονικών στιγμών.

Ορισμός 5. Μια σ.α. $\{X(t): t \geq 0\}$ λέγεται ***Μαρκοβιανή*** εάν για κάθε $n < m$ και κάθε $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots < t_m$ η δεσμευμένη κατανομή των

$X(t_{n+1}), \ldots, X(t_m)$ δεδομένων των $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ εξαρτάται μόνο από την $X(t_n)$.

Τούτο σημαίνει ότι από όλο το "παρελθόν" μιας Μαρκοβιανής σ.α. μόνο η πιο πρόσφατη κατάσταση καθορίζει το "μέλλον". Είναι επίσης προφανές ότι κάθε σ.α. ανεξαρτήτων προσαυξήσεων είναι Μαρκοβιανή.

Ορισμός 6. Μια σ.α. $\{X(t): t \geq 0\}$ ονομάζεται ***martingale*** όταν για κάθε n και κάθε $t_1 < \ldots < t_n$ η δεσμευμένη μέση τιμή

$$E[X(t_{n+1})| X(t_1), \ldots, X(t_n)] = X(t_n). \tag{2.6}$$

Κάθε Μαρκοβιανή σ.α με δεσμευμένη μέση τιμή την τελευταία κατάσταση, καθώς και κάθε σ.α. ανεξαρτήτων προσαυξήσεων με μέσες προσαυξήσεις $E[X(t+\tau) – X(t)] = 0$ για κάθε $t, \tau \geq 0$, είναι martingale.

Ορισμός 7. Μια σ.α $\{X(t): t \geq 0\}$ ονομάζεται ***Κίνηση Brown*** (*Brownian motion*) όταν ισχύουν τα παρακάτω:

(α) $X(0) = 0$,
(β) είναι στάσιμων και ανεξάρτητων προσαυξήσεων,
(γ) για κάθε $t > 0$ η $X(t)$ έχει Κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά c^2t.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι ανεξάρτητες προσαυξήσεις $X(t) – X(s)$ με $t > s \geq 0$ μιας κίνησης Brown ακολουθούν Κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διασπορά $c^2(t - s)$. (βλ. Άσκηση 1.19).

Ορισμός 8. Μια σ.α. $\{X(t): t \geq 0\}$ ονομάζεται ***Γκαουσιανή*** (*Gaussian*) αν για κάθε n και κάθε $t_1, \ldots, t_n$ οι τ.μ. $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ ακολουθούν την n-διάστατη Κανονική κατανομή.

Είναι φανερό ότι η Κίνηση Brown είναι μια Γκαουσιανή σ.α. με μέση τιμή $E[X(t)] = 0$ και διασπορά $Var[X(t)] = c^2t$.

1.3. ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Δύο χρήσιμα μαθηματικά εργαλεία στον χειρισμό των στοχαστικών ανελίξεων είναι η ***Γεννήτρια Συνάρτηση Πιθανοτήτων*** και η ***Ροπογεννήτρια Συνάρτηση***.

Ορισμός 1. Έστω διακριτή τ.μ. X με σ.μ.π. $p_k = P[X = k]$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Ονομάζουμε ***Γεννήτρια Πιθανοτήτων*** της τ.μ. X τη συνάρτηση

$$\pi(s) = E[s^X] = \sum_k s^k p_k\,, \quad |s| < R \tag{3.1}$$

με R την ακτίνα σύγκλισης της ως άνω δυναμοσειράς. Επειδή $p_k \geq 0$ με $\sum_k p_k = 1$, έχουμε $R \geq 1$.

Η ονομασία "γεννήτρια πιθανοτήτων" προέρχεται από την προφανή σχέση

$$p_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{ds^n}\pi(s)\,|_{s=0}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.2}$$

Έχουμε ακόμα ότι

$$E[X(X-1)\cdots(X-n+1)] = \frac{d^n}{ds^n}\pi(s)\,|_{s=1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

γι΄ αυτό και η γεννήτρια πιθανοτήτων είναι επίσης γνωστή ως Γεννήτρια Παραγοντικών Ροπών.

