Οι παράξενες ιδιότητες των αξιωματικών συστημάτων και η Διαίσθηση. Ή: Ξέρουμε, τελικά, τι είναι φυσικοί αριθμοί;

(Οι φιλοσοφικές και ψυχολογικές συνέπειες της αξιωματικής θεμελίωσης των Μαθηματικών)

Ιωάννης Β. Κιουστελίδης, jqstel@math.ntua.gr

Πρόθεμα:

Η διαδεδομένη αντίληψη ότι τα μαθηματικά μεγέθη μπορούν να ορισθούν μονοσήμαντα από κατάλληλα συστήματα αξιωμάτων δεν αληθεύει! Για κάθε αξιωματικό σύστημα που περιγράφει τους φυσικούς αριθμούς υπάρχουν άπειρες προτάσεις, που αληθεύουν μεν, αλλά δεν μπορούν να αποδειχθούν με βάση αυτό το σύστημα. Αν θέλουμε, μπορούμε, επομένως, να τις χρησιμοποιήσουμε ως νέα αξιώματα. Υπάρχουν όμως επίσης άπειρα ριζικά διαφορετικά μεταξύ τους συστήματα μεγεθών που ικανοποιούν το δοσμένο σύστημα αξιωμάτων.

Περίληψη

Οι περισσότεροι μαθηματικοί των αρχών του 20ου αιώνα πίστευαν ότι τα επτά αξιώματα της Αριθμοθεωρίας, που διατύπωσαν οι Dedekind και Peano περιγράφουν πλήρως τους φυσικούς αριθμούς και επαρκούν για να αποδειχθούν όλες οι δυνατές προτάσεις σχετικά με αυτούς. Θα ιδούμε, όμως, εδώ αρχικά ότι για να τους χαρακτηρίσουμε χρειάζονται τουλάχιστον τόσα ανεξάρτητα μεταξύ τους αξιώματα, δηλαδή θεμελιώδεις ιδιότητες των φυσικών αριθμών, όσοι είναι οι ίδιοι οι φυσικοί αριθμοί. Στην συνέχεια όμως θα ιδούμε ότι ούτε ένα τόσο μεγάλο σύνολο ιδιοτήτων δεν επαρκεί για να τους χαρακτηρίσει μονοσήμαντα και επομένως παραμένουν μόνιμα στον χώρο της «διαίσθησης» ή «ενόρασης», όπως την εννοεί ο φιλόσοφος Kant. Αναλύοντας αυτό το αναπόφευκτο συμπέρασμα, θα διερευνήσουμε μέχρι που μπορεί να φωτίσει τον δρόμο μας η διαίσθηση. Επίσης θα εξετάσουμε αν έχει νόημα να μιλάμε για ένα είδος μαθηματικών ή πρέπει να δεχθούμε την ύπαρξη πολλών παραλλαγών τους.

Εισαγωγή

Το ερώτημα «Ποια είναι η προέλευση των βασικών μαθηματικών εννοιών;» είναι πολύ παλιό. Είναι οι φυσικοί αριθμοί και οι βασικές γεωμετρικές έννοιες δημιουργήματα του νου μας, ή, μήπως, είναι μορφές που ενυπάρχουν στην φύση ανεξάρτητα από την σκέψη μας;

Φαίνεται δύσκολο να δεχθούμε ότι είναι απλές επινοήσεις. Υπάρχει άλλος τρόπος να μετράμε από το να προσθέτουμε κάθε φορά μία μονάδα; Τουλάχιστον οι φυσικοί αριθμοί 1, 2, 3, … φαίνονται να υπάρχουν ανεξάρτητα από την φαντασία μας. Ο Leopold Knonecker είπε κάποτε «Τους φυσικούς αριθμούς έφτιαξε ο καλός Θεός. Όλα τα άλλα είναι έργο του ανθρώπου».

Τα μαθηματικά αποτελέσματα έχουν απόλυτη βεβαιότητα χωρίς να κάνουν χρήση εμπειρικής παρατήρησης ή πειραματισμού. Χρησιμοποιούν μόνο την λογική. Αυτό οδήγησε πολλούς διανοητές στην αντίληψη ότι οι μαθηματικές έννοιες βρίσκονται με κάποιον τρόπο έξω από τον υλικό κόσμο που τον γνωρίζουμε μόνο με παρατήρηση.

Για τον Πλάτωνα οι βασικές αφηρημένες έννοιες έχουν κάποια άϋλα αιώνια και αμετάβλητα πρότυπα που τα ονομάζει ιδέες. Χαρακτηριστικά δείγματα των ιδεών θεωρεί ότι είναι οι γεωμετρικές έννοιες άρα και οι φυσικοί αριθμοί, που αντιπροσωπεύονταν στην εποχή του από κανονικές διατάξεις σημείων στο επίπεδο. Κατά τον Πλάτωνα οι ιδέες είναι ανεξάρτητες από την νόησή μας, ενυπάρχουν ήδη στην ψυχή όταν γεννηθούμε και αποτελούν τα πρότυπα για την δημιουργία των εννοιών με τις οποίες διεξάγουμε και εκφράζουμε τις σκέψεις μας. Οι έννοιες προκύπτουν απλά με προσαρμογή των ιδεών στις εμπειρίες[1].

Η αντίληψη ότι κάποιες θεμελιώδεις έννοιες υπάρχουν ανεξάρτητα από τον νου μας και γίνονται μόνο αντιληπτές από αυτόν λέγεται, λοιπόν, Πλατωνισμός. Αυτή η αντίληψη, υιοθετείται μέχρι σήμερα από πολλούς διανοητές. Πλατωνιστές είναι, ειδικότερα, αρκετοί μαθηματικοί που πιστεύουν ότι έννοιες, όπως η έννοια του φυσικού αριθμού, υπάρχουν ανεξάρτητα από την σκέψη μας και δεν είναι δημιουργήματά της.

Ο Immanuel Kant (1724-1804) δίνει μία πιο ευλογοφανή θεωρία για την προέλευση των θεμελιωδών εννοιών, η οποία δεν απαιτεί να πιστέψουμε σε έναν υπερβατικό κόσμο των ιδεών. Θεωρεί ότι οι έννοιες δεν πηγάζουν από έναν άϋλο κόσμο των ιδεών αλλά προκύπτουν από την εμπειρία με βάση τις εγγενείς ιδιότητες του νου. Οι έννοιες είναι μεν προϊόν της εμπειρίας, αλλά ο ανθρώπινος νους δεν είναι παθητικός δέκτης των εμπειριών. Για να τις αφομοιώσει τις μορφοποιεί με βάση κάποιους έμφυτους ή σύμφυτους με την νόηση τρόπους αντίληψης. Ο χώρος και ο χρόνος δεν είναι έννοιες που προκύπτουν από την εμπειρία, αλλά αποτελούν ένα εκ των προτέρων δοσμένο πλαίσιο μέσα στο οποίο τοποθετούμε τις εμπειρίες μας. Παρόμοια, η τάση της νόησης να αναζητεί αίτια για κάθε φαινόμενο είναι ενδόμυχη, δηλαδή εκ των προτέρων δοσμένη και όχι αποτέλεσμα της εμπειρίας. Τις έννοιες του χώρου και του χρόνου ονομάζει ο Kant a priori (=εκ των προτέρων) δοσμένες ενοράσεις[2] της σκέψης μας, ενώ η αιτία είναι μία από δώδεκα a priori δοσμένες κατηγορίες με τις οποίες η σκέψη μορφοποιεί τις εμπειρίες. Ο χώρος, ο χρόνος και η αιτιότητα δεν υπάρχουν, δηλαδή, αντικειμενικά αλλά είναι οι συνεισφορές του νου στην διαμόρφωση της εμπειρίας. Η a priori υπάρχουσα ενόραση ή διαίσθηση του χώρου ταυτίζεται για τον Kant με τον Ευκλείδιο χώρο, ενώ θεωρεί τον χρόνο ως πηγή της έννοιας των φυσικών αριθμών (ΦΑ). Ο Kant θεωρεί ότι οι φυσικοί αριθμοί βασίζονται στην ενόραση της διαδοχής. Παραλληλίζει, δηλαδή, τις διαδοχικές χρονικές στιγμές με την ακολουθία των ΦΑ: 1, 2, 3, ….

Με την άποψη ότι οι ακέραιοι αριθμοί προκύπτουν από την *διαίσθηση του χρόνου* συμφώνησε και ο φιλόσοφος Arthur Schopenhauer αλλά και ο μαθηματικός W. R. Hamilton.

---

[1] Κατά τον Πλάτωνα η ψυχή θυμάται τις ιδέες αυτές, που τις έχει γνωρίσει πριν μπει στο σώμα, και τις προσαρμόζει στις εμπειρίες του ανθρώπου.

[2] Ενόραση ή διαίσθηση είναι για τον Kant η άμεση επίγνωση μίας έννοιας χωρίς την μεσολάβηση της εμπειρίας. Ο όρος Anschauung, που χρησιμοποιεί, μεταφράζεται συνήθως ως «ενόραση» ή «διαίσθηση». Οι αντίστοιχοι αγγλικοί όροι είναι insight και intuition.

Όπως βλέπουμε, στις αρχές του 19ου αιώνα οι βασικές μαθηματικές έννοιες θεωρούνταν έμφυτες.

Την απλή αυτήν αντίληψη ανέτρεψε η δημιουργία των Μη Ευκλείδιων γεωμετριών, που σύντομα αποδείχθηκε ότι είχαν Ευκλείδια μοντέλα[3] (βλέπε Παράρτημα 1), και επομένως ήσαν εξ ίσου λογικά συνεπείς (ή ασυνεπείς) με την Ευκλείδια γεωμετρία. Αυτό ανέτρεψε την ως τότε καθιερωμένη αντίληψη ότι τα γεωμετρικά αξιώματα αντιπροσώπευαν «αυταπόδεικτες αλήθειες» για τον φυσικό κόσμο, είτε προερχόμενες από τον υπερβατικό κόσμο των ιδεών, είτε σύμφυτες με την νόηση ως a priori ενοράσεις. Με την δυνατότητα εφεύρεσης μη Ευκλείδιων γεωμετριών με εσωτερική λογική συνέπεια, έγινε φανερό ότι ο νους μας δεν είναι φτιαγμένος έτσι ώστε να αντιλαμβάνεται μία μόνο γεωμετρία. Ο μαθηματικός χώρος έπαψε να αντιπροσωπεύει πια μίαν υπερβατικά ή ενορατικά καθορισμένη έννοια, που οπωσδήποτε θα συνέπιπτε με τον φυσικό χώρο, και έγινε για τον μαθηματικό μόνο θέμα προτιμήσεων στην επιλογή αξιωμάτων. Ο φυσικός χώρος δεν ήταν πια καθορισμένος από υπερβατικές ιδέες ή a priori ενοράσεις, αλλά μία ακόμα εμπειρική έννοια υποκείμενη σε πειραματική διερεύνηση.

Η ανακάλυψη ή εφεύρεση των μη Ευκλείδιων γεωμετριών έφερε στην επικαιρότητα την μελέτη αξιωματικών συστημάτων. Έτσι προς το τέλος του 19ου αιώνα δημιουργήθηκε και το πρώτο αξιωματικό σύστημα για τους φυσικούς αριθμούς. Αυτό το εισηγήθηκαν ανεξάρτητα μεταξύ τους ο Γερμανός Richard Dedekind και ο Ιταλός Girolamo Peano (βλ. Παράρτημα 2).

Βασικά ερωτήματα που τέθηκαν σχετικά με αυτό αλλά και όλα τα άλλα αξιωματικά συστήματα ήταν η *εσωτερική τους συνέπεια* (το αν δεν προκύπτουν από αυτά αντιφατικές προτάσεις) και η *πληρότητά* τους, δηλαδή η επάρκειά τους για την απόδειξη ή απόρριψη όλων των προτάσεων που θα μπορούσαν να διατυπωθούν σχετικά με τα μεγέθη που περιγράφει ή καθορίζει ένα τέτοιο σύστημα αξιωμάτων.

Η πρόοδος της Μαθηματικής ή Συμβολικής Λογικής κατά τον 19ο αιώνα οδήγησε παράλληλα σε μίαν προσπάθεια πλήρους συμβολοποίησης των μαθηματικών. Αυτό κρίθηκε αναγκαίο, γιατί συχνά προκύπτουν εσφαλμένα συμπεράσματα, που οφείλονται στην ασάφεια λεκτικών διατυπώσεων και στην χρήση εποπτικών εικόνων αντί για ακριβείς ορισμούς. Τέτοιες εποπτικοποιήσεις εννοιών εμπεριέχουν συχνά αφανείς προϋποθέσεις. Έτσι επιδιώχθηκε να εκφρασθούν τα πάντα με συμβολικό τρόπο, που δεν επιτρέπει να παρεισφρύσουν αφανείς προϋποθέσεις στις αποδείξεις μας. Σε διάφορα αξιωματικά συστήματα των Μαθηματικών ενσωματώθηκαν, λοιπόν, και τα βασικά αξιώματα της Συμβολικής Λογικής, έτσι ώστε η όλη αποδεικτική διαδικασία να μην είναι τίποτα άλλο παρά συντακτική παραγωγή συμβολικών εκφράσεων από άλλες συμβολικές εκφράσεις.

Η μαθηματική σχολή που επεδίωκε την απαλλαγή των μαθηματικών από την καθομιλουμένη γλώσσα και την πλήρη συμβολοποίησή τους ονομάσθηκε Φορμαλιστική σχολή και είχε κύριο εκφραστή τον Γερμανό David Hilbert.

Παράλληλα ετέθη και το ερώτημα ποια είναι η σχέση Λογικής και Μαθηματικών και μάλιστα ειδικότερα Λογικής και Αριθμητικής. Βασική

[3] Καμπύλες στον Ευκλείδιο χώρο που, μετονομαζόμενες σε «ευθείες», έχουν όλες τις ιδιότητες που έχουν οι ευθείες κάποιας μη Ευκλείδιας γεωμετρίας (πληρούν τα αντίστοιχα αξιώματα).

πεποίθηση πολλών ήταν ότι οι νόμοι της Λογικής είναι έμφυτοι στην σκέψη και ότι όλες οι έννοιες (άρα ειδικότερα η έννοια «φυσικός αριθμός») καθορίζονται μονοσήμαντα από τις λογικές σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους. Έτσι οι Βρετανοί Bertrand Russell και Alfred North Whitehead, επεδίωξαν γύρω στο 1910 στο βιβλίο τους Principia Mathematica να αναγάγουν την Αριθμοθεωρία στην Λογική. Αυτή η προσπάθεια αναγωγής της Αριθμητικής στην Λογική ονομάσθηκε Λογικισμός.

Ο Λογικισμός κατακρίθηκε από πολλούς μαθηματικούς ότι, προσπαθώντας να εξαλείψει τα μαθηματικά αξιώματα, εισήγε λογικά αξιώματα πέρα από τις καθιερωμένες αρχές της λογικής και λιγότερο προφανή από τα αριθμητικά αξιώματα που υποκατέστησαν. Έτσι, τόσο οι φορμαλιστές, όσο και οι λεγόμενοι Διαισθητιστές απέρριψαν αυτήν την προσπάθεια.

