Hopf και Frobenius άλγεβρες: γενικεύσεις και το θεώρημα Larson-Sweedler

Χριστίνα Βασιλακοπούλου

Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

30 Σεπτεμβρίου 2021

1. Hopf και Frobenius άλγεβρες
2. Hopf και Frobenius (εμπλουτισμένες) κατηγορίες
3. Το Θεώρημα Larson-Sweedler

Μία Hopf k-άλγεβρα είναι Frobenius
αν και μόνο αν είναι πεπερασμένης διάστασης.

$\star$ Πώς μπορούμε να γενικεύσουμε το αποτέλεσμα από ένα σώμα k σε αντιμεταθετικούς δακτυλίους ή και γενικότερες δομές;

Διάλγεβρες (Bialgebras)

Έστω k σώμα.

▶ Μια k-άλγεβρα (M, μ, η) είναι ένα μονοειδές (monoid) στη συμμετρική μονοειδή κατηγορία $(\mathbf{Vect}_k, \otimes, k)$.

▶ Μια k-συνάλγεβρα (C, δ, ϵ) είναι ένα συμμονοειδές (comonoid) στη $(\mathbf{Vect}_k, \otimes, k)$.

▶ Μια k-διάλγεβρα $(A, \mu, \eta, \delta, \epsilon)$ είναι ένα διμονοειδές (bimonoid) στη $(\mathbf{Vect}_k, \otimes, k)$:

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[r, "\delta\otimes\delta"] \arrow[dd, "\mu"'] & A\otimes A\otimes A\otimes A \arrow[d, "1\otimes\sigma\otimes 1"] \\
 & A\otimes A\otimes A\otimes A \arrow[d, "\mu\otimes\mu"] \\
A \arrow[r, "\delta"] & A\otimes A
\end{tikzcd}
$$

$$\sum_{(gh)} (gh)_{(1)} \otimes (gh)_{(2)} = \sum_{(g),(h)} g_{(1)} h_{(1)} \otimes g_{(2)} h_{(2)}$$

$+3$ επιπλέον συνθήκες.

Hopf άλγεβρες

▶Μια k-διάλγεβρα A ονομάζεται Hopf εάν υπάρχει $s\colon A \to A$, ο *αντίποδας* (antipode) , τέτοιος ώστε

$$\begin{tikzcd}
 & A\otimes A \arrow[rr, "1\otimes s"] & & A\otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\
A \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, "\epsilon"] \arrow[dr, "\delta"'] & & k \arrow[rr, "\eta"] & & A \\
 & A\otimes A \arrow[rr, "s\otimes 1"'] & & A\otimes A \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\sum_{(g)} g_{(1)}\otimes s(g_{(2)}) = \varepsilon(g)1 = \sum_{(g)} s(g_{(1)})\otimes g_{(2)}$$

Είναι ένα Hopf μονοειδές της $(\mathbf{Vect}_k, \otimes, k)$.

Παραδείγματα

- Ομάδα-άλγεβρα $k[G] = \{\sum_{g\in G} r_g g\}$ μιας ομάδας G, $\delta(x)=x\otimes x$.
- Καθολική περιβάλλουσα άλγεβρα $U(L)$ μιας Lie αλγεβρας L, $\delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$.
- Άλγεβρα συντ/νων $k[x_1, ..., x_n]/I(G)$ μιας αλγεβρικής ομάδας G.

Frobenius άλγεβρες

▶ Μια k-άλγεβρα και k-συνάλγεβρα $(A, \mu, \eta, \delta, \epsilon)$ είναι Frobenius εάν

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "\delta\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\delta"'] \arrow[dr, "\mu"] & & A \otimes A \otimes A \arrow[d, "1\otimes\mu"] \\ A \otimes A \otimes A \arrow[rr, "\mu\otimes 1"'] & A \arrow[r, "\delta"] & A \otimes A \end{tikzcd}$$

$$\sum_{(gh)} (gh)_{(1)} \otimes (gh)_{(2)} = \sum_{(g)} g_{(1)} \otimes g_{(2)} h = \sum_{(h)} gh_{(1)} \otimes h_{(2)}$$

Είναι ένα Frobenius μονοειδές της $(\mathbf{Vect}_k, \otimes, k)$.

⋆ Κάθε Frobenius k-άλγεβρα είναι πεπερασμένης διάστασης.

Παραδείγματα

- Άλγεβρα πινάκων $M_n(k)$, $\epsilon(X) = \mathrm{tr}(X)$.
- $k[G]$ για πεπερασμένη ομάδα, $\delta(x) = \sum_h xh^{-1} \otimes h$.
- Frobenius άλγεβρες αντιστοιχούν σε διδιάστατες TQFT.