Παράδειγμα 1. Η γεννήτρια πιθανοτήτων μιας τ.μ. X που ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p είναι:

$$\pi(s) = \sum_k s^k p_k = \sum_{k=0}^{n} s^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \{1 - p(1-s)\}^n, \quad -\infty < s < \infty.$$

Παράδειγμα 2. Η γεννήτρια πιθανοτήτων μιας τ.μ. X που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ (λ > 0) είναι:

$$\pi(s) = \sum_k s^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} s^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathit{exp}\{-\lambda(1 - s)\}, \quad -\infty < s < \infty.$$

Ορισμός 2. Έστω τυχαία μεταβλητή X, με σ.μ.π. $p_k = P[X = k]$ $(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, εάν είναι διακριτή, και σ.π.π. $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, εάν είναι συνεχής. Ονομάζουμε ***Ροπογεννήτρια*** της τ.μ. X τη συνάρτηση

$$g(s) = E[e^{sX}] = \begin{cases} \sum_k e^{sk} p_k, & \textit{στη διακριτή περίπτωση} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f(x)dx, & \textit{στη συνεχή περίπτωση} \end{cases} \qquad (3.4)$$

με $s \in \mathcal{S}$, όπου $\mathcal{S}$ κατάλληλο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε η σειρά, αντιστοίχως το ολοκλήρωμα, να συγκλίνει.

Η ονομασία "ροπογεννήτρια" προέρχεται από τη σχέση

$$E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} g(s)|_{s=0}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (3.5)$$

Παράδειγμα 3. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας τ.μ. X που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ $(\lambda > 0)$ είναι:

$$g(s) = \sum_k e^{sk} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = exp\{-\lambda(1-e^s)\}, \quad -\infty < s < \infty.$$

Παράδειγμα 4. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας τ.μ. X που ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο α $(\alpha > 0)$ είναι:

$$g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{sx} \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha}{\alpha - s}, \quad s < \alpha.$$

Παράδειγμα 5. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας τ.μ. Z που ακολουθεί τη Τυποποιημένη Κανονική κατανομή είναι:

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{sz} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{sz}}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2} z^2\}dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}(z^2 - 2sz \pm s^2)\}dz \\ &= \exp\{\frac{1}{2} s^2\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}(z-s)^2\}dz = \exp\{\frac{1}{2}s^2\}, \end{aligned}$$

με $-\infty < s < \infty$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση τ.μ. X με Κανονική κατανομή μέσης τιμής μ και διασποράς σ^2 είναι:

$$g(s) = exp\{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\}, \quad -\infty < s < \infty. \qquad (3.6)$$

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι η γεννήτρια πιθανοτήτων $\pi(s)$ μιας διακριτής τ.μ. X μπορεί να προκύψει από τη ροπογεννήτρια αυτής $g(s)$ θέτοντας s στη θέση του e^s, και αντιστρόφως, η ροπογεννήτρια $g(s)$ μιας διακριτής τ.μ. X προκύπτει από την γεννήτρια πιθανοτήτων αυτής θέτοντας e^s στη θέση του s.

Θεώρημα 1. Εάν X τ.μ. με ροπογεννήτρια συνάρτηση $g(t)$, τότε η τ.μ. $Y = \alpha X + \beta$ έχει ροπογεννήτρια την

$$g_Y(s) = e^{\beta s}\, g(\alpha s). \tag{3.7}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$g_Y(s) = E[e^{sY}] = E[e^{s(\alpha X + \beta)}] = e^{\beta s}\, E[e^{\alpha s X}] = e^{\beta s}\, g(\alpha s).$$