«Διαισθητιστές» ή «Ενορατιστές» (intuitionists) ονομάσθηκε μία ομάδα μαθηματικών με κύριο εκφραστή τον Ολλανδό Luitzen Brower (1881-1966), που πιστεύει ότι οι βασικές μαθηματικές έννοιες πηγάζουν απ' ευθείας από την διαίσθηση ή ενόραση, δηλαδή από άμεση *μη εμπειρική επίγνωση*, όπως έλεγε ήδη ο Kant. Οι Διαισθητιστές θεωρούσαν ότι τα μαθηματικά είναι μία διαδικασία νοερής κατασκευής ανεξάρτητη από την εμπειρία. Δεν συνάγει τόσο λογικές συνέπειες, όσο συνθέτει νέες αλήθειες (σεβόμενη μόνο κάποια θεμελιώδη μαθηματική διαίσθηση). Οι Διαισθητιστές επεδίωκαν να επιτύχουν αυστηρές αποδείξεις, όχι χρησιμοποιώντας κενό περιεχομένου φορμαλισμό, αλλά με αποφυγή εννοιών και χειρισμών που δεν ανταποκρίνονται άμεσα στην διαισθητική αντίληψη.

Η αντίληψη ότι τους φυσικούς αριθμούς τους αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά δεν μας απαλλάσσει, βέβαια, από την ανάγκη να τους ορίσουμε. Το παιχνίδι της διεξαγωγής αποδείξεων απαιτεί να κάνουμε οπωσδήποτε κάποιες θεμελιώδεις αρχικές παραδοχές. Παρά την αρνητική εμπειρία της ύπαρξης (τουλάχιστον θεωρητικά αν όχι στο φυσικό περιβάλλον), όχι μόνο της Ευκλείδιας, αλλά και μη Ευκλειδίων γεωμετριών, οι περισσότεροι μαθηματικοί των αρχών του 20^{ου} αιώνα, πίστευαν ότι το σύστημα των επτά αξιωμάτων του Peano χαρακτήριζε πλήρως και μονοσήμαντα[4] την διαισθητική αντίληψη των μεγεθών που ονομάζουμε «φυσικούς αριθμούς». Μέχρι το 1930 οι περισσότεροι μαθηματικοί πίστευαν ότι η διαισθητική αντίληψη των βασικών μαθηματικών μεγεθών εξασφαλίζει την συνέπεια των αξιωματικών συστημάτων, με τα οποία περιγράφουμε αυτά τα μεγέθη. Επίσης, πίστευαν ότι τα αξιωματικά συστήματα που είχαν κατασκευάσει εξέφραζαν πλήρως την διαισθητική αντίληψη των βασικών μεγεθών, και επομένως επαρκούσαν για να αποφασισθεί η αλήθεια ή το ψεύδος οποιασδήποτε κατανοητής πρότασης. Αυτήν την διαδεδομένη αντίληψη εξέφρασε ο David Hilbert, όταν έγραψε το 1925: «Κάθε μαθηματικός συμμερίζεται την πεποίθηση ότι κάθε σαφές μαθηματικό πρόβλημα έχει αναγκαστικά την δυνατότητα να μπορεί λυθεί».

[4] Ακριβέστερα, μονοσήμαντα μέχρι ισομορφίας. Ισόμορφα λέγονται δύο συστήματα μεγεθών αν υπάρχει μεταξύ τους ένα προς ένα αντιστοιχία τόσο για τα στοιχεία τους όσο και για τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων. Τότε θεωρείται ότι παριστάνουν ουσιαστικά το ίδιο σύστημα μεγεθών. Για παράδειγμα, ισόμορφες είναι οι ακολουθίες 1, 2, 3,… και 1.25, 2.50, 3.75, …, που μπορεί να εκφράζουν τα ίδια χρηματικά ποσά, η πρώτη σε Ευρώ και η δεύτερη σε Δολάρια με βάση την ισοτιμία 1' (1 ευρώ)=1.25$ μίας ορισμένης ημέρας.

Υπήρχε, δηλαδή, η διάχυτη πεποίθηση ότι τα καθιερωμένα αξιωματικά συστήματα ήσαν πλήρη.

Την ενδόμυχη αυτή πεποίθηση ήρθαν όμως να ανατρέψουν δύο σημαντικά αποτελέσματα της Μαθηματικής Λογικής: η θεωρία των Löwenheim-Skolem και το θεώρημα μη πληρότητας της Αριθμοθεωρίας του Gödel.

Τα θεωρήματα του Gödel

Το 1931, λοιπόν, ο Αυστριακός Kurt Gödel δημοσίευσε μίαν εργασία, που ανέτρεψε καταρχήν την αντίληψη ότι το σύστημα μεγεθών, που αποτελούν οι φυσικοί αριθμοί, μπορεί να περιγραφεί πλήρως με ένα πεπερασμένο σύστημα αξιωμάτων. Το λεγόμενο *Θεώρημα Μη Πληρότητας του Gödel* λέει για κάθε φορμαλιστική θεωρία, που είναι επαρκής για να περιλάβει την θεωρία ακεραίων αριθμών, ότι αν είναι συνεπής, τότε είναι κατ' ανάγκη μη πλήρης.

Στην συνέχεια, και με βάση αυτό το θεώρημα, ο Gödel απέδειξε ότι ποτέ δεν θα μπορέσουμε να αποδείξουμε αυτοτελώς την συνέπεια ενός αρκετά εκτενούς συστήματος αξιωμάτων. Πάντα θα είμαστε αναγκασμένοι να καταφύγουμε σε αρχές που βρίσκονται έξω από το σύστημα που εξετάζουμε. Η συνέπεια οποιουδήποτε μαθηματικού συστήματος, που είναι αρκετά εκτενές για να περιλαμβάνει την αριθμητική των ακεραίων αριθμών, δεν μπορεί να επιβεβαιωθεί μόνο με τις λογικές αρχές που αυτό περιλαμβάνει.

Το δεύτερο αυτό αποτέλεσμα έκανε τον φυσικομαθηματικό Herman Weyl να πει ότι ο Θεός υπάρχει γιατί τα μαθηματικά είναι αναμφίβολα συνεπή και ο Διάβολος υπάρχει γιατί δεν μπορούμε να αποδείξουμε την συνέπεια.

Για να αποδείξει αυτά τα αποτελέσματα ο Gödel κωδικοποίησε αριθμητικά όλες τις προτάσεις του εκάστοτε φορμαλιστικού συστήματος Αριθμοθεωρίας και έτσι το έκανε να «μιλήσει» για τον εαυτό του. Σε κάθε τύπο του συστήματος που εξέταζε αντιστοίχησε, δηλαδή, έναν φυσικό αριθμό και σε μίαν ολόκληρη ακολουθία τύπων, που αποτελούν μίαν απόδειξη, αντιστοίχησε παρομοίως έναν πιο σύνθετο αριθμό[5]. Έτσι, προτάσεις σχετικά με τις ιδιότητες των κωδικών αριθμών μπορούν να ερμηνευτούν στην καθημερινή γλώσσα ως προτάσεις σχετικά με την δομή του αξιωματικού συστήματος.

Αυτή η μη φορμαλιστική, καθομιλουμένη, γλώσσα που μελετά, όχι μόνο τις ιδιότητες φυσικών αριθμών, αλλά κυρίως την δομή αξιωματικών συστημάτων, ονομάσθηκε «Μεταμαθηματικά».

Τι την διακρίνει από την γλώσσα των φορμαλιστικών αποδείξεων;

Η γλώσσα του φορμαλισμού περιορίζεται μόνο στην σύνθεση τύπων με βάση κάποιους συντακτικούς κανόνες που περιγράφονται από τα φορμαλιστικά αξιώματα. Τα σύμβολα που χρησιμοποιεί σκόπιμα δεν έχουν νόημα (για να αποφευχθεί ο επηρεασμός της απόδειξης από την ερμηνεία τους) και οι τύποι που παράγει δεν έχουν επίσης νόημα στα πλαίσια του φορμαλιστικού συστήματος.

Αντίθετα, η γλώσσα των μεταμαθηματικών είναι κατά βάση η καθομιλουμένη, που είναι φορέας νοημάτων. Οι προτάσεις της δεν είναι

[5] Μία ανάλογη κωδικοποίηση γίνεται και σήμερα σε κάθε ηλεκτρονικό υπολογιστή (Η/Υ). Οι τύποι μεταφράζονται πάντα σε κωδικούς αριθμούς για να υποστούν επεξεργασία, γιατί ο Η/Υ ξέρει να επεξεργάζεται μόνο φυσικούς αριθμούς και μάλιστα σε δυαδική μορφή.

σωστές ή εσφαλμένες ανάλογα μόνο με το αν ακολουθούν ή όχι κάποιους συντακτικούς κανόνες. Το αν αληθεύουν ή όχι εξαρτάται και από το νόημα των επί μέρους λέξεων που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή τους.

Το νόημα όλων αυτών των λέξεων δεν μπορεί, όμως, να αποδοθεί με μίαν αλυσίδα ορισμών, γιατί αυτό θα οδηγούσε σε έναν φαύλο κύκλο ορισμών. Για παράδειγμα, το φτερό μπορεί να ορισθεί ως ανατομικό μέλος ενός πουλιού, αλλά, αφ' ετέρου, το πουλί ορίζεται αναγκαστικά ως ζώο με φτερά. Έτσι, δεν ξέρουμε τι είναι φτερό και τι είναι πουλί αλλά μόνο ότι είναι αλληλένδετα. *Οι ορισμοί σταματούν, λοιπόν, κάποτε και το νόημα κάποιων θεμελιωδών εννοιών θα πρέπει να πηγάζει από μίαν άμεση επίγνωσή του χωρίς λεκτικό ορισμό. Αυτήν την άμεση επίγνωση οι μαθηματικοί την ονομάζουν συνήθως «ενόραση» ή «διαίσθηση» (βλέπε Παράρτημα 4).*

Οι έννοιες που περιλαμβάνονται στην γλώσσα των μεταμαθηματικών ανάγονται τελικά σε «διαισθητική» κατανόηση των εννοιών «φυσικός αριθμός», «μοντέλο», «ερμηνεία ενός τύπου» κ.ο.κ.

Με βάση την κωδικοποίηση των τύπων που εισήγαγε, ο Gödel έδειξε πώς μπορεί να κατασκευαστεί μία φορμαλιστική έκφραση G(x), που η ερμηνεία της στην καθομιλουμένη γλώσσα (την γλώσσα των μεταμαθηματικών) είναι ότι η πρόταση με τον τυχαίο κωδικό αριθμό x δεν είναι φορμαλιστικά αποδείξιμη. Στην συνέχεια προσδιόρισε τον κωδικό αριθμό, έστω m, της G(x) και αντικατέστησε στην G(x) το x με m. Κατασκεύασε, δηλαδή την πρόταση G(m). Η πρόταση αυτή λέει σε μεταμαθηματική ερμηνεία ότι η πρόταση με τον δικό της κωδικό αριθμό, δεν είναι φορμαλιστικά αποδείξιμη. Δηλαδή η G(m) λέει για τον εαυτό της ότι δεν είναι φορμαλιστικά αποδείξιμη. Ανακύπτει, λοιπόν το ερώτημα αν αυτή η πρόταση μπορεί να αποδειχθεί φορμαλιστικά ή όχι.

Αν η φορμαλιστική πρόταση G(m) μπορούσε να αποδειχθεί, τότε θα καταλήγαμε σε μίαν αντίφαση προς την μεταμαθηματικη ερμηνεία της. Ούτε όμως η άρνηση της G(m), που γράφεται ~G(m), μπορεί να αποδειχθεί, γιατί η ερμηνεία της ~G(m) θα ήταν ότι η G(m) είναι, εντούτοις, αποδείξιμη. Έτσι, ονομάζουμε την πρόταση G(m) «μη αποκρίσιμη», γιατί ούτε αυτή ούτε η άρνησή της μπορούν να αποδειχθούν. Αυτό όμως σημαίνει ότι το φορμαλιστικό σύστημα, στο οποίο ανήκει, αν είναι συνεπές, δεν θα είναι πλήρες.

Αν, όμως, η G(m) δεν είναι φορμαλιστικά αποδείξιμη τότε επιβεβαιώνεται η μεταμαθηματική ερμηνεία της, που λέει ακριβώς αυτό. Η αριθμητική πρόταση G(m) είναι, επομένως, αληθής, παρά το ότι δεν μπορεί ναι αποδειχθεί φορμαλιστικά, αφού είναι ορθή η ερμηνεία της στην μεταμαθηματική, «διαισθητικά» κατασκευασμένη, γλώσσα που μελετά την δομή του φορμαλιστικού συστήματος.

Θα μπορούσε να νομισθεί ότι η μη πληρότητα θα μπορούσε να αποφευχθεί με προσθήκες στις λογικές αρχές ή με προσθήκη της παραπάνω μη αποκρίσιμης πρότασης στα αξιώματα του φορμαλιστικού συστήματος. Αλλά η κατασκευή μίας μη αποκρίσιμης πρότασης μπορεί να επαναληφθεί και για το νέο διευρυμένο σύστημα αξιωμάτων. Με άλλα λόγια, μη αποκρίσιμες προτάσεις *δεν* μπορούν να αποφευχθούν καθόλου, ενώ η συνέπεια του φορμαλιστικού συστήματος μπορεί να αποδειχθεί μόνο με την βοήθεια συλλογιστικών αρχών που δεν μπορούν να «απεικονισθούν» μέσα στην φορμαλιστική αριθμητική. Τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν για κάθε κλάδο των μαθηματικών, αφού οι φυσικοί αριθμοί αποτελούν βασικά μεγέθη για όλα τα μαθηματικά. Έτσι προτάσεις που δεν μπορούν ούτε να αποδειχθούν ούτε να απορριφθούν, υπάρχουν σε κάθε κλάδο των μαθηματικών με υπολογίσιμη πολυπλοκότητα.

Αυτό δημιουργεί και την ερώτηση αν μπορεί κανείς να προσδιορίσει για κάθε ειδική πρόταση αν μπορεί είτε να αποδειχθεί είτε να απορριφθεί από το δοσμένο αξιωματικό σύστημα. Το 1936 οι Alonso Church και Alan Turing έδειξαν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος (συστηματική υπολογιστική διαδικασία) που να το κάνει αυτό. Πέρα από τις μη αποκρίσιμες προτάσεις που κατασκευάζει ο Gödel μπορεί να υπάρχουν σε ένα τέτοιο φορμαλιστικό σύστημα και άλλες μη αποκρίσιμες προτάσεις. Όμως δεν μπορούμε να διαπιστώσουμε εκ των προτέρων ποιες είναι μη αποκρίσιμες.

Οι μη αποκρίσιμες προτάσεις που κατασκευάζει ο Gödel δεν είναι ξεκάθαρο τι σημαίνουν ως μαθηματικές προτάσεις, δηλαδή τι είδους μαθηματική ερώτηση απαντούν, γιατί είναι περίπλοκες. Μίαν μαθηματικά πιο ξεκάθαρη μορφή τέτοιων προτάσεων δίνει ο Martin Davis [Computability and Unsolvability, Dover, p.229]. Οι προτάσεις αυτές αναφέρονται σε Διοφαντικές εξισώσεις. Αυτές είναι πολυωνυμικές εξισώσεις πολλών μεταβλητών με ακέραιους συντελεστές, όπως η $3x^2+2y^3= z^4$, των οποίων ζητούμε ακέραιες λύσεις. Ισχύει, λοιπόν, για τέτοιες εξισώσεις:

«*Σε κάθε αξιωματοποίηση της Αριθμοθεωρίας αντιστοιχεί μία Διοφαντική εξίσωση, που δεν έχει ακέραιες θετικές λύσεις, αλλά τέτοια ώστε αυτό το γεγονός να μην μπορεί να αποδειχθεί με την δοσμένη αξιωματοποίηση*».