Hopf κατηγορίες

▶Μοτίβο γενίκευσης: μια ($\mathcal{V}$-) κατηγορία με ένα αντικείμενο είναι ένα μονοειδές (στη $\mathcal{V}$)

$\star$ Αν $(\mathcal{V}, \otimes, I, \sigma)$ συμμετρική μονοειδής, **Comon**$(\mathcal{V})$ είναι μονοειδής :

$$C \otimes D \xrightarrow{\delta\otimes\delta} C \otimes C \otimes D \otimes D \xrightarrow{1\otimes\sigma\otimes 1} C \otimes D \otimes C \otimes D$$

Ορισμός

Μια Hopf $\mathcal{V}$-κατηγορία $(\mathcal{H}, m, j, d, \epsilon, s)$ είναι

- **Comon**$(\mathcal{V})$-εμπλουτισμένη (κάθε $H_{x,y}$ είναι συνάλγεβρα) , και
- εφοδιασμένη με συλλογή μορφισμών $s_{x,y} : H_{x,y} \to H_{y,x}$(συνθήκες).

▶Μια **Comon**$(\mathcal{V})$-κατηγορία με ένα αντικείμενο είναι μια διάλγεβρα.

▶Μια Hopf $\mathcal{V}$-κατηγορία με ένα αντικείμενο είναι μια Hopf άλγεβρα.

Αξιώματα

- $m_{xyz}\colon H_{x,y} \otimes H_{y,z} \to H_{x,z}$, $\;j_x\colon I \to H_{x,x}$ γινόμενο ` ολικά'
- $d_{ab}\colon H_{a,b} \to H_{a,b} \otimes H_{a,b}$, $\;\epsilon_{ab}\colon H_{a,b} \to I$ συνγινόμενο `τοπικά'

$$
\begin{tikzcd}
H_{x,y} \otimes H_{y,z} \arrow[r, "d_{xy}\otimes d_{yz}"] \arrow[dd, "m_{xyz}"'] & H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z} \arrow[d, "1\otimes\sigma\otimes 1"] \\
 & H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \arrow[d, "m_{xyz}\otimes m_{xyz}"] \\
H_{x,z} \arrow[r, "d_{xz}"'] & H_{x,z} \otimes H_{x,z}
\end{tikzcd}
$$

- $s_{xy}\colon H_{x,y} \to H_{y,x}$ αντίποδας ` ολικά'

$$
\begin{tikzcd}
 & H_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[r, "1\otimes s_{xy}"] & H_{x,y} \otimes H_{y,x} \arrow[dr, "m_{xyx}"] & \\
H_{x,y} \arrow[ur, "d_{xy}"] \arrow[rr, "\epsilon_{xy}"] & & I \arrow[r, "j_x"] & H_{x,x}
\end{tikzcd}
$$

Frobenius κατηγορίες

⋆ Μια $\mathcal{V}$-οπκατηγορία (opcategory) είναι $\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$-εμπλουτισμένη.
$c_{xyz} : A_{x,z} \to A_{x,y} \otimes A_{y,z}, \quad \varepsilon_x : A_{x,x} \to I$ +δυϊκά αξιώματα

Ορισμός

Μια $\mathcal{V}$-Frobenius κατηγορία $(\mathcal{A}, m, j, c, \varepsilon)$ είναι

- $\mathcal{V}$-εμπλουτισμένη και $\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$-εμπλουτισμένη , και
- ικανοποιεί 'παραμετρικοποιημένες' Frobenius ιδιότητες

$$\begin{tikzcd}
A_{x,y} \otimes A_{y,z} \arrow[rr, "c_{xwy} \otimes 1"] \arrow[dr, "m_{xyz}"] \arrow[dd, "1 \otimes c_{ywz}"'] & & A_{x,w} \otimes A_{w,y} \otimes A_{y,z} \arrow[dd, "1 \otimes m_{wyz}"] \\
& A_{x,z} \arrow[dr, "c_{xwz}"] & \\
A_{x,y} \otimes A_{y,w} \otimes A_{w,z} \arrow[rr, "m_{xyw} \otimes 1"'] & & A_{x,w} \otimes A_{w,z}
\end{tikzcd}$$

▶ Frobenius $\mathcal{V}$-κατηγορία με ένα αντικείμενο είναι Frobenius άλγεβρα.

Παραδείγματα

▶Για $\mathcal{V} = \mathrm{Set}$, μια Hopf κατηγορία είναι ένα ομαδοειδές (groupoid)

▶Κάθε ομαδοειδές G επάγει μια R-γραμμική Hopf κατηγορία ($\mathcal{V} = \mathrm{Mod}_R$) με $H_{x,y}$ το ελεύθερο R-πρότυπο επί του συνόλου των μορφισμών του G από το x στο y

▶Η κατηγορία Mat με αντικείμενα $\mathbb{N}$ και $\mathrm{Mat}_{m,n}$ το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία στο R είναι μια R-γραμμική Frobenius κατηγορία:

$$\mathrm{Mat}_{m,n} \otimes \mathrm{Mat}_{n,k} \to \mathrm{Mat}_{m,k} \qquad \text{συνήθης πολλαπλασιασμός πινάκων}$$

$$\mathrm{Mat}_{m,n} \to \mathrm{Mat}_{m,p} \otimes \mathrm{Mat}_{p,n} : e_{i,j}^{m,n} \mapsto \sum_{t=1}^{p} e_{i,t}^{m,p} \otimes e_{t,j}^{p,n}$$

όπου $e_{i,j}^{m,n}$ πίνακες με 1 στην (i,j)-θέση, 0 αλλού

Larson-Sweedler για Hopf και Frobenius κατηγορίες

R,'πεπερασμένης διάστασης' πρότυπο A γίνεται 'πεπερασμένα

▶Μια $\mathcal{V}$-κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι τοπικά αυστηρή (locally rigid) όταν κάθε $A_{x,y}$ έχει δυϊκό στη $\mathcal{V}$. Π.χ. κάθε $\mathbf{Vect}_k^f$-κατηγορία.