Θεώρημα 2. **(Φράγματα του Chernoff)** Έστω X τ.μ. με ροπογεννήτρια συνάρτηση $g(s)$. Τότε για κάθε $c > 0$

$$P[X \geq c] \leq e^{-cs}\, g(s) \quad \text{για } s > 0,$$

και (3.8)

$$P[X \leq c] \leq e^{-cs}\, g(s) \quad \text{για } s < 0.$$

Απόδειξη. Για μια μη αρνητική τ.μ. Y από την ανισότητα Markov έχουμε για κάθε $\varepsilon > 0$

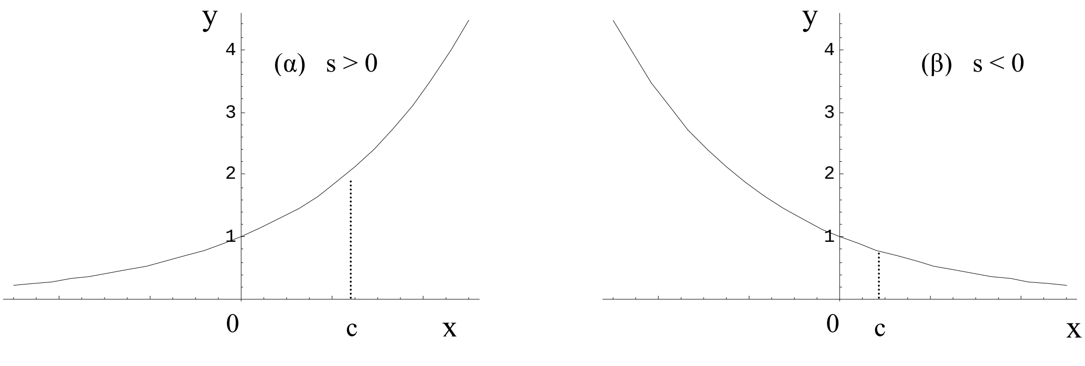
$$P[Y \geq \varepsilon] \leq E[Y]/\varepsilon.$$

Ορίζουμε την τ.μ. $Y = e^{sX}$ (≥ 0 με πιθανότητα 1), οπότε για $s > 0$ έχουμε

$$P[X \geq c] = P[e^{sX} \geq e^{sc}] \leq E[e^{sX}]/\, e^{sc} = e^{-sc}\, g(s),$$

και για $s < 0$

$$P[X \leq c] = P[e^{sX} \geq e^{sc}] \leq E[e^{sX}]/\, e^{sc} = e^{-sc}\, g(s). \qquad \blacksquare$$



Σχήμα 1.1. Εκθετική Συνάρτηση: $y = e^{sx}$, $x \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 3. (Ανισότητα του Jensen) Έστω X τ.μ. με (πεπερασμένη) μέση τιμή μ. Για κάθε κυρτή συνάρτηση h ισχύει η ανισότητα.

$$E[h(X)] \geq h(E[X]). \tag{3.10}$$

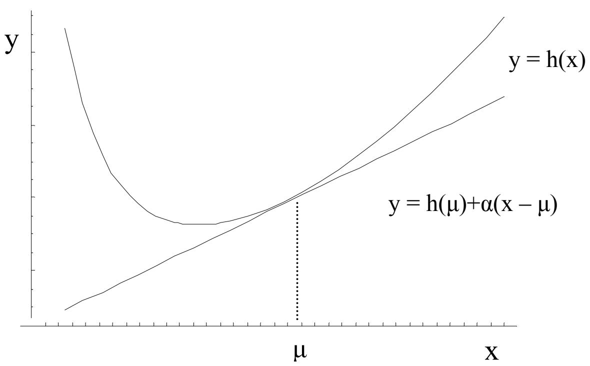
Απόδειξη. Λόγω της κυρτότητας της h υπάρχει ευθεία "υποστήριξης" (support line) (ε): $y = h(\mu) + \alpha(x - \mu)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $(\mu, h(\mu))$ και βρίσκεται κάτω από την καμπύλη $y = h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισχύει συνεπώς η ανισότητα

$$h(x) \geq h(\mu) + \alpha(x - \mu) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Θέτοντας στη θέση του x την τ.μ. X και λαμβάνοντας τις μέσες τιμές έχουμε:

$$E[h(X)] \geq h(\mu) + \alpha(E[X] - \mu) = h(\mu) = h(E[X]).$$

■



Σχήμα 1.2. Ευθεία Υποστήριξης διερχόμενη από το σημείο (μ, h(x)).