Το αποτέλεσμα αυτό του Gödel έδωσε ένα θανάσιμο χτύπημα στην προσπάθεια πλήρους αξιωματοποίησης των βασικών μαθηματικών θεωριών όπως είναι η Αριθμοθεωρία και η Συνολοθεωρία.

Φαινομενικά, το αντίτιμο της συνέπειας ενός φορμαλιστικού συστήματος αξιωμάτων είναι η μη πληρότητα. Η αξία του φορμαλισμού μειώνεται επί πλέον από το γεγονός ότι μερικές από τις μη αποκρίσιμες προτάσεις που περιλαμβάνει αποδεικνύεται, εντούτοις, ότι είναι ορθές με τους κανόνες συλλογιστικής των Μεταμαθηματικών, που λαμβάνουν υπόψη, όχι μόνο την συντακτική δομή των προτάσεων, αλλά και το νόημα των χρησιμοποιούμενων όρων. Έτσι, ο Gödel έδειξε πως ότι είναι διαισθητικά βέβαιο εκτείνεται πέρα από τις φορμαλιστικές μαθηματικές αποδείξεις, δηλαδή αποδείξεις που προκύπτουν από αξιωματικά συστήματα για την περιγραφή μαθηματικών μεγεθών.

Θα ιδούμε όμως τώρα ότι ένα φορμαλιστικό σύστημα έχει, παρά τις παραπάνω ατέλειες, πολύ μεγαλύτερο περιεχόμενο από αυτό που είναι «διαισθητικά» άμεσα αντιληπτό. Δεν περιγράφει μόνο τις ιδιότητες κάποιων διαισθητικά αντιληπτών μεγεθών αλλά και άλλα μεγέθη εντελώς διαφορετικά.

Η Θεωρία των Löwenheim και Skolem

Οι έρευνες που άρχισε το 1915 ο Γερμανός Leopold Löwenheim (1878 - 1957) και συνεχίστηκαν, απλοποιήθηκαν και συμπληρώθηκαν από τον Νορβηγό Thoralf Skolem (1887-1963) σε μίαν σειρά από εργασίες από το

1920 ως το 1934, απεκάλυψαν νέες αδυναμίες αλλά και δυνατότητες των αξιωματικών συστημάτων.

Η ουσία της θεωρίας *Löwenheim-Skolem* είναι η εξής:

Έστω ότι δημιουργούμε λογικά και μαθηματικά αξιώματα για κάποιον κλάδο των μαθηματικών. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε ένα σύνολο αξιωμάτων για τους φυσικούς αριθμούς, όπως είναι τα αξιώματα του Peano. Αυτό που επιδιώκουμε είναι το να χαρακτηρίζουν αυτά τα αξιώματα *πλήρως* τους θετικούς ακέραιους αριθμούς *και μόνο τους θετικούς ακέραιους αριθμούς*. Εντούτοις ανακαλύπτουμε, παραδόξως, ότι μπορούμε να βρούμε ερμηνείες των αξιωμάτων αυτών (μοντέλα) που είναι δραστικά διαφορετικά από αυτούς. Έτσι, ενώ οι ΦΑ αποτελούν μίαν ακολουθία $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$,… υπάρχουν ερμηνείες του συστήματος αξιωμάτων τους, που περιλαμβάνουν τόσα στοιχεία όσο το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Αυτοί είναι τόσο πολλοί ώστε *δεν* μπορούν να γραφτούν ως ακολουθία (βλέπε Παράρτημα 3). Υπάρχουν επίσης ερμηνείες, δηλαδή μοντέλα[6], με ακόμα μεγαλύτερα πλήθη στοιχείων.

Για να τεκμηριώσει πιο άμεσα το παραπάνω αποτέλεσμα για τα αξιώματα των ΦΑ, ο Skolem δημιούργησε σε εργασίες του το 1929, 1934 και 1935 μίαν ερμηνεία του συστήματος αξιωμάτων της Αριθμοθεωρίας ριζικά διαφορετική από το παραδοσιακό μοντέλο των ΦΑ. Έδειξε ότι όλα τα αξιώματα που χαρακτηρίζουν το διατεταγμένο σύνολο των φυσικών αριθμών $1<2<3<\ldots$ χαρακτηρίζουν και διατεταγμένα σύνολα συναρτήσεων των ΦΑ (απεικονίσεων των ΦΑ σε ΦΑ), όπου γράφουμε $f(x)<g(x)$ αν η τιμή $f(x)$ είναι μικρότερη από την τιμή $g(x)$ για άπειρο πλήθος φυσικών αριθμών x. Γράφουμε, για παράδειγμα, $x+100<x^2$ γιατί αυτό ισχύει για κάθε ΦΑ από το 11 και μετά. Έτσι μπορούμε να επεκτείνουμε την ακολουθία των ΦΑ με τον εξής τρόπο:

$$1<2<3<\ldots<x<x+1<x+2<\ldots<x+100<\ldots<2x<2x+1<\ldots<x^2<x^2+1<\ldots$$
$$<x^2+x+1<\ldots<x^3<x^3+1<\ldots<2x^3+3x^2+4x+5<\ldots<x^4<x^4+1<\ldots$$

όπου τα 1, 2, 3, … θεωρούνται τώρα απλά συναρτήσεις με σταθερή τιμή.

Προφανώς, όταν συγκρίνουμε με αυτόν τον τρόπο συναρτήσεις των ΦΑ το σύμβολο «<» έχει διαφορετικό από το καθιερωμένο νόημα. Αυτό όμως *δεν* αλλάζει τίποτα στον φορμαλισμό. Τα αξιώματα που περιλαμβάνουν αυτό το σύμβολο ισχύουν απαράλλακτα για το νέο σύστημα μεγεθών.

Το παραπάνω διατεταγμένο σύνολο πληροί όλα τα καθιερωμένα αξιώματα για τους ΦΑ, αλλά δεν είναι ισόμορφο με αυτούς. Δεν έχει ίδια δομή με αυτούς, γιατί εδώ υπάρχουν όροι, όπως ο x και ο 2x, μεταξύ των οποίων παρεμβάλλονται άπειροι ενδιάμεσοι, ενώ μεταξύ δύο ΦΑ υπάρχει πάντα πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων. Τα μέλη του ονομάσθηκαν αργότερα *υπερακέραιοι.* Ακόμα και επεκτάσεις του καθιερωμένου συστήματος αξιωμάτων δεν αλλάζουν τίποτα, γιατί ο Skolem απέδειξε ότι εξακολουθούν να δέχονται μετερμηνείες όπως η παραπάνω ακόμα και αν προστεθεί ένα νέο αξίωμα για κάθε φυσικό αριθμό.

Εδώ πρέπει να προσέξουμε δύο πράγματα:

[6] **Μοντέλο** λέγεται μία *ερμηνεία* ενός φορμαλιστικού αξιωματικού συστήματος με όρους και μεγέθη της καθομιλουμένης. Το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι ένα μοντέλο του συστήματος αξιωμάτων του Peano.

1. Για όλα τα ριζικά διαφορετικά συστήματα μεγεθών, που ικανοποιούν τα αξιώματα του Peano, ισχύουν, βέβαια, όλα τα θεωρήματα που θα βρούμε σε ένα βιβλίο Αριθμοθεωρίας, αφού αυτά τα θεωρήματα προκύπτουν αποκλειστικά από τα αξιώματα του Peano.

2. Οι διαφορές στο πλήθος ή την διάταξη, που έχουν τα διάφορα παραπάνω μοντέλα, προκύπτουν από την θεώρησή τους ως συνόλων και όχι ως ακολουθιών. Γίνονται, δηλαδή, αντιληπτές από την Συνολοθεωρία αλλά όχι από την Αριθμοθεωρία. Το σύστημα αξιωμάτων της Αριθμοθεωρίας παράγει αριθμούς έναν προς έναν και όχι όλους μαζί σαν σύνολο, ούτε εξετάζει σύνολα.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι αξιωματικά συστήματα σχεδιασμένα για τον χαρακτηρισμό μίας μοναδικής κατηγορίας μαθηματικών αντικειμένων δεν μπορούν να εκπληρώσουν αυτόν το σκοπό. Ενώ το θεώρημα μη πληρότητας του Gödel μας λέει ότι ένα πεπερασμένο σύστημα αξιωμάτων δεν επαρκεί για να αποδείξει όλα τα θεωρήματα που ανήκουν στον κλάδο μαθηματικών τον οποίο προορίζονται να καλύψουν, η θεωρία Löwenheim-Skolem μας λέει ότι ένα σύστημα αξιωμάτων επιτρέπει πολλές ερμηνείες, ουσιαστικά διαφορετικές από εκείνη που επιδιώχθηκε. *Τα αξιώματα δεν περιορίζουν τις ερμηνείες ή τα μοντέλα. Επομένως, η μαθηματική πραγματικότητα δεν μπορεί να ενσωματωθεί με μη διφορούμενο τρόπο σε αξιωματικά συστήματα.*[7] {2}

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα αυτά οδήγησαν σε πολλές αντιτιθέμενες ερμηνείες. Εδώ συγκρούονται κάποια βαθύτερα «πιστεύω», κάποιες μεταφυσικές αντιλήψεις, όπως αυτές των Πλατωνιστών με εκείνες των Διαισθητιστών, που θεωρούν ότι οι περισσότερες μαθηματικές αλήθειες δεν προϋπάρχουν, αλλά κατασκευάζονται από τους μαθηματικούς, μέσα στα πλαίσια που επιτρέπει η διαισθητική αντίληψη των βασικών μαθηματικών μεγεθών.

Αυτό εξηγεί γιατί πολλοί Λογικοθεωρητικοί δεν μιλούν γι' αυτά τα αποτελέσματα, αφού δυσκολεύονται να τα ερμηνεύσουν. Υπάρχουν κάποιοι που δέχονται τα θεωρήματα του Gödel, αλλά προσπαθούν να παραβλέψουν εκείνα του Skolem, πιστεύοντας ότι τελικά υπάρχει μία μονοσήμαντη, διαισθητικά γνωστή, αριθμητική πραγματικότητα, έστω και αν χρειάζονται άπειρα αξιώματα για να περιγραφτεί. Πιστεύουν ότι η μόνο η συντακτική συνέπεια ενός φορμαλιστικού συστήματος δεν εξασφαλίζει ότι αυτό «έχει νόημα». Όμως ένα θεώρημα του Leon Henkin λέει ότι, αν μία φορμαλιστική θεωρία (με κατηγορηματική λογική πρώτης βαθμίδας) είναι συνεπής, τότε έχει οπωσδήποτε ένα μοντέλο πεπερασμένο ή ισοπληθές με τους ΦΑ. Αυτό σημαίνει ότι περιγράφει κάποιου είδους «μαθηματική πραγματικότητα».

Τι είναι η διαισθητική αντίληψη των μαθηματικών

---

[7] Μονοσήμαντη ερμηνεία έχουμε αν ενσωματώσουμε στα αξιώματα Peano την **κατηγορηματική λογική 2^{ης} βαθμίδας,** που εξετάζει ιδιότητες ιδιοτήτων των ΦΑ, αντί για την κατηγορηματική λογική 1^{ης} βαθμίδας, που εξετάζει μόνο ιδιότητες (κατηγορήματα) των ΦΑ. Αλλά σε αυτήν την περίπτωση **δεν υπάρχει μέθοδος να παραχθούν συντακτικά όλες οι προτάσεις σχετικά με ΦΑ**.

Το γεγονός ότι οι ερμηνείες αξιωματικών συστημάτων, που καλύπτονται από το θεώρημα Löwenheim-Skolem είναι ριζικά διαφορετικές μας λέει ουσιαστικά ότι με τα καθιερωμένα αξιώματα, π.χ. της Αριθμοθεωρίας, περιγράφουμε άπειρες κατηγορίες ριζικά διαφορετικών μεταξύ τους μεγεθών. Για κάθε τέτοια κατηγορία μεγεθών ισχύουν, βέβαια, πρόσθετα αξιώματα που τις διαφοροποιούν μεταξύ τους. Έτσι μπορούμε να φτιάξουμε πολλές Αριθμοθεωρίες ή Συνολοθεωρίες.

Τι σημαίνει, όμως, αυτό το αποτέλεσμα;

Ορισμένοι μαθηματικοί, όπως ο Gödel, είναι Πλατωνιστές. Πιστεύουν, δηλαδή, ότι υπάρχει μόνο μία βασική πραγματικότητα στα μαθηματικά, αυτή που είναι διαισθητικά αντιληπτή. Όλες οι άλλες ερμηνείες αξιωματικών συστημάτων τους φαίνονται επίπλαστες και χωρίς ουσιαστικό νόημα. Αυτή η αντίληψη παραβλέπει όμως ότι κατά καιρούς η διαισθητική μας αντίληψη για το τι είναι αριθμός επεκτείνεται, όπως έγινε με την δημιουργία των μιγαδικών αριθμών. Παρόμοια, οι *υπερακέραιοι* του Skolem οδήγησαν τον Abraham Robinson στην δημιουργία των *υπερπραγματικών* αριθμών και της Μη Συμβατικής Ανάλυσης[8].

Τα αρχικά αξιωματικά συστήματα δεν είναι αυθαίρετα κατασκευασμένα, αλλά περιγράφουν φορμαλιστικά την διαισθητική μας αντίληψη για τα μαθηματικά μεγέθη. *Όμως είναι λάθος να θεωρούμε ότι αυτή η διαισθητική αντίληψη είναι πλήρης και περιγράφει μίαν μονοσήμαντη πραγματικότητα.*

Σύμφωνα με την Αναπτυξιακή Ψυχολογία[9], δεν είναι οι έννοιες έμφυτες στον άνθρωπο, αλλά η ικανότητα να τις δημιουργεί σταδιακά. Έτσι, και η διαισθητική μας αντίληψη έχει τα όριά της. Δεν μπορεί να αποκλεισθεί ότι περισσότερα από ένα μοντέλα ή ερμηνείες ενός αξιωματικού συστήματος μπορούν να έχουν χρησιμότητα.

Η ίδια η διαισθητική αντίληψη της γεωμετρίας του χώρου ή των αριθμών δεν ανταποκρίνεται στην φυσική πραγματικότητα αλλά μόνο την προσεγγίζει. Δεν πρέπει να ξεχνούμε ότι η θεωρία της Σχετικότητας του Albert Einstein ανέτρεψε τόσο την Πλατωνική όσο και την Καντιανή αντίληψη για το τι είναι χώρος και χρόνος. Χώρος και χρόνος είναι πια αλληλοεξαρτώμενα και όχι ανεξάρτητα μεταξύ τους μεγέθη, ο δε χωροχρόνος έχει μη Ευκλείδια γεωμετρία τεσσάρων διαστάσεων[10]. Αυτό σημαίνει ότι η έννοια χώρου της Φυσικής δεν ανταποκρίνεται πια στην έννοια χώρου της καθημερινής ζωής, που ο Πλάτων θεωρούσε ότι πηγάζει από κάποια άϋλη και αιώνια ιδέα του χώρου. Παρόμοια, οι οποιεσδήποτε a priori ενοράσεις ή διαισθήσεις χώρου και χρόνου της σκέψης μας δεν ανταποκρίνονται στον χωροχρόνο της σύγχρονης Φυσικής, δηλαδή της Φύσης όπως την βλέπουμε σήμερα.