▶Για μια Hopf $\mathcal{V}$-κατηγορία $(\mathcal{H}, m, j, d, \epsilon, s)$, το αριστερό ολοκλήρωμα (left integral) για κάθε $H_{x,y} \in \mathcal{V}$ είναι

$$\int_{H,x}^{l} := \{\overset{yx}{t} : I \to H_{y,x} | h\, \overset{yx}{t} = \epsilon(h) \cdot \overset{zx}{t}, \forall h \in H_{z,y}\}$$

Έστω $\mathcal{H}$ μια Hopf $\mathcal{V}$-κατηγορία. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- $\mathcal{H}$ είναι Frobenius $\mathcal{V}$-κατηγορία
- $\mathcal{H}$ είναι τοπικά αυστηρή (locally rigid) και $\int_{H,x}^{l} \cong I$.

$\star$ Στην ειδική περίπτωση του ενός αντικειμένου, k-άλγεβρες, R-άλγεβρες, οποιαδήποτε Hopf και Frobenius μονοειδή...
$\star$ Στη γενική περίπτωση, R-γραμμικές κατηγορίες, ασθενείς και Turaev Hopf άλγεβρες...

Μια ματιά στην απόδειξη

'$\Rightarrow$' από ύπαρξη Frobenius *συστήματος* $(I \xrightarrow{\overset{xy}{e}} A_{xy} \otimes A_{yx}, A_{xx} \xrightarrow{v_x} I)$ με e Casimir $\boxed{ae^1_{zy} \otimes e^2_{yz} = e^1_{xy} \otimes e^2_{yx} a}$ και $\boxed{v_x(e^1_{xx}) \cdot e^2_{xx} = e^1_{xx} \cdot v_x(e^2_{xx}) = 1_{xx}}$,
A τοπικά αυστηρή όπου $A^*_{xy} \cong A_{yx}$ με

$$\overset{xy}{\mathrm{ev}}\colon A_{yx} \otimes A_{xy} \xrightarrow{m} A_{yy} \xrightarrow{v_y} I$$

$$\overset{xy}{\mathrm{coev}}\colon I \xrightarrow{\overset{xy}{e}} A_{xy} \otimes A_{yx}$$

Επιπλέον, e δίνει $\{\overset{xy}{t_e}\colon I \xrightarrow{\overset{xy}{e}} A_{xy} \otimes A_{yx} \xrightarrow{1 \otimes \epsilon_{yx}} A_{xy}\}$ με $a \overset{xy}{t} = \epsilon_{zx}(a) \cdot \overset{xy}{t}$ που αντιστοιχούν αμφιμονοσήματα σε $u_x\colon I \to \int^I_{A,x}$.

Αποδεικνύεται πως u_x είναι ισομορφισμοί, με αντίστροφο

$$\int^I_{A,x} \to A_{xx} \xrightarrow{v_x} I$$

'$\Leftarrow$' χρησιμοποιεί θεμελιώδες θεώρημα Hopf προτύπων...

Hopf και Frobenius κατηγορίες ως ανώτερα μονοειδή

⋆ Οι ίδιες οι γενικευμένες έννοιες αποτελούν παραδείγματα ‘ψευδομονοειδών’ σε κατάλληλη μονοειδή δικατηγορία...

Span$|\mathcal{V}$ για μονοειδή κατηγορία $\mathcal{V}$

- αντικείμενα $\{M_x\}_{x\in X} \in \mathcal{V}$
- μορφισμοί $\{M_{fs} \xrightarrow{\alpha_s} N_{gs}\}_{s\in S}$ για καμάρα (span) $X \xleftarrow{f} S \xrightarrow{g} Y$
- 2-μορφισμοί $\alpha \Rightarrow \beta$ είναι $\begin{tikzcd} & S \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "u"] & \\ X & & Y \\ & T \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ τέτοιοι ώστε $\alpha_s = \beta_{us}$
- γινόμενο $\{(M\otimes N)_{(x,y)}\} = \{M_x \otimes N_y\}_{x\in X, y\in Y}$

▶Frobenius κατηγορία = Frobenius ψευδομονοειδές στη Span$|\mathcal{V}$

▶Hopf κατηγορία = δυϊκά χαλαρό (oplax) Hopf μονοειδές στη Span$|\mathcal{V}$

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] \arrow[d] & {} \arrow[d] \\ {} \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

- *Buckley, Fieremans, Vasilakopoulou and Vercruysse*, "A Larson-Sweedler Theorem for Hopf V-categories", Advances in Mathematics, 2021
- *Buckley, Fieremans, Vasilakopoulou and Vercruysse*, "Oplax Hopf Algebras", Higher Structures, 2021