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η ισότητα ισχύει εάν και μόνο εάν X = c με πιθανότητα 1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1. Να αποδειχθεί ότι αν $N(t)$ και $M(t)$ $(t > 0)$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κατανομή Poisson με παραμέτρους $\lambda_1 t$ και $\lambda_2 t$ αντίστοιχα τότε η δεσμευμένη κατανομή της $N(t)$ όταν δίνεται ότι $N(t) + M(t) = n$ ακολουθεί την Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $p = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2)$.

1.2. Έστω X μη αρνητική συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f(x)$ και σ.κ.π. $F(x)$. Ως συνάρτηση διακινδύνευσης (hazard function) της τ.μ. X ορίζεται η

$$h(t) = \lim \frac{P[t < X \le t + \Delta t \mid X > t]}{\Delta t} \quad \text{για } \Delta t \to 0.$$

(α) Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad t > 0.$$

(β) Να δειχθεί ότι αν η τ.μ. X ακολουθεί την Εκθετική κατανομή παραμέτρου α τότε έχει συνάρτηση διακινδύνευσης την $h(t) = \alpha$ $(t > 0)$.

1.3. Να δειχθεί ότι αν μια μη αρνητική τ.μ. X έχει συνάρτηση διακινδύνευσης σταθερά και ίση με c $(c > 0)$ τότε η τ.μ. X ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο c.

1.4. Αν X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες μη αρνητικές συνεχείς τ.μ. με συναρτήσεις διακινδύνευσης $h_1(t)$ και $h_2(t)$ αντίστοιχα τότε

$$P[X_1 < X_2 \mid min\{X_1, X_2\} = t] = \frac{h_1(t)}{h_1(t) + h_2(t)} .$$

1.5. Να δειχθεί ότι η μόνη μη μηδενική λύση της σχέσης

$$g(x + y) = g(x)\, g(y) \quad x, y \in \mathbb{R}$$

είναι η εκθετική συνάρτηση $g(x) = e^{cx}$.

1.6. Να δειχθεί ότι αν για μια μη αρνητική τ.μ. X ισχύει η σχέση

$$P[X \ge x + c \mid X \ge c] = P[X \ge x] \quad \text{για κάθε } c > 0,$$

τότε η τ.μ. X ακολουθεί Εκθετική κατανομή.

1.7. Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν Εκθετική κατανομή με παραμέτρους λ_1 και λ_2 αντίστοιχα να προσδιοριστεί:

(α) η κατανομή της τ.μ. $Z = min\{X, Y\}$,
(β) η κατανομή της τ.μ. $W = max\{X, Y\}$ και
(γ) η δεσμευμένη κατανομή του Z με δεδομένο ότι $Z = X$.

1.8. Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Jensen να δείξετε ο αριθμητικός μέσος μη αρνητικών αριθμών είναι μεγαλύτερος του γεωμετρικού μέσου εκτός εάν όλοι οι αριθμοί συμπίπτουν μεταξύ τους οπότε συμπίπτουν και οι εν λόγω μέσοι.

1.9. Να συγκριθεί ο αρμονικός μέσος αριθμών x_i $(i = 1,\ldots,n)$ με $x_i \neq 0$, με τον αριθμητικό τους μέσο.

1.10. Να προσδιοριστεί η γεννήτρια πιθανοτήτων των παρακάτω κατανομών.