---

[8] Του έδωσαν την ιδέα ότι, αν ορίσουμε τα αντίστροφα εκείνων των υπερακεραίων, που βρίσκονται πέρα από την αρχική ακολουθία των ΦΑ, τότε αυτά θα πρέπει να θεωρηθούν ως διαφορετικά μεταξύ τους αυτοτελή απειροστά.

[9] Η Αναπτυξιακή Ψυχολογία (Developmental Psychology) μελετά τα στάδια της νοητικής ανάπτυξης των παιδιών διαχρονικά αρχίζοντας από την βρεφική ηλικία. Ξεκίνησε από τον $19^{ο}$ αιώνα, αλλά αναπτύχθηκε κυρίως τον $20^{ο}$ αιώνα αρχικά από τους Γερμανούς Clara & William Stern και αργότερα από τον Ελβετό Jean Piaget (1896-1980).

[10] Ενδέχεται μάλιστα, η γεωμετρία του Χωροχρόνου να έχει μεταβλητή καμπυλότητα από περιοχή σε περιοχή, πράγμα που σημαίνει ότι αλλού μπορεί να ισχύει μία γεωμετρία κατά Riemann και αλλού μία κατά Lobatschewsky.

Στην πραγματικότητα, η Αναπτυξιακή Ψυχολογία έχει διαπιστώσει ότι οι βασικές έννοιες χώρου, χρόνου, ποσού, ποσότητας, κ.ο.κ. σχηματίζονται, δηλαδή εξελίσσονται, σταδιακά στον νου του παιδιού με βάση την εμπειρία της καθημερινής ζωής σε διάστημα 10-12 ετών. Έτσι με κανέναν τρόπο δεν έχουν σχέση με τα συμπεράσματα της σύγχρονης φυσικής που βασίζονται σε μετρήσεις εξαιρετικής ακριβείας και λεπτά πειράματα. Μην ξεχνάμε ότι επί χιλιετίες οι άνθρωποι πίστευαν ότι η Γη είναι ουσιαστικά επίπεδη και όχι σφαιρική. Δεν υπάρχουν ούτε ιδεατές έννοιες χώρου και χρόνου, ούτε a priori ενοράσεις χώρου και χρόνου.

Ειδικά η έννοια του φυσικού αριθμού δεν φαίνεται να προκύπτει από την, δυσκολότερη από αυτήν για τα παιδιά, έννοια του χρόνου αλλά από άμεση αντιστοίχιση αντικειμένων προς τα δάκτυλα ενός ή δύο χεριών. Είναι χαρακτηριστικό ότι πρωτόγονοι λαοί χρησιμοποιούν αυτό το σύστημα για να μετρήσουν και δυσκολεύονται να μετρήσουν πέρα από το 10 ή 20. Ακόμα και η αρχική Χαλκιδική-Κυμαϊκή[11] γραφή των αριθμών, που υιοθετήθηκε από τους Λατίνους: I, II, III, IIII, V, VI, VII, VIII, VIIII, X, παραπέμπει στα δάκτυλα των χεριών, όπου το V αντιστοιχεί σε μία παλάμη και το X σε δύο παλάμες (αργότερα το σύμβολο IIII αντικαταστάθηκε με IV και το VIIII με IX).

Η Αδυναμία Φορμαλιστικού Καθορισμού των Νοημάτων

Η δημιουργία φορμαλιστικών αξιωματικών συστημάτων συνοδευόταν αρχικά από την πεποίθηση ή προσμονή ότι ένα τέτοιο σύστημα θα μπορούσε να χαρακτηρίσει μονοσήμαντα τα μεγέθη που υπεισέρχονται σε αυτό. Αν αυτή η προσμονή επαληθευόταν θα σήμαινε ότι μπορούμε να ορίσουμε τουλάχιστον τις μαθηματικές έννοιες φορμαλιστικά και έτσι να κατασκευάσουμε και μίαν μηχανή που να τις «καταλαβαίνει». Όμως αυτό δεν είναι εφικτό, όπως απέδειξαν τα θεωρήματα των Gödel και Löwenheim-Skolem. Ο φορμαλιστικός καθορισμός των εννοιών μόνο με βάση τις λογικές αλληλουχίες που υπάρχουν μεταξύ τους, δεν μπορεί να πετύχει. Αυτό βάζει ανυπέρβλητα εμπόδια στην προσπάθεια αναπαραγωγής της σκέψης, με καθαρά αλγοριθμική (μηχανική) επεξεργασία τύπων[12].

Αν ο ανθρώπινος νους δεν είχε μίαν άλλη, ευρύτερη, αντίληψη για τις μαθηματικές έννοιες από αυτήν που περιλαμβάνει το αξιωματικό σύστημα, δεν θα έπρεπε να διαφέρει στα μαθηματικά από έναν Η/Υ. Όμως, ο νους μας διαφέρει πράγματι από έναν Η/Υ, γιατί είναι ο χειριστής της, πολύ ευρύτερης από τον φορμαλισμό, γλώσσας των Μετα-μαθηματικών, δηλαδή της γλώσσας των διαισθητικών ερμηνειών ή μοντέλων.

Ο νους μας έχει μίαν ευρύτερη αντίληψη για τις μαθηματικές έννοιες, γιατί τείνει να τις εποπτικοποιεί αντί να τις ανάγει σε κάποιον φορμαλισμό. Συνέπεια τούτου είναι, όπως είδαμε, ότι ασυναίσθητα μπαίνουν σε αυτές και ιδιότητες που δεν περιλαμβάνει ο φορμαλισμός. Πόσες και ποιες ιδιότητες παρεισφρύουν έτσι εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο εποπτικοποιούμε.

---

[11] Η Κύμη (Cumae) ήταν αποικία των Χαλκιδέων στην Ιταλία παραλιακά, 30 χλμ. βόρεια της Νεάπολης. Από αυτήν πήραν οι Ετρούσκοι και αργότερα οι Λατίνοι το Χακιδικό αλφάβητο.

[12] Ανοικτή παραμένει μόνο η δυνατότητα αναλογικής (μη ψηφιακής) αναπαραγωγής της σκέψης με δημιουργία «κιναισθητικών σχημάτων» και κατοπινή ενσωμάτωσή τους σε λεκτικές εκφράσεις.

Αυτή η ιδιαιτερότητα του νου, που συχνά δημιουργεί προβλήματα στις αποδείξεις, προσφέρει όμως την δυνατότητα δημιουργίας νέων εννοιών μέσα από νέες εποπτικοποιήσεις. Πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι ο τρόπος που σκεπτόμαστε είναι αναλογικός παρά φορμαλιστικός, δηλαδή αναγόμενος σε μηχανική επεξεργασία συμβόλων.

Ξέρουμε, λοιπόν, καλύτερα από έναν Η/Υ τι είναι, για παράδειγμα, φυσικός αριθμός;

Η απάντηση είναι «ναι» και «όχι». «Ναι», αν αναφερόμαστε στην διαισθητική κατανόηση αυτής της έννοιας. «Όχι», αν δεχόμαστε ως ουσιώδεις όλες τις δυνατές ερμηνείες, όλα τα δυνατά μοντέλα ενός αξιωματικού συστήματος.

Αφ’ ενός μεν οι διαισθητικές μας έννοιές έχουν ευπλαστότητα και επιτρέπουν την δημιουργία διαφόρων παραλλαγών και επεκτάσεων (π.χ. τους γκαουσιανούς ακέραιους $m+in,$ με $i=\sqrt{-1}$ και n, m ακέραιους, ή γενικότερα, αλγεβρικούς ακέραιους $m+n\sqrt{k}$ με m, n, k ακέραιους[13]). Αφ’ ετέρου, όμως, για οποιοδήποτε σύστημα αξιωμάτων των ΦΑ υπάρχουν άπειρα συστήματα μεγεθών, που δεν είναι ΦΑ, αλλά ικανοποιούν τα ίδια αξιώματα. Αυτά τα συστήματα μεγεθών δυσκολευόμαστε πολύ να τα καταλάβουμε, αν δεν έχουμε κάποιο αριθμητικό μοντέλο γι’ αυτά, σαν αυτό που κατασκεύασε ο Skolem, γιατί αντίκεινται στην διαισθητική μας αντίληψη.

Δεν κατανοούμε καλύτερα από τον Η/Υ τι είναι φυσικοί αριθμοί, γιατί αυτοί δεν μπορούν να ορισθούν μονοσήμαντα. Μπορούμε όμως να χειριστούμε με μεγαλύτερη ελευθερία την αρχική διαισθητική αντίληψή τους, επεκτείνοντάς τους με διαφόρους τρόπους και μπορούμε να δημιουργήσουμε καινούργια μοντέλα, καινούργιες ερμηνείες ενός αξιωματικού συστήματος.

Οι μαθηματικοί, λοιπόν, δεν μπορούν να λειτουργήσουν χωρίς την διαίσθηση, ενώ οι ψυχολόγοι (με εξαίρεση τον Carl Gustav Jung[14]) φαίνονται να προσπαθούν να αποφύγουν την έννοια «διαίσθηση». Ένα τόσο σημαντικό φαινόμενο, όπως η ύπαρξη της μαθηματικής διαίσθησης και γενικότερα της επιστημονικής διαίσθησης, αγνοείται παντελώς από την σύγχρονη ψυχολογία.

Αναπτυξιακός Καντισμός

Πού μας οδηγεί η μη πληρότητα και πολυσημία των αξιωματικών συστημάτων;

Αυτό, που σίγουρα δεν προκύπτει, είναι ότι μπορούμε να παραβλέψουμε τις υπαγορεύσεις κάποιας αρχικής «διαίσθησης». Δεν έχει νόημα να κατασκευάζουμε αυθαίρετα αξιωματικά συστήματα, δηλαδή τυχόντες φορμαλιστικούς κανόνες. Τα αξιωματικά μας συστήματα πρέπει να έχουν για μας κάποιο νόημα, δηλαδή να συμβαδίζουν με κάποια διαισθητική αντίληψη για κάποια μεγέθη. Γι αυτό, ακόμα και αν ξεφεύγουμε από τις κλασσικές θεωρίες, χρειαζόμαστε κλασσικά μοντέλα τους για να τις κατανοήσουμε, όπως για τις μη Ευκλείδιες γεωμετρίες κατασκευάζουμε Ευκλείδια μοντέλα τους.

---

[13] Βλέπε D. E. Littlewood: Στοιχειώδης Εισαγωγή στα Ανώτερα Μαθηματικά, Κάτοπτρο.

[14] Ο Jung θεωρεί ότι οι λειτουργίες του συνειδητού μέρους του νου είναι τέσσερις: αίσθηση, διανόηση, *διαίσθηση* και συναίσθημα.

Παρόλα αυτά, δεν είναι ξεκάθαρο μέχρι που πρέπει να υπακούσουμε στις υπαγορεύσεις της διαίσθησης. Οι Πλατωνιστές, όπως ο Gödel, πιστεύουν ότι υπάρχει μία μονοσήμαντη βασική «διαίσθηση» των εννοιών «φυσικός αριθμός» και «σύνολο» και ότι ορισμένες παραλλαγές των αξιωματικών συστημάτων είναι χωρίς ουσιαστικό νόημα. Άλλοι, όμως, όπως ο Abraham Robinson, δεν θέλουν να παραιτηθούν από όλες αυτές τις παραλλαγές ή και την πολλαπλότητα ερμηνειών ενός συστήματος.

Ο Πλατωνισμός και ο Καντισμός δεν συμβιβάζονται, όπως είδαμε, με την σύγχρονη Φυσική. Πιο σωστή φαίνεται να είναι μία παραλλαγή των αντιλήψεων του Kant, που θα μπορούσε να ονομασθεί «*Αναπτυξιακός Καντισμός*» (Developmental Kantism): Οι κατηγορίες της σκέψης δεν είναι εξ ολοκλήρου a priori δοσμένες, δηλαδή έμφυτες, αλλά δημιουργούνται σταδιακά κατά την ανάπτυξη του παιδιού. Αυτό όμως δεν γίνεται αυθαίρετα, αλλά με βάση τις έμφυτες δυνατότητες λειτουργίας και αντίληψης του ανθρώπινου οργανισμού σε συνδυασμό με την επιρροή του φυσικού και κοινωνικού περιβάλλοντος. Αυτή η αντίληψη επιτρέπει στο εννοιακό μας σύστημα να έχει ευπλαστότητα και προσαρμοστικότητα. Δίνει, δηλαδή, στον νου την δυνατότητα να δημιουργεί διάφορες παραλλαγές εννοιών. Έτσι, a priori δεν είναι δοσμένες κάποιες έννοιες, αλλά οι τάσεις σχηματισμού και εξέλιξής τους με βάση την εμπειρία.

Αυτές οι τάσεις διαμόρφωσης των εννοιών οφείλονται καθαρά στην βιολογική μας υπόσταση, δηλαδή στις βιολογικές μας δυνατότητες και λειτουργίες. Όπως εξήγησε εύστοχα ο Henri Poincaré, η ύπαρξη στερεών αντικειμένων σε έναν τρισδιάστατο χώρο μπορεί να γίνει κατανοητή μόνο από έναν κινούμενο παρατηρητή[15]. Αποκτούμε την αίσθηση ότι ένα κινούμενο σώμα έχει σταθερό σχήμα μόνο αν μπορούμε να αποκαταστήσουμε την αρχική του όψη μεταβάλλοντας κατάλληλα την θέση μας ως προς αυτό. Από την άλλη πλευρά, η αρχική μας αντίληψη του χρόνου βασίζεται στην συναίσθηση (την εσωτερική μας αίσθηση) της βιολογικής μας εξέλιξης και στην σειριακή καταγραφή των εμπειριών μας στην μνήμη (Νέες μνήμες, νέες γνώσεις, καταγράφονται πάντα με την βοήθεια παλαιοτέρων, όπως τα κλαδιά ενός δέντρου ξεφυτρώνουν από τον κορμό ή από παλαιότερα κλαδιά). Τέλος, η τάση για αναζήτηση αιτιωδών σχέσεων οφείλεται, προφανώς, στο ότι η μνήμη καταγράφει νέες εμπειρίες δημιουργώντας συνειρμούς με προγενέστερες που συγγενεύουν ή σχετίζονται με αυτές (Αυτό αντιστοιχεί με την δημιουργία συνάψεων στους νευρώνες).

Βιβλιογραφία:

1. Morris Kline: Mathematics. The Loss of Certainty, Oxford, 1980.
2. Bryan Bunch, Mathematical Fallacies and Paradoxes, Dover 1997.
3. P.J.Davis-R.Hersh: Η Μαθηματική Εμπειρία, Τροχαλία.