(α) Γεωμετρική κατανομή παραμέτρου p.
(β) Αρνητική Διωνυμική παραμέτρων n και p.

1.11. Να προσδιοριστεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση των παρακάτω κατανομών.

(α) Κατανομή Γάμμα παραμέτρων α και p.
(β) Κατανομή Cauchy παραμέτρων δ και μ.

1.12. Έστω $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ δύο ακολουθίες αριθμών και $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ η συνέλιξη αυτών. Έστω επίσης A(s), B(s) και C(s) οι αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις. Να δειχθεί ότι ισχύει η σχέση:

$$C(s) = A(s)\,B(s).$$

1.13. Διακριτή τ.μ. T έχει συνάρτηση πιθανότητας $p_n = P[T = n]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Αν π(s) είναι η γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων p_n και Π(s) η γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων

$$P_n = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} p_\nu \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

να δείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$\Pi(s) = \frac{1-\pi(s)}{1-s}, \quad |s| < 1.$$

Με βάση την παραπάνω σχέση να δείξετε ότι η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. T είναι αντίστοιχα:

$$E[T] = \Pi(1) \quad \text{και} \quad Var[T] = 2\,\Pi'(1) - \Pi(1)\{1 - \Pi(1)\}.$$

1.14. Έστω $G_{X,Y}(s,t)$ η από κοινού γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων των τ.μ. X, Y που ορίζεται από τη σχέση

$$G_{X,Y}(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} s^k t^l P[X = k, Y = l].$$

Να δειχθεί ότι η γεννήτρια πιθανοτήτων της τ.μ. X δίνεται από την $C_X(s) = G_{X,Y}(s,1)$ και $G_Y(t) = G_{X,Y}(1,t)$. Να δειχθεί επίσης ότι

$$E[XY] = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} G(s,t)\Big|_{s=t=1} .$$

1.15. Έστω N διακριτή τ.μ. με σ.μ.π. $p_n = P[N = n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ και γεννήτρια πιθανοτήτων $\pi(s)$. Έστω $\{Y_i : i = 1, 2, \ldots\}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με ροπογεννήτρια συνάστηση $g(s)$. Να δειχθεί ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος

$$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N$$

με τυχαίο αριθμό όρων N, είναι η

$$g_X(s) = \pi(g(s)).$$

1.16. Να προσδιοριστεί η σ.π.π. της τ.μ. $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, όπου Y_i $(i \geq 1)$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με Εκθετική κατανομή παραμέτρου λ και N τ.μ. με Γεωμετρική παραμέτρου p.

1.17. Να δειχθεί ότι αν $G_1(s)$ και $G_2(s)$ είναι γεννήτριες συναρτήσεις και $\alpha \in (0, 1)$, τότε και $G_1(s)G_2(s)$ καθώς και $\alpha G_1(s) + (1-\alpha)G_2(s)$ είναι γεννήτριες συναρτήσεις.

1.18. Έστω $\{Y_n : n = 1,2,\ldots\}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με διασπορά σ^2 και $X_n = \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Να αποδειχθεί ότι για $n \leq m$ ισχύουν τα παρακάτω:

(α) $Cov[X_n, X_m] = n\sigma^2$.
(β) $Corr[X_n, X_m] = \sqrt{n/m}$.

1.19. Να αποδειχθεί ότι στη κίνηση Brown οι ανεξάρτητες προσαυξήσεις $X(t) - X(s)$ $(t > s \geq 0)$ ακολουθούν κατανομή $N[0, c^2(t-s)]$.

1.20. Να αποδειχθεί ότι στη κίνηση Brown με $c = 1$, η δεσμευμένη κατανομή της θέσης $X(s)$ με δεδομένη τη θέση x, έστω, κατά τη χρονική στιγμή t, δηλαδή με $X(t) = x$, για $s < t$, είναι $N[xs/t, s(t-s)/t]$.