Παράρτημα 1: Ευκλείδιο Μοντέλο μίας μη Ευκλείδιας Γεωμετρίας

[15] Βλέπε Henri Poincaré: Η Αξία της Επιστήμης, Κάτοπτρο, 1997, σελ.71-72.

Είναι δυνατό να είναι «σωστή» μία γεωμετρία όπου το Ευκλείδιο αξίωμα των παραλλήλων αντικαθίσταται, για παράδειγμα, με την πρόταση ότι δεν μπορούν να υπάρξουν στο επίπεδο παράλληλες (δηλαδή, μη τεμνόμενες) ευθείες;

Εδώ πρέπει να διευκρινισθεί ότι δεν μας ενδιαφέρει καταρχήν αν αυτή η γεωμετρία επαληθεύεται με φυσικές παρατηρήσεις, αλλά μόνον αν έχει εσωτερική λογική συνέπεια. Το ζητούμενο δεν είναι αν το άθροισμα των γωνιών ενός γεωδαιτικού τριγώνου είναι ή δεν είναι δύο ορθές, αλλά αν οι προϋποθέσεις αυτής της γεωμετρίας είναι λογικά συνεπείς μεταξύ τους. Επίσης, δεν εξετάζουμε τις εποπτικές παραστάσεις που συνδέουμε με αυτές τις προτάσεις αλλά μόνο την εσωτερική τους λογική αλληλουχία, δηλαδή το αν είναι συμβατές μεταξύ τους ή οδηγούν σε λογικές αντιφάσεις.

Για την παραπάνω μη Ευκλείδια γεωμετρία του επιπέδου διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι υπάρχει ένα πολύ απλό Ευκλείδιο μοντέλο. Αρκεί μόνο να μετονομάσουμε κάποιες γεωμετρικές έννοιες. Προφανώς, η συνέπεια ή μη του συστήματος αξιωμάτων δεν θα έπρεπε να εξαρτάται από το τι ονόματα δίνουμε στα διάφορα μεγέθη.

Ένα τέτοιο μοντέλο, που έχει προτείνει ο Bernhard Riemann, συνίσταται από μίαν σφαίρα που ο νότιος πόλος της ακουμπά επάνω σε ένα επίπεδο, ενώ ο βόρειος είναι ελεύθερος. Δημιουργούμε αντιστοιχίες μεταξύ σημείων του επιπέδου και σημείων της σφαίρας με το να φέρουμε από τον βόρειο πόλο της σφαίρας μίαν ακτίνα που φθάνει στο εκάστοτε σημείο του επιπέδου. Αυτή η ακτίνα διαπερνά την σφαίρα σε κάποιο σημείο, που το θεωρούμε ως το «νεοσημείο» που αντιστοιχεί στο σημείο του επιπέδου. Τα νεοσημεία που αντιστοιχούν σε μίαν ευθεία του επιπέδου είναι τότε κύκλοι που περνούν από τον βόρειο πόλο της σφαίρας. Οι κύκλοι αυτοί είναι τομές της σφαίρας με το επίπεδο που ορίζεται από την δοσμένη ευθεία και τον βόρειο πόλο της σφαίρας. Αυτούς τους κύκλους τους ορίζουμε ως «νεοευθείες» και έχουμε έτσι μίαν πλήρη μη Ευκλείδια γεωμετρία.

Σε αυτό το νεοεπίπεδο (την σφαίρα) διαπιστώνουμε, ότι δεν υπάρχουν νεοευθείες που να μην τέμνονται. Επαληθεύεται, δηλαδή η παραπάνω μη Ευκλείδια εκδοχή του αξιώματος περί παραλλήλων. Κατά τα άλλα ισχύουν τα γνωστά αξιώματα της γεωμετρίας.

Τι σημαίνει αυτό; Προφανώς, η νέα μας γεωμετρία είναι τόσο συνεπής όσο η Ευκλείδια γεωμετρία. Αν η μία είναι συνεπής τότε και η άλλη είναι συνεπής. Αν η μία έχει λογικές αντιφάσεις τότε και η άλλη έχει τέτοιες αντιφάσεις.

Παράρτημα 2: Τα αξιώματα των Dedekind-Peano και εκείνα του Skolem:

Τα αξιώματα Dedekind-Peano σε συμβολική γραφή είναι τα παρακάτω N1 ως N7. Εδώ τα σύμβολα έχουν το εξής νόημα: x′ είναι ο επόμενος του x, "x σημαίνει «για όλα τα x», ~Σ σημαίνει «δεν ισχύει η σχέση Σ», Π**Ø**Ρ σημαίνει «από την σχέση Π έπεται η Ρ», Π&Ρ σημαίνει ισχύουν τόσο η σχέση Π όσο και η Ρ, και Ρ(x) συμβολίζει το ότι η πρόταση Ρ ισχύει για τον αριθμό x:
N1. "x~(x′=0), N2. "x"y(x′=y′**Ø**x=y), N3. "x(x+0=x), N4. x"y(x+y′=(x+y)′),
N5. "x(x0=0), N6. "x"y(xy′=xy+x), N7. P(0)&"x(P(x) **Ø**P(x′)) **Ø**"xP(x).

Εδώ το Ν1 σημαίνει ότι το 0 δεν έχει προηγούμενο αριθμό, το Ν2 ότι, αν οι επόμενοι δύο αριθμών είναι ίσοι, τότε είναι ίσοι και οι αρχικοί αριθμοί. Τα Ν3,Ν4 ορίζουν την πρόσθεση, τα Ν5,Ν6 τον πολλαπλασιασμό, και το Ν7 είναι το αξίωμα πλήρους επαγωγής.

Ο Skolem χρησιμοποίησε την ακόλουθη παραλλαγή αυτών των αξιωμάτων όπου ξεκινά από το 1 αντί το 0 (Εδώ τα απλοποιούμε κάπως παραλείποντας τον φορμαλισμό):

(1) Οι φυσικοί αριθμοί είναι γραμμικά διατεταγμένοι μέσω της σχέσης '<'.

(2) Υπάρχει ένας μικρότερος αριθμός, ο 1.

(3) Για κάθε αριθμό x υπάρχει ένας αμέσως μεγαλύτερος, ο x+1.

(4) Υπάρχει μία πράξη '+', η πρόσθεση, που ορίζεται με την αναδρομική σχέση $x+(y+1)=(x+y)+1$.

(5) Υπάρχει μία πράξη, ο πολλαπλασιασμός, που ορίζεται με την αναδρομική σχέση $x(y+1)=xy+x$.

(6) Αρχή της Επαγωγής: Αν μία πρόταση, P(x), που αναφέρεται σε φυσικούς αριθμούς x, ισχύει για x = 1 και από την ισχύ της για x=k έπεται ότι ισχύει και για x=k+1, τότε έπεται ότι η πρόταση ισχύει για όλους τους ΦΑ x.

Παράρτημα 3 : Γιατί οι πραγματικοί αριθμοί του διαστήματος [0,1] υπερβαίνουν σε πλήθος τους φυσικούς αριθμούς

Αυτό το απέδειξε ο Georg Cantor με εις άτοπον απαγωγή: Έστω ότι σε κάθε πραγματικό αριθμό από το [0,1), δηλαδή σε κάθε δεκαδικό αριθμό με ακέραιο μέρος 0, όπως ο 0,3241597683…, αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός. Τότε μπορούμε να γράψουμε όλους τους αυτούς τους πραγματικούς σε έναν πίνακα με την σειρά της αντιστοιχίας τους προς του ΦΑ:

1 ¨ $0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}$….

2 ¨ $0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}$….

…

ν ¨ $0,\alpha_{\nu 1}\alpha_{\nu 2}\alpha_{\nu 3}$….

…

όπου $\alpha_{\nu\kappa}$ είναι το κ δεκαδικό ψηφίο του νιοστού πραγματικού αριθμού (ο $\alpha_{\nu\kappa}$ είναι, δηλαδή, ένας ακέραιος από 0 ως 9).

Υποτίθεται ότι όλοι οι πραγματικοί του [0,1) θα έπρεπε να βρίσκονται σε αυτόν τον πίνακα. Εντούτοις, υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί του [0,1) που δεν περιλαμβάνονται σε αυτόν.

Κάθε αριθμός της μορφής: $0,\beta_1\beta_2\beta_3$… όπου β_1∫α_{11}, β_2∫α_{22}, β_3∫α_{33},…, δηλαδή β_κ∫$\alpha_{\kappa\kappa}$, <u>δεν</u> ανήκει στον πίνακα, γιατί διαφέρει ως προς κάποιο ψηφίο του από κάθε δεκαδικό αριθμό που βρίσκεται στον πίνακα. Διαφέρει από τον πρώτο στο πρώτο του ψηφίο, από τον δεύτερο στο δεύτερό του ψηφίο, και γενικά από τον κ δεκαδικό του πίνακα διαφέρει στο κ ψηφίο του. Έτσι, το σύνολο R[0,1) των πραγματικών αριθμών του διαστήματος [0,1) έχει οπωσδήποτε μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων από το σύνολο Ν των φυσικών αριθμών. { Ως εδώ η έκταση του κειμένου είναι 6010 λέξεις, χωρίς όμως τις υποσημειώσεις}

Παράρτημα 4: Οι βιολογικοί μηχανισμοί πίσω από την διαισθητική αντίληψη. {Έχει επεκταθεί σε σχέση με το αντίστοιχο του 3Αξιωματικά Συστήματα.doc}

Τι μπορεί να είναι η μη λεκτική επίγνωση μίας έννοιας, που ονομάσαμε «διαίσθηση»;

Κατά την γνώμη μου βασίζεται σε κιναισθητικά (ή αισθησιοκινητικά) (sensori-motor) «σχήματα» δράσης-αντίδρασης προς εξωτερικά ερεθίσματα, όπως τα ονομάζει ο Piaget, δηλαδή στερεότυπες κιναισθητικές διαδικασίες που αρχίζουμε να αποκτούμε ήδη από την πρώτη βρεφική ηλικία. Τέτοια «κιναισθητικά σχήματα» αρχίζουν με ορισμένες βιολογικά δοσμένες ανακλαστικές κινήσεις που σταδιακά μορφοποιούνται σε οργανωμένα σύνολα και συντονίζουν την όραση με τις κινήσεις των χεριών για να πιάσουμε κάτι και, για παράδειγμα, να το φέρουμε στο στόμα δοκιμάζοντας την υφή του (αν είναι μαλακό ή σκληρό, ζεστό ή κρύο, πικρό ή αλμυρό ή γλυκό κ.ο.κ.). Τα κιναισθητικά αυτά σχήματα περιέχουν τις αρχικές γνώσεις που έχει το βρέφος για την ύπαρξη και την υφή των αντικειμένων, τον χώρο, τον χρόνο και την έννοια της αιτιότητας (Βλέπε [Στέλλα Βοσνιάδου: Σκέψη, Κείμενα Εξελικτικής Ψυχολογίας, Gutenberg, 1999, σελ.16]). Οι έννοιες αυτές είναι εξαιρετικά ατελείς και υποτυπώδεις. Για παράδειγμα, ο χώρος του μωρού *δεν* είναι κατά κανέναν τρόπο μία αφηρημένη έννοια, αλλά μία ατελής αίσθηση του περιβάλλοντος χώρου χωρισμένου σε έναν οπτικό και έναν κινητικό-απτικό άμεσα περιβάλλοντα χώρο, που σταδιακά συντίθενται σε ένα ενιαίο σύνολο στον βαθμό που το παιδί μαθαίνει να συντονίζει την όραση με την κίνηση των χεριών και την αφή. Τέτοια κιναισθητικά σχήματα καθορίζουν, προφανώς, και τους αυτοματισμούς που καθοδηγούν ασυνείδητα τα δάκτυλά μας προς τα πλήκτρά του Η/Υ όταν γράφουμε ή συντονίζουν την στάση και τις κινήσεις των ματιών και του σώματος όταν ποδηλατούμε ή όταν οδηγούμε. Βασικό τους χαρακτηριστικό είναι ότι είναι, όπως και η διαίσθηση, *ασυνείδητα* και *μη λεκτικά εκφράσιμα*. Δεν μπορούμε να μεταφέρουμε σε κάποιον λεκτικά την γνώση του πώς να ισορροπεί επάνω σε ένα ποδήλατο. Επίσης δεν απαιτούν κανενός είδους λογική επεξεργασία. Αποτελούν μάλλον συστήματα αναδράσεως, που συντονίζουν π.χ. τα μάτια και το χέρι για να καταλήξει στο κατάλληλο πλήκτρο του Η/Υ.

Εντούτοις, φαίνεται σε πολλούς αμφίβολο αν τέτοια κιναισθητικά σχήματα συμπεριφοράς μπορούν να αποτελέσουν το θεμέλιο της γλώσσας. Ο ίδιος ο Piaget δεν το κατανόησε! Έτσι εφηύρε την ιδέα ότι σταδιακά αναδύεται στον νου μία νέα λειτουργία, η λειτουργία συμβολοποίησης και αυτή δημιουργεί την γλώσσα. Όμως εγώ πιστεύω ότι η λειτουργία αυτή είναι παρούσα εξ αρχής, γιατί τα αποκτώμενα με κάποια δραστηριότητα κιναισθητικά σχήματα εφαρμόζονται σύντομα αδιακρίτως οπουδήποτε μπορούν να ταιριάξουν. Συλλαμβάνουμε την πραγματικότητα με την βοήθεια των ήδη διαθέσιμων κιναισθητικών σχημάτων. Έτσι ανακαλύπτουμε αφανείς (και ασυνείδητες για μας) συγγένειες μεταξύ των αντικειμένων και μαθαίνουμε να υποκαθιστούμε το ένα με κάποιο άλλο αν χρειαστεί. Για παράδειγμα, το παιδί βυζαίνει αρχικά τον μαστό της μητέρας του, αλλά σύντομα βυζαίνει αδιακρίτως και πολλά άλλα αντικείμενα δοκιμάζοντας έτσι τις ιδιότητές τους.

Αντί για μία νέα λειτουργία συμβολοποίησης έχουμε, κατά την γνώμη μου, μόνο μία νέα λειτουργία σήμανσης, δηλαδή ονοματοδοσίας, που εμφανίζεται γύρω στον 18^{ο} μήνα της ζωής παράλληλα με την έναρξη ταχείας ανάπτυξης των γλωσσικών κέντρων του εγκεφάλου (που είναι στους περισσότερους ανθρώπους ο φλοιός του αριστερού κροταφικού λοβού και το πίσω μέρος του αριστερού μετωπικού λοβού). Τα κιναισθητικά κυκλώματα ανάδρασης με το περιβάλλον, που διαμορφώνει σταδιακά το παιδί, αρχίζουν μετά τον 18^{o} μήνα να αποκτούν ονόματα, που επιτρέπουν την οργάνωσή τους σε πιο σύνθετα σύνολα. Τα ονόματα των σύνθετων αυτών κιναισθητικών αναπαραστάσεων αποκτούν όμως μόνο σταδιακά το καθιερωμένο νόημά τους. Σύμφωνα με τους Αναπτυξιακούς Ψυχολόγους, το παιδί αφομοιώνει το συμβατικό νόημα των λεκτικών εκφράσεων της καθομιλουμένης σε διάστημα άλλων 8 ως 10 ετών μαθαίνοντας σταδιακά τις ιδιότητες κάθε βασικής έννοιας. Αρχικά το νόημα των λέξεων που χαρακτηρίζουν κατηγορίες αντικειμένων δεν είναι ούτε γνήσια γενικό ούτε γνήσια ειδικό, όπως παρατηρεί ο Piaget. Η λέξη «Κύλο» μπορεί να αναφέρεται σε συγκεκριμένο σκύλο, ή κάθε σκύλο ή ακόμα και γάτες ή άλλα τετράποδα. «Γκάρι» μπορεί να σημαίνει αρχικά το φεγγάρι αλλά χρησιμοποιείται σύντομα π.χ. και για γυαλιστερά κουμπιά. Μόνο σταδιακά εξειδικεύονται τα ονόματα σε ονόματα συγκεκριμένων κατηγοριών αντικειμένων. Γι' αυτό ο Piaget ονομάζει τις έννοιες της πρώτης γλωσσικής περιόδου (2^{o} ως 6^{o} έτος) «προέννοιες» παραβλέποντας το γεγονός ότι προέννοιες μίας λέξης είναι και όλα τα κιναισθητικά σχήματα ανάδρασης που σχετίζονται με αυτήν. Ειδικά η έννοια του χρόνου αποδεικνύεται εξαιρετικά δύσκολο να αφομοιωθεί από ένα παιδί και παίρνει μία ολοκληρωμένη μορφή μόνο γύρω στην ηλικία των 10 ως 12 ετών. Αντίθετα, η έννοια του φυσικού αριθμού προκύπτει από διαδικασίες αντιστοίχησης και ολοκληρώνεται γύρω στην ηλικία των 6 ή 7 ετών.

Γιατί, όμως δεν δημιουργεί κάθε παιδί την δική του γλώσσα; Η ανάγκη τυποποίησης των νοημάτων των λέξεων οφείλεται στο ότι μόνο έτσι θα μπορέσει να επικοινωνήσει με το κοινωνικό περιβάλλον και αυτό είναι το βασικό κίνητρο για την δημιουργία της γλώσσας.

Πώς σχετίζεται αυτή η αντίληψη με τις προγενέστερες φιλοσοφικές αντιλήψεις;

Η Καντιανή άποψη περί επίγνωσης χωρίς μεσολάβηση της εμπειρίας χάνει το νόημά της με την απόρριψη της a priori υπόστασης των εννοιών «χώρος» και «χρόνος».

Για τον Jung «διαίσθηση» είναι η ικανότητα να συλλάβουμε την «περιρρέουσα ατμόσφαιρα» μίας κατάστασης, είτε εσωτερικής ψυχικής, είτε υπάρχουσας στον εξωτερικό φυσικό κόσμο, αντίληψη συμβατή με αυτήν που περιγράφουμε εδώ.

Κάποιοι, που πιστεύουν στην ύπαρξη παραψυχικών φαινομένων, όπως η ικανότητα άμεσης πρόγνωσης του μέλλοντος, ονομάζουν συχνά αυτήν την υποτιθέμενη ικανότητα «διαίσθηση» ή «ενόραση».

Όμως εδώ η διαίσθηση νοείται απλά ως μία βιολογική λειτουργία χωρίς πρόσβαση σε οτιδήποτε υπερβατικό ή σε κάποιον άϋλο κόσμο. Πηγάζει απλώς από τα κιναισθητικά σχήματα ανάδρασης με τον εξωτερικό κόσμο, που αρχίζουμε να σχηματίζουμε ήδη μόλις γεννηθούμε αφομοιώνοντας εμπειρίες. Έτσι, μας επιτρέπει να συλλάβουμε νοερά και χωρίς λεκτική έκφραση *ούτε λογική επεξεργασία* τις άτυπες, τις μη αντιπροσωπευτικές, χρήσεις και ιδιότητες ενός αντικειμένου, όπως είναι η χρήση μίας πέτρας αντί για σφυρί ή ενός μήλου ή μίας πατάτας ως βλήματος. Το τι μορφής νευρωνικός μηχανισμός την παράγει και πώς λειτουργεί περιγράφεται στο βιβλίο του συγγραφέα «Ο Μηχανισμός της Νόησης». Παράρτημα 4: Έχει 943 λέξεις

Μη Αριθμήσιμο Μοντέλο του Φορμαλιστικού Συστήματος Αριθμητικής του Peano[16]

Τα αξιώματα του Peano

Το σύνηθες φορμαλιστικό σύστημα αξιωμάτων του Peano είναι:
"x~(sx=0), **"**x**"**y(sx=sy**Ø**x=y), **"**x(x+0=x), **"**x**"**y(x+sy=s(x+y)), **"**x(xǁ0=0), **"**x**"**y(xǁsy=xǁy+x), και το αξίωμα επαγωγής:
P(0)&**"**x(P(x)**Ø**P(sx))**Ø"**xP(x).

Οι μαθηματικές σταθερές είναι εδώ το μεμονωμένο σύμβολο 0, τα σύμβολα πράξεων μεταξύ δύο όρων + και ǁ, και ο τελεστής διαδοχής s.

Το αξίωμα επαγωγής είναι εδώ, ακριβέστερα, ένα «*αξιωματικό σχήμα»,* γιατί παράγει ένα αξίωμα για κάθε επιλογή του κατηγορήματος P*.* Έχει, δηλαδή, μορφή που αντιστοιχεί σε κατηγορηματική λογική πρώτης βαθμίδας, η οποία εξετάζει κατηγορήματα (ιδιότητες) αλλά όχι κατηγορήματα κατηγορημάτων (ιδιότητες ιδιοτήτων). Στην κατηγορηματική λογική δεύτερης βαθμίδας η επαγωγή είναι ένα μόνο αξίωμα, που αναφέρεται σε *όλα* τα κατηγορήματα P και η μορφή του είναι:
" P[P(0)& **"**x{P(x)**fl**P(sx)}] **fl"**xP(x)

Η κατηγορηματική λογική 2ης βαθμίδας εξασφαλίζει, μάλιστα, την μονοσημαντότητα της ερμηνείας του μοντέλου αντίθετα από την κατηγορηματική λογική 1ης βαθμίδας. Δεν την χρησιμοποιούμε, όμως, γιατί στην λογική 2ης βαθμίδας δεν υπάρχει μέθοδος να παραχθούν συντακτικά όλες οι προτάσεις σχετικά με ΦΑ. (dtv -Atlas Mathematik, Bd.1, S.19 ή Boolos-Burgess-Jeffrey: Computability and Logic, Cambridge U.P., 2002, σελ. 279).

Εδώ θα χρειαστούν οι ακόλουθοι ορισμοί (Βλέπε R. Stoll: Set Theory and Logic, Dover, pp.193-194, 395):

1. *Μεμονωμένες Μεταβλητές*: Γράμματα ή γράμματα με δείκτες.
2. *Μεμονωμένες σταθερές*: Γράμματα και σύμβολα ειδικών καλά ορισμένων αντικειμένων. Π.χ. «3», «Γιάννης».
3. *Όροι (terms)*: Έτσι ονομάζονται: (α) μεμονωμένες μεταβλητές και μεμονωμένες σταθερές (είτε με την μορφή κυρίων ονομάτων είτε με μορφή περιγραφών). (β) αποτελέσματα πράξεων μεταξύ όρων. Αν r_1, r_2, …, r_n είναι όροι και A ένα σύμβολο πράξης μεταξύ n όρων τότε A(r_1, r_2, …, r_n) είναι ένας όρος.

Η ύπαρξη ενός μη αριθμήσιμου μοντέλου του φορμαλιστικού συστήματος αξιωμάτων του Peano προκύπτει από την ύπαρξη ενός αριθμήσιμου μοντέλου με την βοήθεια του «ανοδικού» θεωρήματος Löwenheim-Skolem. Αυτό το θεώρημα λέει ότι αν μία θεωρία *πρώτης τάξεως* έχει ένα άπειρο μοντέλο, τότε έχει ένα άπειρο μοντέλο για κάθε πληθάριθμο που έχει τουλάχιστον το μέγεθος της γλώσσας της θεωρίας. Δηλαδή, αν η γλώσσα έχει ένα μη αριθμήσιμο σύνολο σταθερών, τότε το φορμαλιστικό σύστημα αξιωμάτων

[16] (Βλέπε Google Answers, διάλογο Charlie-ga με mathtalk-ga: για "uncountable models of Peano arithmetic" 15.5.2005-18.5.2005)

ικανοποιείται από ένα τουλάχιστον εξίσου πολυπληθές μη αριθμήσιμο σύνολο μεγεθών.

Κατασκευή ενός μη αριθμήσιμου μοντέλου Αριθμητικής του Peano (AP) με τόσα στοιχεία όσοι είναι οι πραγματικοί αριθμοί

Βασική ιδέα της κατασκευής ενός τέτοιου μοντέλου είναι το να θεωρήσουμε το αρχικό απειροσύνολο **N** (το αρχικό μοντέλο των ΦΑ) και να επισυνάψουμε σε αυτό ένα μη αριθμήσιμο απειροσύνολο νέων σταθερών ποσοτήτων μαζί με νέα αξιώματα, που λένε ότι καμία από αυτές τις σταθερές δεν ισούται με μίαν άλλη: $c(r) \neq c(s)$ για $r \neq s$.

Στο σύνολο των *κλειστών προτάσεων*[17] που ικανοποιούνται από το **N** με βάση τα αρχικά αξιώματα προστίθενται τώρα όλες οι προτάσεις που μπορούν να παραχθούν με το επεκτεταμένο σύστημα αξιωμάτων.

Έστω, λοιπόν, ότι η Αριθμητική Peano είναι συνεπής και έχει το στερεότυπο μοντέλο **N**. Προσθέτουμε στην θεωρία μίαν νέα σταθερά $c_r = c(r)$ για κάθε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό $r \in \mathbf{R}^+$.

Τι μπορεί να είναι αυτές οι σταθερές; είναι, για παράδειγμα c(r) = r ή κάποια άλλη συνάρτηση του r;

Δεν έχει καμία σημασία τι φανταζόμαστε ότι είναι οι σταθερές $c_r = c(r)$, γιατί εδώ έχουν μόνο τις ιδιότητες που τους δίνουν τα αξιώματα της Αριθμοθεωρίας.

Θεωρούμε λοιπόν, όλους τους κλειστούς όρους (σταθερές ή αποτελέσματα πράξεων μεταξύ σταθερών), που μπορούν να κατασκευασθούν σε αυτήν την νέα γλώσσα και δημιουργούμε μεταξύ τους *κλάσεις ισοδυναμίας* ανάλογα με το αν η ισότητα δύο όρων μπορεί να παραχθεί από αυτήν την θεωρία ή όχι. Έτσι, ταυτίζουμε κάθε νέα σταθερά με όλες τις φορμαλιστικές εκφράσεις, για τις οποίες μπορεί να αποδειχθεί ότι ισούνται με αυτήν την σταθερά και κάθε κλειστό όρο[18], όπως είναι το γινόμενο δύο σταθερών, με όλους τους ισοδυνάμους του στα πλαίσια του φορμαλισμού.

Την κλάση ισοδυναμίας ενός όρου p την συμβολίζουμε με {p}. Το σύμβολο {0} σημαίνει, δηλαδή, την κλάση των εκφράσεων που είναι ισοδύναμες προς τον όρο 0. Παρόμοια, {5} είναι το σύνολο όλων των δυνατών φορμαλιστικών εκφράσεων που έχουν την τιμή 5 και {c(s)} το σύνολο όλων των φορμαλιστικών εκφράσεων που αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμες με c(s).

Γιατί, όμως, εισάγουμε κλάσεις ισοδυναμίας;

Στους φυσικούς αριθμούς (0), 1, 2, 3, … το αποτέλεσμα μίας πρόσθεσης ή ενός πολλαπλασιασμού είναι πάλι φυσικός αριθμός. Π.χ., $2+3=5$, $2 \cdot 3=6$. Αλλά για τις σταθερές που εισάγουμε δεν υπάρχει κατ' αρχήν τρόπος ταυτοποίησης του αθροίσματος ή γινομένου δύο σταθερών με κάποιαν άλλη σταθερά. Αυτό ισχύει, όμως, για τις κλάσεις ισοδυναμίας. Σε αυτές είναι:

$$\{p\}+\{q\}=\{p+q\}, \quad \{p\} \cdot \{q\}=\{p \cdot q\}$$

---

[17] Κλειστές λέγονται προτάσεις, που για όλες τις μεταβλητές τους υπάρχουν ποσοδείκτες **$\forall$** (για όλα) ή **$\exists$** (υπάρχει). Κλειστές θεωρούνται και παραστάσεις που περιλαμβάνουν μόνο σταθερές.

[18] Κλειστοί όροι είναι όσοι *δεν* περιλαμβάνουν μεταβλητές, όπως οι 5 ή 1+2 ή $2 \cdot 3$.

όπου p και q είναι κάποιοι αντιπροσωπευτικοί όροι των αντίστοιχων κλάσεων ισοδυναμίας {p},{q}.

Αντίστοιχα, όταν δίνεται η κλάση ισοδυναμίας {d} ενός κλειστού όρου d, διάδοχη κλάση, s{d}, είναι η κλάση του διαδόχου, s(d), του d: s{d}={s(d)}.

Για παράδειγμα, s{c(r)}= {s(c(r))}={c(r+1)}.

Μία αριθμητική των c(r): Την εισαγωγή κλάσεων ισοδυναμίας μπορούμε να αποφύγουμε αν θεωρήσουμε ότι είναι επιτρεπτή η εκτέλεση προσθέσεων και πολλαπλασιασμών στους πραγματικούς αριθμούς, που είναι δείκτες των σταθερών. Οι πράξεις αυτές δεν αλλοιώνουν το φορμαλιστικό σύστημα, γιατί δεν εφαρμόζονται στις ίδιες τις σταθερές, αλλά μόνο στους δείκτες τους. Οι πράξεις αυτές γίνονται μόνο για τον προσδιορισμό του δείκτη της σταθεράς με την οποία θα ταυτοποιηθεί το αποτέλεσμα μίας πράξης. Απλά μετατρέπουν μίαν σύνθετη παράσταση σε μίαν ισοδύναμη απλούστερη.

Μπορούμε, λοιπόν, να παρατηρήσουμε, ότι ο αναδρομικός ορισμός της πρόσθεσης x+sy=s(x+y) είναι (με x=c(r) και y=c(t-1)) συμβατός με την παραδοχή: c(r)+c(t):=c(r+t) που ανάγει το άθροισμα c(r)+c(t) σε έναν ισοδύναμό του όρο c(r+t). Έτσι, για κάθε δοσμένο ζεύγος σταθερών μπορούμε να καθορίσουμε μίαν τρίτη σταθερά που να είναι το άθροισμά τους, αν, βέβαια, ξέρουμε να προσθέτουμε δύο πραγματικούς δείκτες.

Αντίστοιχα, ο ορισμός: c(r)‖c(t):=c(r*t), όπου η παράσταση r*t νοείται ως γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών, είναι συμβατός με τον αναδρομικό ορισμό του πολλαπλασιασμού: c(r)‖c(t+1)= c(r)‖c(t)+ c(r), γιατί η σχέση αυτή γράφεται τότε c(r*(t+1))=c(r*t)+c(r)=c(r*t+r).

Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει, μάλιστα: c(r*2)=c(r*1)+c(r)=2‖c(r), c(r*3)=c(r*2)+c(r)=2‖c(r)c(r)+c(r)=3‖c(r)… δηλαδή γενικά, c(k*r)=k‖c(r). Με c(1):=1 έχουμε, έτσι, c(k)=k, όπότε οι ΦΑ συμπεριλαμβάνονται στις σταθερές μας.

Το μέγεθος του μοντέλου: Επειδή προσθέσαμε ένα μη αριθμήσιμο πλήθος διαφορετικών σταθερών το μοντέλο της επέκτασης αυτής της Αριθμοθεωρίας πρέπει να είναι μη αριθμήσιμο.

Από το *θεώρημα συμπάγειας* προκύπτει, τώρα, ότι, αν η αρχική θεωρία είναι συνεπής, τότε και η νέα θεωρία με μη αριθμήσιμες σταθερές είναι πάλι συνεπής. Το *θεώρημα αυτό* λέει ότι ένα σύνολο αξιωμάτων είναι ασυνεπές τότε μόνο όταν κάποιο πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ασυνεπές. Σε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο των επεκτεταμένων αξιωμάτων εμφανίζεται όμως μόνο πεπερασμένο πλήθος νέων σταθερών και αυτές μπορούν να «ερμηνευτούν» σαν διαφορετικοί μεταξύ τους Φυσικοί Αριθμοί. Αυτό δείχνει την συνέπεια του συστήματος αυτού σε εξάρτηση από την συνέπεια των αξιωμάτων του Peano.

Βασική Απορία: *Αλλά πώς διατρέχουμε με τον τελεστή διαδοχής s(p) ένα μη αριθμήσιμο πλήθος όρων;*

Εδώ φαίνεται να έχουμε ένα σύνολο όπως το ακόλουθο:
{0=0+0=0‖0=…, 1=0+1=1‖1=1+0‖2=…, 2=0+2=1+1=…, c_{r1} =c_{r1}+0 = c_{r1}+0‖c_{r2} =… , c_{r2}=…, c_{r3}= …}.
Για την συνάρτηση διαδοχής, όμως, φαίνεται να έχουμε 0 … **fl**1 … **fl**2 … που κάπως θα έπρεπε να περιλαμβάνει και τους όρους c_{r1}, c_{r2}, c_{r3}, …

Αλλά πώς φθάνουμε όλο αυτό το μη αριθμήσιμο σύνολο μετρώντας κατ' αυτόν τον τρόπο;

Απάντηση mathtalk-ga: *Το αξιωματικό σχήμα επαγωγής λέει κάτι αρκετά ασθενέστερο από το ότι μπορούμε να «φθάσουμε» κάθε στοιχείο στο μοντέλο ξεκινώντας από το μηδέν και εφαρμόζοντας την συνάρτηση διαδοχής.*

Η "προσβασιμότητα" *δεν* είναι ο μόνος τρόπος με τον οποίο θα μπορούσε να ικανοποιηθεί το αξιωματικό σχήμα επαγωγής. Η επαγωγή ικανοποιείται αν συμβαίνει να ισχύει για όλα τα x κάθε ιδιότητα που μπορεί να εκφρασθεί στην φορμαλιστική γλώσσα, η οποία (α) ικανοποιείται από το μηδέν και (β) ικανοποιείται από τον s(x) όποτε ικανοποιείται από τον τυχόντα x.

Ερώτηση: Πώς, όμως είμαστε βέβαιοι ότι οι εκφράσεις που δημιουργούμε θα ικανοποιούν το αξίωμα της επαγωγής;

Είμαστε βέβαιοι, γιατί τα αξιώματα Peano έχουν ήδη ένα μοντέλο, που θεωρείται συνεπές, αυτό των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, … . Αυτό σημαίνει ότι, αν το μοντέλο **N** είναι συνεπές, τότε και κάθε άλλο μοντέλο των ιδίων αξιωμάτων, θα είναι επίσης συνεπές. Η συνέπεια (η μη ύπαρξη αντιφατικών τύπων στο σύνολο όλων όσοι μπορούν να παραχθούν συντακτικά) είναι ιδιότητα που αφορά στο εκάστοτε φορμαλιστικό σύστημα και τεκμηριώνεται με την ύπαρξη έστω και ενός μοντέλου του.

Κατασκευή συνόλων με αυξανόμενους πληθάριθμους.

Στην παραπάνω κατασκευή μη αριθμήσιμου μοντέλου της Αριθμοθεωρίας χρησιμοποιούμε ένα σύνολο σταθερών ποσοτήτων {c(s),sœ**R**$^{+}$}. Πώς μπορούμε όμως να κατασκευάσουμε πιο πολυπληθή σύνολα μεγεθών που να έχουν ενδιαφέρον για τα μαθηματικά;

Για κάθε σύνολο Α, το σύνολο των χαρακτηριστικών του συναρτήσεων:

{f_a(x), aœA, f_a(a)=1, f_a(x**ʃ**a)=0}

είναι προφανώς ισοπληθές με το Α.

Το σύνολο: B={**"**f: f:A**Ø**{0,1}} των συναρτήσεων πάνω στο Α που παίρνουν μόνο τιμές 0 ή 1 είναι όμως πολυπληθέστερο από το Α. Για παράδειγμα, η συνάρτηση φ(x)=1-f_x(x) ανήκει στο Β αλλά *δεν* μπορεί να ανήκει στο Α.

Αν ήταν φ(x)=f_b(x) τότε θα είχαμε: f_b(x)=1-f_x(x), άρα f_b(b)=1-f_b(b), δηλαδή f_b(b)=1/2, πράγμα άτοπο.

Παρόμοια, το σύνολο Τ των τελεστών, που απεικονίζουν τις συναρτήσεις του Β στο {0,1}, είναι πολυπληθέστερο από το Β, και το σύνολο Φ συναρτήσεων των τελεστών που τους απεικονίζουν στο {0,1} είναι πολυπληθέστερο από το Τ.

Πώς κατασκεύασε τους Υπερακέραιους ο Skolem[19]

Εδώ θα δώσουμε μίαν απλουστευτική παρουσίαση των βασικών ιδεών της αποδείξεως που αναπτύσσει ο Skolem στις εργασίες του 1934 και 1935.

Ο Skolem χρησιμοποιεί ως αφετηρία των συλλογισμών του την ακόλουθη παραλλαγή των κλασσικών αξιωμάτων της Αριθμοθεωρίας, όπου ενσωματώνει και τα αξιώματα που ορίζουν την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, και θεωρεί ότι πρώτος φυσικός αριθμός είναι ο '1' και όχι ο '0' (Εδώ τα απλοποιούμε κάπως παραλείποντας τον φορμαλισμό):[20]

(1) Οι φυσικοί αριθμοί είναι γραμμικά διατεταγμένοι μέσω της σχέσης '<'.

(2) Υπάρχει ένας μικρότερος αριθμός 1.

(3) Για κάθε αριθμό x υπάρχει ένας αμέσως μεγαλύτερος, ο x+1.

(4) Υπάρχει μία πράξη '+', που λέγεται πρόσθεση, όπου ισχύει η αναδρομική σχέση

$$x+(y+1)=(x+y)+1.$$

(5) Υπάρχει μία πράξη που λέγεται πολλαπλασιασμός, [δοσμένη] με την [αναδρομική] σχέση

$$x(y+1)=xy+x.$$

(6) Αρχή της επαγωγής: Αν μία πρόταση, U(x), που αναφέρεται σε φυσικούς αριθμούς x, ισχύει για x = 1 και από την ισχύ της για x=k έπεται ότι ισχύει και για x=k+1, τότε έπεται ότι η πρόταση ισχύει για όλους τους ΦΑ x.

Ο Skolem παρατηρεί τώρα ότι επανειλημμένες προσθέσεις και πολλαπλασιασμοί φυσικών αριθμών (ΦΑ) μας δίνουν μόνο πολυώνυμα με συντελεστές φυσικούς αριθμούς, δηλαδή μη αρνητικούς ακέραιους. Για παράδειγμα, $(\alpha+\beta)*(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$. Αυτή είναι μία πολυωνυμική παράσταση ως προς τις μεταβλητές α και β, όπως μαθαίνουμε στο Γυμνάσιο.

Στην συνέχεια ο Skolem παρατηρεί ότι σχέσεις με μορφή ανισοτήτων, π. χ. α>β, με α,β από το σύνολο **N** των ΦΑ μπορούν να μεταβληθούν σε ισότητες αν χρησιμοποιήσουμε μια βοηθητική παράμετρο. Η σχέση α>β σημαίνει, προφανώς ότι υπάρχει ένας ΦΑ, γ, τέτοιος ώστε α=β+γ. Έτσι, αρκεί να ασχοληθούμε με τις ισότητες και μάλιστα ισότητες πολυωνύμων, που ισχύουν για το σύστημα αξιωμάτων (1) ως (7).

Αν, τώρα, έχουμε μίαν πρόταση του είδους «Για όλους τους ΦΑ α, β, γ, ισχύει η σχέση F(α,β,γ) = G(α,β,γ)» ο Skolem παρατηρεί ότι η σχέση αυτή θα ισχύει ειδικότερα και αν στην θέση των τυχαίων ΦΑ α,β,γ βάλουμε πολυώνυμα p(x), q(x), r(x) με φυσικούς αριθμούς ως συντελεστές, όπου το x παίρνει ως τιμές μόνο φυσικούς αριθμούς. Τέτοιου είδους πολυώνυμα έχουν ως τιμές μόνο φυσικούς αριθμούς και γι' αυτό θα τα ονομάσουμε «*πολυώνυμα φυσικών αριθμών*». Προφανώς θα ισχύει για όλα τα x η σχέση:

---

[19] Βλέπε: Ομιλίες /ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ / «Τι είναι ΦΑ», Παράρτημα 1

[20] Ακόμα και έτσι, βέβαια, η παραδοσιακή Αριθμητική είναι ελλιπής, αφού λείπει η αφαίρεση και η διαίρεση. Όμως αυτές οι πράξεις είναι απλά αντίθετες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και δεν προσδιορίζουν καλύτερα το τι είναι «φυσικός αριθμός», αφού μάλιστα στα πλαίσια των ΦΑ δεν μπορούν να εκτελεσθούν όλες οι αφαιρέσεις και διαιρέσεις. Οι πράξεις 2-3 και 2:3 <u>δεν</u> έχουν νόημα. Έτσι, ο Skolem αρκέσθηκε στο να εξετάσει μόνο αριθμητικές σχέσεις που ανάγονται σε προσθέσεις και πολλαπλασιασμούς.

F(p(x),q(x),r(x))= G(p(x),q(x),r(x)), αφού τα πολυώνυμα p,q,r έχουν μόνο ΦΑ ως τιμές και για όλους τους ΦΑ υποθέσαμε ότι ισχύει F=G.

Παρομοίως, μία πρόταση του είδους «Υπάρχει ΦΑ, α, τέτοιος ώστε για όλους τους ΦΑ, β, να ισχύει Μ(α,β)=Ν(α,β)» αντιστοιχεί σε μίαν πρόταση «Υπάρχει ΦΑ, α, τέτοιος ώστε για κάθε πολυώνυμο φυσικών αριθμών p(x) να ισχύει Μ(α,p(x))=Ν(α,p(x))».

Έτσι, ο Skolem διαπιστώνει ότι όλες οι γενικής ισχύος προτάσεις που μπορούν να παραχθούν από το σύστημα αξιωμάτων ισχύουν και αν στην θέση των μεταβλητών βάλουμε αντί για ΦΑ πολυώνυμα των ΦΑ.

Τώρα ο Skolem κάνει μίαν ευφυή κατασκευή. Ενσωματώνει στους ΦΑ και όλα τα πολυώνυμα ΦΑ επεκτείνοντας έτσι το σύνολο **N** σε ένα σύνολο $\mathbf{N}^*$ πολυωνύμων των ΦΑ. Για να το κάνει αυτό πρέπει όμως να βρει μία συγκεκριμένη διάταξη για τα πολυώνυμα, όπως οι ΦΑ έχουν την διάταξη: 1<2<3<4<5<… . Μία τέτοια διάταξη μπορούμε όμως να δώσουμε και στα πολυώνυμα ΦΑ, p(x). Κατ' αρχή έρχονται τα πολυώνυμα μηδενικού βαθμού, $p_0(x)$=c=σταθερά, βαλμένα με την σειρά μεγέθους των σταθερών αυτών τιμών. Ουσιαστικά έχουμε, δηλαδή εδώ και πάλι τους ΦΑ με την γνωστή τους διάταξη. Έπειτα βάζουμε όλα τα πολυώνυμα πρώτου βαθμού $p_1(x,a,b)=ax+b$, βαλμένα πρώτον κατά σειρά μεγέθους των συντελεστών a, και δεύτερον, στην περίπτωση ίδιων συντελεστών a, κατά σειράν μεγέθους των συντελεστών b. Δηλαδή γράφουμε:

$$x<x+1<x+2<\ldots<2x<2x+1<2x+2<\ldots<3x<3x+1<3x+2<\ldots<4x<\ldots.$$

Αυτή η διάταξη δεν είναι και τόσο αυθαίρετη. Για μεγάλες τιμές του x είναι πράγματι και οι τιμές, για παράδειγμα, του 3x πάντα μεγαλύτερες από αυτές έστω του 2x+10 ή ακόμα και του 2x+1000.

Στην συνέχεια βάζουμε τα πολυώνυμα δευτέρου βαθμού $p_2(x,a,b,c)=ax^2+bx+c$, βαλμένα πάλι με την σειρά μεγέθους κατ' αρχήν των συντελεστών, a, του x^2. Για ίδιες τιμές του a διατάσσουμε κατά το μέγεθος των συντελεστών b, και για ίδιες τιμές των a και b διατάσσουμε κατά το μέγεθος των σταθερών όρων c. Δηλαδή γράφουμε:

$x^2< x^2+1< x^2+2<\ldots< x^2+x< x^2+x+1< x^2+x+2<\ldots< x^2+2x< x^2+2x+1<\ldots< x^2+3x<\ldots< 2x^2< 2x^2+1< 2x^2+2<\ldots$

Αυτή η διάταξη έχει πάλι το χαρακτηριστικό ότι ισχύει πράγματι για αρκετά μεγάλες τιμές του x. Για παράδειγμα, ισχύει πράγματι $x^2+10x+100<2x^2$ όταν το x υπερβαίνει την τιμή 17 ή ισούται με αυτήν. Γενικά, για δύο πολυώνυμα ΦΑ, p(x) και q(x) ισχύει η διάταξη p(x)<q(x) αν η σχέση αυτή αληθεύει για άπειρες τιμές του x.

Έτσι προκύπτει μία διάταξη όλων των πολυωνύμων ΦΑ που περιλαμβάνει μάλιστα στην αρχή της και τους ίδιους τους ΦΑ:

$$1<2<\ldots<x<x+1<x+3<\ldots<2x<2x+1<\ldots<x^2<x^2+1<\ldots<2x^2<2x^2+1<\ldots<x^3<\ldots$$

Για το διατεταγμένο αυτό σύνολο, **N'**, που είναι πολύ ευρύτερο από το σύνολο **N** των ΦΑ, ισχύουν όμως όλα τα αξιώματα που μας έχουν δοθεί[21]. Η

[21] Ο Skolem επεκτείνει το σύνολο **N'** σε ένα σύνολο, $\mathbf{N}^*$, συμπεριλαμβάνοντας και άλλες αριθμητικές συναρτήσεις εκτός από πολυώνυμα. Έτσι κατορθώνει το να δίνει η αντικατάσταση στοιχείων του $\mathbf{N}^*$ στις προτάσεις που ισχύουν για ΦΑ πάλι στοιχεία του $\mathbf{N}^*$, *ώστε οι σχέσεις F=G και M=N να έχουν πάντα νόημα, όχι μόνο για ΦΑ, αλλά και για το νέο επεκτεταμένο σύστημα αριθμών.*

κατάσταση αυτή δεν αλλάζει μάλιστα ακόμα και αν προσθέσουμε σε αυτά και άλλα αξιώματα, γιατί κάθε γενική πρόταση που ισχύει για το διατεταγμένο σύνολο **N** των φυσικών αριθμών μεταφέρεται άμεσα και σε μίαν αντίστοιχη πρόταση για το διατεταγμένο σύνολο **N'** της επέκτασης του **N** σε πολυώνυμα (και άλλες συναρτήσεις) φυσικών αριθμών.

<u>Παρατήρηση</u>: Ίσως θα πείτε ότι η παραπάνω διάταξη **N'** δεν είναι απόλυτα σωστή, γιατί δεν είναι πάντα, για παράδειγμα, $x^2+10x+100<2x^2$, αλλά αυτό ισχύει μόνο για 17**§**x. Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ότι το σύμβολο '<' δεν έχει εδώ το συμβατικό του νόημα, αλλά ότι επωφελούμαστε από την ελευθερία ερμηνείας των συμβόλων που μας παρέχει ο φορμαλισμός για να του δώσουμε ένα νόημα δικής μας επιλογής. Όπως είπαμε, θεωρούμε ότι η σχέση 'f(x)<g(x)' σημαίνει μόνο ότι για άπειρο πλήθος φυσικών αριθμών x η τιμή f(x) είναι μικρότερη από την g(x). Για τις συναρτήσεις φυσικών αριθμών που εξετάζουμε εδώ αυτό συμβαίνει πάντα για αρκετά μεγάλες τιμές του x. δηλαδή, 'f(x)<g(x)' σημαίνει ότι η τιμή f(x) είναι μικρότερη από την g(x) «σχεδόν για όλα τα x», όπου «σχεδόν για όλα» σημαίνει «με εξαίρεση πεπερασμένο πλήθος». Αυτή είναι η ερμηνεία που επιλέγουμε να δώσουμε στο σύμβολο '<'.

Συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι ο Skolem διαπιστώνει ότι όχι μόνο η ακολουθία **N** των φυσικών αριθμών, αλλά και η επέκτασή της σε μία ακολουθία όπως η **N'**:

$1<2<\ldots<x<x+1<\ldots<2x<2x+1<\ldots<x^2<x^2+1<\ldots<2x^2<2x^2+1<\ldots<x^3<\ldots$

ικανοποιεί τα ίδια αξιώματα, αν ερμηνεύσουμε το σύμβολο '<' που ορίζει και τις σχέσεις διαδοχής ως «σχεδόν πάντα μικρότερο». Επίσης διαπιστώνει ότι κάθε σχέση που ισχύει για όλους τους ΦΑ, δηλαδή τους όρους της ακολουθίας **N**, ισχύει υπό την παραπάνω ερμηνεία του συμβόλου '<' και για όλους τους όρους της $\mathbf{N}^*$, που είναι επέκταση της παραπάνω ακολουθίας **N'**. Το αντίθετο δεν ισχύει, βέβαια. Κάθε σχέση που ισχύει για την $\mathbf{N}^*$ δεν ισχύει οπωσδήποτε και για την **N**. Ο Skolem δίνει ένα παράδειγμα που τεκμηριώνει αυτό στην εργασία του 1935.

Αν δεχθούμε την άποψη των φορμαλιστών ότι δεν έχει σημασία πώς ερμηνεύουμε τον φορμαλισμό, υπάρχουν έτσι «Μη Συμβατικές Αριθμητικές» παράλληλα με την συμβατική[22]. Αυτό όμως δείχνει ότι ο Λογικός Ατομισμός δεν μπορεί να ευσταθεί αφού κανένα σύστημα αξιωμάτων, κανένα σύνολο θεμελιωδών ιδιοτήτων, δεν μπορεί να προσδιορίσει μονοσήμαντα τι είναι φυσικός αριθμός.

[22] Στην πραγματικότητα ο Skolem μπορεί να κατασκευάσει, όχι μόνο ένα, αλλά <u>άπειρα</u> νέα αριθμητικά συστήματα, γιατί εισάγει τον συμβολισμό f<g για οποιεσδήποτε συναρτήσεις ΦΑ αν είναι f(x)<g(x) για άπειρο πλήθος ΦΑ x. Αντί για πολυώνυμα ΦΑ μπορεί να θεωρήσει «μίγματά» τους. Για παράδειγμα, f(2k)=2k, $f(2k+1)=(2k+1)^2$, $g(2k)=(2k)^2$, g(2k+1)=2k+1. Εδώ ισχύει f(x)<g(x) για άπειρους ΦΑ x, αλλά και f(x)>g(x) για άπειρους ΦΑ x. Έτσι μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλών ειδών διατάξεις όπως είναι η **N'** αν αντί για πολυώνυμα ΦΑ πάρουμε «μίγματά» τους. Τα μοντέλα όμως αυτά είναι όλα αριθμήσιμα. Σύνολα όπως το **N'** μπορούν να αριθμηθούν (1) με βάση το πλήθος των χαρακτήρων κάθε όρου και (2) αλφαβητικά μεταξύ όρων με το ίδιο πλήθος χαρακτήρων.

Σημειώσεις

1. Γιατί δεν μπορούν να περιγραφούν όλες οι ιδιότητες των ΦΑ με πεπερασμένο πλήθος αξιωμάτων;

Εξήγηση: Όλοι οι συνδυασμοί n αντικειμένων είναι 2^n-1>>n, γιατί ισχύει: $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}...+\binom{n}{n}=(1+1)^n-1=2^n-1$

Οι συνδυασμοί αυτοί μας δείχνουν πόσα είδη σχέσεων μπορούν να υπάρξουν μεταξύ n μεγεθών (οι σχέσεις τους ανά ένα, ανά δύο, ανά τρία, …ανά n). Αυτές οι σχέσεις αντιστοιχούν στα διάφορα είδη ιδιοτήτων που έχουν οι ΦΑ. Κάθε ιδιότητα, χαρακτηρίζεται από το υποσύνολο των ΦΑ που έχουν αυτήν την ιδιότητα. Έτσι, αν έχουμε αριθμησίμως άπειρα (¶) μεγέθη, αυτά θα έχουν 2¶ σχέσεις μεταξύ τους, ένα σύνολο ιδιοτήτων με πλήθος ίδιο με εκείνο των πραγματικών αριθμών, που είναι πολύ μεγαλύτερο από το πλήθος των ΦΑ. Ένα τέτοιο πλήθος ιδιοτήτων δεν μπορεί να περιγραφεί ούτε λεκτικά ή συμβολικά, γιατί το σύνολο των γραπτών εκφράσεων είναι αριθμήσιμο όπως το σύνολο των ΦΑ.

{2}. Επειδή τα αξιώματα της Αριθμοθεωρίας παράγουν τους ΦΑ έναν προς έναν και όχι όλους μαζί σαν σύνολο, γι' αυτό δεν μπορούν να διακρίνουν σε τι λογής σύνολα εφαρμόζονται. Είναι τυφλά ως προς αυτό. Έτσι, μπορούν να εφαρμοσθούν σε κάθε λογής απειροσύνολα! Είναι, δηλαδή, σαν τις μυλόπετρες ενός μύλου, που αλέθουν οτιδήποτε ρίξουμε στην χοάνη τροφοδοσίας είτε σιτάρι ή κριθάρι, είτε φακές ή φασόλια. Αυτό είναι η ουσία της θεωρίας Löwenheim-Skolem.

Αντίρρηση: Όμως και η Συνολοθεωρία είναι μη πλήρης παρά το ότι ασχολείται με σύνολα. Επομένως, η διακριτότητα των αντικειμένων του αξιωματικού συστήματος *δεν* μπορεί να είναι η αιτία για την μη πληρότητά του.

Σχόλιο-Απάντηση: Η Συνολοθεωρία φαίνεται να πάσχει από την αντίθετη πάθηση. Δεν μπορεί να διακρίνει σαφώς μεμονωμένα στοιχεία. Επειδή μελετά σύνολα, γι' αυτό δεν ξέρει πώς να επιλέξει ένα στοιχείο από κάθε σύνολο. Έτσι, η πρόταση που λέει ότι αυτό είναι δυνατό, παραμένει αξίωμα, το *αξίωμα επιλογής* του Zermelo και δεν είναι θεώρημα, *ούτε παρέχει έναν αλγόριθμο επιλογής*. Παρομοίως, η ύπαρξη συνόλων με πληθάριθμους ¡1 Ó¡2 Ó¡3 Ó… ευρισκόμενους μεταξύ αυτού των ακεραίων, ¡0, και αυτού των πραγματικών, æ= $2^{\aleph_0}$, παραμένει θέμα προτίμησης και δεν μπορεί να απαντηθεί τελεσίδικα (Για τον συμβολισμό βλέπε Crossley: What is mathematical logic? σελ. 69-70).

3. Τα Ευκλείδια μοντέλα Μη Ευκλείδιων γεωμετριών είναι σύνολα Ευκλείδιων καμπύλων και επιφανειών, που αν τις μετονομάσουμε σε «ευθείες» και «επίπεδα» εμφανίζουν με την νέα αυτή ονομασία μη Ευκλείδιες ιδιότητες.

4. Time is, primarily, the ordering of our actions and experiences in our memory. This concept is then extended to include other people's experiences.

5. Kant has discovered the important fact that our experiences are formed by the way our mind is built. For instance, there is certainly no private language, as Wittgenstein says. But no language can exist without a human predisposition for it. Meanings preexist before we form concepts with them.

6. The unreasonableness of Cantor's Continuum hypothesis: When n is finite, between n and 2^n-1 there are 2^n-n different numbers. Why should this not be true also for n=¶? There could be an infinity of cardinal numbers between **N**, the cardinality of the integers, and **C**=$2^{\mathbf{N}}$, the cardinality of the real numbers.

7. Όπως φαίνεται από την διπλωματική εργασία *«Το θεώρημα του Gödel, Απόδειξη, συνέπειες και φιλοσοφικές προεκτάσεις»* του *Δημήτρη Τζανή,* η αντιπαράθεση μεταξύ των περισσοτέρων φιλοσόφων σχετικά με το αν ο ανθρώπινος νους είναι μηχανή ή ξεπερνά τις δυνατότητες των μηχανών έχει δύο ελλείψεις:

(α) Θεωρεί ουσιαστικά ότι οι μόνες μηχανές που θα μπορούσαν να προσεγγίσουν την ανθρώπινη σκέψη είναι μηχανές διακριτών καταστάσεων (Turing machines) με διακριτά σήματα εισόδου-εξόδου και διακριτές εσωτερικές καταστάσεις. Παραβλέπει εντελώς την δυνατότητα ο νους να μοιάζει με μηχανή συνεχών καταστάσεων, δηλαδή, π.χ. αναλογικά κυκλώματα ανάδρασης με συνεχείς συναρτήσεις εισόδου εξόδου. Οι μηχανές συνεχών καταστάσεων έχουν όμως σημαντικά ευρύτερες δυνατότητες αφού το πληροφοριακό περιεχόμενο συνεχών σημάτων γίνεται όλο και μεγαλύτερο με λεπτότερη διακριτοποίησή τους. το θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon συνοδεύεται πάντα από ένα σφάλμα διακριτοποίησης, που οφείλεται τόσο στον περιορισμό του εύρους του φάσματος συχνοτήτων, όσο και στο ότι τα λαμβανόμενα δείγματα πρέπει να διακριτοποιηθούν για να υποστούν ψηφιακή επεξεργασία.

(β) Παραβλέπει εντελώς τις φιλοσοφικές συνέπειες των θεωρημάτων των Löwenheim και Skolem. Η απροσδιοριστία των μεγεθών που επεξεργάζεται κάθε φορμαλιστικό αξιωματικό σύστημα φαίνεται να μην απασχολεί αυτούς τους φιλοσόφους!

Οι λόγοι για μίαν τέτοια στάση είναι, βέβαια εμφανείς:

(α) Φαίνεται αμφίβολο να έχουμε από ένα σύστημα συνεχών καταστάσεων προτάσεις ανάλογες με τα αποτελέσματα γλωσσικής επεξεργασίας. Για παράδειγμα, σε έναν αναλογικό υπολογιστή τα κυκλώματα αντιστοιχούν απλά στην διαφορική εξίσωση που μας ενδιαφέρει και η λύση προκύπτει χωρίς εφαρμογή αλγορίθμων ως απόκριση του κυκλώματος σε κατάλληλη συνάρτηση εισόδου.

Εντούτοις, αυτό είναι ακριβώς εκείνο που συμβαίνει στον αναπτυσσόμενο ανθρώπινο νου. Τα κιναισθητικά κυκλώματα ανάδρασης με το περιβάλλον, που διαμορφώνει σταδιακά, αρχίζουν μετά τον 18^o μήνα να αποκτούν ονόματα, που επιτρέπουν την οργάνωσή τους σε πιο σύνθετα σύνολα. Τα ονόματα των σύνθετων αυτών κιναισθητικών αναπαραστάσεων αποκτούν σταδιακά ένα καθιερωμένο νόημα. Η ανάγκη τυποποίησης των νοημάτων των λέξεων οφείλεται στο ότι μόνο έτσι θα μπορέσουμε να επικοινωνήσουμε με το κοινωνικό περιβάλλον. Έτσι, σε διάστημα άλλων 8 ως 10 ετών αφομοιώνουμε το συμβατικό νόημα των λεκτικών εκφράσεων (εννοιών) της καθομιλουμένης.

(β) Δεν μπορούν να εντάξουν στα καθιερωμένα μαθηματικά μεγέθη μη αριθμήσιμα μοντέλα της Αριθμοθεωρίας. Ως φιλόσοφοι αδυνατούν να κατανοήσουν κατασκευές που είναι δυσνόητες ακόμα και για μαθηματικούς. Έτσι προτιμούν να παραβλέψουν εντελώς τα θεωρήματα των Löwenheim και Skolem και να προσποιηθούν ότι αυτά τα αποτελέσματα δεν υπάρχουν.

Οι μόνοι που άμεσα αναφέρονται στους Löwenheim και Skolem είναι ο λογικολόγος και φιλόσοφος Willard Van Orman Quine καθώς και οι George Lakoff (γλωσσολόγος) και Mark Johnson (φιλόσοφος) που ανέπτυξαν μία δική τους θεωρία νοήματος (Για τους Löwenheim - Skolem βλέπε «Philosophy in the Flesh», σελ.453-457).

Για τις θεωρίες τους βλέπε:

Μη πληρότητα Απροσδιοριστία και Φιλοσοφία.doc